SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 31

JUNIO 1999

SUMA 31
junio 1999

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.200 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Luis Balbuena es el autor de las fotografís de *alcantarillas* que ilustran este número.

SUMA 31
junio 1999

Faltan 180 días, más o menos

EDITORIAL

EL AÑO 2000 ha sido declarado por la UNESCO Año Mundial de las Matemáticas lo que, sin duda, deberá dar un gran protagonismo público a nuestra materia. Nuestro primer deseo es que dicho protagonismo deje una huella perdurable en la sociedad. Hay que procurar que nuestros conciudadanos adquieran una mayor conciencia del papel relevante de las matemáticas en sus propias vidas, así como en el desarrollo científico, tecnológico y humano de la sociedad.

Para dar impulso a la celebración del Año Mundial de las Matemáticas y coordinar las actividades se ha constituido un amplio comité, el CEAMM2000, de cuya ejecutiva forma parte nuestra federación. Desde aquí queremos llamar a la colaboración que la amplia propuesta de actividades demandará de todos nosotros.

Se cuenta para empezar con la aprobación, por parte del Senado y otras cámaras, de resoluciones de apoyo a la celebración del Año Mundial de las Matemáticas, pero estas iniciativas de las instituciones deben prolongarse más allá de este año, fomentando las actividades de popularización, las mejoras educativas, etc. relacionadas con las matemáticas.

Uno de los aspectos en el que se debe, como organización de profesores que es la FESPM, poner el énfasis en el 2000 es en la necesidad de que la sociedad valore adecuadamente y se preocupe por la mejora de la educación matemática, mucho más allá de escandalizarse cuando un informe internacional revela resultados poco satisfactorios en esta materia. En otros países ya se ha organizado la discusión sobre los problemas, necesidades y organización de la educación matemática a principios del siglo XXI. En este marco resulta alentadora la *iniciativa de la Real Academia de Ciencias, cuyo documento de conclusiones aparece en este número, de convocar a las diversas organizaciones relacionadas con las matemáticas a discutir los problemas de la educación matemática en nuestro país. Es preciso que la FESPM impulse una mayor profundización en este debate y que ello conduzca a la formulación de propuestas concretas y a su defensa e incorporación por la sociedad y las instituciones.*

Queremos desde este editorial dar la bienvenida a la Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas, que desde el pasado mes de febrero se ha integrado en la Federación.

Se ha producido un cambio en los cargos unipersonales de la Federación en cumplimiento de los estatutos actuales. Ricardo Luengo deja su puesto en la presidencia a María Jesús Luelmo (presidenta de la Sociedad «Emma Castelnuovo») y es nombrada vicepresidenta Ángela Núñez (presidenta de la Sociedad Cántabra). A Ricardo, nuestro máximo agradecimiento por el aliento y facilidades que siempre ha dado a SUMA y a María Jesús y Ángela nuestros mejores deseos.

Este número 31 de SUMA debería ser el último que se publicase bajo la dirección de este equipo editorial y deberíamos estar haciendo balance de lo realizado. Sin embargo, la Junta de la Federación renovó la confianza en este equipo por un nuevo periodo cuatrienal, por lo que más que balance estamos obligados a prepararnos para mantener la calidad de esta publicación y continuar con su mejora. Agradecemos a todos los socios y suscriptores el aprecio demostrado en sus comunicaciones que nos ha alentado a continuar en esta labor, sin dudarlo una de las más gratificantes a las que hemos dedicado nuestro esfuerzo.

SUMA 31
junio 1999, pp. 5-13

Ante el Año Mundial de las Matemáticas 2000

Antonio Martinón Cejas
María Teresa Riera Madurell
María del Carmen Heras Pablo
Bernardo Bayona Aznar

ARTÍCULOS

El grupo Parlamentario Socialista presentó una Proposición no de Ley sobre el Año Mundial de las Matemáticas. En este artículo se reproduce la exposición de motivos, así como el Acuerdo aprobado por unanimidad por la Comisión Mixta Congreso de los Diputados-Senado de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico.

LAS MATEMÁTICAS tienen enorme relevancia en nuestra sociedad. Su universalidad hace que hoy resulten indispensables en las ciencias de la naturaleza y en las ciencias sociales, así como en las nuevas tecnologías. Su importancia afecta al conjunto de la sociedad, ya que la comprensión del mundo actual, con sus avances tecnológicos y la abundancia de información, hace necesaria la familiaridad con ciertas nociones matemáticas. Además, su historia es indisoluble de la historia de la filosofía y de la historia de las ideas, y desde siempre ha jugado un papel central en las diferentes formas de entender la educación en todos los pueblos.

La celebración del Año Mundial de las Matemáticas 2000, proclamado por la Unión Matemática Internacional, se presenta como una magnífica oportunidad para dar en nuestro país un impulso a las matemáticas, tanto en lo que se refiere a la investigación científica, como a sus aplicaciones a las otras ciencias y a la técnica, así como a la enseñanza y el conocimiento general de la población.

El Año Mundial de las Matemáticas 2000

• La Unión Matemática Internacional ha proclamado el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. En la Declaración de Río de Janeiro (1992), aprobada por dicha Unión, se fijan tres objetivos para la correspondiente celebración.

El primer objetivo apunta a los grandes desafíos de las matemáticas para el siglo XXI. Se pretende que varios matemáticos de primera fila orienten la actividad de investigación mediante el enunciado de los problemas que consideren centrales para el próximo siglo. De esta forma se rememora lo ocurrido en el 2.° Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en París en 1900, en el que David Hilbert formuló veintitrés problemas que captaron la atención de los mejores matemáticos durante los primeros decenios de nuestro siglo XX, algunos de los cuales continúan sin resolverse.

El segundo objetivo se sitúa en el marco de la cooperación. Teniendo en cuenta el papel que las matemáticas tienen en el desarrollo de las sociedades, se pretende que los países menos avanzados incrementen su nivel matemático, lo que supone un esfuerzo de cooperación internacional en el ámbito educativo y la superación de las dificultades en el acceso a la información matemática.

El tercer y último objetivo consiste en alcanzar una mayor presencia de las matemáticas en el conjunto de la sociedad mediante la divulgación de ideas y aplicaciones que sean de interés para colectivos amplios.

• La Organización de Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), en su 29ª Conferencia General (1997), ha decidido respaldar la celebración del Año Mundial de las Matemáticas 2000. Otras instituciones, tanto de carácter internacional como nacional, también han dado su apoyo.

Los preparativos para la celebración se han iniciado con la constitución de gran número de comités que están programando una amplia variedad de actividades con el fin de alcanzar los objetivos fijados en la Declaración de Río de Janeiro. Por ejemplo, la Comisión Internacional para la Educación Matemática, organismo dependiente de la Unión Matemática Internacional, ha designado un comité que preside el español Miguel de Guzmán.

En el año 2000 se celebrarán varios congresos internacionales como actividades propias del Año Mundial de las Matemáticas 2000. Entre otros, en Japón el 9.° Congreso Internacional de Educación Matemática, organizado por la Comisión Internacional para la Educación Matemática; y en México el 5.° Congreso Mundial de la Sociedad Bernoulli, que organiza la Sociedad Bernoulli de Estadística Matemática y Probabilidad.

• En nuestro país se ha constituido el Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000, que preside José Luis Fernández. En este Comité se han integrado el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, la Real Sociedad Matemática Española, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, la Sociedad Catalana de Matemáticas, la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa y la Sociedad Española de Matemática Aplicada.

La Sociedad Catalana de Matemáticas, bajo los auspicios de la Sociedad Matemática Europea, organiza en Barcelona el Tercer Congreso Europeo de Matemáticas. La Unión Matemática Internacional lo ha acogido como una de las actividades principales del Año Mundial de las Matemáticas. Se trata del evento de mayor relevancia de los que tendrán lugar en España y el Comité Español le concede un papel central, de forma que promoverá actividades que apoyen y se coordinen con ese Congreso. La celebración de este Congreso supone que la comunidad matemática internacional reconoce el nivel alcanzado por las matemáticas españolas.

Otras muchas actividades están previstas en nuestro país con motivo de esta celebración: exposiciones, edición de libros históricos, congresos, cursos de verano... También, la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales tiene previsto un programa de conferencias impartidas por destacados matemáticos españoles.

Se pretende que varios matemáticos de primera fila orienten la actividad de investigación mediante el enunciado de los problemas que consideren centrales para el próximo siglo.

...que los países menos avanzados incrementen su nivel matemático...

...alcanzar una mayor presencia de las matemáticas en el conjunto de la sociedad...

Las matemáticas en la historia

• En todas las sociedades se hallan indicios de contar y medir, las primeras de las actividades matemáticas. Hacia el año 2000 aC, en Mesopotamia y Egipto se encuentran desarrolladas ciertas técnicas de cálculo que permiten la resolución de algunos problemas aritméticos y geométricos no triviales.

Sin embargo, fue en Grecia, en el ámbito de una cultura basada en la razón, donde se iniciaron propiamente las matemáticas, entendidas como una disciplina científica que exige la justificación racional de las afirmaciones. Suele señalarse a Tales de Mileto, hacia el 600 aC, como la figura con la que comienzan esas matemáticas científicas, que continúan poco más tarde con Pitágoras.

De los libros griegos que han llegado hasta nosotros destacan los *Elementos* de Euclides de Alejandría, obra escrita hacia el 300 aC en la que se presenta una exposición lógico-deductiva de la aritmética y la geometría de entonces. Este libro ha sido utilizado durante siglos como texto escolar, y se afirma que es, después de la Biblia, el libro que ha tenido más ediciones.

Durante la Edad Media los árabes, en lugares como Toledo, desempeñaron el papel de transmisores, conservadores y perfeccionadores de la ciencia y la cultura griegas. Además, los matemáticos árabes pusieron en relación la India con Occidente y contribuyeron decisivamente al surgimiento del álgebra. La influencia de la matemática árabe en el pensamiento occidental es un ejemplo de colaboración entre los pueblos a través de la ciencia.

Las aportaciones de los matemáticos hindúes y árabes, así como la recuperación de las matemáticas griegas, dan lugar a un florecimiento en el siglo XVII que culmina con la creación del cálculo infinitesimal por parte de Isaac Newton y de Gottfried Wilhelm Leibniz, de forma independiente. Este nuevo y poderoso cálculo permite a Newton la formulación de la teoría de la gravitación y se convierte en herramienta capaz de producir avances notables en mecánica y otras ramas de la física.

A principios del siglo XIX los matemáticos comienzan a exigirse a sí mismos un mayor rigor en la fundamentación del cálculo infinitesimal y se inicia una etapa de las matemáticas en la que las alusiones a otras disciplinas y a la noción de magnitud van desapareciendo paulatinamente. Así, las matemáticas alcanzan la autonomía y autosuficiencia de la que ahora gozan. Ha sido precisamente esta situación lo que ha permitido un espectacular crecimiento durante el siglo XX, tanto en el desarrollo vigoroso de nuevas ramas, como en un sinfín de aplicaciones en todos los campos.

• Como ocurre en casi todas las actividades humanas, las matemáticas constituyen una obra colectiva en la que han participado muchas personas, algunas de las cuales han impulsado su evolución con ideas excepcionales. Pese a la clara preponderancia masculina, aquí se encuentra un grupo de mujeres notables, como Sophie Germain, Sonya Kovalevsky, Emmy Noether y Julia Robertson.

...España sí tuvo un papel destacado en la transmisión de la ciencia griega y árabe al occidente europeo como cruce de culturas que fue en la Edad Media. En el Renacimiento cabe mencionar a Pedro Sánchez Ciruelo y Juan de Ortega como autores de libros que conocieron numerosas ediciones en España, Francia e Italia.

Entre quienes han contribuido decisivamente al desarrollo de las matemáticas encontramos miembros de la alta burguesía, como Henri Poincaré, y también de origen humilde, como Srinivasa Ramanujan; jóvenes que dejaron una herencia imborrable, como Niels Henrik Abel que vivió veintisiete años; fervientes religiosos como Blaise Pascal, mientras que Godfrey Harold Hardy consideraba a Dios como su enemigo personal; monárquicos como Augustin-Louis Cauchy y revolucionarios como Evariste Galois; y familias enteras como los Bernoulli. También los colectivos tienen un lugar en la historia de las matemáticas: el más célebre autor de textos matemáticos del siglo XX es Nicolas Bourbaki, nombre bajo el que se agruparon algunos jóvenes matemáticos franceses.

• Las aportaciones españolas a las matemáticas no han sido muy importantes. Sin embargo, España sí tuvo un papel destacado en la transmisión de la ciencia griega y árabe al occidente europeo como cruce de culturas que fue en la Edad Media. En el Renacimiento cabe mencionar a Pedro Sánchez Ciruelo y Juan de Ortega como autores de libros que conocieron numerosas ediciones en España, Francia e Italia.

En el último tercio del siglo XIX se realizan notables esfuerzos para conocer las matemáticas que se hacían fuera de nuestras fronteras por parte de Eduardo Torroja, Zoel García de Galdeano y el singular José Echegaray, que fue diputado y ministro, ingeniero y profesor, además de dramaturgo premiado con el Nobel de Literatura.

A principios de nuestro siglo destaca la figura de Julio Rey Pastor, impulsor de la Sociedad Matemática Española y fundador del Laboratorio y Seminario Matemático creado en 1915 por la Junta para la Ampliación de Estudios. Su labor en la actualización de las matemáticas que se estudiaban en nuestro país y su dedicación a orientar el trabajo de los matemáticos españoles tuvo sus frutos en una mejora notable de las matemáticas españolas.

La Guerra Civil produjo un nuevo retraso. Décadas más tarde se fue generando una cultura matemática que sintonizaba con la de los países más avanzados, y a ello contribuyeron grandemente los aires frescos traídos por algunos pocos que lograron formarse fuera de España, especialmente en Francia y Estados Unidos, durante la última etapa de la Dictadura.

Entre los matemáticos españoles destaca la figura de Lluís A. Santaló, quien ha desarrollado buena parte de su actividad en Argentina y cuya obra puede considerarse como la más influyente de las matemáticas españolas de todos los tiempos.

La situación de la investigación matemática en España es actualmente bien distinta de lo que históricamente ha sido. Hoy es habitual encontrar a matemáticos españoles como autores de artículos en las mejores revistas y de libros en las más prestigiosas editoriales, como miembros de los comités editoriales de las publicaciones más apreciadas y como conferenciantes invitados en los congresos internacionales. Sirve de ejemplo del nivel alcanzado que la primera Medalla para Jóvenes Investigadores concedida por la Sociedad Matemática Europea en 1992 recayó en el español Ricardo Pérez Marco.

Las matemáticas y la cultura

• Buena parte de la investigación matemática tiene su origen en la resolución de los problemas que los propios matemáticos se plantean en el desarrollo de su ciencia, en las matemáticas puras. Utilizando una frase de Carl Gustav Jacob Jacobi, los matemáticos realizan sus investigaciones con «la finalidad única... de rendir honor al espíritu humano». Desde esa perspectiva, valoran sus propias teorías y teoremas atendiendo a la profundidad de las ideas que se utilizan, a la conexión entre las diferentes nociones y a la belleza de los resultados obtenidos.

Aunque por su propia carácter deductivo, las teorías matemáticas gozan de la certeza absoluta, sin embargo esas teorías no informan directamente sobre los fenómenos naturales, de modo que el estricto desarrollo de la teoría, sin ponerla en conexión con las ciencias de la naturaleza, no produce un mayor conocimiento sobre el mundo. Es decir, las matemáticas no son propiamente una de las ciencias de la naturaleza, pese a las muchas aplicaciones que tienen en éstas.

En ocasiones el proceso de investigación matemática se convierte en arte, puesto que los matemáticos crean de igual forma que lo hacen los artistas. Pero las matemáticas continúan siendo ciencia, en cuanto que sus afirmaciones están sometidas a las exigencias del razonamiento científico.

De este modo, las matemáticas se sitúan entre las humanidades y las ciencias de la naturaleza, convirtiéndose en puente entre las dos culturas de las que habla Charles Percy Snow.

• Las matemáticas se relacionan con el arte desde la época de los griegos. Los pitagóricos descubrieron la presencia de razones aritméticas en la armonía musical. Los pintores renacentistas se plantearon el problema de la perspectiva en los paisajes, lo que más tarde dio lugar a una nueva geometría. La búsqueda de las proporciones más estéticas en pintura, escultura y arquitectura es otra constante que arranca en los griegos y llega hasta nuestros días, desde el canon de belleza de los maestros helénicos hasta Maurits Cornelis Escher o Le Corbusier, pasando por Alberto Durero, Leonardo da Vinci o Miguel Angel. Otros exponentes de la fuerte influencia matemática en el arte son, en nuestro país, el arte mudéjar, especialmente en Aragón, y el arte nazarí, sobre todo en la Alhambra de Granada.

Otros exponentes de la fuerte influencia matemática en el arte son, en nuestro país, el arte mudéjar, especialmente en Aragón, y el arte nazarí, sobre todo en la Alhambra de Granada.

...las matemáticas se sitúan entre las humanidades y las ciencias de la naturaleza, convirtiéndose en puente entre las dos culturas...

• Ciertas teorías científicas han contribuido de forma decisiva a modificar la concepción que el hombre tiene de sí mismo y de la naturaleza. La teoría heliocéntrica del universo, y su perfeccionamiento con las teorías de la gravitación y de la relatividad, llevó a que nuestro planeta dejara de ser considerado el centro del universo y pasara a convertirse en un astro modesto en el cosmos inmenso. De forma análoga, la teoría de la evolución de las especies de Charles Darwin ha hecho que los humanos nos veamos como una de las muchas especies que son resultado de la evolución.

También las matemáticas han ejercido una apreciable influencia en la historia del pensamiento.

A principios del siglo XIX nacen las geometrías no euclídeas como respuesta al problema de la independencia lógica del V Postulado de los *Elementos* de Euclides, el cual puede enunciarse diciendo que por un punto exterior a una recta sólo pasa una paralela. Estas geometrías, obra de Carl Friedrich Gauss, Nicolai Ivanovich Lobachevski y János Bolyai, presentan unos mundos posibles diferentes al euclídeo, sometidos a geometrías en las que por un punto exterior a una recta no hay paralelas o hay infinitas. Estas geometrías resultaron ser el soporte conceptual de la teoría de la relatividad de Albert Einstein.

En otro orden de ideas, en 1931 el lógico-matemático Kurt Gödel demostró la imposibilidad de que un sistema axiomático sea lo suficientemente completo para que a partir de él pudieran deducirse todas las verdades de la aritmética. Este resultado supuso un duro golpe al método axiomático-deductivo, aunque la lógica matemática demostró su potencia al probar sus propias limitaciones como instrumento para alcanzar la verdad.

• Las matemáticas han tenido siempre una íntima conexión con la filosofía. Entre los matemáticos encontramos pensadores que constituyen hitos fundamentales en la historia de la filosofía, como es el caso de René Descartes, Blaise Pascal y Gottfried Wilhelm Leibniz. Los pitagóricos, para quienes los números son el principio de todas las cosas, consideraban las matemáticas como la ciencia, y los filósofos, desde Platón y Aristóteles, la han considerado siempre como uno de los objetos principales de su pensamiento. Inmmanuel Kant fundamenta las matemáticas en el espacio y en el tiempo, que son formas *a priori* de la sensibilidad y aseguran no sólo la validez de las proposiciones matemáticas, sino también, y sobre todo, su aplicabilidad a la experiencia.

Gracias a las matemáticas la lógica renació con fuerza en la segunda mitad del siglo XIX, con figuras como George Boole, Augustus de Morgan y Gottlob Frege, lo que resultó decisivo para la fundamentación de las matemáticas en torno a 1900. Quizás sea Bertrand Russell la figura intelectual que con mayor claridad encarna la relación intrínseca de las matemáticas con la lógica y la filosofía; contribuyó de forma decisiva a la mencionada fundamentación y buena parte de su obra filosófica está dedicada a las matemáticas.

Plantearse los fundamentos de las matemáticas es preguntarse en qué medida la rica estructura que ha surgido de siglos de investigaciones puede reducirse a unos mínimos absolutos. Las reflexiones filosóficas sobre las matemáticas se han llevado a cabo dentro de la lógica, de la teoría del conocimiento y de la metafísica, hasta que se ha constituido una disciplina específica, la filosofía de las matemáticas. La tarea de esta rama de la filosofía es de la mayor importancia para una filosofía más general de la razón, pues las matemáticas son el ejemplo más perfecto de actividad racional del hombre.

Las matemáticas han tenido siempre una íntima conexión con la filosofía.

La influencia e importancia de las matemáticas en la sociedad ha ido en constante crecimiento, en buena parte debido al espectacular aumento de sus aplicaciones.

Otra de las razones que han hecho que los filósofos presten atención a las matemáticas es el tema del infinito. Aunque haya sido de formas diferentes, la idea de infinito está presente en las matemáticas de mayor calado desde la época de los griegos. El matemático y teólogo Bernhard Bolzano, a principios del siglo XIX, inicia la visión moderna del infinito, pero es necesario esperar a las últimas décadas del siglo para poder encontrar una teoría satisfactoria, que en sus aspectos más geniales se debe a Georg Cantor y que recibe las notables aportaciones de Richard Dedekind.

Las matemáticas y sus aplicaciones

• La influencia e importancia de las matemáticas en la sociedad ha ido en constante crecimiento, en buena parte debido al espectacular aumento de sus aplicaciones. En este final del siglo XX las matemáticas extienden su utilidad y presencia a casi todas las actividades humanas. Puede decirse que todo se «matematiza». No es concebible la innovación tecnológica, en el sentido actual de Investigación y Desarrollo (I+D), sin la presencia preeminente de las matemáticas y sus métodos.

• Las más antiguas aplicaciones de las matemáticas están en las ciencias de la naturaleza, especialmente en la física. Sin embargo, gracias a los ordenadores, a las técnicas de análisis numérico y al uso de la estadística, hoy es posible el diseño y aplicación de modelos matemáticos para abordar problemas complejos, como los que se presentan en la biología y en las ciencias sociales (sociología, economía...), a las que dota de métodos cuantitativos indiscutibles.

Las matemáticas resultan hoy indispensables en todas las ingenierías y en las tecnologías más avanzadas, como las necesarias para los vuelos espaciales. También están presentes en las más modernas técnicas de diagnóstico médico, como en la tomografía axial computerizada, en la meteorología, en los estudios financieros, en la ingeniería genética y, en fin, en cualquier rama del conocimiento humano que desee alcanzar un alto grado de precisión en sus predicciones...

• La sociedad de la información en la que hoy vivimos es resultado de la simbiosis entre las telecomunicaciones y la informática. Tiene como base las ideas de George Boole, que a mediados del siglo XIX funda la lógica matemática, y en el modelo matemático de los ordenadores de Alan Turing, así como en las aportaciones de John von Neumann y Norbert Wiener, quienes se vuelcan en las aplicaciones tras haber sido dos eminentes matemáticos puros en el primer tercio de este siglo. La enorme cantidad y variedad de la información que hoy debemos manejar plantea nuevos problemas como la transmisión de dicha información, su protección, su comprensión, su codificación, su clasificación, etc. Y estos nuevos problemas sólo pueden tener un tratamiento efectivo a través de los complejos algoritmos matemáticos que se han desarrollado bajo la exigencia de las nuevas necesidades planteadas.

Las matemáticas en la sociedad

• La importancia de las matemáticas en la sociedad se aprecia en su papel fundamental en el desarrollo científico y tecnológico, en su relación con la filosofía y la historia de las ideas, en el lugar preponderante que ocupa en los planes de estudio de la educación primaria y secundaria, y en otras muchas facetas.

Su presencia en la vida cotidiana de la mayoría de los ciudadanos es constante. La información que diariamente recibe tiene cada vez mayor volumen de datos cuantificados, como los índices de precios, tasa de paro, porcentajes... La prevista incorporación del euro tiene implicaciones matemáticas para todos los ciudadanos, que se verán obligados al uso de decimales y al redondeo.

Esa importancia contrasta con el escaso conocimiento de las matemáticas, no sólo sobre sus contenidos, sino también sobre su evolución, sus aplicaciones y su influencia. La mayor parte de las personas limitan su relación con las matemáticas, en el mejor de los casos, al uso de las «cuatro reglas» y casi siempre, influidos por sus recuerdos escolares, alejan de sí cualquier otra posibilidad.

Resulta adecuado hacer llegar ciertos aspectos de las matemáticas al público en general, como parte que las matemáticas son de la creación cultural, de igual forma que se hace con otras manifestaciones de esa creación cultural, ya sean artísticas o científicas.

• Aunque limitado, hay un público que sí demuestra interés por las matemáticas. En el siglo pasado encontramos las obras de Lewis Carroll, de contenido matemático y dirigidas a un público amplio, obras que han tenido multitud de ediciones en numerosas lenguas.

En nuestro siglo, Martin Gardner ha realizado una formidable labor de divulgación, proponiendo multitud de problemas que han hecho las delicias de los aficionados a las matemáticas. Recientemente el poeta y ensayista Hans Magnus Enzensberger ha publicado *El Diablo de los números*, que ha sido un éxito editorial en varios países.

• Para conseguir una mayor presencia de las matemáticas en la sociedad parece imprescindible el esfuerzo de los propios matemáticos por dar a conocer los diferentes aspectos de su ciencia. A ello habría que añadir que por parte de los medios de comunicación debe prestarse más atención a las informaciones de contenido matemático.

Resulta adecuado hacer llegar ciertos aspectos de las matemáticas al público en general, como parte que las matemáticas son de la creación cultural, de igual forma que se hace con otras manifestaciones de esa creación cultural, ya sean artísticas o científicas.

La exposición «Horizontes Matemáticos» recorrió España entera durante tres años y resultó ser un éxito por la masiva asistencia de público, no únicamente escolar.

Otras disciplinas científicas ocupan la atención del público a través de la concesión de los Premios Nobel. Sin embargo, no hay un Premio Nobel de Matemáticas. Para llenar ese hueco, desde 1936 el Congreso Internacional de Matemáticas concede cada cuatro años las Medallas Fields a quienes hayan contribuido de forma significativa al desarrollo de las matemáticas.

Los medios de comunicación han reflejado adecuadamente que Andrew Wiles ha dado solución a un problema matemático que había estado abierto durante trescientos cincuenta años, el conocido como «último teorema de Fermat». Su sencillo enunciado ha fascinado a los matemáticos posteriores a Pierre de Fermat y muchos han empeñado grandes esfuerzos en resolverlo. Estos tres siglos y medio de búsqueda han sido fértiles en extremo, ya que en la búsqueda de la solución han sido creadas nuevas teorías y se han descubierto propiedades aritméticas insospechadas.

Con cierta frecuencia puede leerse en la prensa que algún aficionado a las matemáticas afirma haber «resuelto» algunos de los tres problemas clásicos de construcción con regla y compás heredados de los griegos (la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo). No es tan frecuente que la reseña se acompañe con la información de que la imposibilidad de tales construcciones ha quedado establecida rigurosamente desde hace más de un siglo.

Otro ámbito adecuado para la divulgación son los museos y exposiciones. La exposición «Horizontes Matemáticos» recorrió España entera durante tres años y resultó ser un éxito por la masiva asistencia de público, no únicamente escolar.

• La divulgación también interesa a los profesores de educación primaria y secundaria, la mayoría de los cuales desean perfeccionar, ampliar y actualizar sus conocimientos matemáticos, así como el de sus aplicaciones.

También los matemáticos que se dedican a la docencia universitaria y a la investigación desean acceder de forma sucinta a las principales ideas y resultados de campos diferentes a aquellos en los que trabajan. Las matemáticas llegan al año 2000 con una extensión tal que es imposible que una persona pueda estar familiarizada con todas sus ramas.

La enseñanza de las matemáticas

• En los países más avanzados, en los que la escolarización total está prácticamente conseguida, la relación de la mayoría de las personas con las matemáticas, más allá de los informales inicios familiares, se ha establecido en el ámbito educativo.

Millones de alumnos y miles de profesores, en todos los niveles educativos, tienen relación diaria con las matemáticas, que es asignatura en la educación primaria y secundaria, en los estudios profesionales, y en buena parte de las carreras universitarias.

Las matemáticas siempre han tenido un destacado lugar como disciplina escolar, debido a su papel de herramienta universal y a su potencia en la formación intelectual de los alumnos. Como señalan Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, «la enseñanza matemática en la escuela primaria tiene carácter predominantemente instrumental y se propone ante todo adiestrar a los niños en el cálculo numérico, proveyéndolos de ciertos conocimientos necesarios o útiles para la vida, como son, por ejemplo, el sistema métrico, el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos usuales, las reglas de cálculo comercial, etc.»; para la enseñanza secundaria indican que su fin es «predominantemente educativo»; en la enseñanza superior se «persigue ya un fin profesional... en el sentido más lato del adjetivo».

La función de las matemáticas como instrumento de la formación intelectual de los alumnos se apoya en algunas de sus características más notables: razonamiento lógico precisión, rigor, abstracción, formalización y belleza.

• La función de las matemáticas como instrumento de la formación intelectual de los alumnos se apoya en algunas de sus características más notables: razonamiento lógico, precisión, rigor, abstracción, formalización y belleza. Se espera conseguir que esas cualidades de las matemáticas acaben contribuyendo a que el alumno alcance esas capacidades y otras tales como la actitud crítica, la capacidad de discernir lo esencial de lo accesorio, el aprecio por la obra intelectual bella y la valoración de la potencia de la ciencia.

Todas las materias escolares, y no sólo las matemáticas, deben contribuir al cultivo y desarrollo de la inteligencia, los sentimientos y la personalidad. Pero las matemáticas se sitúan en un lugar destacado en lo que se refiere a la formación de la inteligencia de niños y jóvenes. Hace ya más de dos mil trescientos años, Aristóteles, en su *Ética a Nicómaco*, observaba que «los jóvenes pueden hacerse geómetras, matemáticos y hasta muy hábiles en este género de ciencias..., mientras que no pueden ser sabios ni estar versados en el conocimiento de las leyes de la naturaleza. ¿No podría decirse que esto nace de que las matemáticas son una ciencia abstracta, mientras que las ciencias de la sabiduría y la naturaleza toman sus principios de la observación y la experiencia? ¿No podría añadirse... que en las matemáticas la realidad no se les presenta con oscuridad alguna?».

• No debe entenderse ese papel central de las matemáticas en la formación de los valores de la razón como un argumento en menoscabo de las demás disciplinas escolares, ni de las denominadas científicas ni de las llamadas humanidades. A fin de cuentas, si se acepta esa clasificación, hay que considerar las matemáticas como un puente entre ambas.

En el reciente *Dictamen sobre la enseñanza de las humanidades en la educación secundaria* puede leerse que no es «deseable concebir como separados o incomunicados esos dos mundos que Snow denominó las 'dos culturas': de un lado, la sustentada por los... intelectuales literarios (humanistas) y, de otro, la de los científicos». Al logro de ese deseo las matemáticas pueden contribuir de forma decisiva.

Parece oportuno citar a Fernando Savater: «Pero, ¿qué son las humanidades? Supongo que nadie sostiene en serio que estudiar matemáticas o física son tareas menos humanistas, no digamos menos 'humanas', que dedicarse al griego o a la filosofía».

• Pese a ese papel singular que las matemáticas tienen en el sistema educativo, o quizás debido precisamente a eso, su enseñanza no ha alcanzado niveles de satisfacción para las administraciones educativas, ni para los padres, ni para los profesores.

Hay que admitir que las matemáticas no han supuesto para la mayoría de los alumnos una fuente de placer intelectual. Son muy diferentes las experiencias que cada persona ha tenido con las matemáticas y muy distintos los recuerdos que se puedan guardar, pero muchos podrían suscribir la frase de Bertrand Russell: «la aritmética es el coco de la niñez; recuerdo que lloraba amargamente por no poder aprender la tabla de multiplicar».

El Informe *Diagnóstico General del Sistema Educativo. La escuela secundaria obligatoria*, elaborado por el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, refiriéndose a los resultados en matemáticas de los alumnos de catorce años, afirma que «el 7180% de los alumnos no alcanza... un nivel satisfactorio de rendimiento en la resolución de problemas que impliquen relaciones de proporcionalidad o porcentajes, la geometría del triángulo, o la resolución de ecuaciones lineales simples, entre otras cosas"».

• Pedro Puig Adam es el mejor representante, en el segundo tercio de este siglo en nuestro país, de los afanes del profesorado por producir una sustancial mejora en la educación matemática. Un intenso movimiento de renovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se inició durante la década de 1970 con la formación de diversos grupos y asociaciones de profesores, que se consolidó en la década siguiente con la creación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, la aparición de diversas publicaciones periódicas y la organización de gran número de jornadas, seminarios y congresos. Este movimiento continúa hoy vivo y amplios colectivos de profesores siguen buscando respuestas y alternativas con el fin de mejorar la situación, claramente insatisfactoria, de la enseñanza de las matemáticas.

A ello hay que añadir la incipiente investigación en didáctica de las matemáticas en las universidades españolas, así como la reciente constitución de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

• La enseñanza de las matemáticas tiene muchos retos planteados, algunos de los cuales comparte con otras disciplinas.

...las matemáticas deben presentarse como una más de las creaciones humanas, que no están nunca al margen de la sociedad, sino que influyen en ella y están influidas por ella.

Es necesario situar las matemáticas en el contexto social, científico, cultural y político en los cuales se produjeron. Es decir, las matemáticas deben presentarse como una más de las creaciones humanas, que no están nunca al margen de la sociedad, sino que influyen en ella y están influidas por ella.

Situados, por fortuna, en una educación para todos, resulta necesario, posiblemente siempre lo ha sido, que las matemáticas se presenten a los alumnos cargadas de significados para ellos, superando definitivamente la época en la que la actividad del aula se centraba, casi exclusivamente, en el uso sistemático de algoritmos. La enseñanza de las matemáticas debe, de igual forma que lo hacen las propias matemáticas, nutrirse de la realidad, en este caso de la más cercana y familiar para los alumnos.

Por otro, es indispensable mejorar la formación del profesorado, tanto en lo que se refiere a los contenidos propiamente matemáticos, como al conocimiento de los hallazgos de la investigación en didáctica de las matemáticas.

Puede resumirse el reto que las matemáticas tienen en el sistema educativo diciendo que se trata de que contribuyan efectivamente a lo que la Constitución establece en su artículo 27: «La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana en el respeto a los principios democráticos de convivencia y a los derechos y libertades fundamentales».

Antonio Martinón
Teresa Riera
Carmen Heras
Bernardo Bayona
Congreso de los Diputados

Proposición Parlamentaria sobre el Año Mundial de las Matemáticas 2000

Presentación

El 19 de noviembre de 1998 el Grupo Parlamentario Socialista presentó en el Congreso de los Diputados la Proposición no de Ley sobre el Año Mundial de las Matemáticas 2000, para su debate en la Comisión Mixta de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico. Fueron autores de la Proposición los diputados Antonio Martinón Cejas, María Teresa Riera Madurell, María del Carmen Heras Pablo y Bernardo Bayona Aznar. El texto presentado por el Grupo Socialista contenía una exposición de motivos y una propuesta de acuerdo. La exposición de motivos se publica en las páginas anteriores con el título *Ante el año Mundial de las Matemáticas 2000.*

Debate y acuerdo

El 9 de febrero de 1999 la Comisión Mixta de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico, reunida en el Congreso de los Diputados, debatió y aprobó por unanimidad la Proposición no de Ley sobre el Año Mundial de las Matemáticas 2000. El acuerdo coincide con la propuesta del Grupo Socialista con una leve modificación.

Acuerdo sobre el Año Mundial de las Matemáticas 2000, adoptado por unanimidad el 9 de febrero de 1999 por la Comisión Mixta Congreso de los Diputados-Senado de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico

La Comisión Mixta de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico, ante la celebración en España del Año Mundial de las Matemáticas 2000,

A) Considera que las matemáticas
1. Son una de las máximas expresiones de la inteligencia humana y un magnífico ejemplo de la belleza de las creaciones intelectuales.
2. Constituyen un eje central de la historia de la cultura y de las ideas.
3. Gracias a su universalidad, se aplican en las otras ciencias, de la naturaleza y sociales, en las ingenierías, en las nuevas tecnologías, y en las distintas ramas del saber y en los distintos tipos de actividad humana, de modo que resultan fundamentales en el desarrollo y el progreso de los pueblos.
4. Constituyen una herramienta básica para que la mayoría de las personas puedan comprender la sociedad de la información en la que viven.
5. Han desempeñado, y deberán seguir haciéndolo, un destacado papel en los sistemas educativos y en el aprendizaje de los escolares.
6. Se convierten en uno de los ámbitos más adecuados para la cooperación entre todos los pueblos por su lenguaje y valor universales.

B) Apoya dicha celebración, ya que
1. Es un impulso para la investigación matemática.
2. Intensifica la conexión de las matemáticas con sus aplicaciones, lo que permitirá aumentar la importancia en nuestro país de las matemáticas aplicadas.
3. Es una oportunidad para mejorar la educación matemática de los escolares.
4. Facilita la divulgación del conocimiento matemático y de las características propias de las matemáticas entre la población en general, entre los profesores y entre los propios investigadores matemáticos.
5. Permite ampliar la cooperación con los demás países, particularmente con los iberoamericanos.

C) Invita
1. A las instituciones y sociedades científicas a que celebren el Año Mundial de las Matemáticas 2000 con el ánimo de alcanzar los objetivos de la Declaración de Río de Janeiro.
2. A los profesores de matemáticas de todos los niveles educativos a que aprovechen la celebración para aumentar el nivel de competencia matemática de sus alumnos, perfeccionando su propio nivel científico y los métodos de enseñanza y aprendizaje, entendiendo las matemáticas como disciplina científica esencial para la formación del espíritu de los niños y jóvenes.
3. A los Gobiernos de las Comunidades Autónomas y a las Corporaciones Locales a que presten su apoyo a las instituciones y sociedades que en sus ámbitos territoriales planteen actividades en el marco de la celebración.
4. A los medios de comunicación a que se hagan eco de las actividades que se realicen, y trasladen a la sociedad aquellos aspectos de las matemáticas que tengan más interés para la mayoría de los ciudadanos.

D) Insta al Gobierno a que, dentro de su ámbito de competencias y de acuerdo, en su caso, con las Comunidades Autónomas,
1. Apoye, decidida y eficazmente, a las Sociedades e Instituciones que desarrollen actividades con tal motivo, particularmente al Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000.
2. Favorezca programas de investigación en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.
3. Fomente la organización de actos culturales, académicos y lúdicos entre los estudiantes de todos los niveles educativos, tal como se hace en los demás países europeos.
4. Favorezca la investigación matemática y la relación de ésta con las aplicaciones, tanto las de carácter científico, como las industriales, empresariales o tecnológicas en general.
5. Colabore a la divulgación de las matemáticas y, a tal fin, promueva desde los medios de comunicación de titularidad pública el mayor conocimiento de las matemáticas por parte de la población en general.
6. Contribuya al conocimiento y al reconocimiento social de la obra histórica más relevante de los matemáticos españoles.
7. Establezca líneas de cooperación con otros países, especialmente los iberoamericanos, en los ámbitos de la investigación matemática y de la educación matemática.

E) Acuerda sumarse a dicha celebración mediante la organización de actividades en las sedes de las Cortes.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidenta: María Jesús Luelmo
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Xavier Vilella Miró
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Fidela Velázquez
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Francisco Aguiar Clavijo
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Tomás Ortega
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García
Avda. España, 14, 5ª planta. 02006-ALBACETE

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. SANTIAGO DE COMPOSTELA

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29. 39003-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 31
junio 1999, pp. 15-18

Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria

CONVOCADA POR la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, se ha llevado a cabo una reunión con representantes de las diferentes organizaciones de matemáticas del país*, durante los días 5 y 6 de febrero de 1999 sobre el tema monográfico:

Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria

La reunión, que tenía el objetivo de identificar los principales problemas de nuestra educación primaria y secundaria y de apuntar algunos principios de solución para ellos no pretendía, por supuesto, concluir con un consenso total en asuntos tan difíciles y controvertidos, como se puso de manifiesto en la misma reunión.

El debate sobre la enseñanza de las matemáticas en la LOGSE

La enseñanza de las matemáticas es una componente esencial de cualquier sistema educativo. No sólo porque es importante conseguir que todos los ciudadanos posean un grado adecuado de conocimiento matemático, sino también porque este objetivo es extremadamente difícil de lograr y, en consecuencia, porque requiere la concurrencia de todos los recursos del sistema escolar. Por tanto, el mayor o menor grado de éxito en la alfabetización matemática de los jóvenes puede ser un test (aunque no el único) que proporcione información relevante sobre los aciertos y errores de un nuevo planteamiento del sistema educativo.

El marco legal actual de la LOGSE ha introducido unos cambios sustanciales en nuestro sistema de enseñanza. Por ejemplo:

(*) Asistieron a la reunión: Carlos Andradas y Tomás Recio (Real Sociedad Matemática Española); Mª Jesús Luelmo, Antonio Pérez, Salvador Guerrero y Julio Sancho (Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas); Rosa Pardo y Soledad Rodríguez (Sociedad Española de Matemática Aplicada); Rafael Infante (Sociedad Española de Estadística e Investigación Operativa); Luis Rico y Modesto Sierra (Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática); Carles Romero (Sociedad Catalana de Matemáticas); José Luis Fernández Pérez (IMU-ICMI-España); Alicia Delibes (Centro de Información y Documentación Educativa-MEC); Miguel de Guzmán, Ildefonso Díaz, Pedro Jiménez Guerra y Manuel López Pellicer (Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales); Actuaron como Secretarios de la Reunión: Javier Soler (Comunidad Autónoma de Madrid), Joaquín Hernández (Universidad Complutense de Madrid).

ARTÍCULOS

- La ampliación de la escolarización obligatoria hasta los 16 años (esto es, un incremento de dos años de escolarización obligatoria).
- La modificación profunda de los objetivos y métodos y de la organización de las enseñanzas (por ejemplo, la comprensividad, el requerimiento a los docentes para que participen activamente en el desarrollo curricular, la importancia dada a los procedimientos y actitudes en la clase de matemáticas, etc.).

La alfabetización matemática de la sociedad

Tal vez porque la LOGSE incrementa los años de escolaridad obligatoria y común, aparece el problema de identificar las necesidades matemáticas básicas de la población adulta, para que el curriculum de las matemáticas en la enseñanza obligatoria satisfaga adecuadamente las mismas. El problema no es, simplemente, elaborar una lista de destrezas y conocimientos más o menos usuales y útiles en la vida de un adulto, para incorporarlos al curriculum. Sucede que muchos de los objetivos que se plantean y se alcanzan (en mayor o menor medida) en el ámbito escolar, no traspasan ese ámbito y no llegan nunca a incardinarse en el acervo de conocimientos prácticos que maneja un adulto en la vida cotidiana.

Por ejemplo, en el curso de nuestro debate en la Real Academia de Ciencias, nos preguntamos si personas de gran formación, cuyo ejercicio profesional estuviese lejos del ámbito científico, conservarían la capacidad para operar con fracciones sencillas, en concreto, si serían capaces de sumar 1/3+1/6. Una pequeña encuesta realizada sobre la marcha a cuatro catedráticos de universidad (de Derecho, Historia, Anatomía y Bioquímica) confirmó que sólo este último era capaz de obtener la solución correcta, y sólo otro más se atrevió a aproximarse al problema mediante una estrategia matemática, operando mentalmente con decimales y obteniendo una solución aproximada. La alfabetización matemática de la sociedad debe tener en cuenta estos hechos, y ha de considerar que la gran mayoría de personas sólo requerirá, en la vida diaria, una capacidad interpretativa de los aspectos matemáticos que se le presenten, frente a una pequeña proporción de personas que utilizará de manera creativa o productiva, las matemáticas. Tal vez sea más importante saber entender que saber hacer. En el mismo sentido, apuntamos que es más interesante que el común de los ciudadanos tenga una actitud positiva hacia las matemáticas que el hecho de que conozca al final de sus estudios muchas cuestiones puntuales o tenga más o menos sistematizadas una serie de rutinas.

...es más interesante que el común de los ciudadanos tenga una actitud positiva hacia las matemáticas que el hecho de que conozca al final de sus estudios muchas cuestiones puntuales o tenga más o menos sistematizadas una serie de rutinas.

Un planteamiento maximalista de los requerimientos básicos para la alfabetización matemática de la sociedad, conduciría, en nuestra opinión, a una división de la sociedad en ciudadanos de elite (unos pocos, bien formados para abordar la creciente complejidad técnica de nuestro mundo) y en una masa de ciudadanos con conocimientos muy deficientes y sin capacidad de reacción y crítica. Un planteamiento minimalista conlleva unos resultados, medidos en términos tradicionales de éxito en los estudios superiores, más pobres. Pero cuando se habla de un descenso en el nivel matemático de la formación que adquieren los alumnos en la ESO, debe cualificarse también el nivel que tendrían aquellos que, antes de la entrada en vigor de la reforma, no seguían con sus estudios.

Los problemas de organización

Hay un sensible acuerdo acerca de dar un margen de confianza al sistema educativo que implica la LOGSE, teniendo en cuenta que no ha transcurrido todavía el tiempo suficiente para establecer una evaluación, positiva o negativa, de los logros de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. En todo caso, desde que se cerró el Centro de Desarrollo Curricular, prácticamente no se han realizado estudios de seguimiento de la implantación de la reforma.

Lo que sí se percibe es que el sistema, que en principio es correcto, no está bien implementado en la práctica, porque existen problemas de organización sin resolver:

1. Diversidad amplia de capacidades intelectuales y culturales de los alumnos coexistiendo en el aula, que esteriliza los esfuerzos de los profesores, que se afanan en distribuir su tiempo intentando atender en sus requerimientos al mayor número posible de alumnos, sin conseguir en la práctica dar satisfacción real a las necesidades de ninguno de ellos.

2. La promoción automática de los alumnos en los cursos de ESO, a la vez que facilita la mencionada diversidad en el aula, ignorando los principios más elementales de la naturaleza humana, incorpora al modelo educativo el elemento desincentivador clave: todos los esfuerzos (incluida la ausencia de todo esfuerzo) se recompensan de la misma forma: promoción de curso o de ciclo, o titulación.

3. Respecto de la organización de espacios y tiempos en los centros, hay opiniones que apuntan soluciones en la línea del informe Cockcroft: impartir simultáneamente las clases de matemáticas en los distintos grupos formados con los alumnos de cada curso. De este modo se consigue una cierta flexibilidad y se pueden disponer los grupos de enseñanza como mejor convenga a las necesidades de los alumnos; es posible, durante un mismo curso, pasar los alumnos de un grupo a otro, o modificar la disposición de los propios grupos para fines especiales. En cualquier caso, no se es ajeno a las dificultades que para la organización docente de cada Instituto plantea esta solución.

   Otras opiniones abogan por dejar la solución en manos de los profesionales de cada centro. El papel de la Administración (central o autonómica) se debe limitar a dar más medios a los profesores (por ejemplo, dos profesores por aula).

   Finalmente, hay también opiniones que apuntan como posible solución una gran diversidad de opciones (créditos optativos) en la línea que actualmente se sigue en Cataluña.

4. Falta de tiempo para desarrollar el currículum con la metodología que propone la LOGSE. Hacen falta más horas semanales de clase dedicadas a las matemáticas. Los cursos de Primer Ciclo y Segundo Ciclo de la ESO requieren, como mínimo, cuatro horas semanales, habiendo incluso propuestas de extenderlas a cinco.

Hacen falta más horas semanales de clase dedicadas a las matemáticas. Los cursos de Primer Ciclo y Segundo Ciclo de la ESO requieren, como mínimo, cuatro horas semanales, habiendo incluso propuestas de extenderlas a cinco.

5. Falta de materiales didácticos para desarrollar los objetivos marcados con la metodología marcada. Es necesario dotar a los centros de laboratorios de matemáticas, que permitan el desarrollo de los contenidos con una metodología activa por parte del alumnado.

La formación del profesorado

Un aspecto de máxima importancia en las dificultades de la implementación del nuevo sistema es la falta de formación del profesorado.

Acerca de la formación de los profesores se ha debatido en dos sentidos:

Por un lado la formación inicial de los futuros profesores de matemáticas, tanto en las escuelas de magisterio como en las facultades de matemáticas deja mucho que desear.

En las primeras porque el actual plan de estudios de magisterio mantiene una formación puramente testimonial en matemáticas y su didáctica para los futuros profesores de primaria (entre un 2 y un 7% del total de créditos, en términos generales). Si bien la formación inicial de planes anteriores en matemáticas para los profesores de primaria no era ideal, la situación actual es insostenible. Son necesarios maestros con una cultura general sólida; hay que caracterizar con mayor precisión el tipo de formación en matemáticas y su didáctica necesario para el profesor de primaria; las matemáticas deben aprenderse y enseñarse en un contexto; hay que fomentar la actitud favorable de los estudiantes de primaria hacia las matemáticas al concluir este ciclo de formación (¿qué actitud deben tener estos estudiantes? ¿sólo son importantes las rutinas?).

Hay una contradicción entre las necesidades formativas del profesor de primaria y su formación real; los objetivos establecidos para la Educación Primaria en el área de matemáticas no quedan cubiertos con la formación actual del Profesor de Primaria; esta formación es prácticamente inexistente por su exigüidad.

Las matemáticas de primaria no pueden reducirse al aprendizaje de los algoritmos, es necesario fomentar una actitud positiva en los estudiantes, que deben transmitirle sus profesores; la falta de formación de los profesores está repercutiendo negativamente en el sistema educativo. Parece haberse olvidado la importancia formativa que tienen las dos disciplinas instrumentales básicas: lengua y matemáticas. Un apoyo de especialistas por centros puede ser conveniente.

En las segundas, porque no se da, con escasísimas excepciones, formación acerca de los temas que posteriormente los profesores de secundaria tendrán que explicar, así como tampoco acerca de didáctica de las matemáticas. En este sentido se constata que en la mayoría de las

Facultades de Matemáticas, la formación parece que va en la línea de que todos fueran a hacer investigación en Matemáticas, con demasiado contenido matemático y sin atender para nada a cuestiones como psicología del aprendizaje matemático, Historia de la Matemática, instrumentos concretos para la didáctica, juegos, aplicaciones,... que ciertamente le serían de inestimable ayuda en su labor al futuro profesor.

Por otro lado ha sido también objeto del debate la formación permanente del profesorado.

- Se necesita una formación que no se quede en la mera realización de cursos, sino que produzca cambios reales en su actividad en el aula.
- Son necesarias más horas de estudio, formación e investigación de los profesores de secundaria, lo que exigiría la reducción del número de horas de docencia directa (dieciocho en la actualidad) junto con un mayor control de su trabajo al margen de la docencia en el centro.
- Los profesores de Secundaria han estado hasta ahora impartiendo sus clases con una metodología propia de BUP. La actual reforma de la enseñanza de las matemáticas la está llevando a cabo un profesorado que está más acostumbrado a, y, por tanto, le es más cómodo, el sistema anterior, en el que se hacía más hincapié en el desarrollo de habilidades algorítmicas, que a un sistema en el que prima el desarrollo de capacidades. La Enseñanza Secundaria Obligatoria exige una metodología diferente para la que no se ha dado formación específica.

Los Ciclos Formativos

La falta de perspectivas para gran parte del alumnado es desmotivadora. Existe, en la actualidad, una gran demanda de plazas de enseñanza en los Ciclos Formativos, tanto de nivel medio, para alumnos que terminan la ESO y no desean cursar el bachillerato, como de nivel superior, para alumnos que han terminado el bachillerato y no desean cursar estudios universitarios. Es necesario ampliar sustancialmente la oferta de plazas en dichos Ciclos Formativos.

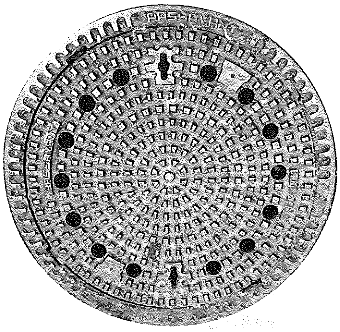
Otros aspectos de interés

Finalmente, se apuntan tres cuestiones que cuentan con el apoyo generalizado o al menos no generan ninguna controversia:

1. Aprovechar las nuevas tecnologías para introducir ideas, es decir que los ordenadores no solamente sirvan como ayuda para facilitar cálculos o resolver cuestiones que sin ellos serían engorrosas, sino que además se pueden aprovechar para fundamentar los conceptos; se pone el ejemplo del uso del CABRI en Geometría.
2. Tendencia del profesorado de Matemáticas a compartimentar su asignatura. Se constata que en la clase de Matemáticas no se hace alusión a la utilidad de la misma en otras ciencias, en general la exposición en nuestras clases está muy alejada de problemas genéricos y, tanto a los profesores de Matemáticas como los de otras asignaturas de ciencias se les observa una actitud poco abierta a colaborar entre ellos.

   Se apunta, como una de las razones de este hecho, el nulo peso que tienen asignaturas no propias de Matemáticas en la licenciatura en muchas Universidades. En general se está en desacuerdo con la desaparición de cualquier asignatura de Física, o Dibujo, en los programas de la licenciatura de Matemáticas.
3. Se apunta la necesidad de formar una especie de foro estable de ámbito nacional (podría ser un subcomité del ICMI) en el que estuvieran presentes las diferentes organizaciones de profesionales que se ocupan de los problemas relativos a la educación matemática, y que se coordine con otros países europeos y del resto del mundo, ya que la alfabetización matemática del ciudadano medio es algo que no tiene fronteras y es altamente beneficioso contrastar pareceres con otros comités similares.

Se apunta la necesidad de formar una especie de foro estable de ámbito nacional (podría ser un subcomité del ICMI) en el que estuvieran presentes las diferentes organizaciones de profesionales que se ocupan de los problemas relativos a la educación matemática, y que se coordine con otros países europeos y del resto del mundo...



Bremen
Foto: Luis Balbuena

SUMA 31
junio 1999, pp. 19-26

El papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal*

Pearla Nesher

ME GUSTARÍA hablar del papel de los esquemas en general y demostrar cómo pueden ayudar en el aprendizaje de los problemas aritméticos de enunciado verbal. Las definiciones incluidas en el artículo fueron elaboradas por Fischbein (1997) y se basan en la noción de esquema de Piaget.

Rumelhart escribió «...con toda seguridad, los esquemas son los bloques con los que se construye la cognición. Son los elementos fundamentales de los que depende todo el procesamiento de la información. Los esquemas se emplean en el proceso de interpretación de los datos sensoriales (tanto de los lingüísticos como de los no lingüísticos), en la determinación de objetivos y subobjetivos y en la dirección del flujo de procesamiento del sistema» (Rumelhart, 1980, pp 33-34).

Fischbein opina que un esquema también es una estrategia para resolver una cierta clase de problemas. Acentúa el aspecto conductual de los esquemas: para él, son un plan de acción. Tenemos un ejemplo sencillo: la apertura de una puerta con su manilla, es decir, el esquema consiste en saber que debemos bajar la manilla y empujar la puerta o tirar de ella. No le damos importancia ya que para nosotros es una acción instintiva, pero cuando nos encontramos frente a otro sistema que no reconocemos, como me ocurrió en los trenes españoles, (pulsar el botón verde para abrir la puerta...) debemos construir un nuevo esquema de acción.

A continuación me referiré al papel de los esquemas en la resolución de problemas de enunciado verbal.

En particular quisiera resaltar la presencia cada vez mayor de los esquemas como ayuda para resolver problemas de matemáticas. Me referiré a los esquemas aditivos pero se podría aplicar también a otros más avanzados. En primer lugar quisiera demostrar que las dificultades de los alumnos cuando se enfrentan a la resolución de problemas de enunciado verbal son de carácter cognitivo y de alguna manera universales.

En el artículo se pretende demostrar que la capacidad para resolver problemas de matemáticas depende de los niveles de esquemas y de las estructuras que tienen los chicos y chicas. Se sugiere que si los profesores son conscientes de los esquemas necesarios para asentar cada nivel de aprendizaje y presentan los problemas a los alumnos de la forma más general posible, eso facilitará la resolución.

* Conferencia leída en Tarragona el 12 de febrero de 1998, con motivo del proyecto TIEM98 patrocinado por el Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans.

Traducción: Julio Sancho

ARTÍCULOS

Nombre de la categoría	Características	Ejemplo
1. Combinación	Implica relación estática entre conjuntos. Se pregunta sobre el conjunto unión o sobre uno de los dos subconjuntos disjuntos.	*Hay 3 chicos y 4 chicas. ¿Cuántos son entre todos juntos?*
2. Cambio	Describen incrementos o disminuciones en un estado inicial para producir un estado final.	*Juan tiene 6 canicas. Pierde 2 de ellas. ¿Cuántas canicas tiene Juan ahora?*
3. Comparación	Implica comparación estática entre dos conjuntos. Se pregunta sobre el conjunto diferencia o sobre uno de los conjuntos cuya diferencia se conoce.	*Tomás tiene 6 canicas y José tiene 4. ¿Cuántas canicas más tiene Tomas que José?*

Tabla I. Las tres categorías semánticas generales de problemas de adición y sustracción

Los investigadores han comenzado a estudiar qué hay detrás de las grandes dificultades a las que se enfrentan los alumnos. En un primer momento los investigadores (Carpenter, Moser y Romberg, 1982; De Corte y Verschaffel, 1981; Kintsch, Kozminsky, Streby, Mckoon y Keenan, 1975; Nesher y Katriel, 1977; Nesher y Teubal, 1975; Riley, 1983; Riley y Greeno, 1988; Vergnaud, 1988) establecieron distinciones entre los diferentes problemas

Título	Descripción general	Porcentaje de éxito (%)
Combinación 1	Pregunta sobre el conjunto unión (total)	79-86
Combinación2	Pregunta sobre un subconjunto (parte)	46-52
Cambio 1	Aumento, pregunta sobre el conjunto final	79-82
Cambio 2	Disminución, pregunta sobre el conjunto final	72-75
Cambio 3	Aumento, pregunta acerca del cambio	62-72
Cambio 4	Disminución, pregunta acerca del cambio	75-77
Cambio 5	Aumento, pregunta sobre el conjunto inicial	28-48
Cambio 6	Disminución, pregunta sobre el conjunto inicial	39-49
Comparación 1	Usando «más», pregunta sobre el conjunto diferencia	76-85
Comparación 2	Usando «menos». pregunta sobre el conjunto diferencia	66-75
Comparación 3	Usando «más», pregunta sobre lo «comparado»	65-80
Comparación 4	Usando «menos», pregunta sobre lo «comparado»	66-81
Comparación 5	Usando «más», pregunta sobre el referente	43-60
Comparación 6	Usando «menos», pregunta sobre el referente	35-54

Tabla II. 14 tipos de problema de enunciado verbal de adición y sustracción (categorías semánticas y posición del término desconocido)

aditivos y los agruparon en tres categorías principales: la investigación se hizo en varios países y en todos ellos se coincidió en la misma categorización de los problemas de enunciado verbal. La tabla I presenta estas tres categorías.

Investigaciones adicionales sobre el nivel de dificultad en cada tipo han conducido a una distinción más sutil entre los problemas de cada categoría que se presenta en la Tabla II.

Como se puede observar, cada uno de los 14 problemas presenta un diferente nivel de dificultad. Los problemas de Cambio 5 y 6, en los que se dan el conjunto final y el cambio y el conjunto inicial es el desconocido, son los más difíciles en todos los niveles.

Como en el caso de los problemas de Cambio, la dificultad de los problemas de Combinación y Comparación también varía dependiendo de lo que es desconocido. Los problemas de Combinación 2, por ejemplo, son significativamente más difíciles que los de Combinación 1. Los problemas de Comparación en los que el referente es desconocido son más difíciles que cualquier otro problema de Comparación.

Los inicios

Cuando los niños empiezan a describir el mundo con números, forman la noción de conjunto (Fuson, 1992; Greeno, 1978; Nesher, Greeno y Riley, 1982*b*). Su primer paso matemático será contar objetos. Cuando el niño comienzan la escuela podemos admitir que tiene ya los siguientes esquemas:

En el Nivel 1: El niño ya ha construido los esquemas para contar (*predicativos* y *cardinalidad*) y puede identificar conjuntos a partir de diversas descripciones verbales (nombres de conceptos, localizaciones, situación temporal, posesiones, etc.): esto incluye la capacidad para hacer operaciones simples como añadir o eliminar objetos de los conjuntos y entender que cambia el número de objetos del conjunto. La competencia aritmética consiste en contar y encontrar el cardinal de un conjunto dado (Nesher y otros, 1982*b*). Con este tipo de esquemas, pueden resolver diversos tipos de problemas, contandolo todo, y siempre desde el principio.

En el Nivel 2: El niño es capaz de *encadenar* acontecimientos por causa y efecto y anticipar resultados de acciones descritas en lenguaje ordinario. Decimos que ha construido el *esquema de cambio*. En aritmética, las operaciones "+" y "–" son distintas, no relacionadas y el signo "=" se entiende como una señal para ejecutar un procedimiento. Está subyacente el esquema de cambio.

En el Nivel 3: El niño es capaz de formar un *esquema parte-parte-todo*, que puede usarse para representar relaciones entre conjuntos en las que se desconoce el cardinal de uno de ellos que está definido por comprensión (predicados). Un conjunto puede también definirse mediante comparaciones relativas. Los esquemas en este nivel están relacionados con la comprensión de la inclusión.

En aritmética, en este nivel, la estructura aditiva es reversible e incluye el signo "=" para denotar una relación de equivalencia. Obsérvese que el esquema parte-parte-todo en el nivel 3 es reversible e incorpora además la relación aditiva, que ahora incluye las operaciones "+" y "–" como operaciones inversas que operan sobre la misma estructura.

En el Nivel 4: El niño puede usar el esquema reversible para relaciones no simétricas ((lo que ya se había iniciado en el nivel 2). Puede manejar descripciones direccionales, (ordenadas, por ejemplo «más» o «menos») de una forma más flexible. La artimética, en este nivel, incluye la capacidad de establecer desigualdades y la capacidad de igualar desigualdades mediante sumas o restas.

En la descripción de los anteriores niveles de desarrollo suponemos que, al menos, están involucradas dos tipos distintos de estructuras de conocimiento:

...el crecimeinto lógico-matemático del chico no puede entenderse divorciado de su experiencia con objetos físicos.

a) el conocimiento del mundo que tiene el niño, y

b) su conocimiento de las estructuras lógico matemáticas.

Las fuentes de estas dos estructuras del conocimiento, tal como indicó Piaget (1971, 1976), no son las mismas. Desde luego, el crecimeinto lógico-matemático del chico no puede entenderse divorciado de su experiencia con objetos físicos. No obstante, el mecanismo de este crecimiento es diferente como se indica en las referencias de Piaget a la «abstracción simple» y a la «abstracción reflexiva» (Piaget, 1968; Piaget, 1971 (1967); Piaget e Inhelder, 1969).

Comprensión de los niveles de actuación en la resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal

En la sección anterior hemos hecho un bosquejo de los tipos generales de conocimiento que suponemos subyacen a la resolución de problemas aritméticos. Ahora nos fijaremos en los descubrimientos empíricos y mostraremos cómo se pueden entender a la luz de los niveles de desarrollo anteriores. La Tabla III presenta este desarrollo en dos ámbitos diferentes: el conocimiento empírico del mundo y el conocimiento lógico-matemático.

Nivel	*Conocimiento empírico*	*Operaciones matemáticas*
1 Recuentos	Se refiere a conjuntos, a añadir y quitar elementos a conjuntos. Comprensión de «poner», «dar», «tomar», etc. que denotan cambio en la localización o posesión.	Capacidad para contar y encontrar el cardinal de un conjunto. Ordenación de números $2<5<8$
2 Cambio	Capacidad de encadenar acontecimientos por causa y efecto. Se refiere a la cantidad de cambio. Comprensión de una secuencia de acontecimientos ordenados en el tiempo de forma no reversible.	Comprensión de la suma y resta como procedimientos. "+" y "-" son distintas $a + b \rightarrow c$ $a - b \rightarrow c$
3 Parte-Parte-Todo	Se dispone de un esquema reversible y puede usarse para encontrar la parte desconocida en una secuencia de acontecimientos. Comprensión de la relación de inclusión.	Comprensión de la relación entre tres números en una ecuación ("="). Conexión entre suma y resta: si $a+b=c$ entonces $c-b=a$ y $c-a=b$
4 Relaciones direccionales	Reversibilidad de relaciones no simétricas. Habilidad para manejar descripciones direccionales (más/menos) y cuantificar una relación (comparación relativa).	Capacidad para manejar la desigualdad y su relación con la igualdad, igualandola por adición o sustracción: si $a>b$ entonces $a-c=b$ y $b+c=a$

Tabla III. Aspectos del desarrollo

Explicaremos cómo funcionan de forma coordinada. En referencia a la Tabla III, el nivel 1 se define por la capacidad para representar y operar en conjuntos sencillos. El conocimiento que puede aprovecharse para representar información sobre conjuntos incluye esquemas para identificar conjuntos y la capacidad para representar el cardinal de un conjunto (Riley, 1983; Riley y Greeno, 1988).

Estos esquemas son suficientes para resolver problemas de Cambio 1 y 2 y Combinación 1. Éstos comparten dos características principales:

(1) La estrategia requerida para resolver el problema puede seleccionarse a partir de información parcial y local, y

(2) la solución se puede obtener directamente contando lo elementos del conjunto en el momento en que se hace la pregunta.

Por ejemplo, consideremos como en el nivel 1 un niño puede resolver un problema de Combinación 1:

José tiene 3 canicas.

Tomás tiene 5 canicas.

¿Cuántas canicas tienen entre José y Tomás?

La comprensión de la primera frase requiere que el niño use su conocimiento del verbo posesivo «tener» para representar el conjunto de canicas que tiene José. A partir de ahí, el niño selecciona una manera de representarlo y cuenta un conjunto de tres objetos. Este procedimeinto se repite para la segunda frase. Para dar la respuesta, el niño sólo necesita contar el conjunto reunión. Así, resolver una situación de Combinación 1 supone tres acciones aisladas de recuento de conjuntos bien definidos.

De forma análoga, los problemas de Cambio 1 y 2 pueden resolverse a partir de características locales del problema que especifican acciones de recuento aisladas.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema de Cambio 1:

José tiene 3 canicas.

Entonces Tomás le da 5 canicas más.

¿Cuántas canicas tiene José ahora?

La primera frase de este problema es idéntica a la primera del ejemplo anterior. La segunda frase requiere que el niño, antes de nada, entienda que el verbo «dar» se refiere en este caso a incrementar el conjunto inicial en un número apropiado de canicas. La respuesta, de nuevo ,supone contar los elementos del conjunto descrito por la pregunta. Contándolos todos como una tarea separada de las otras.

El conocimiento que puede aprovecharse para representar información sobre conjuntos incluye esquemas para identificar conjuntos y la capacidad para representar el cardinal de un conjunto.

En contraste, consideremos lo que ocurre cuando la solución no puede determinarse sólo por referencia a la posesión final, como en el caso del Cambio 3:

José tiene tres canicas.

Tomás le da algunas canicas más.

Ahora José tiene 8 canicas.

¿Cuántas canicas la ha dado Tomás a José?

Resolver este problema supone contar el conjunto inicial de 3 canicas, a continuación añadirle 5 canicas en respuesta a la frase «Ahora José tiene 8 canicas». En este punto, la representación del problema, de un niño en el nivel 1, es simplemente el conjunto final de canicas que tiene José. O bien el conjunto de las canicas agrupadas. Así que cuando se pregunta «¿Cuántas canicas ha dado Tomas a José?» el niño responde «ocho» u «once» y no la respuesta correcta, «cinco».

Así que nuestro análisis no sólo explica cómo los niños en el nivel 1 resuelven ciertos problemas con éxito, sino que también por qué en ese nivel fallan al resolver otros problemas que requieren la capacidad de encadenar acontecimientos (como en el caso de los problemas de Cambio 3). Este es el conocimiento que atribuimos a los niños en el nivel 2. Discutiré ahora, con detalle, los otros niveles que aparecen en la tabla. El lector interesado puede buscar más información en Nesher y otros (1982*b*).

La capacidad para resolver problemas como los de Cambio 5 o Cambio 6 en el nivel 3 introduce una de las más poderosas predicciones de nuestro modelo teórico. En estos problemas, los esquemas semáticos que se originan, a través de la experiencia del niño con el lenguaje ordinario, *contradicen* la semántica recientemente aprendida de la suma y resta ("+" y "–"). Por ejemplo, consideremos un problema del tipo Cambio 5:

Daniel tiene algunas canicas.

Encuentra 5 canicas más.

Ahora tiene 8 canicas.

¿Cuántas canicas tenía al principio?

La experiencia del niño con el lenguaje natural le induce a sumar («encontrar» significa «sumar»). Que escoja restar (para llegar a la solución correcta) puede conseguirse sólo si la semantica del lenguaje natural y del lenguaje matemático están diferenciadas como sistemas autónomos, de manera que cada una de ellas pueda, además, desarrollarse para alcanzar la coordinación necesaria entre los dos sistemas. Resolver problemas de Cambio 5 supone interpretar el «estado inicial», el «cambio» y el «estado final» del problema anterior de una forma no temporal sino como una relación parte-parte-todo. De manera que si se conoce una parte y el total, la segunda parte se encuentra restando.

Así que, en este nivel, el niño es capaz de establecer conexiones entre su conocimiento del lenguaje natural y su conocimiento matemático, no sobre la base de señales linguisticas aisladas, sino más bien a partir de la comprensión de la semántica subyacente en ambos lenguajes. Ahora es capaz de imponer la estructura lógico-matemática, que es reversible e independiente del tiempo en una situación secuenciada temporalmente descrita en lenguaje natural.

En resumen, nuestra hipótesis respecto a los niveles de desarrollo explica qué tipo de problemas puede resolver un niño en un determinado nivel. Esto se resume en la Tabla IV.

...nuestra hipótesis respecto a los niveles de desarrollo explica qué tipo de problemas puede resolver un niño en un determinado nivel.

Estructuras matemáticas más complejas

Una vez el niño ha alcanzado el esquema parte-parte-todo, ya ha adquirido una estructura matemática aditiva autónoma que puede servir en todos los contextos en los que se necesita sumar o restar. Esta estructura puede representarse en un diagrama que consiste en tres componentes relacionados (Figura 1). Nótese que, aunque uno de los componentes sea incompleto (o insaturado, es decir, que tiene sólo la descripción del conjunto pero no su cardinal), se puede asignar a cada componente un papel en la relación aditiva (estructura). En el diagrama, las dos cajas superiores representan subconjuntos, mientras que la caja inferior representa la unión de los dos subconjuntos.

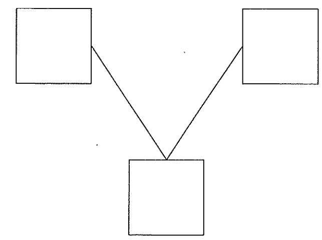


Figura 1: Esquema parte-parte-todo

Considerando el anterior esquema como un objeto matemático se pueden construir jerarquías matemáticas superiores que pueden servir como esquemas para situaciones más complejas.

Por ejemplo, en la figura 2 se presentan esquemas que muestran las posibles situaciones para problemas de dos pasos.

Tipo de problema	*Nivel 1*	*Nivel 2*	*Nivel 3*	*Nivel 4*
Combinación 1	X			
Combinación 2			X	
Cambio 1	X			
Cambio 2	X			
Cambio 3		X		
Cambio 4		X*		
Cambio 5			X	
Cambio 6			X	
Comparación 1			X	
Comparación 2			X	
Comparación 3			X	
Comparación 4			X	
Comparación 5				X
Comparación 6				X

Tabla IV

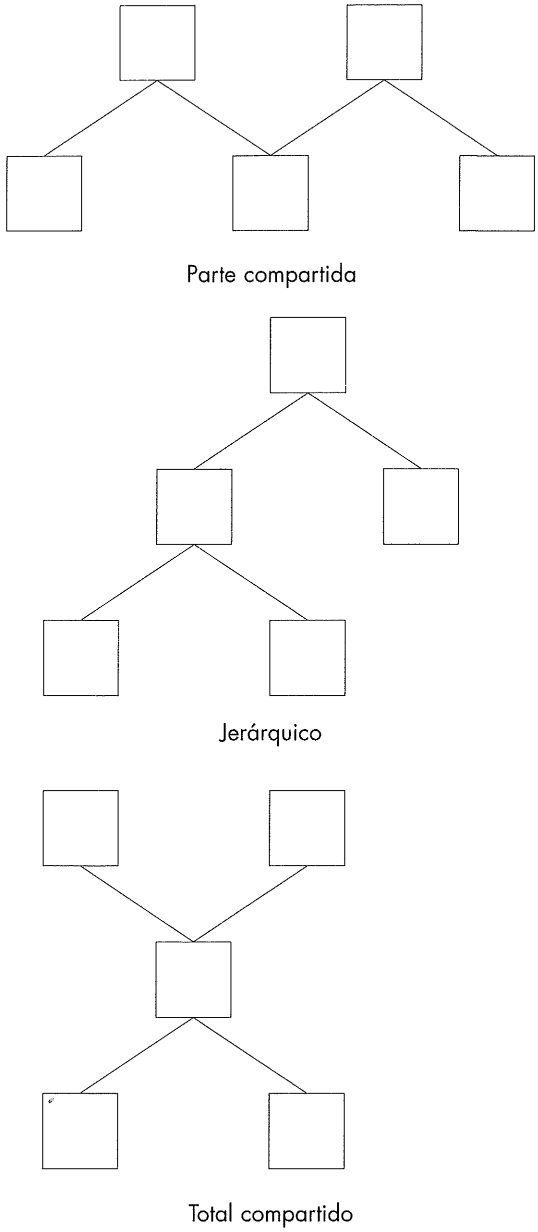


Figura 2. Esquemas más complicados para problemas de dos fases

El hecho de que los esquemas que se usan en matemáticas son un número limitado, aunque corresponden a muchas situaciones en las que pueden aplicarse, debería conducirnos a enseñar las matemáticas vía los esquemas generales.

Vamos a describir ahora algunas situaciones que se pueden modelar con los esquemas anteriores.

Situación I

Consideremos, por ejemplo, los problemas siguientes:

Problema 1: Un total de 35 flores se distribuyen en 7 floreros. En cada florero hay 3 tulipanes y el resto son rosas. ¿Cuántas rosas hay en cada florero?

Problema 2: Un total de 35 flores se distribuyen en floreros. En cada uno de ellos hay 3 tulipanes y 4 rosas. ¿Cuántos floreros hay?

Problema 3: Se ditribuyen flores en 7 floreros. En cada uno de ellos hay 3 tulipanes y 4 rosas. ¿Cuántas flores hay entre todos los floreros?

Problema 4: Un total de 35 flores se distribuyen en 7 floreros. En cada uno de ellos hay 4 rosas y el resto son tulipanes. ¿Cuántos tulipanes hay en cada florero?

Cada uno de los problemas anteriores tiene la misma estructura. Es la misma situación, pero se pregunta cada vez sobre un componente distinto. Lo representa la siguiente figura:

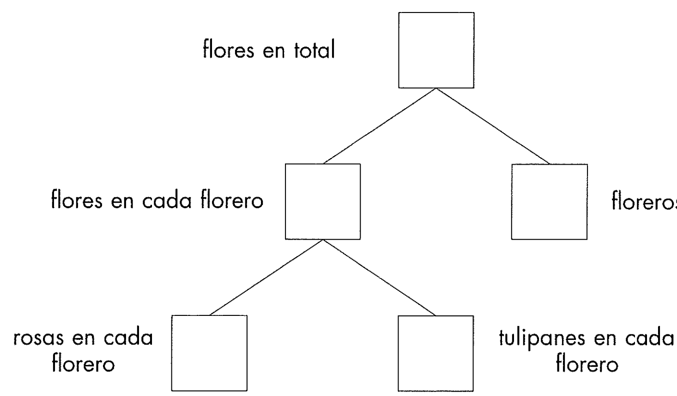


Figura 3. Esquema de la Situación 1

Esta era una situación descrita mediante un esquema *jerárquico*. A continuación describimos una situación mediante un esquema de *total compartido*.

Situación II

Ilustra el esquema de *parte compartida*.

En la clase hay 30 niños. 12 de ellos son chicos y el resto son chicas. Se dividen en 5 grupos iguales. ¿Cuántos niños hay en cada grupo?

Situación III

Que ilustra el caso del esquema de *parte compartida*:

> 17 niños fueron a una fiesta. 12 eran chicos y el resto chicas. Al final de la fiesta, se repartieron 15 flores entre las chicas. Cada una de ellas recibió la misma cantidad de flores. ¿Cuántas flores recibió cada chica?

Desde luego, a partir de las situaciones II y III pueden elaborarse otros problemas, de la mism forma que se ha detallado en la situación I. Todas las situaciones anteriores comparten algunas caracteísticas comunes, que pueden ser enfatizadas cuando se enseña este tipo de problemas.

Esquemas generales y problemas abiertos

Enseñar a través de los esquemas significa enseñar mediante los casos más generales. Presentaré dos problemas diferentes como ejemplo.

> *Problema 1*
>
> Raul visitó una granja. Vio vacas y pollos. No recuerda cuántos vio pero sí se acuerda de que el guía le contó que entre todos ellos había 100 patas. ¿Cuántos vacas y cuántos pollos había allí?

Desde luego, hay más de una respuesta a esta pregunta. Se podrían acertar una o dos soluciones, aunque el proceso interesante es conocer todas la posibles respuestas y también contestar otras cuestiones como:

1) ¿Es posible que haya el mismo número de patas de pollo que de vaca?
2) ¿Es posible que haya el mismo número de cabezas de pollo que de vaca?
3) ¿Es posible que haya un número impar de pollos?
4) ¿Cuál es el mínimo número de pollos, si hay de los dos tipo de animales en la granja? ¿Y el máximo?
5) ¿Cuáles son las posibilidades si hay más vacas que pollos?
6) Haz tus propias preguntas...

Si se tiene un esquema general para este tipo de problemas, se pueden comprender fácilmente todas las posibles alternativas y responder a muchas preguntas.

> *Problema 2*
>
> Dos coches salen de Barcelona para visitar otra ciudad. El coche B salió 3 horas después que el coche A.

1) ¿Pueden coincidir en su viaje? ¿Bajo qué condiciones?
2) ¿Dónde se encontrarán?
3) ¿A qué distancia de Barcelona se encontrarán?
4) ¿Cuál sería la descripción de dos coches viajando uno al encuentro del otro?
5) Haz tus propias preguntas...

De la misma forma se puede construir un esquema general para coches que viajan en direcciones opuestas y coinciden en algún momento de su viaje, y pueden usarse los mismos esquemas en otros contextos como el trabajo, voltaje, etc.

Una vez se ha generado un esquema para estos problemas se puede ver que los problemas de los libros de texto es, tan sólo, un caso entre otros muchos, que los casos particulares no son importantes, que lo que cuenta es el esquema general.

...la capacidad para resolver problemas de matemáticas depende del nivel de los esquemas y de las estructuras de que disponen los niños y que éstos cambian con el transcurso del tiempo y del aprendizaje. Los alumnos pueden beneficiarse más si somos conscientes de los esquemas necesarios en cada nivel de aprendizaje y presentamos los problemas en su forma más general.

Algunas conclusiones

He tratado de demostrar que la capacidad para resolver problemas de matemáticas depende del nivel de los esquemas y de las estructuras de que disponen los niños y que estos cambian con el transcurso del tiempo y el aprendizaje. Los alumnos pueden beneficiarse más si somos conscientes de los esquemas necesarios en cada nivel de aprendizaje y presentamos los problemas en su forma más general.

Bibliografía

CARPENTER, T. P., M. J. MOSER y T. ROMBERG (Eds.) (1982): *Addition and Subtraction: A Cognitive Aproach*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ.

DE CORTE, E. y L. VERSCHAFFEL (1981): «Children's Solution Processes in Elementary Arithmetic Problems: Analysis and Improvment». *Joumal of Educational Psychlogy*, 73(6), 765 -779.

FISCHBEIN, E. (1997): *The Concept of Schema and its Relevance for the Education of Mathematics Teachers*. (draft).

FUSON, K. (Ed.) (1992): *Research on Whole Number Addition and Subtraction*, Macmillan, New York.

GREENO, J. G. (1978): «Understanding and Procedural Knowledge in Mathematics Instruction», *Educational Psychologist*, 12(3), 262 - 283.

INHELDER, B., H. SINCLAIR y M. BOVET (1974): *Leaming and the Development of Cognition*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

KINTSCH, W. y otros (1975): «Comprehension and Recall of Text as a Function of Content Variables», *Joumal of Verbal Leaming and Verbal Behavior*, 14(2), 196-214.

NESHER, P., J. J. GREENO y M. S. RILEY (1982*b*): «The Development of Semantic Categories for Addition and Subtraction», *Educational Studies in Mathematics*, 13, 373-394.

NESHER, P. y T. KATRIEL (1977): «A Semantic Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in Arithmetic»., *Educational Studies in Mathematics*, 8, 251-269.

NESHER, P., y TEUBAL, E. (1975). «Verbal Cues as an Interfering Factor in Verbal Problem Solving». Educational Studies in Mathematics. 6, 41-51.

PIAGET, J. (1968): «Quantification, Conservation, and Nativism»., *Science*, 162, 976-981.

PIAGET, J. (1971 (1967)): *Biology and Knowledge* (B. Walsh, Trans.), The University of Chicago Press, Chicago.

Pearla Nesher
Universidad de Haifa.
Israel

PIAGET, J. (1985): *The Equilibrium of Cognitive Structures*, University of Chicago Press, Chicago.

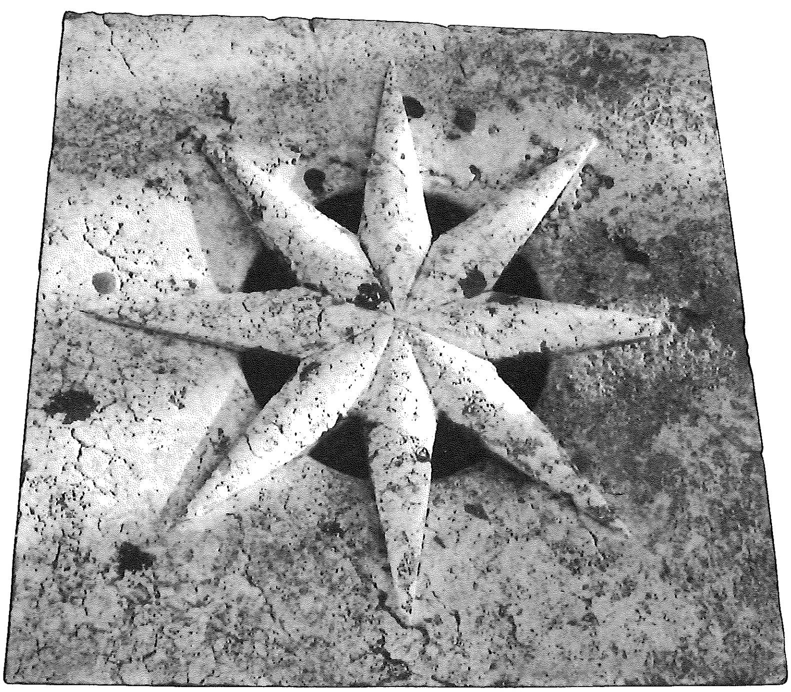
PIAGET, J. y B. INHELDER (1969): *The Psychology of the Child*, Basic Books, New York.

RILEY, M. S., J. G. GREENO y J. I. HELLER (Ed.) (1983): *Development of Children's Problem Solving Ability in Arithmetic*, Academic Press, New York.

RILEY, M. S. y J. G. GREENO (1988): «Developmental Analysys of Understanding Language about Quantities and of Solving Problems», *Cognition and Instruction*, 5(1), 49-101.

RUMELHART, D. E. (1980): «Schemata: The Building Blocks of Cognition», en R. T. Spiro, B. C. Bruce y W. F. Brewer (Eds.), *Theoretical Issues in Reading Comprehension*, Erlbaum, Hillsdale, NJ.

VERGNAUD, G. (1988): «Multiplicative Structures», en R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes*, Academic Press, New York.



Plaza de España.
Roma

Foto: Luis Balbuena

SUMA 31
junio 1999, pp. 27-35

Paradojas matemáticas para la formación de profesores

Pablo Flores Martínez

ARTÍCULOS

La actual reforma de la enseñanza de las Matemáticas propone cambiar la idea de que el profesor es un agente que transmite un conocimiento cultural único y preestablecido. Para que el profesor se sienta partícipe de este cambio tiene él mismo que afrontar un cambio actitudinal en relación al conocimiento matemático, y en relación a la enseñanza. En este artículo proponemos el empleo de paradojas matemáticas para provocar conflictos cognitivos en el sujeto, de manera que se vea abocado a revisar de manera crítica sus concepciones y a adoptar nuevas soluciones. Presentamos una secuencia para emplear en la formación de profesores basada en una paradoja y el análisis de la paradoja desde diversos campos de la matemática.

LA REFORMA de la enseñanza de las Matemáticas que está en curso (NCTN, 1991; MEC, 1992) aboga por unas Matemáticas abiertas a todos los alumnos y por un método más participativo de enseñanza, con mayor protagonismo del alumno. Pone el énfasis en el «proceso» de hacer Matemáticas, más que considerar el conocimiento matemático como un «producto» acabado. Así en el Curriculum de Educación Secundaria de Andalucía (pág. 4188) se indica:

> El Curriculum del Área de Matemáticas (...) quiere partir de una concepción de este Área integradora y cultural, superadora de la visión academicista, encerrada en sí misma y principalmente basada en la deducción que con frecuencia la ha caracterizado.

Para llevar a cabo esta renovación en la enseñanza es preciso que los profesores compartan sus intenciones epistemológicas. La formación de profesores tiene que ayudar a los profesores en formación a tomar en consideración esta visión epistemológica, para lo que debe buscar estrategias de formación que favorezcan el cambio epistemológico.

No basta con formar profesores que busquen la eficacia en la transmisión de conocimientos matemáticos establecidos. Tampoco es suficiente el que los profesores incorporen a su clase hábitos más abiertos y democráticos de actuación y participación de sus alumnos. Se trata de que los profesores busquen los significados educativos de los contenidos matemáticos y establezcan estrategias formativas acordes con ello. Una de las formas de hacer más educativa la enseñanza de las matemáticas es procurar que los alumnos «hagan matemáticas».

Pero aquellos que estudian para convertirse en profesores y los profesores no experimentados tienden a concebir la enseñanza como la transmisión de un producto externo, único, de quien lo conoce a quien no lo conoce. Los cursos de formación tienen que procurar cambiar esta expectativa de los futuros profesores, y hacerles asumir su papel profesional: son educadores matemáticos. Para llegar a hacer patente esta propuesta, es necesario que los que estudian para ser profesores sientan que ellos «también pueden hacer matemáticas». Además, es preciso que rompan la visión unidimensional de la matemática, que hace que se identifique geometría con álgebra lineal, álgebra con teoría de ecuaciones o análisis con estudio de curvas. Se trata de mostrar que los problemas matemáticos pueden contemplarse de formas variadas, y al hacerlo de esta forma se amplia la riqueza interpretativa de estos problemas.

Con vista a este fin, en este artículo presentamos una secuencia de razonamiento matemático basado en la resolución de una paradoja matemática, con la intención de que dicha propuesta se utilice en los cursos de formación de profesores de matemáticas de secundaria. El análisis matemático y didáctico de las tareas relacionadas con la paradoja nos permitirá mostrar la riqueza interpretativa de significados y formas de representación de los conceptos matemáticos ligados a ella. Creemos que mediante la realización de módulos formativos basados en la búsqueda de significado y de resolución de paradojas podemos poner a los estudiantes en formación a «hacer matemáticas». De esta forma percibirán que se puede hacer matemáticas a partir de problemas elementales, y podrán comprender mejor la propuesta que se está haciendo para que sus alumnos «hagan matemáticas en clase».

En el punto siguiente haremos algunas reflexiones sobre el interés que tiene emplear paradojas en la formación de profesores, cuando se trata de provocar en ellos un cambio de actitudes hacia la enseñanza de la matemática. Posteriormente, presentaremos una secuencia de enseñanza basada en la aparición de una paradoja relacionada con las operaciones con segmentos, y al analizar esta paradoja mostraremos que el estudio desde diversas perspectivas nos ayuda a comprender mejor la situación sorprendente que encierra la paradoja. Finalmente haremos algunas consideraciones sobre las cualidades educativas de las paradojas para la formación de profesores de matemáticas de secundaria.

Paradojas y formación de profesores de matemáticas

La formación de profesores de Matemáticas parte, en la actualidad, de una postura epistemológica constructivista de las Matemáticas. Esta postura está en consonancia con la concepción constructivista del aprendizaje (von Glasersfeld, 1989) según la cual el propio alumno construye el conocimiento, a partir de sus estructuras cognitivas anteriores. Si se quiere formar profesores para que ayuden a sus alumnos a construir su aprendizaje, habrá que realizar esta formación mediante actividades que permitan al profesor en formación generar su propio aprendizaje del conocimiento profesional del profesor. Como consecuencia, la formación de profesores se apoyará en procesos interpretativos, críticos, de investigación sobre la tarea profesional, basados en la indagación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, siempre partiendo del conocimiento del profesor en formación sobre la tarea docente.

...presentamos una secuencia de razonamiento matemático basado en la resolución de una paradoja matemática, con la intención de que dicha propuesta se utilice en los cursos de formación de profesores de matemáticas de secundaria.

Con esta formación crítica se pretende que el profesor busque significados de su conocimiento profesional, y por tanto, de su conocimiento matemático y de sus cualidades educativas. Sin embargo, el profesor en formación inicial está habituado a razonar en matemáticas, y parece que «domina las matemáticas» suficientemente, con lo que sólo demanda para su formación estrategias de «enseñanza» del conocimiento matemático establecido. Para que el estudiante para profesor rompa esa actitud, desde el paradigma de formación de profesores basado en la reflexión en la acción, se están proponiendo la utilización de paradojas, metáforas, etc. como base para suscitar la reflexión de los profesores en formación (Smyth, 1991).

La idea de utilizar paradojas y metáforas no es nueva en educación matemática. Entre las investigaciones relacionadas con las creencias de los profesores sobre las Matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, hay algunas que han empleado elementos evocadores, para facilitar que los estudiantes expresen sus representaciones sobre la enseñanza de las matemáticas. Johnston (1994) estudió las características personales de tres profesores canadienses, empleando para su análisis las metáforas con las que el profesor caracteriza la enseñanza. Bullough y Stokes (1994), utilizaron las metáforas como un medio para la exploración de los profesores por ellos mismos. Hoyles (1992) ha empleado *caricaturas* para sintetizar las visiones, actitudes y prácticas de diversos sujetos de los que ha realizado estudios de casos. Nosotros hemos propuesto en otro momento los chistes sobre las Matemáticas y la enseñanza (Flores, 1996) y las metáforas sobre la eseñanza (Flores, 1998), como forma de facilitar la comunicación entre los educadores matemáticos o entre los formadores y los profesores en formación.

Movshovitz-Hadar y Hadass (1990) ya han empleado paradojas en la formación de profesores de Matemáticas en Israel. La investigación realizada llevó a estos autores a afirmar que las paradojas matemáticas proporcionan un campo conveniente para una revisión no rutinaria y refinada de los materiales del bachillerato, y hace que se genere en los estudiantes para profesor conflictos cognitivos. En este artículo nos basamos en esta idea, y hacemos una propuesta de formación centrada en el significado matemático de los objetos relacionados con la paradoja. Tratamos con ello de mostrar la riqueza interpretativa que puede generar.

Precisemos qué se entiende por paradoja y el tipo de paradojas que vamos a considerar en nuestra propuesta.

Watzlawick y otros (1981) definen paradoja como «una contradicción que resulta de una deducción correcta a partir de premisas congruentes» (pág. 173). Estos autores clasifican las paradojas en tres tipos:

1. lógico-matemáticas o antinomias (paradojas sintácticas, como la que está ligada al conjunto de los conjuntos que no se pertenecen a sí-mismos);
2. definiciones paradójicas o antinomias semánticas (paradojas semánticas, como la del mentiroso: «soy un mentiroso»);
3. paradojas pragmáticas, que pueden ser instrucciones paradójicas (como la que resulta cuando el capitán que ordena al soldado barbero que afeite a todos los soldados que no se afeitan a sí mismos) y predicciones paradójicas (como la resultante de la imposibilidad de poner un examen sin avisar, incluyendo la paradoja del prisionero).

Watzlawick y otros (1981) definen paradoja como «una contradicción que resulta de una deducción correcta a partir de premisas congruentes»

Martin Gardner (1983) indica que las paradojas que emplea en su libro *Paradojas aja!* (pág. vii) corresponden a cuatro tipos:

1. Afirmaciones que parecen falsas, aunque en realidad son verdaderas.
2. Afirmaciones que parecen verdaderas, pero que en realidad son falsas.
3. Cadenas de razonamiento aparentemente impecables, que conducen sin embargo a contradicciones lógicas (falacias).
4. Declaraciones cuya verdad o falsedad es indecidible.

Las paradojas que nosotros vamos a proponer corresponden a los dos primeros tipos de Gardner: afirmaciones que parecen falsas/verdaderas, pero en realidad son verdaderas/falsas. De esta forma vamos a proponer un razonamiento «contrario al sentir común que provoca un sentimiento de sorpresa» (Gardner, pág vii). Pero nuestra idea es que no se reduzcan a un sentimiento de sorpresa, sino que incluyan una componente que esté ligada al significado de los conceptos matemáticos utilizados. Se trata de provocar una sorpresa que ponga de manifiesto que no se dominan los conceptos en toda su extensión, pero que es posible profundizar para buscar una explicación conceptual, que no se reduzca a analizar la forma de expresión de los conceptos. Con ello, las paradojas que vamos a considerar podríamos incluirlas en las paradojas pragmáticas de Watzlawick.

Hemos buscado paradojas que se manifiesten como contrarias al sentir en determinado contexto, pero que tras un estudio más fino, puedan desaparecer o explicarse. Nuestra intención es presentar conceptos matemáticos, razonamientos, etc. que en una primera visión aparezcan como paradójicos para el estudiante para profesor, es decir, que contradiga sus expectativas intuitivas. Esperamos que de esta forma el estudiante para profesor, que está habituado a que el razonamiento matemático sea unívoco, correcto, válido y no contradictorio, se sienta obliguado a buscar la interpretación más amplia de la afirmación y/o razonamiento paradójico, y profundice en el sentido de los conceptos matemáticos ligados a esa *paradoja*. No vamos, pues, a entrar en las clásicas paradojas que, con su aparición, han moldeado la historia de la matemática. Nos interesan las paradojas que llevan a profundizar en conceptos matemáticos, para percibir la riqueza de relaciones que existen entre los componentes de los conceptos.

Antes de exponer la paradoja que hemos analizado en profundidad, veamos algunas paradojas clásicas y su potencialidad de significados matemáticos.

La paradoja de Ball, (Gardner, 1956), que aparenta la pérdida de la superficie de una unidad en un rectángulo de 169 unidades de superficie en un proceso de descomposición y recomposición de figuras (figura 1). Esta paradoja reune las siguientes características, que cubren las expectativas que pretendemos:

a) es aparentemente sorprendente,

b) tiene una solución no trivial,

c) está relacionada con otros conceptos de la matemática (en el caso de la paradoja de Ball, su generalización nos hace llegar a la sucesión de Fibonacci, y al número de oro), y

d) es expresable en diferentes sistemas de representación (en esta paradoja se relacionan la representación numérica-aritmética de los términos de la sucesión de Fibonacci, la algebraica mediante la búsqueda de la solución de la ecuación/inecuación y la geométrica, mediante el cálculo de pendientes, la determinación de las superficies y la identificación de las figuras que se ponen en juego).

Otra paradoja muy clásica es la del reparto de camellos, que ya tratamos en Gamiz y Flores (1996), y en las que aparece un elemento importante, como es el paso al límite, y la relación aritmética ligada a las fracciones. La primera paradoja que solemos tratar en los cursos de formación de profesores es la que se refiere a la idea de número decimal periódico y la controversia de los números de período 9.

En este artículo vamos a desrrollar con mayor detalle una paradoja relativa a las *operaciones con segmentos.*

Una paradoja en las *operaciones con segmentos*

Para que un razonamiento dé lugar a una paradoja es necesario situarlo. Vamos a proponer una secuencia de actividades que van a crear un marco adecuado para realzar la paradoja.

Primera Tarea. Dado un círculo, dibujar otro círculo concéntrico con el primero que tenga de superficie la mitad de la superficie del primero

La resolución de este problema puede llevarse a cabo de muchas formas; la más espectacular consiste en dibujar el círculo inscrito en el cuadrado inscrito en el primer círculo. La generalización de este problema puede dar lugar a diversas líneas de trabajo que suponen un manejo de la representación aritmética-algebraica y la geométrica.

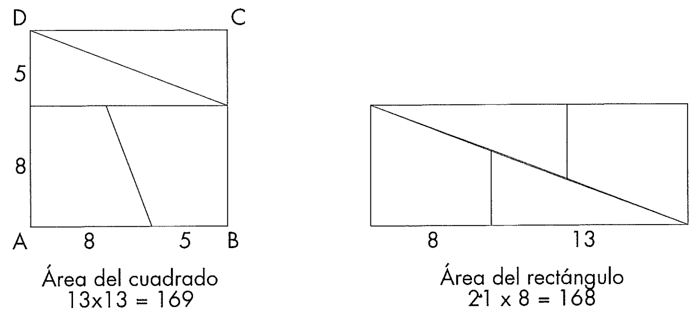


Figura 1. Paradoja de Ball

Para que un razonamiento dé lugar a una paradoja es necesario situarlo. Vamos a proponer una secuencia de actividades que van a crear un marco adecuado para realzar la paradoja.

Una *primera generalización* consiste en obtener con regla y compás círculos cuya área sea: la tercera parte, dos terceras partes, cuarta parte, tres cuartas,..., en general m/n veces el área del círculo original.

Un método general para estas construcciones es el basado en la espiral de triángulos de hipotenusas irracionales crecientes (2, 3, 4, etc.) (figura 2). También se podría afrontar la búsqueda de métodos particulares para algunos casos. Un *problema intermedio* que surge al resolver esta primera línea de cuestiones consiste en *obtener el radio de una circunferencia concéntrica con dos circunferencias que forman una corona, tal que determine con ellas coronas circulares de igual área.*

El método de dibujar el cuadrado inscrito en la circunferencia y luego inscribir otra circunferencia en el cuadrado es un caso particular de inscripción y circunscripción de polígonos regulares en circunferencias. *Otra forma de generalización* de la tarea: *determinar en qué proporción dividen al área del círculo los círculos inscritos en los polígonos regulares inscritos en el círculo original.* Para resolver esta tarea podemos emplear las razones trigonométricas de los ángulos de los polígonos regulares, con lo que surge *otra línea de generalización: ¿De qué ángulos se pueden calcular el valor exacto de sus razones trigonométricas? ¿Cómo averiguar si un ángulo admite razones trigonométricas exactas?* Estas

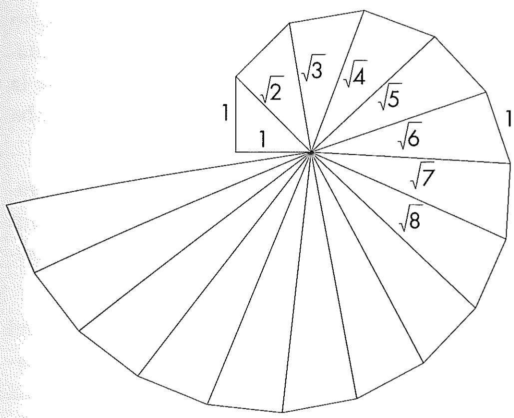


Figura 2. Espiral de irracionales

preguntas nos llevan hasta los límites de cálculo de razones trigonométricas de ángulos que sean combinación lineal de ángulos conocidos.

La resolución de estas tareas está insistiendo en la obtención del resultado de *multiplicar un segmento* (el radio del círculo original), *por un número irracional.* Esta operación es relativamente fácil cuando el número irracional es algebraico.

Segunda Tarea (Cuadratura del rectángulo). Dado un rectángulo, dibujar un cuadrado de igual área que el rectángulo

Esta segunda tarea es aparentemente paradójica, sobre todo si se intenta resolver desde el álgebra. En efecto, el cuadrado de igual área que el rectángulo de lados a y b debe tener de lado la raíz cuadrada del producto $a{\cdot}b$, y esto ¿qué significa?

Empecemos con un ejemplo más fácil. Queremos cuadrar un triángulo equilátero, con lo que sólo tendremos un dato en la figura de partida, el lado a. El área del triángulo es:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Luego el lado del cuadrado debe medir:

$$\frac{a\sqrt[4]{3}}{2}$$

¿Cómo obtener el segmento raíz cuadrada de un segmento? ¿Cómo obtener el segmento raíz cuarta de 3?

Esta supuesta paradoja se resuelve de manera geométrica mediante dos métodos ingeniosos. El primero es de naturaleza puramente geométrica, y consiste en aplicar el Teorema de la Altura correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, (*la altura es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a la hipotenusa*). Con ello podemos dibujar un segmento x tal que su cuadrado sea igual a $a{\cdot}b$, tal como necesitábamos en la cuadratura del rectángulo. En la figura 3 aparece este método de cuadrar un rectángulo, y la cuadratura del triángulo equilátero. El segundo método es fundamentalmente algebraico, y consiste en hacer transformaciones con la igualdad $x{\cdot}y = h^2$, tal como indica la figura 4.

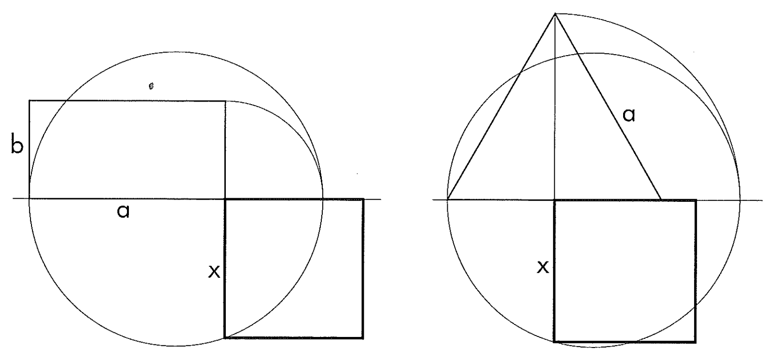


Figura 3. Primera cuadratura del rectángulo y del triángulo equilátero

Si $x{\cdot}y = h^2$, entonces, $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy = (2h)^2$. Luego $[(x+y)/2]^2 - [(x-y)/2]^2 = h^2$. Para construir h basta con construir un triángulo rectángulo de hipotenusa $(x+y)/2$, y de cateto $(x-y)/2$. El otro cateto medirá h.

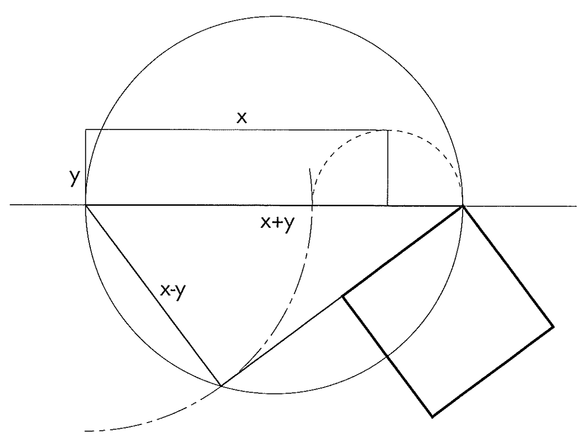


Figura 4. Segunda cuadratura del rectángulo

Teniendo en cuenta que todo polígono se puede descomponer en triángulos, y todo triángulo es la mitad de un paralelogramo, cuya superficie es la misma que la de un rectángulo de base y altura la del paralelogramo, al resolver la tarea 2 podemos afirmar que todo polígono es convertible en una suma de cuadrados. ¿Sería posible transformar cualquier polígono en un cuadrado? Esta es una línea de investigación que dejamos abierta.

Nos interesa más una segunda línea de generalización, la realización del problema inverso.

Tercera Tarea. Dado un segmento a, dibujar el segmento cuya longitud sea la raíz cuadrada de la longitud de a.

A partir de la tarea anterior se comprende fácilmente que el segmento buscado será el lado del cuadrado de superficie igual a la longitud del segmento *a*. ¿Cómo calcular un segmento con longitud igual a la superficie de un rectángulo? ¿Es posible realizarlo?

Para afrontar esta tarea podríamos dibujar un rectángulo cuyos lados fueran *a* y el segmento de longitud unidad (media proporcional entre 1 y *a*). De esta forma, el área del rectángulo sería igual a la longitud de *a*. Al cuadrar este rectángulo obtenemos el segmento cuya longitud es *a*.

Pero tal como se ve en esta figura 5, la longitud buscada *depende de la unidad de longitud que tomemos*. Aquí está la paradoja que buscábamos.

Para resolver esta paradoja vamos a trabajar con diversas formas de representación del problema: algebraica, magnitudes, geométrica y aritmética.

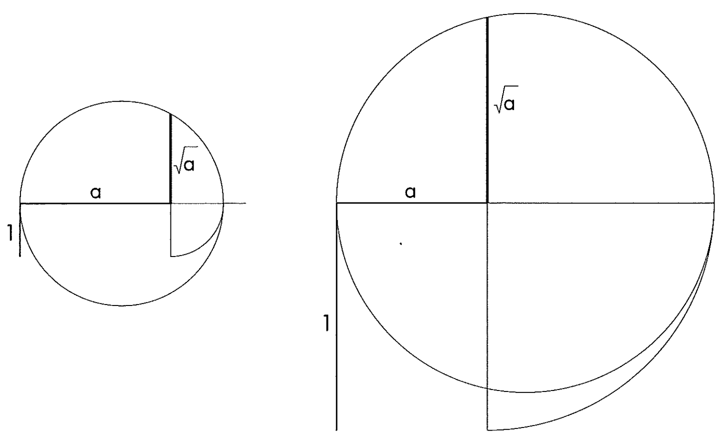


Figura 5. Cálculo del segmento raíz cuadrada de la longitud de otro

¿Cómo es posible que la raíz cuadrada de un segmento dependa de la unidad de longitud? ¿Por qué no depende de la unidad de longitud el resultado de multiplicar un segmento por un número? ¿Qué ha cambiado en este caso respecto a la primera tarea?

En efecto, los resultados de la tarea 1 eran únicos, independientes de las unidades tomadas, ya que se basaban en relaciones entre áreas, y éstas no podían variar (el círculo inscrito al cuadrado inscrito tiene de área siempre la mitad de la del círculo original) ¿Qué ha cambiado?

Para resolver esta paradoja vamos a trabajar con diversas formas de representación del problema: algebraica, magnitudes, geométrica y aritmética.

a) *resolución algebraica:* partamos del estudio de la función irracional cuadrática. Sabemos que la función raíz cuadrada de *x*, está definida en $\mathbb{R}^+$ donde es estrictamente creciente, con un mínimo absoluto en el 0 y con una rama parabólica cuando x crece. Si comparamos esta función con la función lineal y = x, observamos que se corta en x = 1, y que como función creciente, está por encima de la función lineal cuando x es menor que la unidad, y por debajo cuando *x* es mayor. Aparece pues una primera explicación de la paradoja: *la raíz cuadrada de un número es mayor o menor que dicho número según sea este número menor o mayor que la unidad.* Sería pues inconsecuente que la raíz de la longitud de un segmento fuera siempre la misma cantidad, independientemente de la relación de esta longitud con la cantidad unidad. En la figura 6 se sintetiza este estudio algebraico de la paradoja, en la que se observa la forma de construir la gráfica de la función raíz cuadrada de x geométricamente.

   Esta explicación tiene que ser compatible con la unicidad del resultado de multiplicar un segmento por un número. ¿No es cierto que cualquiera que sea la relación de *a* con la unidad, 2·*a* es mayor siempre que *a*? ¿Debería pues ser multiforme también el resultado de multiplicar un segmento por un número? Para aclarar estas cuestiones es conveniente afrontar otras formas de representación.

b) *Consideración como magnitudes.* Formalmente, una magnitud es un semimódulo, construido sobre un

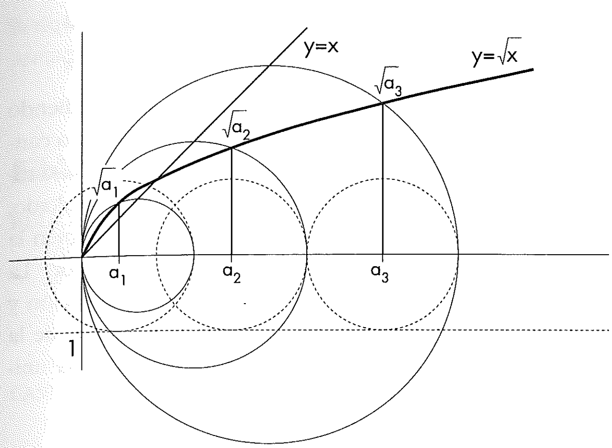


Figura 6. Obtención de la función raíz cuadrada de x geométricamente, y su relación con y=x.

conjunto de cantidades, entre las que se establece una suma que lo estructura como semigrupo, una ordenación compatible con la suma, y una operación externa definida sobre un semianillo.

En el caso de la longitud, partimos de los segmentos, que clasificados mediante una relación de equivalencia (AB es equivalente a CD si y sólo si existe una transformación plana que lleva a hacerlos coincidir), definen cantidades de longitud (la cantidad de longitud representada por un segmento *a* corresponde con la de todos los segmentos equivalentes a *a*). Se define la suma de cantidades de longitud *a* y *b* mediante la selección de dos segmentos de estas clases, que se encuentren en la misma recta, uno a continuación del otro, con lo que la cantidad suma es la clase a la que pertenece el segmento formado por la unión de ambos. La suma de cantidades de longitud es una cantidad *única*, independiente de los representantes tomados. El orden de cantidades de longitud se define de igual modo que la equivalencia, buscando segmentos de la clase que tengan un origen común, y comparando los extremos.

Nótese que estamos operando con cantidades de longitud, y por tanto, no necesitamos los números, con lo que la asociación de la unidad a una cantidad no aparece por ningún lado. Los números aparecen como operadores mediante la operación externa: la multiplicación de un número natural por una cantidad de longitud se obtiene mediante suma repetida; la multiplicación de un número racional m/n por una cantidad de longitud *a* se obtiene buscando otra cantidad de longitud *b*, tal que m·*a* = n·*b*. La multiplicación de un número irracional por una cantidad de longitud se realiza mediante un paso al límite de multiplicaciones racionales.

Llamamos medida de una magnitud al homomorfismo entre la magnitud y un semimódulo numérico, que conserva el orden. La medida de una magnitud es pues, una correspondencia que asocia a cada cantidad un número. En esta aplicación lineal se debe conservar la operación externa.

Cuando realizábamos la primera tarea, estábamos multiplicando cantidades de longitud por números irracionales, mediante la operación externa. El resultado era, pues, una cantidad de longitud, y, tal como hemos dicho para la suma (la multiplicación externa se reduce a una suma), este resultado es único.

Llamamos *medida* de una magnitud al homomorfismo entre la magnitud y un semimódulo numérico, que conserva el orden. La medida de una magnitud es pues, una correspondencia que asocia a cada cantidad un número. En esta aplicación lineal se debe conservar la operación externa. Para realizar la medida comenzamos por asociar a una cierta cantidad de magnitud la unidad del semimódulo numérico. Esta asociación es arbitraria, con lo que *la medida de una cantidad dependerá de como hagamos la asociación unitaria.*

Para medir la longitud, se comienza por establecer una longitud a la que se le asocia la unidad (unidad de medida), y a partir de ella se asigna una medida a cada cantidad. Dada una cantidad de longitud, su medida dependerá de la cantidad unidad adoptada. Recíprocamente, si queremos dibujar un segmento de medida dada, necesitamos previamente indicar cual es la unidad de medida. La cantidad de longitud es única, pero su medida depende de la cantidad unidad elegida.

En la tercera tarea, buscábamos la raíz cuadrada de la *medida* de una cantidad de longitud, y esta *medida* depende de la cantidad tomada como unidad. En la primera tarea buscábamos la *cantidad* de longitud resultante de multiplicar una cantidad por un número y esta operación no depende de la unidad, ya que no corresponde con medida de longitudes.

Desde el punto de vista aritmético, la raíz cuadrada está relacionada con la potencia, y ésta es una multiplicación. Detrás de la tercera tarea se esconde *la multiplicación de* medidas *de cantidades de longitud.* Sabemos que mediante el *ábaco continuo* se puede realizar la multiplicación y división de números representados en la recta real, de manera gráfica, basándose en el *Teorema de Thales*. Pero, tal como se puede ver, esta multiplicación es *de medidas de segmentos,* no de cantidades de longitud, con lo que su resultado depende igualmente de la unidad adoptada, y la multiplicación *aparentemente interna* entre *segmentos*, depende de la unidad de medida.

c) *Consideraciones aritméticas.* Hemos llegado, pues, a establecer una relación entre la supuesta paradoja y la característica y significado de las operaciones que se están poniendo en juego. El análisis de la multiplicación desde el punto de vista aritmético puede añadir algún resultado interesante. La multiplicación responde a problemas fundamentalmente de dos tipos (Vergnaud, 1983): isomorfismo de medidas y multiplicación de medidas. La primera responde a problemas del tipo A y la segunda a problemas como el B siguientes:

A) Tengo 4 cajas, en cada una de las cuales hay 5 lápices. ¿Cuántos lápices tengo en total?

B) Tengo 4 camisas y 5 pantalones, ¿de cuántas maneras diferentes puedo vestirme?

¿Qué tipo de operaciones son las planteadas en estos dos problemas? ¿Internas o externas?. Si escribimos las *unidades* de referencia, la resolución de ambos problemas sería:

A) 4 cajas x 5 lápices/caja = 20 lápices

B) 4 camisas x 5 pantalones = 20 formas de vestirme

Como vemos, en el primer caso utilizamos dos tipos de datos, un dato puntual (número de cajas), un *índice* (número de lápices por caja), y obtenemos otro dato puntual (número de lápices). ¿En qué conjunto se está definiendo la operación?

En el segundo caso, multiplicamos datos de conjuntos diferentes, y obtenemos un resultado de otro conjunto distinto a los dos anteriores. Esta situación es aún mas paradójica cuando multiplicando medidas de longitudes de los lados de un rectángulo obtenemos áreas del rectángulo (Segovia, Castro y Flores, 1997; Castro, Flores y Segovia, 1998).

Si buscamos la significación de la suma y el producto externo, podemos encontrarnos situaciones similares, pero también podemos plantear una suma de *cantidades homogéneas* (tengo 5 lápices en mi mano derecha y 3 en la izquierda, cuántos lápices tengo).

Si profundizamos en la significación de la multiplicación, observamos que su resultado depende de la unidad. Tal como indica Vergnaud, en los problemas multiplicativos de isomorfismo de medidas (al menos) contamos con *tres datos*. En efecto, en el problema A, tenemos los datos siguientes:

cajas:	1	4
lápices:	5	x

Tal como se observa, dependiendo de *la unidad* de medida (de la cantidad que corresponde con la unidad), será diferente el resultado. Esto puede explicarnos también la situación paradójica anterior. La raíz es un tipo de multiplicación y hemos visto que el resultado de la multiplicación depende de la unidad que tomemos.

Conclusiones

En este artículo hemos presentado una secuencia de actividades que ha dado lugar a una paradoja relacionada con la *raíz cuadrada de un segmento.* Hemos querido mostrar la riqueza interpretativa que puede tener incorporar este tipo de actividades a la formación inicial y permanente de profesores de Matemáticas de enseñanza secundaria. Nuestra expectativa es que los profesores en formación tengan una creencia arraigada en la unicidad de los resultados de las operaciones, lo que puede llevarlos a buscar formas de superar la supuesta paradoja. Los comentarios presentados han pretendido mostrar la necesidad de profundizar en el significado y la red de conceptos matemáticos para resolver la paradoja.

Las paradojas y otros elementos matemáticos evocadores, como las metáforas, los chistes, y los pasatiempos han sido siempre temas de referencia en la enseñanza de las Matemáticas, especialmente para hacer más amenas las clases y romper la consideración formal. En este artículo hemos querido mostrar la riqueza interpretativa y formativa que encierra uno de estos elementos, las paradojas. Hemos tratado de mostrar el interés autoformativo que genera la resolución de paradojas matemáticas, valiéndonos para ello de un ejemplo concreto. Esperamos con ello animar a diseñar módulos de formación de profesores de matemáticas de secundaria, que contemplen el conocimiento matemático en toda su extensión y con toda

Las paradojas y otros elementos matemáticos evocadores, como las metáforas, los chistes, y los pasatiempos han sido siempre temas de referencia en la enseñanza de las Matemáticas, especialmente para hacer más amenas las clases y romper la consideración formal.

la riqueza de formas de análisis y representación posibles.

Bibliografía

BULLOUGH, R. V. y D. K. STOKES (1994): «Analyzing personal teaching metaphors in preservice teacher education as a mean for encouraging professional development», *American Educational Research Journal*, vol 31, 1, 197-224.

CASTRO, E., P. FLORES e I. SEGOVIA (1998): «Relatividad en las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas», *Suma*, 26, 23-32.

FLORES, P. (1996): «El chiste como contraste de representaciones en educación matemática», en M. FUENTE y M. TORRALBO (Eds.) *Actas de las VII Jornadas de la SAEM Thales*, SAEM Thales y Universidad de Córdoba, Córdoba, 535-544.

GÁMIZ, L. y P. FLORES (1996): «Papel pericial de las matemáticas. Los repartos», *Suma*, 21, 81-88.

Pablo Flores
Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
Universidad de Granada.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

GARDNER, M. (1983): *Paradojas*, Labor, Barcelona.

GLASERSFELD, E. VON (1989): «Congition, construction of knowledge, and teaching», *Synthese*, 80, 121-140

HOYLES, C. (1992): «Illumination and reflections - Teachers, methodologies and Mathematics», en W. GEESLIN y K. GRAHAM (Eds), *Proceedings of the sixteenth PME Conference*, Durham, 263–286.

JOHNSTON, M. (1994): «Contrast and similarities in case studies of teacher reflection and change», *Curriculum inquiry*, 24,1, 9-26.

MOVSHOVITZ-HADAR, N. y R. HADASS (1990): «Preservice education of math teacher using paradoxes», *Educational Studies in Mathematics*, 21, 3, 265-287.

NCTM (1991): «Professional standars for teaching mathematics» (Va. National Council of Teacher of Mathematics: Reston).

SEGOVIA, I., E. CASTRO y P. FLORES (1996): *El área del rectángulo*, UNO, 10, 63-78.

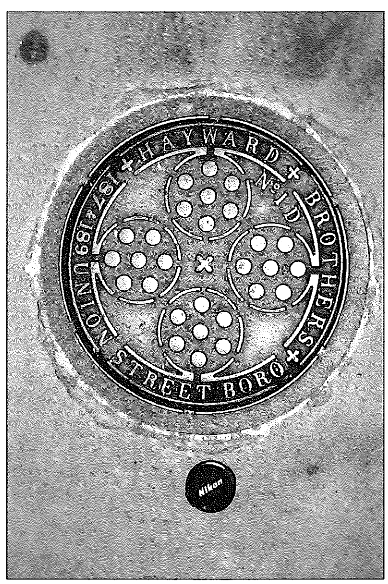
SMYTH, J. (1991): «Una pedagogía crítica de la práctica en el aula», *Revista de Educación*, 294, 275-300.

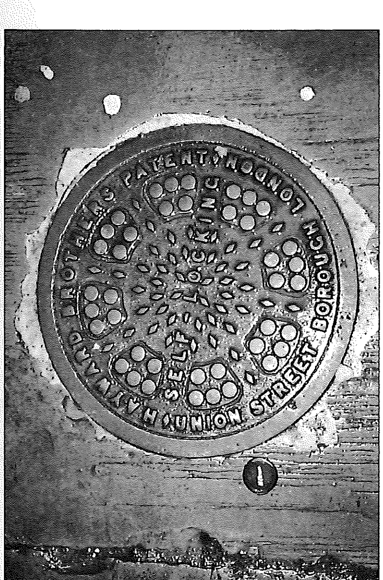
VERGNAUD, G. (1981): *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Lang, Berna.

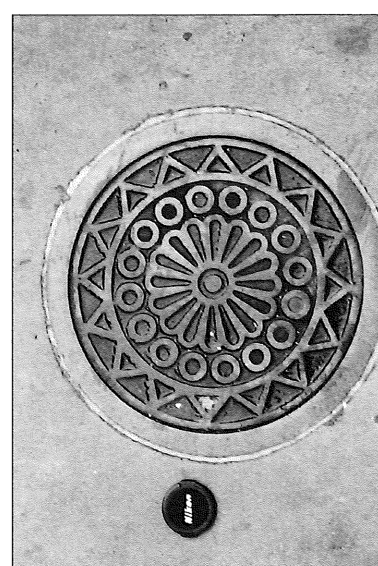
WATZLAWICK, P. (1976): *Cambio*, Herder, Barcelona.

WATZLAWICK, P. (1983): *El lenguaje del cambio*, Herder, Barcelona.

WATZLAWICK, P., BAVELAS, J.B. y JAKSON, D.D. (1981): *Teoría de la comunicación humana*, Herder, Barcelona.

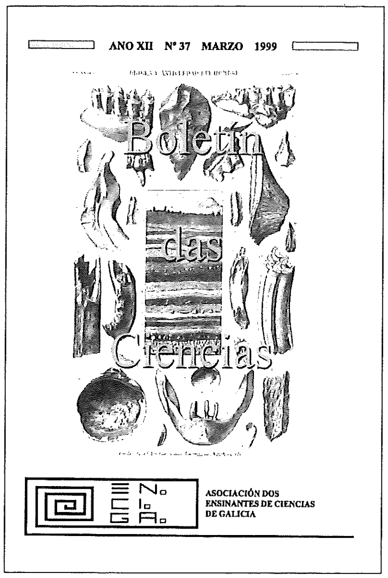


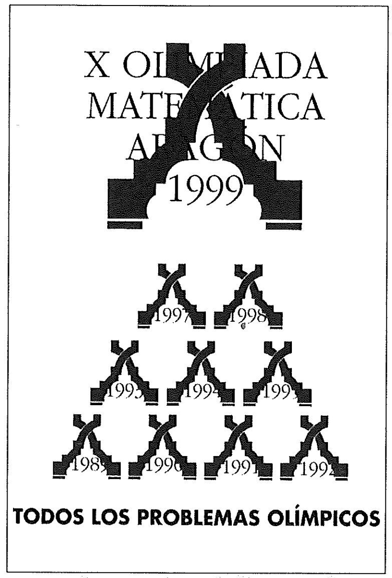


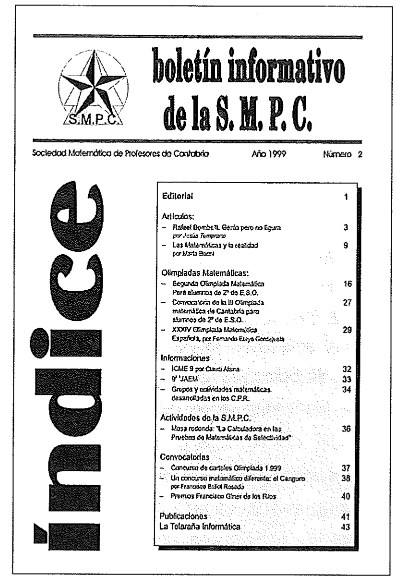


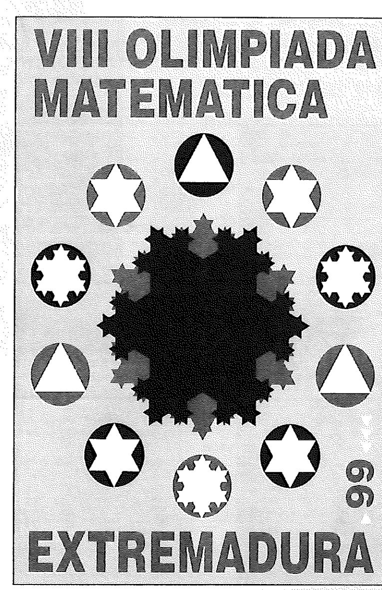
Londres
Fotos:
Luis Balbuena

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES









SUMA 31
junio 1999, pp. 37-50

Una panorámica sobre la Educación Matemática en España*

Ricardo Luengo González

ARTÍCULOS

DIGNÍSIMAS AUTORIDADES, queridos colegas y amigos todos. Es para mí un honor dirigirles la palabra en este III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática que hoy iniciamos en Caracas, en este país hermano de Venezuela.

Represento aquí, como Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, a sus colegas españoles; aprovecho este momento para hacerles llegar en su nombre un cordial saludo. Estoy seguro de que a un buen número de ellos les hubiera gustado estar aquí y asistir a este III CIBEM pero la enorme distancia física que nos separa ha hecho imposible su asistencia.

A pesar de la distancia son muchos los lazos que nos unen y que se estrecharon sin duda gracias al interés de la FESPM y, muy concretamente, a la labor de impulsión realizada por nuestro primer Presidente, de imborrable recuerdo, D. Gonzalo Sánchez Vázquez. Fruto de la amplitud e intensidad de estas relaciones fue, precisamente, la puesta en marcha de un primer CIBEM en Sevilla (España) y un segundo en Blumenau (Brasil).

Espero que estos profundos lazos de amistad y cooperación centrados en nuestro común interés por la mejora de la Educación Matemática en nuestros países se consoliden definitivamente en este III CIBEM. Es el momento de aprovechar que estamos todos aquí para crear canales permanentes de comunicación e intercambio de información, potenciar nuestras respectivas sociedades y tratar de impulsar la creación en los países en que todavía no se han formado. En este sentido, sería deseable trabajar en la línea de crear una Federación Iberoamericana de Sociedades con horizonte en el año 2000, aprovechando que ese año ha sido declarado «Año Mundial de las Matemáticas». Nuestra Federación apuesta por esa idea y si ustedes sintonizan con ella estamos dispuestos a traba-

* Texto resumido de la conferencia inaugural impartida por el autor en su calidad de Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, en el III CIBEM, celebrado en Caracas los días 26 al 31 de julio de 1998.

jar para lograr ese marco común supranacional que tantas ventajas podría reportar.

No cabe duda de que para aunar esfuerzos debemos partir del conocimiento mutuo, conocimiento que yo tendré la oportunidad de adquirir con la información que me proporcionarán las distintas actividades de este congreso. Me refiero muy concretamente al conocimiento sobre el estado en que se encuentra la Educación Matemática en los diversos países iberoamericanos. Mis palabras intentarán dar información sobre lo que ocurre en mi país.

Pretendo ofrecerles una vista panorámica sobre la Educación Matemática en España que permitirá completar el paisaje. Un paisaje en el que encontraremos elementos comunes y elementos diferenciadores pero en el que siempre nos unirá algo común a todos los que estamos aquí: nuestro interés por el mejoramiento de la Educación Matemática.

Nuestra mirada se centra, en primer lugar en el Sistema Educativo Español como marco de referencia, para focalizar a continuación temas tan importantes como la propia Enseñanza de la Matemática en los distintos niveles educativos (Primaria, Secundaria y Universidad)*.

Ms adelante, centramos nuestra atención en el problema de la formación inicial y permanente de nuestros profesores de Matemáticas haciendo especial mención en las organizaciones autónomas de base (como son los grupos de trabajo y renovación y las sociedades de profesores). Reuniones, jornadas y congresos, pero también visitas e intercambios dan también colorido a nuestro paisaje.

No podía faltar una cálida mirada a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. (FESPM), de la que actualmente soy presidente y a la que aquí represento. Creo, sinceramente, que tiene un lugar importante para los profesores y que su opinión ha de tenerse en cuenta en cualquier cuestión relacionada con la Educación Matemática.

Por último, completaremos la panorámica con unas someras pinceladas sobre la investigación en Educación Matemática y sobre las publicaciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

La Enseñanza de la Matemática en España

En todo lo que sigue nos vamos a referir a la situación tal y como se contempla en el sistema educativo actual, salvo en el caso en que hagamos una alusión histórica o comparativa con lo anterior.

Educación Obligatoria

Comenzando por la Educación Obligatoria y más concretamente con la Educación Primaria (6 a 12 años) podemos decir que la finalidad de la intervención educativa para esta etapa, se concreta en el artículo 12 de la LOGSE de esta manera: «Proporcionar a todos los niños una educación común que haga posible la adquisición de los elementos básicos culturales, los aprendizajes relativos a la expresión oral, a la lectura, a la escritura y al cálculo numérico, así como una progresiva autonomía de acción en su medio».

...sería deseable trabajar en la líne de crear una Federación Iberoamericana de Sociedades con horizonte en el año 2000, aprovechando que ese año ha sido declarado «Año Mundial de las Matemáticas». Nuestra Federación apuesta por esa idea y si ustedes sintonizan con ella estamos dispuestos a trabajar para lograr ese marco común supranacional que tantas ventajas podría reportar.

El Ministerio y las Comunidades Autónomas han ido desarrollando la normativa correspondiente, en la que se encuentran, para las diferentes etapas y ciclos, las características de la etapa, intenciones educativas, objetivos generales, criterios para la secuenciación por ciclos de los objetivos. Por otra parte también aparecen las orientaciones didacticas y para la evaluacion, la metodología, criterios para la organizacion y secuenciacion de contenidos, y técnicas e instrumentos para la evaluación.

El currículo tiene dos funciones bien diferenciadas: explícitar las intenciones del sistema educativo y servir de guía la práctica docente. Pretende ser abierto y tiene tres niveles de concreción

1. *Primer nivel*: Diseño curricular prescriptivo donde se establecen las enseñanzas mínimas.
2. *Segundo nivel*: Proyecto curricular de Centro.
3. *Tercer nivel*: Programación en el aula.

Los principios psicopedagógicos del desarrollo curricular oficial proceden de la concepción constructivista del aprendizaje escolar y son una mezcla de enfoques que se sustenta en las siguientes ideas generales:

- Partir del nivel de desarrollo del niño.
- Construcción de aprendizajes significativos, posibilitando que los alumnos realicen dichos aprendizajes por sí solos (aprender a aprender).
- Cuidar las fases de desequilibración-equilibración en el aprendizaje significativo.
- Fomentar una intensa actividad por parte del alumno.

* Debido a la extensión que debe tener este artículo se omite en el mismo el texto correspondiente al sistema educativo español (por ser conocido de los lectores de SUMA) y se resumen otros apartados respecto del texto leído en el CIBEM.

La formación matemática en el periodo obligatorio está concebida como un proceso continuo. Los principios que inspiran el currículo oficial son:

a) Presentar las Matemáticas a los alumnos como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo, y que, con seguridad, seguirán evolucionando en el futuro.

b) Relacionar los contenidos de aprendizaje de las Matemáticas con la experiencia de los alumnos y presentarlos y enseñarlos en un contexto de resolución de problemas.

c) Atender equilibradamente los aspectos formativos, instrumental y funcional.

Reconociendo el avance que ha supuesto la LOGSE, su implantación no ha estado exenta de problemas y la educación matemática concebida como área-eje en la formación del alumno sigue estando en la «cresta de la ola» de la polémica que levanta esta reforma. En efecto, se detecta que las Matemáticas continúan siendo el punto más débil de los escolares españoles.

Un estudio, realizado en España por el INCE dependiente del Ministerio de Educación y Cultura, que forma parte del informe TIMSS (promovido por la IEA), publicado el pasado año 1977, revela datos que han producido en la sociedad española la sensación generalizada de que el nivel en Matemáticas en la enseñanza primaria ha descendido vertiginosamente.

Noticias en nuestros medios de comunicación insisten no sólo en el mal nivel de Matemáticas de nuestro alumnado, sino en que el rendimiento del mismo en Matemáticas está en un nivel más bajo que otros países (como Japón, Corea o la República Checa). En el caso de Portugal los resultados son muy similares. No figura más que un país latinoamericano (Colombia) con resultados muy inferiores a la media. Me imagino que durante este III CIBEM a través del intercambio de nuestras experiencias comprobaremos que los problemas que tenemos son comunes. Sin embargo, los datos y las al menos «dudosas» interpretaciones, en mi opinión, habría que ponerlas en cuarentena. Es difícil comparar resultados cuando las situaciones lejos de ser homogéneas son tan dispares en cada uno de los países, cuando los más elementales principios de evaluación nos dicen que las pruebas deben ser coherentes con el currículum y la metodología con la que se evalúa en cada país. Pero aunque los resultados no sean concluyentes plantean la necesidad de investigaciones que indaguen acerca de las causas de estas disfunciones y hagan propuestas para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de todos los escolares de la Comunidad Iberoamericana.

Es difícil comparar resultados cuando las situaciones lejos de ser homogéneas son tan dispares en cada uno de los países, cuando los más elementales principios de evaluación nos dicen que las pruebas deben ser coherentes con el currículum y la metodología con la que se evalúa en cada país.

El Bachillerato y los módulos profesionales

El Ministerio de Educación y Ciencia, al establecer el currículo del Bachillerato para las asignaturas de Matemáticas, recomienda a los profesores tener en cuenta que:

- Participar en el conocimiento matemático consiste, más que en la posesión de los resultados finales de esta ciencia, en el dominio de su forma de proceder (o «hacer matemática»).
- Desarrollar capacidades tan importantes como la abstracción, razonamiento en todas sus vertientes, resolución de problemas de cualquier tipo (matemático o no), investigar, y analizar y comprender la realidad.
- Cubrir tres vertientes: instrumental, formativa y de fundamentación teórica.
- Dedicar especial importancia a la resolución de problemas, entendiendo como problema una situación abierta, susceptible de enfoques variados, que permita formularse preguntas, seleccionar las estrategias heurísticas y tomar decisiones ejecutivas pertinentes.

Matemáticas en la formación profesional

Es pronto para hacer un análisis de la situación en la que va a quedar nuestra disciplina en la nueva formación profesional, ya que ésta comienza ahora a desarrollarse. No obstante, tanto en la formación profesional de grado medio como en la de grado superior aparecen asignaturas relacionadas con las Matemáticas, dependiendo de la titulación de que se trate. El gran número de titulaciones diferentes impide aquí entrar en más detalles, aunque sí podemos señalar que su enseñanza insistirá más en los enfoques utilitarios que en los de formación teórica.

Se estarán preguntando ¿cuál ha sido la acogida del profesorado a esta reforma? y ¿cómo la están llevando a cabo? Debemos reconocer que la acogida no ha sido uniforme. Mientras la reforma correspondiente a Matemáticas ha sido puesta en práctica por el profesorado más activo, generalmente vinculado a movimientos de innovación, hay una parte importante del profesorado que la ven con recelo. Los sucesivos aplazamientos del calendario para la puesta en vigor de la misma, la falta de financiación adecuada y la nueva organización que se deriva de la LOGSE, entre otros factores, está creando confusión en el profesorado; en estas circunstancias los profesores se inhiben del esfuerzo necesario para implantar no sólo los nuevos contenidos, sino también para actuar con arreglo a la nueva metodología de trabajo y al nuevo concepto de evaluación.

La enseñanza de la Matemática en la Universidad

Sería muy amplio tratar la situación de la Matemática en las distintas carreras universitarias. Tomaré la opción de las que más están relacionadas con la educación matemática, es decir la situación de las Facultades de Matemáticas, Centros de formación de profesores y Departamentos Universitarios relacionados con la Matemática y su enseñanza. En referencia a estos últimos, la Ley de Reforma Universitaria de 1983, introdujo en la organización de la Universidad española dos elementos cruciales: el establecimiento de las áreas de conocimiento y de la estrutura departamental.

El catálogo de Áreas de Conocimiento define ya a la «Didáctica de las Matemáticas» como área de conocimiento. Es una satisfacción para mi señalar el hecho de que es la primera vez en la Universidad Española que aparece este reconocimiento explícito del campo del saber al que muchos de los que estamos en este III CIBEM nos dedicamos. La creación de este área posibilita una total integración de la Educación Matemática y de los profesores e investigadores en Educación Matemática, en la universidad española al mismo nivel que cualquier otro campo del conocimiento.

La creación de este área [Didáctica de la Matemática] posibilita una total integración de la Educación Matemática y de los profesores e investigadores en Educación Matemática, en la universidad española al mismo nivel que cualquier otro campo del conocimiento.

La existencia del área «Didáctica de las Matemáticas» posibilita la creación de departamentos en torno a este área, y así se ha hecho en algunas universidades como Granada, Complutense (Madrid), Valencia y Sevilla. Otras universidades más jóvenes o más pequeñas tienen departamentos constituidos por varias áreas, una de las cuales es precisamente la de «Didáctica de las Matemáticas»; por ejemplo, en mi caso pertenezco a un departamento que incluye con la nuestra el Área de Didáctica de las Ciencias Experimentales. La incorporación de nuestra área a la actividad normal de cualquier departamento ha traído como consecuencia la organización de programas de doctorado específicos de Didáctica de la Matemática y la elaboración y defensa de tesis doctorales en ella. Quiero destacar la extraordinaria labor pionera de los programas de doctorado en Didáctica de la Matemática en las Universidades de Granada y Valencia (que comenzaron en 1988) y los de las Universidades Autónoma de Barcelona y Sevilla. Le siguieron otras universidades (entre ellas la de Extremadura, a la que pertenezco), con programas que engloban a nuestra área junto con otras, como ya ocurría en los departamentos.

En algunas universidades se organizan Programas de Maestría (Master) en Educación Matemática, por parte de los departamentos; es el caso de la Autónoma de Barcelona, Valencia y Alicante.

Los planes de estudio de la licenciatura en Matemáticas tienen un conjunto de asignaturas «troncales» iguales en todas las universidades, pero también otras muchas asignaturas que varían mucho de una a otra universidad. Los alumnos terminan con una formación matemática bastante completa. En cuanto a la Educación Matemática, varias universidades ofrecen entre las materias optativas asignaturas relacionadas con la Didáctica de la Matemática. En mi opinión hay una gran disociación entre la formación «profesional» que reciben en la licenciatura de Matemáticas y el trabajo que van a ejercer. Me refiero al hecho de que el 90% de los licenciados en Matemáticas españoles tienen como única opción la de ser profesores de Matemáticas, situación que contrasta con el exiguo número de asignaturas de Didáctica de las Matemáticas que cursan en su formación inicial (que en la mayoría de las ocasiones ha tendido a cero).

La titulación de Maestro es una diplomatura universitaria con tres años de duración. Actualmente hay siete especialidades: Primaria, Infantil, Educación Flsica, Idioma extranjero, Educación Especial, Educación Musical, Audición y Lenguaje. En las cuatro primeras especialidades la Didáctica de la Matemática es un asignatura troncal, ofreciéndose también a los estudiantes asignaturas optativas relacionadas con la Educación Matemática. Además, en otras titulaciones como Psicopedagogía o Educación Social, la Didáctica de la Matemática figura como asignatura optativa.

La Formación del Profesorado de Matemáticas

La formación del profesorado es un tema controvertido, no pudiendo afirmarse que haya un consenso de los especialistas debido a diversos factores, como la vieja creencia de que cualquiera sabe ser profesor, la escasa importancia que se atribuye a esta tarea, el descrédito de lo pedagógico. El tema es complicado debido a que es una formación con tres dimensiones bien distintas. Por un lado, se trata de una doble formación: académica y pedagógica. Por otra parte se trata también de formación profesional y además es también una formación de formadores. La clave está en lo que significa «ser profesor hoy» y ese significado está íntimamente ligado con concepciones sobre la educación, escuela y currículum, dependientes, a su vez, de las concepciones filosóficas, sociales y políticas que imperan hoy en día.

Un profesor debe seguir un camino para {aprender a enseñar». De acuerdo con Feiman (1983), se pueden distinguir cuatro fases en este proceso:

a) *Fase pre-entrenamiento.* En la que influyen las experiencias que el futuro profesor tuvo como alumno. Generalmente esas experiencias se asumen de forma acrítica e influyen subliminalmente en su actuación posterior como profesor. El profesor neófito tiende a reproducir los esquemas con los que le enseñaron.

b) *Fase pre-servicio.* Fase académica o de preparación formal en una institución que forma profesores; en ella el alumno adquiere sus conocimientos tanto de las disciplinas académicas como conocimientos pedagógicos y además realiza sus primeras «prácticas de enseñanza». Se trata de la formación inicial.

c) *Fase de inducción en el aprender a enseñar.* Primeros años de ejercicio del profesor, aprendizaje inmerso en la práctica y desarrollo de «estrategias de supervivencia».

La formación del profesorado es un tema controvertido, no pudiendo afirmarse que haya un consenso de los especialistas debido a diversos factores, como la vieja creencia de que cualquiera sabe ser profesor, la escasa importancia que se atribuye a esta tarea, el descrédito de lo pedagógico.

d) *Fase en servicio.* Fase de madurez profesional del profesor y en la que se produce el desarrollo profesional y el perfeccionamiento de su enseñanza.

A las fases c) y d) corresponderían a la formación permanente. Cada una de estas fases tiene una problemática distinta y nuestro Ministerio hace un tratamiento diferenciado en los objetivos, contenidos y metodología a poner en juego en las distintas fases del proceso de formación del profesorado. La fase a) escapa a la intervención directa en la formación de los profesores, aunque no podemos ignorarla pues supone un dato de partida a tener en cuenta, porque es la base de las teorías implícitas que tienen los futuros profesores. La fase b) (formación inicial) ya dijimos anteriormente que se llevaba a cabo en las facultades y culmina con la titulación de Maestro en las distintas especialidades, y en cuanto a las otras dos fases c) y d) entran de lleno en la formación permanente.

La formación inicial

Durante la fase de formación inicial los centros de formación de profesores españoles tratan de cubrir tres funciones principales (Clark y Marker, 1975): control de certificación, agente de cambio del Sistema Educativo y función de formación y entrenamiento.

La primera función se ejerce mediante la expedición de los títulos, y éstos facultan para ejercer la profesión de docente. La segunda presupone que las novedades (epistemológicas, conceptuales, técnicas, pedagógicas y didácticas) que se incorporan a las diferentes disciplinas científicas se transmiten a los futuros profesores. Éstos llegan a su trabajo con nuevos enfoques y actúan como «agentes de cambio del sistema». No obstante, los cambios no son grandes debido a la gran inercia del sistema educativo y se hace necesario si se quieren acelerar esos cambios actuar por medio de la formación permanente. En cuanto a la tercera de estas funciones enfoca la formación de profesores como proceso educativo en el que se plantean unos objetivos, conocimientos, destrezas; en el que se plantean unas estrategias para alcanzar las metas establecidas y en las que se obtienen unos resultados que se intentan evaluar.

En Europa los planes de formación del profesorado tienden a converger. Ya desde mayo de 1987 los ministros de Educación europeos aprobaron una resolución por la que se recomienda que la formación del profesorado insista en los siguientes elementos:

1. Adquisición de aptitudes humanas y sociales.
2. Práctica pedagógica y conocimiento del Sistema Escolar y su funcionamiento.
3. Dominio de ciertas disciplinas y comprensión de las materias.
4. Reflexión sobre los valores y su transmisión.

Sin embargo, debemos reconocer que una de las «asignaturas pendientes» en la implantación de nuestra actual reforma es la formación del profesorado.

En el caso del profesorado de Matemáticas estimamos, compartiendo las ideas de Rico (1994), necesaria una transformación en profundidad en la que se trate de equilibrar la formación matemática con la formación psicopédagógica. Sostiene Rico, que en España los actuales educadores matemáticos proceden de dos culturas muy diferentes.

- El profesor de educación general básica que es, por derecho propio, educador matemático y educador matemático muy importante porque está en la base del sistema educativo, tiene una formación matemática poco sólida y una formación psicopedagógica amplia y continuada, con un nivel académico de diplomatura.
- El profesor de bachillerato, en el futuro de secundaria, tiene una formación matemática comparativamente amplia y profunda, sin embargo su formación psicopedagógica es rudimentaria y su preparación didáctica prácticamente inexistente, con un nivel académico de licenciatura.

La reforma actual, aun suponiendo cierta mejora, no parece corregir el sesgo de unos y otros hacia la posición de equilibrio entre las dos componentes (matemática y psicopédagógica). Y, además, deja pendientes cuestiones importantes como la dicotomía que se establece entre formación académica/formación profesional, la conexión entre teoría/práctica, la diferenciación en la formación según etapas y niveles del Sistema Educativo y muchas otras. Y, más concretamente, en el caso de la Matemática existen en mi país un conjunto de cuestiones abiertas, en las que no todo el mundo está de acuerdo, que se han discutido en numerosos congresos y jornadas y que algunas de ellas son objeto de diferentes estudios e investigaciones.

En cuanto a la formación inicial no queda claro cuál debería ser la formación matemática del profesor de matemáticas, qué formación psicopedagógica debe tener el profesor de matemáticas (¿qué partes de pedagogía, de psicología o de sociología y con cuánta extensión?), qué formación en didáctica de la matemática debe tener el profesor de matemáticas, cómo resolver la dicotomía que se establece entre formación académica y formación profesional y qué conexión debería haber entre teoría y práctica.

La cruda realidad actual es que el profesor de primaria tendrá entre 8 y 12 créditos de formación especifica en matemáticas y que el profesor de secundaria y bachillerato recibirá su formación en una licenciatura, con un curso postgrado de 60 créditos de capacitación didáctica. Por cierto que este curso llamado CCP (Curso de Capacitación Pedagógica) no se ha puesto en marcha sino de forma experimental y ha tenido una gran contestación por parte de profesores y alumnos, de manera que en la actualidad está en «hibernación».

...debemos reconocer que una de las «asignaturas pendientes» en la implantación de nuestra actual reforma es la formación del profesorado.

La formación permanente

Hasta el año 1984 la actualización científica y didáctica del profesorado en servicio estaba a cargo de los Institutos de Ciencias de la Educación (ICE) dependientes de las universidades. A partir de ese año se crean los Centros de Profesores que tenían como misión la de promover el contacto e intercambio profesional de los profesores en un marco de mutua colaboración. Estos centros se ocupan de todas las áreas y entre ellas de las Matemáticas. Han organizado numerosos cursos de formación permanente para el profesorado de Matemáticas, con más o menos éxito han tratado de promover grupos de trabajo y seminarios permanentes.

En los documentos que desarrollan la reforma, cuando tratan de la formación permanente, dicen que ésta no debe ser ajena a la intervención de la Universidad. Y para hacer efectiva esta declaración de intenciones el MEC establece un sistema de convenios con las universidades, aunque deja abierta la posibilidad de otras líneas de actuación conjunta como cursos de postgrado, universidades de verano, encuentros internivelares de profesores, asesorías para temas específicos y proyectos de actuación elaborados *ad hoc*. Pero tanto los profesores de básica y media como los de la universidad hemos echado en falta la mutua colaboración, de la que ambos no íbamos a obtener sino beneficios. Cierto es que ese contacto se ha producido en casos aislados y la mayoría de las veces catalizado por las sociedades de profesores en las que coincidimos unos y otros; también es cierto que tímidamente se observa una colaboración creciente entre estos centros y las universidades. Hace un par de años, los CEP han pasado a denominarse Centros de Profesores y Recursos (CPR) con funciones muy similares a los anteriores.

El cambio de Gobierno en España y por tanto el cambio de responsables de la toma de decisiones en el Ministerio, junto con el alto coste económico de implantar una red de formación permanente del profesorado, mantiene en un compás de espera en el momento actual a estos centros y a la propia formación permanente del profesorado.

La formación inicial y permanente del profesorado universitario

La formación inicial del profesor universitario es la correspondiente a su respectiva licenciatura (o diplomatura en algunos pocos casos). No existe ninguna obligación legal de tener una preparación de tipo didáctico en el nivel universitario, al contrario de lo que ocurre en los restantes niveles de la enseñanza. Las razones para ello no son declaradas, aunque son interesantes los interrogantes que se hace Benedito (1993): ¿No necesitan los profesores esa preparación didáctica al suponer a los alumnos capacitados para aprender por sí mismos?, ¿no necesitan los profesores esa preparación por haberla adquirido a través de su larga práctica como alumnos?, ¿no es realista exigir esa preparación al suponer que los futuros profesores se resistirán a adquirirla?, ¿no se sabe cuál es el camino para que los profesores adquieran esa cualificación?, ¿ne piensa que los profesores nacen, no se hacen?, ¿se piensa que basta con tener buena voluntad?, ¿da igual tener esa preparación que no tenerla?, ¿no existen medios (personales, temporales, económicos, organizativos...) para plantear esa formación de forma institucional?

No existe ninguna obligación legal de tener una preparación de tipo didáctico en el nivel universitario, al contrario de lo que ocurre en los restantes niveles de la enseñanza.

La realidad es que aprende a serlo mediante un proceso de socialización en parte intuitivo, autodidacta o, lo que es peor, siguiendo la rutina «de los mayores». Se debe, sin duda, a la inexistencia de una formación específica como profesor universitario. En dicho proceso juega un papel más o menos importante su propia experiencia como alumno, el modelo de enseñanza que predomina en el sistema universitario y las reacciones de sus alumnos, aunque no hay que descartar la capacidad autodidacta del profesorado. En realidad, la perpetuación del modo de ser de un profesor universitario, suele descansar más en la rutina que en la investigación sobre la naturaleza de la práctica profesional, o sobre la experiencia concreta y sobre las mejores estrategias de formación de ese profesional.

En cuanto a la formación permanente las iniciativas son más variadas. Tratan de contemplar tanto la docencia como la investigación en el mismo plano y tienen especial relevancia campos de formación como las técnicas (de programación, motivación, evaluación, estimación de la calidad de la enseñanza), los métodos didácticos, estrategias de innovación, contacto con otros profesores e investigadores, etc

La creación del Área de Didáctica de la Matemática ha tenido una influencia importante (y la tendrá en el futuro en mayor medida) sobre la formación inicial y permanente del profesorado en la Universidad. Los departamentos se constituyeron a partir del año 1985. La Universidad de Granada es una de las primeras en liderar la formación de departamentos específicos del Área de Didáctica de la Matemática y en aglutinar a los profesores, sirviendo de referente a otras muchas universidades.

En estos años se ha intentado delimitar y definir las características específicas del área y se ha tratado de coordinar los pequeños grupos aislados en universidades pequeñas e implicarlos en tareas conjuntas, por parte de las universidades más grandes. Se han celebrado encuentros específicos por comunidades, por programas de doctorado, por grupos de investigación, al igual que ocurre con el resto de las comunidades científicas. Y hoy en día podemos ya mostrar algunos resultados esperanzadores que nos animan a seguir. Así, en los titulos de maestro se está tratando de coordinar, precisar y profundizar contenidos y directrices curriculares de las asignaturas del área de Didáctica de la Matemática. Por otra parte, se están consolidando ofertas de asignaturas para los segundos ciclos de psicopedagogía, pedagogía, educación social y para las licenciaturas de matemáticas y estadística. También se está trabajando intensamente en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en algunas universidades tratando de mejorar el Curso de Aptitud Pedagógica, en espera del nuevo curso de Cualificación Pedagógica. Hay universidades que ofertan asignaturas de libre elección de Didáctica de la Matemática; estas asignaturas tienen un perfil orientado hacia las nuevas tecnologías, técnicas estadísticas etc.

Las organizaciones autónomas de base. La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Grupos de trabajo/renovación

Sintonizando con Vázquez y Rico (en los trabajos reseñados, años 1991 a 1996) creemos que para comprender el desarrollo de la Educación Matemática en España en las dos últimas décadas hay que tener en cuenta a las organizaciones autónomas de base. Se trata de un importante movimiento asociativo que partió de la base del profesorado (profesores sin responsabilidad institucional) y surgió a mediados de los setenta, continuando con mucha fuerza en la actualidad. Estos grupos actuaron en torno a un proyecto propio, con poca o nula ayuda institucional en sus comienzos; se sostuvieron por el convencimiento de que lo que estaban haciendo era importante y necesario. Fueron, entre otros, Grupo Cero (Valencia), Grup Zero (Barcelona), Almosta, Aresta, Azarquiel, Granada-Maths, Matema, Periódica Pura, Puig Adam, Sigma, y el grupo BETA del que soy coofundador y del que todavía formo parte.

Sociedades de profesores

Hay profesores de estos grupos, que para aglutinar a más compañeros, obtener subvenciones y coordinarse con otras organizaciones nacionales e internacionales, estiman la conveniencia de constituir sociedades de profesores de Matemáticas, entre las que son pioneras la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton (1978), la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas Pedro Ciruelo (1981) y la Sociedad Andaluza de profesores de Matemáticas Thales (1981), fusionada en 1988 con la Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía, con la denominación de Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Reuniones, jornadas y congresos

El caldo de cultivo existente en esos años por el deseo de los profesores de agruparse, organizarse y comunicar experiencias, propició durante los años sesenta y setenta la celebración en España de las primeras reuniones y congresos sobre Educación Matemática organizados principalmente por la administración educativa. Pero a partir de la formación de las sociedades de profesores son éstas las que toman la iniciativa convocando numerosos encuentros, reuniones y jornadas específicas de Educación Matemática. Merecen destacarse por su capacidad convocatoria entre el profesorado:

- Las Jornadas sobre el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEMs), convocadas por la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Se han celebrado ocho y son bianuales.
- Jornadas regionales de cada sociedad. Suelen ser también bianuales y se procura que no coincidan lon las nacionales (por ejemplo la Sociedad Thales ya ha celebrado siete de esta jornadas).
- Los Congresos Internacionales de Investigación en Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas, organizados por la Revista *Enseñanza de las Ciencias*.
- Los congresos CIBEM (Congresos Iberoamericanos de Educación Matemática) de los que se celebraron dos (el primero en Sevilla y el segundo en Blumenau). El primero de los CIBEM, oriegen del de Blumenau y de éste en que nos encontramos, celebrado en Sevilla en septiembre de 1990, organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, en representación de la FESPM, con la colaboración del Comité Interamericano de Educación Matemática y de la Sociedad Portuguesa de Profesores de Matemáticas.

Hay profesores de estos grupos, que para aglutinar a más compañeros, obtener subvenciones y coordinarse con otras organizaciones nacionale e internacionales, estiman la conveniencia de constituir sociedades de profesores de Matemáticas, entre las que son pioneras...

La lista de encuentros, jornadas, seminarios, cursos y congresos convocados por las propias sociedades, ICE, Universidades, Ministerio y CEP ha sido muy amplia; abarcó actividades enfocadas a la formación permanente del profesorado y a la formación de formadores, y trató temas tan diversos como la renovación de la enseñanza de las Matemáticas, la coeducación, la metodología, los recursos, el lenguaje matemático, la investigación en el aula o la Astronomía. Algunos congresos y reuniones de otras áreas incluían alguna sección dedicada a la Educación Matemática. Por ejemplo las Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas que reunen a matemáticos de España y Portugal y la Reunión Anual de Matemáticos Españoles, ambas bajo los auspicios de la Real Sociedad Matemática Española.

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

El caso de los colectivos de profesores de Matemáticas es curioso y no es único en España, sino que ocurre lo mismo en otros muchos países. El hecho de mantener una infraestructura organizativa y de que determinados profesores dediquen parte de su tiempo a facilitar la labor profesional y de formación de los demás –a través de proporcionarles una serie importante de documentos, estudios, resultados de proyectos y actividades de formación–, supone una auténtica revolución en las costumbres de la educación matemática española. La labor de las sociedades españolas ha sido muy activa y ha tenido mucho que ver en la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, contribuyendo de manera importante a la formación permanente y al perfeccionamiento del profesorado.

Las sociedades de profesores, con el fin de aunar esfuerzos, inician en 1987 un proceso de federación que culmina en 1989 con la constitución de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, cuya acta fundadacional la firman las sociedades que existían en aquel momento.Hoy en día existen 14 sociedades de profesores distribuidas en las distintas comunidades autónomas españolas e integradas en la FESPM. La adaptación a la organización autonómica de nuestro país está resultando eficaz para potenciar el movimiento asociativo de los educadores matemáticos españoles. En nueve años de existencia, no es pretencioso decir que la FESPM ha hecho una gran labor y ha ido cumpliendo los objetivos propuestos, se han delimitado grandes áreas de trabajo como docencia, investigación, relaciones de comunicación y difusión y extensión de la cultura matemática. Se ha procurado también conocer, hacer contactos, intercambiar experiencias y organizar eventos conjuntos con otros colectivos de otros países y se ha ciudado especialmente nuestra relacion con los países iberoamericanos.

Han sido numerosas las actividades que la FESPM (directamente o a través de sus sociedades) ha llevado a cabo. Además de las JAEM merecen citarse:

- Las Olimpiadas Matemáticas para alumnos del último año de la enseñanza básica (13-14 años), con fases locales y regionales a cargo de cada sociedad en su respectiva comunidad y con una fase nacional convocada por la FESPM. Los finalistas de las fases regionales participan en la Olimpiada nacional, que este año ha celebrado su novena edición. Constan de diversas pruebas, unas individuales y otras por parejas para estimular el esfuerzo cooperativo. El número de alumnos y profesores que participan es muy alto, y cada día aumenta, de manera que podemos decir que son ya una tradición en los centros docentes españoles.

  La Real Sociedad Matemática Española organiza también anualmente una Olimpiada Matemática para alumnos del Curso de Orientación Universitaria (en la práctica, el último año de Bachillerato).

- El concurso Fotografía y Matemáticas, iniciado en Granada en 1988 y ya popularizado entre los escolares españoles en casi toda España. Después de la actividad de campo se realiza una exposicion de los trabajos presentados.
- Las exposiciones constituyen un instrumento muy atractivo para la difusión de la cultura matemática. Merecen citarse, entre otras: «Breve viaje al mundo de las Matemáticas», «Pesos y medidas», «Tiempo y relojes», «Fascinante simetría», «Arquitectura y Espacios de la Geometría», «Útiles en Matemáticas,», «Ciencia recreativa», «Objetos y formas matemáticas«, «Arte y Matemáticas: la obra de Escher», «Prehistoria de la Teoría de Grupos en la Alhambra de Granada y en la Mezquita de Córdoba», «Horizontes matemáticos» (que recorrió España entre los años 1988 y 1992 siendo visitada por más de 200.000 personas) e «Instrumentos tradicionales de Medida en Extremadura».
- Las actividades de difusión de la cultura matemática en los medios de comunicación, prensa, radio y televisión, con muchos programas de radio, vídeos y publicaciones, realizadas por nuestras sociedades y dirigidas a la popularización de las Matemáticas.
- Los encuentros promovidos por la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, de carácter monográfico, con un número limitado de asistentes y en los que la actividad principal es el debate. De ellos han salido documentos y publicaciones interesantes que en su conjunto reflejan la opinión de los profesores en los diversos temas tratados, habiendo tenido repercusión sobre el resto del colectivo.

  Entre otras: La Popularización de las Matemáticas (Granada, 1989); Debate del Diseño Curricular Base (Pamplona, 1990), las Matemáticas en el Bachillerato (Benidorm, 1992); Matemáticas generales para alumnos singulares (La Coruña, 1992); Software para Matemáticas (Madrid, 1993); La Formación Científico-Didáctica del Profesor de Matemáticas (Granada, 1993); Encuentro Nacional sobre lenguaje y Matemáticas (La Laguna, 1993); Psicología y Didáctica de la Educación Matemática (Zamora, 1994); y los recientemente celebrados Seminarios FEPM:

En nueve años de existencia, no es pretencioso decir que la FESPM ha hecho una gran labor y ha ido cumpliendo los objetivos propuestos, se han delimitado grandes áreas de trabajo como docencia, investigación, relaciones de comunicación y difusión y extensión de la cultura matemática.

– El Escorial (Madrid), noviembre de 1997: «Implantación de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria: Un análisis en el contexto internacional». Organizado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo en nombre de la FESPM.

– Jaca (Huesca), octubre de 1997: «Seminario para el estudio de los nuevos bachilleratos y su coordinación con los nuevos planes de la universidad». Organizado por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas en nombre de la FESPM.

- EL 8.° Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8). Sevilla 1966. Organizado por la Sociedad Thales y convocado por la FESPM y el ICMI. Reunió a más de 4.000 personas y fue sin duda el evento más importante que hubo en España (a nivel mundial lo son todos los ICME) en el campo de la Educación Matemática. Tuvo además unas características muy especiales para nosotros: fue el congreso de la solidaridad (el 10% de las cuotas de los asistentes sirvió para sufragar ayudas a profesores de otros países, en gran número profesores iberoamericanos) y además tuvo un gran ausente: nuestro Presidente D. Gonzálo Sánchez Vázquez, aquejado de una grave enfermedad y que falleció unos meses después. Gonzalo tuvo un gran interés por las relaciones con Iberoamérica y fue un gran maestro, compañero y amigo. Se han celebrado varios homenajes por parte de sociedades y de la Federación (el más importante en Sevilla) y su huella es imborrable en la comunidad matemática española.

Investigación en Educación Matemática

Desde la creación del CIDE en 1983 una buena parte de las investigaciones en Educación Matemática han tenido algo que ver con este organismo. El Ministerio le encarga el Plan Nacional de Investigación Educativa con la gestión de los fondos, financiando las investigaciones con tres tipos de convocatorias públicas: Ayudas a la investigación, Proyectos de investigación y Premios Nacionales a la investigación educativa. A todas estas ayudas se acogieron profesores e investigadores en Educación Matemática de todos los niveles del sistema educativo. Según Calderón (1996) la financiación en Educación Matemática supone el 10,7% del total de las ayudas concedidas por el CIDE, en el periodo 1984-94 que se elevó a más de 1.500 millones de pesetas, lo que da idea del esfuerzo realizado. La investigación realizada es muy heterogénea mezclando trabajos de investigación-acción, proyectos de innovación y proyectos de investigación. La asunción de competencias por parte de las Comunidades Autónomas hace que éstas comiencen a hacer sus propias convocatorias para financiar la investigación educativa.

Gonzalo tuvo un gran interés por las relaciones con Iberoamérica y fue un gran maestro, compañero y amigo.

Como todo campo de investigación una cuestión esencial es la de determinar cuáles son los problemas fundamentales de la educación matemática.

Investigación y Didáctica de la Matemática

El impulso decisivo de la investigación en educación se da con la creación del Área de Didáctica de las Matemáticas, los departamentos y los programas de doctorado relacionados con la Didáctica de la Matemática que se van estableciendo en casi todas las universidades. Hasta entonces el trabajo de investigación había sido, salvo algunas escepciones, aislado y solitario, pero el conocimiento científico es un conocimiento público y sometido a la crítica, por ello debe estar contrastado a través de un debate sistemático y periódico. Por ello la formación de investigadores en este área de conocimiento es esencial y debe hacerse desde los intereses de investigación específicos del campo, con la metodología y los paradigmas propios de la Didáctica de la Matemática, centrándose en los problemas del campo y sobre la base de los marcos teóricos ya consolidados.

Y el marco adecuado para formar investigadores, marcar líneas y validar la investigación lo constituyen los departamentos de nuestro área y más específicamente los seminarios de investigación y los trabajos de tesis doctoral. En el momento actual un cálculo aproximado nos hace estimar que ya hay unas 50 tesis doctorales leídas en Didáctica de la Matemática, siendo la Universidad de Granada la que más aporta con 20 tesis realizadas.

Los problemas fundamentales de la educación matemática

Como todo campo de investigación una cuestión esencial es la de determinar cuáles son los problemas fundamentales de la educación matemática. A este respecto D. Wheeler en 1984 a través de la revista *For the Learning of Mathematics* pregunta a los especialistas internacionales en educación matemática por los enunciados de estos problemas; recibe 35 respuestas, con 126 enunciados distintos, que plantean uno o varios de los problemas fundamentales de la educación matemática y que se van publicando en la revista. Rico (1996) establece una clasificación con ocho categorías de problemas: Teóricos, Epistemológicos, Sociológicos, Curriculares, Cognitivos, Enseñanza de tópicos concretos, Formación del profesorado y Metodología de investigación. Y dentro de estas categorías la naturaleza de los problemas se refleja en que el 50% de los enunciados son o problemas de aprendizaje, o de carácter cognitivo con raíces en la psicología de las matemáticas; 25% son problemas de enseñanza, de naturaleza didáctica (curriculares, enseñanza de tópicos, etc); menos del 10% son de orden téórico y epistemológico; otro 10% son relativos a la formación del profesorado; algo menos del 8% son problemas sociológicos y 2% son metodológicos.

El debate sobre la enseñanza de las matemáticas como campo de problemas prácticamente concluye en el año 1986 cuando Davis, editor de la revista *Journal of Mathematical Behavior*, retoma el tema y vuelve a solicitar a los especialistas que enuncien de nuevo cuáles son los problemas fundamentales de la educación matemática y no le contesta nadie. A partir de ese momento el debate parece cerrado enfocándose la atención hacia cómo resolver esos problemas fundamentales. Y en esas estamos.

La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)

Un hecho fundamental para la comunidad de investigadores en Educación Matemática es la creación de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), a la que me honro en pertenecer. La SEIEM constituye un espacio de comunicación, crítica y debate sobre investigación en Educación Matemática, donde se plantean cuestiones, se transmiten e intercambian resultados, se profundiza en las elaboraciones teóricas y se mejoran y validan los diseños metodológicos.

La Sociedad se articula en grupos de trabajo, existiendo actualmente los de Didáctica del Análisis, Aprendizaje de la Geometría, Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, Pensamiento Numérico y Algebraico, Conocimiento y desarrollo profesional del profesor, Educación Infantil, Historia de la Educación Matemática.

La SEIEM está haciendo una gran labor, con reuniones de los grupos de trabajo, simposios, seminarios y proyectos de investigación que dan lugar a lecturas de tesis doctorales. El primer simposio general de la SEIEM se celebró en Zamora en septiembre de 1997 y el segundo está convocado en Pamplona en septiembre de este año (1998). Edita también un boletín de difusión restringida a los socios en el que se refleja ampliamente la actividad que se realiza.

Las publicaciones sobre Educación Matemática en España han crecido considerablemente en los últimos años. Libros, artículos de revistas, memorias de tesis y trabajos de investigación, boletines, libros de texto, guías didácticas y actas de jornadas y congresos constituyen un gran patrimonio para la educación matemática que sería necesario compartir con toda la comunidad iberoamericana.

Las publicaciones sobre la enseñanza de las matemáticas

Las publicaciones sobre Educación Matemática en España han crecido considerablemente en los últimos años. Libros, artículos de revistas, memorias de tesis y trabajos de investigación, boletines, libros de texto, guías didácticas y actas de jornadas y congresos constituyen un gran patrimonio para la educación matemática que sería necesario compartir con toda la comunidad iberoamericana. Para hacernos idea de la magnitud que puede suponer lo publicado, Rico (1994) cifraba en 600 los artículos publicados en las cinco revistas españolas más importantes en las que se incluían trabajos de educación Matemática hasta el año 1991; ocho años despues estamos aproximadamente en unos 1.000 artículos.

Libros

El Ministerio de Educación y Cultura está publicando, en colaboración con editoriales nacionales, traducciones de libros de gran interés para la Educación Matemática. Además está editando una serie de documentos dirigidos a los Centros de Profesores sobre temas curriculares concretos; las comunidades autónomas con competencias en materia de educación, por su parte, están siguiendo una política similar. La inciativa privada contribuye también con colecciones de Educación Matemática, como las de la Editorial Síntesis («Matemáticas: Cultura y aprendizaje» y «Educación Matemática en Secundaria»), que consta de sesenta y un títulos y en la que participan alrededor de doscientos autores españoles de todos los niveles educativos.

Publicaciones periódicas

Entre las publicaciones periódicas las siguientes revistas son específicas de Educación Matemática:

- *Thales*, Ed. Sociedad Andaluza Thales, comienza su publicación en 1984.

- *Epsilon*, Ed. Asociación de Profesores de Matemáticas de Andalucía y posteriormente por la Sociedad Andaluza Thales, comenzando también en 1984.
- *Números*, Ed. Sociedad Canaria Isaac Newton, comienza en 1985.
- *Suma*, Ed. FESPM, comenzando en el año 1988.
- *Uno*, editada por editorial Grao, la de más reciente apación, que comienza en 1994.

Hay una revista muy interesante que, aunque no es exclusiva, contiene muchos trabajos de investigación en Didáctica de las Matemáticas, junto con otros de Didáctica de las Ciencias. Se llama *Enseñanza de las Ciencias*, editada por el ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona y el Servicio de Formación Permanente del Profesorado de la Universidad de Valencia que comienza a publicare en 1983, siendo por tanto más antigua que las anteriores. Se editan también un conjunto de publicaciones periódicas dentro del campo de la educación en sentido amplio, que contienen trabajos de educación matemática, como *Cuadernos de Pedagogía, Perspectiva Escolar, Infancia y aprendizaje, Bordón* y *Campo Abierto*.

Tesis doctorales, tesinas y memorias de investigación

Las tesis doctorales, tesinas y memorias de investigación constituyen una bibliografía especifica y valiosa. Las no publicadas (literatura gris) pueden obtenerse por préstamo inter-bibliotecario a través de las bibliotecas de las Universidades y hay una ficha bibliografíca de todas las leídas a partir de 1975 en INTERNET, en la Base TESEO del Ministerio de Educación y Cultura. Hay una loable iniciativa por parte de la Editorial Comares (Granada) que en su colección «Mathema», de monografías de investigación en Didáctica de la Matemática, pretende recoger estos trabajos habiendo publicado ya en la actualidad varios titulos.

Publicaciones de las Sociedades de Profesores y FESPM

Las Sociedades de Profesores están comenzando a definir su propia política de publicaciones. Editan habitualmente las actas de los congresos y jornadas que celebran. Existen varios servicios de publicaciones en las sociedades y se han sentado las bases para crear en fecha próxima el Servicio de Publicaciones de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas. La Sociedad más activa en este terreno es la Sociedad Andaluza Thales que ha traducido y editado los *Estándares Curriculares y de Evaluación* del NCTM americano y cuatro documentos complementarios de los denominados Addenda Series y está comenzando a editar materiales curriculares elaborados por los profesores andaluces. Otras sociedades han editado libros de problemas de las Olimpiadas matemáticas celebradas, revistas internas, guías didácticas, catálogos de exposiciones y otro material diverso.

La Sociedad más activa en este terreno [publicaciones] es la Sociedad Andaluza Thales [...] Otras sociedades han editado libros de problemas de las Olimpiadas matemáticas celebradas, revistas internas, guías didácticas, catálogos de exposiciones y otro material diverso.

Libros de texto

Las editoriales, que publican habitualmente libros de texto para el alumnado de los distintos niveles educativos, en la mayoría de los casos ofrecen también guías didácticas para los profesores; incluso algunas editan también libros de Matemáticas y de Educación Matemática, unos traducidos directamente del inglés u otros idiomas, pero otros de autores españoles. También hay empresas comerciales que tienen en su catálogo diversos materiales didácticos.

Los centros de documentación

La información que ha generado en Educación Matemática y el ritmo en que se incrementa, hace necesaria la creación y mantenimiento de Centros de Documentación. En una de nuestras sociedades se ha constituido en 1987, el Centro de Documentación de Didáctica de la Matemática Thales, gracias a un convenio de la Junta de Andalucía, la Universidad de Cádiz y la Sociedad Thales. Este centro edita periódicamcnte un Boletin y proporciona a los profesores de toda España información, a través de listados bibliográficos, fotocopias de artículos, préstamos de libros y acceso a bases de datos internacionales.

Internet

El fenómeno INTERNET no se puede ya ignorar. No sabemos todavía cómo puede afectar al mundo de la documentación y están planteados al respecto numerosos interrogantes. ¿Por cierto alguien sabe si es una publicación un documento publicado en INTERNET?, o ¿cuánto tiempo debe permanecer en la RED para ser considerado publicación? No obstante es innegable que debemos aprovechar sus potencialidades. De momento podemos en tiempo real comunicarnos y enviar-nos documentación en forma de archivos y tenemos bases de datos a las que podemos acceder en cualquier parte del mundo. Conscientes de ello casi todas nuestras sociedades tienen su «página web» y nuestra Federación está actualmente creando la suya. Hay ya una gran cantidad de información sobre Educación Matemática que se encuentra ya en el «ciberespacio» y sólo hace falta para viajar por él: un pequeño ordenador, unos programas, un modem, tiempo, paciencia y dinero para pagar la factura del teléfono.

Conclusiones y prospectiva de futuro

Después de mi exposición, creo que tendrán ustedes una buena panorámica de la realidad de la Educación Matemática en España y que si bien los cuadros no son isomorfos, sí que es cierto que hay muchas similitudes entre lo que ocurre en los distintos países iberoamericanos. El Proyecto IBERCIMA, diseñado por la OEI con el patrocinio del Ministerio de Educación Español, es un buen ejemplo de un acercamiento a los problemas comunes y de un intento de coordinar las políticas educativas en los estados iberoamericanos. En el Informe final de una de las líneas de actuación (Rodriguez Conde, de Guzmán y García Sipido, 1994) se dice que los problemas que se detectan son muy similares en casi todos los países iberoamericanos (respecto a la estructura del sistema educativo, la fundamentación de los currículos, los objetivos didácticos, los contenidos, las orientaciones didácticas y la evaluación). Por tanto, tenemos que colaborar para solucionar estos problemas, tenemos un camino delante y podemos recorrelo juntos. Ante ese camino se nos presentan importantes retos a la comunidad de educación matemática, algunos de los cuales brevemente voy a señalar:

Hay que buscar la manera de que los avances de la investigación influyan en la práctica educativa. La investigación no se puede limitar a conocer las circunstancias en las que ocurre la educación matemática sino que tiene que servir para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en todos los niveles educativos

- Debemos pedir a nuestros respectivos ministerios educativos a que continúen los proyectos conjuntos (como IBERCIMA) para tratar de generar políticas educativas coherentes y para solucionar los problemas comunes detectados en la comunidad educativa iberoamericana. Yo propondría que esta fuera una resolución de este Congreso.
- En cuanto al currículo, hay que dar al currículo matemático un enfoque epistemológico y crítico-social que posibilite una formación que sepa incorporar de forma ágil, significativa y crítica –y no aislada y desarticulada– los contenidos de los avances tecnológicos y científicos.
- En cuanto a la formación inicial del profesorado de Matemáticas: hace falta formar formadores en los distintos países que conozcan los nuevos planteamientos en la formación matemática de los profesores de Educación Primaria haciendo hincapié en la didáctica de nuestra disciplina. Para el profesorado de secundaria, recomendamos intensificar las companentes de cualificación profesional de estos profesores.
- Hay que definir políticas de formación del profesorado, vincular la formación permanente a la universidad y clarificar, conectar y definir el papel de los «Centros de recursos» que existen en los diversos países.
- En cuanto a la Investigación en educación matemática, hay ya un buen conjunto de investigadores en Educación Matemática en España y en otros países iberoamericanos y hay una calidad contrastada en la producción. Se ha realizado un gran esfuerzo por establecer «el estado de la cuestión» sobre los principales campos de investigación y compartir los conocimientos adquiridos. El desarrollo de la investigación en Didáctica de la Matemática en España y en otros países iberoamericanos, durante los últimos diez años, ha sido notable y marca unas líneas de continuidad que permiten augurar nuevas e importantes aportaciones. Esta experiencia debe ser aprovechada. Se deberían fomentar programas de doctorado conjuntos entre universidades de los distintos países, visitas y periodos de formación e intercambio entre profesores e investigadores de los estados iberoamericanos.
- Hay que buscar la manera de que los avances de la investigación influyan en la práctica educativa. La investigación no se puede limitar a conocer las circunstancias en las que ocurre la educación matemática sino que tiene que servir para mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en todos los niveles educativos.
- Hay una comunidad de educadores e investigadores en Educación Matemática con conciencia de su comunidad de intereses, con voluntad para reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas, se están constituyendo sociedades fuertes con peso específico en el campo de la educación y van a tener aún mayor

fuerza en el futuro. Hay que apostar decididamente por la consolidación del movimiento asociativo en todos los países iberoamericanos, fomentando que cada vez sea mayor el número de profesores que pertenezcan a las sociedades de profesores de Matemáticas. Esto solamente será posible si esas sociedades saben ofrecer a los profesores productos que les interesen y les estimulen. Hay que fomentar todo tipo de intercambio entre las sociedades y trabajar en la línea de crear una Federación Iberoamericana de Sociedades con horizonte en el año 2000. Propongo que también esta sea una de las resoluciones de este Congreso.

- Es importante un clima social económico, cultural y político adecuado para desarrollar la educación matemática de una manera adecuada; para realizar actividades que tengan que ver con la educación matemática hacen falta mecanismos, ayudas y apoyos de los propios gobiernos y de fundaciones externas e incluso de la empresa privada. Hace falta voluntad política y financiación adecuada. Pero hace falta convencer con proyectos coherentes y con rentabilidad social a los políticos haciéndoles ver el alcance, consecuencias y beneficios que pueden derivarse de nuestro trabajo.
- Es necesario aprovechar el fenómeno INTERNET y aprovechar sus potencialidades. La comunicación en el «ciberespacio» será más fluida, facilitando el intercambio de información y acortando la distancia que supone el Océano Atlántico para España y Portugal con los países del Continente Americano. Habrá que fomentar la conversación virtual, la teleconferencia y en resumen acostumbrarse al «trabajo virtual» en la comunidad de Educación Matemática iberoamericana.

Espero no haber mostrado un paisaje desolado. Es un paisaje con luces y sombras pero pintado con afecto y con esperanza en el futuro, pero sobre todo es un cuadro colectivo y un cuadro sin terminar. Tenemos que continuar entre todos dando pinceladas. Entiendo que es necesario aunar esfuerzos, aunar muchos esfuerzos, mantener una continuidad, potenciar un trabajo coordinado, y eso es responsabilidad de todos nosotros, de toda la comunidad iberoamericana, pero es una tarea ilusionante. Con ese compromiso de ilusión, esperanza y unión de todos los países iberoamericanos en torno a nuestro interés común, la mejora de la Educación Matemática: deseo y espero que se cumplan felizmente todas las expectativas despertadas en este III CIBEM.

Queridos colegas amigas y amigos, muchas gracias por la atención que me habéis prestado.

Hay que apostar decididamente por la consolidación del movimiento asociativo en todos los países iberoamericanos, fomentando que cada vez sea mayor el número de profesores que pertenezcan a las sociedades de profesores de Matemáticas.

Ricardo Luengo
Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Referencias bibliográficas

BENEDITO ANTOLI, V. (Coord.) (1.993): *La Formación del profesorado universitario*, MEC, Madrid.

FEIMAN, S (1983): «Learning to teach», East Lansing, Institute for research on teaching, Michigan, State University. Ocasional Paper, N.° 64.

CLARK D. Y MARKER G. (1975): «The institutionalitation of teacher education, *Teacher Education*, 53-86.

LOPEZ, J. A. y MORENO, M. L. (1996): «Tercer estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)», *Revista de Educación*, 311, 315-336.

LUENGO GONZÁLEZ, R. (1997): «Las Matemáticas en la cresta de la Ola. Buscando una salida», *SUMA* n.° 26, 5-9.

MEC/CIDE, Puig y Calderón (coords.) (1996): *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*, Centro de Publicaciones del MEC, Madrid.

RICO ROMERO L. (1994): «Mitos y realidades de la Educación Matemática en España», *Actas de las VI Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* 41-62, Ed. Sociedad Extremeña de Educación Matemática y FESPM, Badajoz,

RODRIGUEZ CONDE, DE GUZMAN Y GARCIA SIPIDO, (1994): «Proyecto IBERCIMA», *Actas de las VI JAEM*, Ed. Sociedad Extremeña de Educación Matemática y FESPM, Badajoz,

VÁZQUEZ, M. y L. RICO (1991): «La Comunidad de Educadores Matemáticos», en A. GUTIÉRREZ (ed.) *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*, Síntesis, Madrid.

VÁZQUEZ, M. y L. RICO (1994): «Educación matemática en la España del Siglo XX», en J. KILPATRICK, L. RICO y M. SIERRA: *Educación matemática e investigación*, 99-207, Síntesis, Madrid.

VÁZQUEZ, M. y L. RICO (1996): «Contexto y evolución histórica de la formación en Matemáticas y su Didáctica de los Profesores de Primaria», en J. JIMÉNEZ, S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (eds.): *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, Editorial Comares, Granada, 39- 65.

SUMA 31
junio 1999, pp. 51-54

Algoritmos iterativos para la computación de raíces en sistemas de ecuaciones

Juan Bosco Romero Márquez
Benito Hernández Bermejo
María Ángeles López y Sánchez Moreno

En el presente trabajo se obtiene un conjunto de familias infinitas de métodos numéricos, para la resolución de sistemas de ecuaciones simultáneas. Estos algoritmos se basan en la realización de desarrollos analíticos previos a nivel local mediante diversos procedimientos tomados del Cálculo elemental, como por ejemplo el binomio de Newton o la serie geométrica. Como los posibles desarrollos a escoger son infinitos, el conjunto así definido constituye una familia de métodos, cada uno de los cuales es convergente mediante aproximaciones sucesivas a la solución (o soluciones) de un mismo problema. Tanto esta sistematización de métodos como alguno de los mismos podrían ser, según creemos, novedosos en la literatura: de hecho, como se ilustra en el cuerpo del artículo, ciertos elementos particulares de estas familias equivalen a algoritmos previamente conocidos que se ven, por tanto, generalizados bajo esta nueva perspectiva.

ARTÍCULOS

A MODO DE INTRODUCCIÓN del método general, comenzaremos con el caso más sencillo de desarrollo de algoritmos iterativos convergentes para el cálculo aproximado de las raíces reales de un polinomio, utilizando para ello métodos elementales de aproximaciones recurrentes sucesivas, cuya construcción se basa en el desarrollo del binomio de Newton y en la serie geométrica.

El método aquí expuesto sigue la siguiente línea. Sea la ecuación polinómica:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = P(x) = 0 \qquad (1)$$

donde $P(x)$ es un polinomio de grado n, con coeficientes reales o complejos a_i, $i = 1,2,\ldots, n$.

Para establecer nuestros algoritmos usamos el siguiente:

Lema: Si x es un número real tal que $|x| < 1$, y k es un entero positivo, entonces:

$$\sum_{p=0}^{\infty} \binom{p+k}{k} x^p = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \qquad (2)$$

La demostración, puede consultarse en Apostol (1978).

Tenemos que si $\alpha \neq 0$ es una solución real de (1) entonces:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i = \sum_{i=0}^{n} a_i((\alpha - r) + r)^i = 0 \quad r \in I(\alpha, \rho), \rho > 0 \qquad (3)$$

Si en el primer miembro de (3) desarrollamos con el binomio de Newton y escogemos los términos lineales en $(\alpha - r)$ y $(\alpha - r)/r$, ambos convergentes a cero, en los dos miembros (porque $(\alpha - r)^p$ y $((\alpha - r)/r)^p$ tienden a cero cuando $r \to \alpha$, $p > 1$, $p \in \mathbb{R}$), entonces podemos despejar α como función de r en un entorno de la raíz α y obtenemos así una función que llamaremos $\alpha = \xi(r)$.

Alternativamente, podemos transformar la ecuación $P(x) = 0$ en otra equivalente, si suponemos que la raíz α de $P(x) = 0$ es no nula (las raíces nulas son identificables por simple inspección de un polinomio y no presentan mayor interés en el problema que ahora nos ocupa). Por ejemplo:

$$\frac{P(x)}{x^m} = 0$$

Si ahora utilizamos (2) o el binomio de Newton, dependiendo de si los valores que damos a m son o no positivos, y de si m es un número entero o real, y despejando α como en el caso anterior, llegamos a una familia infinita de algoritmos $\alpha = \xi_m(r)$.

Dada la función $\xi(r)$, se toma un valor de partida $x_0 = c$, que es un número racional o real arbitrario en un entorno de la raíz α (por ejemplo, x_0 puede ser la parte entera de α, en el caso en que se conozca el intervalo en que se encuentra la raíz). A partir de aquí tendríamos:

$$x_{n+l} = \xi(x_n) \quad n \geq 0$$

Planteamos al lector como problema abierto la demostración formal de que tales familias de algoritmos son convergentes.

En particular, en el caso de la ecuación $x^2 = a$, $a > 0$ para $m = 0, 1, 2$ obtenemos $x^2 = a$, $x = a/x$, y $1 = a/x^2$, respectivamente. El primero de estos tres métodos conduce al llamado algoritmo de Newton o aritmético; y el segundo es el algoritmo de aproximación armónico.

Ejemplo: distintos algoritmos iterativos para el cálculo de la raíz de la ecuación $x^2 = x + 1$

Como ilustración de lo anterior mostramos a continuación varios algoritmos iterativos para el cómputo de las raíces de la ecuación:

$$x^2 = x + 1 \qquad (4)$$

Algoritmo 1: Si α es una raíz de (4), entonces $\alpha^2 = \alpha + 1$. Así, si $r \in I(\alpha, \rho)$, $\rho > 0$:

$$\alpha + 1 = ((\alpha - r) + r)^2 \approx 2r(\alpha - r) + r^2$$

donde se ha tomado la aproximación lineal. Por tanto:

$$\alpha = \alpha(r) = \frac{r^2 + 1}{2r - 1}, \quad r \neq \frac{1}{2} \qquad (5)$$

El algoritmo asociado a (5) será pues:

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2x_n - 1}, \quad n \geq 0 \qquad (6)$$

Como ilustración de lo anterior mostramos a continuación varios algoritmos iterativos para el cómputo de las raíces de la ecuación: $x^2 = x + 1$

Los dominios de convergencia en este caso son:

$$\lim_{x \to \infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, & x_0 > 1/2 \\ \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, & x_0 < 1/2 \end{cases}$$

Algoritmo 2: Dado que $\alpha = \alpha + 1/\alpha$ tememos:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{r\left(1 - \dfrac{r - \alpha}{r}\right)} \approx 1 + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r - \alpha}{r}\right)$$

donde hemos tomado la aproximación lineal y $r \in I(\alpha, \rho)$, de modo que resulta que:

$$\alpha = \alpha(r) = \frac{r^2 + 2r}{r^2 + 1}$$

De aquí se deduce el algoritmo para la computación de α:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2x_n}{x_n^2 + 1}, \quad n \geq 0$$

ahora los dominios de convergencia son:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, & x_0 > 0 \text{ ó } x_0 < -2 \\ \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, & -2 < x_0 < 0 \end{cases}$$

Algoritmo 3: Escribiendo la ecuación (4) como $1 = 1/\alpha + 1/\alpha^2$ y operando se obtiene trivialmente:

$$1 = \frac{1}{r\left(1 - \dfrac{r - \alpha}{r}\right)} + \frac{1}{r^2\left(1 - \dfrac{r - \alpha}{r}\right)^2} \approx$$

$$\frac{1}{r}(1 + \alpha') + \frac{1}{r^2}(1 + 2\alpha')$$

donde $\alpha' = (r - \alpha)/r$. Por tanto el algoritmo es:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n + 1)(3 - x_n)}{x_n + 2}, \quad n \geq 0$$

En este caso tenemos:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}, & 3 > x_0 > 0 \\ \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}, & 0 > x_0 > -1 \end{cases}$$

Algoritmo 4: La última posibilidad que consideraremos resulta al tomar la expresión $\alpha^3 = \alpha^2 + \alpha$. Con $r \in I(\alpha, \rho)$ tenemos:

$$(\alpha - r + r)^3 = (\alpha - r + r)^2 + \alpha$$

Y la aproximación lineal nos da:

$$\alpha(3r^2 - 2r - 1) = 2r^3 - r^2 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha(r) = \frac{r^2(2r-1)}{(r-1)(3r+1)}$$

Así llegamos al algoritmo:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2(2x_n - 1)}{(x_n - 1)(3x_n + 1)}, \quad n \geq 0$$

Como en casos anteriores resulta:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, & x_0 > 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, & x_0 < -1/3 \end{cases}$$

Fuera de los rangos indicados en los algoritmos 3 y 4, la convergencia se da por intervalos. Se propone como ejercicio al lector el estudio del comportamiento de los algoritmos en estas regiones.

Sistemas generales. Ejemplo: intersección de dos cónicas

De la teoría y los ejemplos precedentes se infiere que esta misma técnica puede utilizarse para aproximar ecuaciones trigonométricas, exponenciales, etc. De hecho, los sistemas de cualquier clase en las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ pueden resolverse aplicando los métodos anteriores.

De la teoría y los ejemplos precedentes se infiere que esta misma técnica puede utilizarse para aproximar ecuaciones trigonométricas, exponenciales, etc.

Ejemplo: Calculemos los puntos comunes o de intersección de las cónicas:

$$C_1: \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad a > 0$$

$$C_2: \quad xy = b, \quad b > 0$$

Si $P(\alpha, \beta)$ fuera un punto de la intersección $C_1 \cap C_2$, entonces, para cada $(r, s) \in I[(\alpha, \beta), \rho]$, $\rho > 0$, entorno del punto (α, β), podemos escribir:

$$((x - r) + r)^2 + ((y - s) + s)^2 = a^2$$

$$((x - r) + r)((y - s) + s) = b$$

Teniendo en cuenta los rangos de valores que toman las distintas variables podemos realizar la aproximación lineal correspondiente, de la que se obtiene:

$$2r(x - r) + 2s(y - s) = a^2 - r^2 - s^2$$

$$s(x - r) + r(y - s) = b - rs$$

Resolviendo en $(x - r)$ e $(y - s)$ llegamos a:

$$x = x(r,s) = \frac{r^3 + r(a^2 - s^2) - 2sb}{2(r^2 - s^2)}, \quad r^2 \neq s^2$$

$$y = y(r,s) = \frac{-s^3 + s(r^2 - a^2) + 2rb}{2(r^2 - s^2)}, \quad r^2 \neq s^2$$

Así hemos obtenido dos funciones racionales, en las variables r, s, definidas para $r, s \in \mathbb{R}$, $r^2 \neq s^2$, continuas y diferenciables y que pueden ser interpretadas como dos superficies en $\mathbb{R}^3$, asociadas al sistema original. Entonces, si $[x]$ denota la parte entera de un número real x, podemos construir el algoritmo iterativo asociado al problema:

$$(x_0, y_0) = ([\alpha], [\beta])$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + x_n(a^2 - y_n^2) - 2y_n b}{2(x_n^2 - y_n^2)}, \quad \alpha = \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$y_{n+1} = \frac{-y_n^3 + y_n(x_n^2 - a^2) + 2x_n b}{2(x_n^2 - y_n^2)}, \quad \beta = \lim_{n\to\infty} y_n$$

El rango de n es $n \geq 0$. Al igual que en el ejemplo de la ecuación, este algoritmo no es el único posible: pueden construirse otros mediante desarrollos similares a los allí empleados.

Se puede comprobar que el algoritmo anterior es convergente a la raíz (α, β) del sistema y que, además, este punto es un invariante de las superficies.

Conclusiones

Se ha presentado aquí un método que genera familias infinitas de algoritmos iterativos convergentes para la resolución de sistemas de ecuaciones generales en una o más variables. Estos algoritmos han sido comprobados en la práctica, para ejemplos concretos, mediante una rutina en TURBO PASCAL ejecutada sobre un PC con procesador 386. Las convergencias observadas en los intervalos apropiados son, sin excepción:

- Hacia alguna de las soluciones correctas.
- Al cabo de pocos pasos (en los mejores casos se puede obtener a partir de un entero una aproximación a un número trascendente con 9 cifras decimales correctas al cabo de 3 iteraciones).

- En tiempos de computación instantáneos (menores al segundo).

Los algoritmos expuestos, aparte de su generalidad o de su interés teórico por los aspectos de su desarrollo que quedan pendientes, ofrecen una amplia posibilidad de el ección que se adapte a la implementación concreta que requiera cada caso. Es aquí donde los criterios de robustez, velocidad de convergencia y economía en tiempo de cálculo deberán ser tenidos en cuenta para seleccionar el algoritmo óptimo entre los infinitos posibles.

Bibliografía

ACTON, F. S. (1990): *Numerical Methods that usually work*, MAA.

APOSTOL, T (1978): *Análisis Matemático*, Reverté, Barcelona.

BREUER, S y G. ZWAS (1988): *Comput. Educ. 12*, n.° 2, 289.

DANILINA N.I., N.S. DUBROVSKAYA, O.P. KVASHA y G.S. SMIRNOV (1988): *Computation al Mathematics*, Mir, Moscú.

DEMIDOVIC, B.P. y I.A. MARON (1987): *Computational Mathematics*, Mir, Moscú.

DIEUDONNE, J. (1968): *Calcul Infinitesimal*, Hermann, Paris.

FROBERG, C.E. (1969): *Introduction to Numerical Analysis*, Addison-Wesley, Reading (Massachusetts).

GASTINEL, N. (1974): *Analyse numerique lineaire*, Hermann, Paris.

HENRICI, P. (1964): *Elements of Numerical Analysis*, John Wiley, New York.

HILDEBRAND F. B. (1956): *Introduction to numerical analysis*, Mc Graw-Hill, New York.

HOUSEHOLDER A. S. (1953): *Principles of numerical analysis*, Mc Graw-Hill, New York.

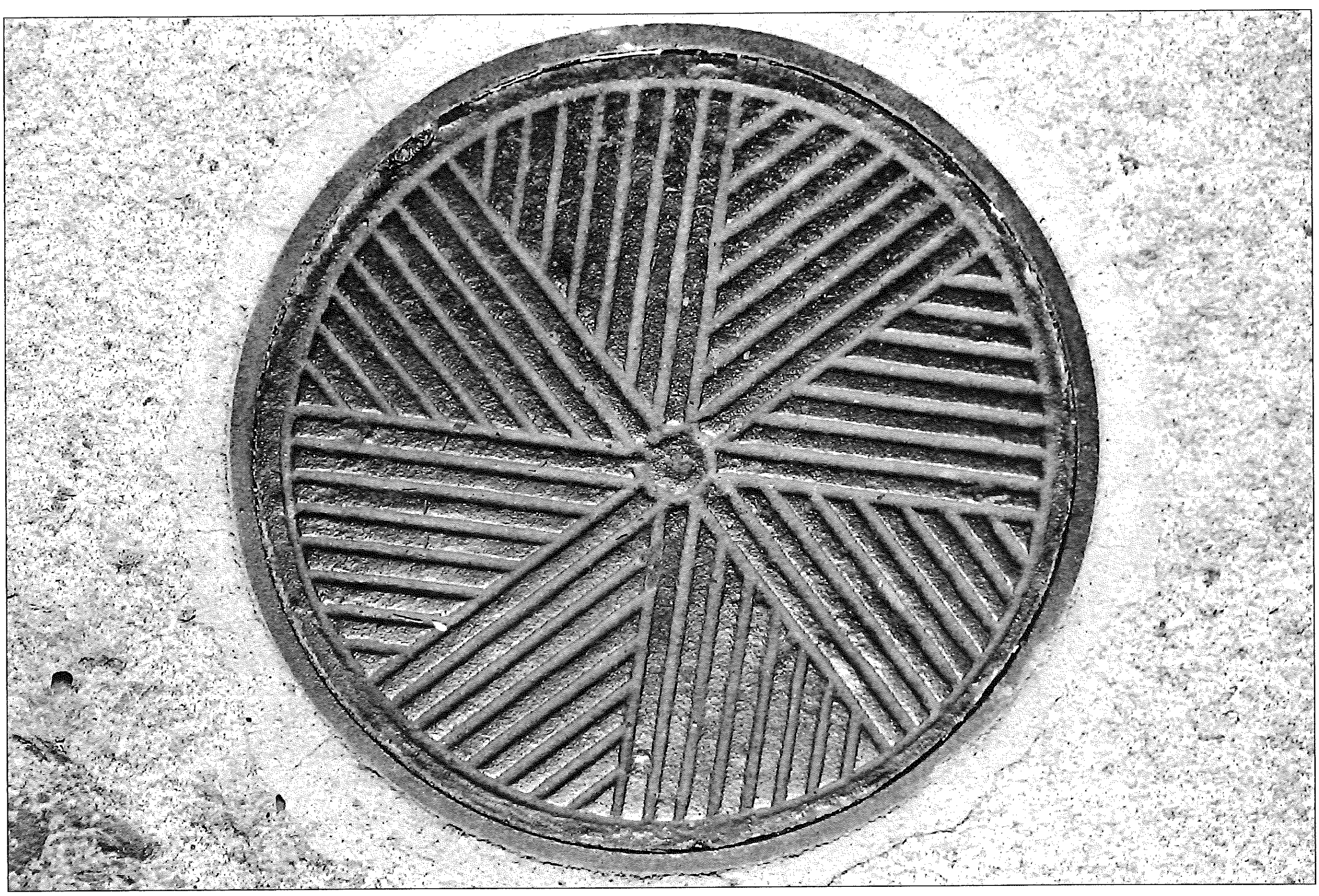
KNOPP K. (1990): *Theory and applications of infinite series*, Dover, New York.

RALSTON A. (1976): *Análisis Numérico*, Limusa, México.

STOER J. y E. BURLISCH (1993): *Introduction to Numerical Analysis*, Springer Verlag, New York.

YOUNG D. M. y R. TODD GREGORY (1973): *A Survey of Numerical Mathematics*, Tomos I y II, Dover, New York.

Juan Bosco Romero
IB Isabel de Castilla. Ávila
Benito Hernández
Departamento de Física Fundamental. UNED
María Ángeles López
IB Isabel de Castilla. Ávila
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas



Huelva (Foto: Luis Balbuena)

SUMA 31
junio 1999, pp. 55-66

Los enigmáticos cálculos del escriba Ahmes

José María Gairín Sallán

ARTÍCULOS

En este trabajo en el que se trata de descifrar una tabla (el Recto) del Papiro de Rhind, se presenta la fracción con el significado de cociente partitivo. La resolución de lo que denominamos enigma de Ahmes, pone en juego la formulación y contraste de hipótesis que desembocarán en una reconstrucción especulativa del concepto de reparto en el Egipto antiguo. Una vez definido el significado de fracción que, suponemos, empleó el escriba Ahmes, les queda a los alumnos un trabajo de descomposición de fracciones en suma de productos de fracciones y de comprobación de sus resultados con los que figuran en el Recto.

DIVERSOS TRABAJOS de investigación en didáctica de la matemáticas (Carpenter y otros, 1993; Behr y otros, 1993) han puesto de manifiesto la complejidad de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que conforman el aprendizaje y comprensión de los números racionales. Otras publicaciones (Streefland, 1991; Dickson, 1991), recogen manifestaciones de los alumnos en las que el conocimiento del número racional se interpreta como extensión del conocimiento del número natural; así, por ejemplo, subsiste la creencia de que «la multiplicación hace más grande».

Conocer y entender los números racionales exige comprender sus diferentes significados (relación parte-todo, cociente, razón,...), conocer las características sintácticas y semánticas de distintos sistemas de representación (fraccionario, decimal, recta numérica,...), y establecer conexiones conceptuales entre los sistemas de representación utilizados. En consecuencia, la enseñanza del número racional exige de nuevas acciones para el que aprende (Kieren, 1993); siendo el mundo real, el mundo de los objetos físicos, el escenario adecuado para la formación de conceptos y el área de aplicación de los mismos (Streefland, 1991). Las ideas sobre el número racional positivo están asociadas a tareas de medida de cantidades de magnitud, y será a través de las acciones de recomponer unidades y las de realizar procesos de partición cómo los alumnos podrán establecer la necesaria conexión entre los distintos significados del número racional (Carpenter y otros, 1993).

En este trabajo y bajo la apariencia de descifrar una tabla del Papiro de Rhind, se presenta la fracción con significado de cociente partitivo, la fracción como cantidad de magnitud que resulta de repartir igualmente *a* unidades enteras entre *b* individuos. Al realizar la tarea propuesta el alumno desarrollará un trabajo continuo de reconversión de unidades (que no podrá controlar sin recurrir a una simbología apropiada), que le mostrará una nueva faceta de las fracciones: la concepción del número *a/b* como una totalidad se amplía al aparecer como suma de productos de fracciones y, además, en distintas y múltiples maneras; es decir, cada fracción encierra una gran variedad de relaciones aditivas y multiplicativas con otras fracciones.

Bajo el formato de juego mental se propone a los alumnos la reconstrucción del *Recto* del *Papiro de Rhind*. Aunque escritas de forma secuenciada el lector encontrará dos mensajes diferenciados: de una parte, –sobre fondo gris– las consignas que pueden transmitirse a los alumnos. De otra parte, consideraciones para el profesor que justifican las consignas lanzadas a los alumnos, así como las reacciones que las mismas puedan provocar.

La resolución de lo que denominamos enigma de Ahmes es el motor que pone en juego la formulación y contraste de hipótesis que desembocarán en una reconstrucción especulativa del concepto de reparto en el Egipto antiguo, y siempre bajo la óptica de la concepción personal de la idea de fracción que asignamos a los egipcios, dado que de la documentación existente no se deriva una interpretación única del significado de fracción en tiempos de los faraones. Una vez que se haya definido el significado de fracción que, suponemos, empleó el escriba Ahmes, le queda al alumno un trabajo de descomposición de fracciones en suma de productos de fracciones y de comprobación de sus resultados con los que figuran en el *Recto*.

...el trabajo aquí propuesto es adecuado para alumnos de Educación Secundaria

Una última reflexión: si bien es cierto que el estudio del número racional se comienza en Educación Primaria, el trabajo aquí propuesto es adecuado para alumnos de Educación Secundaria, puesto que es en esta etapa cuando se tienen que consolidar las conexiones entre significados y representaciones de los números racionales (Rico-Castro, 1995).

Escritura actual	Escritura egipcia	Escritura actual	Escritura egipcia	Escritura actual	Escritura egipcia
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$
$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$
$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$	$\frac{2}{19}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$
$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$
$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$	$\frac{2}{29}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$	$\frac{2}{31}$	$\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$
$\frac{2}{33}$	$\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$	$\frac{2}{37}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$
$\frac{2}{39}$	$\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$	$\frac{2}{41}$	$\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$	$\frac{2}{43}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$
$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$	$\frac{2}{47}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$	$\frac{2}{49}$	$\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$
$\frac{2}{51}$	$\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$	$\frac{2}{53}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$
$\frac{2}{57}$	$\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$	$\frac{2}{59}$	$\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$	$\frac{2}{61}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{244}+\frac{1}{488}+\frac{1}{610}$
$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$	$\frac{2}{65}$	$\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$	$\frac{2}{67}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$
$\frac{2}{69}$	$\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$	$\frac{2}{71}$	$\frac{1}{40}+\frac{1}{568}+\frac{1}{710}$	$\frac{2}{73}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$
$\frac{2}{75}$	$\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$	$\frac{2}{77}$	$\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$	$\frac{2}{79}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$
$\frac{2}{81}$	$\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$	$\frac{2}{83}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$	$\frac{2}{85}$	$\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$
$\frac{2}{87}$	$\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$	$\frac{2}{89}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$	$\frac{2}{91}$	$\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$
$\frac{2}{93}$	$\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$	$\frac{2}{95}$	$\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$	$\frac{2}{97}$	$\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$
$\frac{2}{99}$	$\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$	$\frac{2}{101}$	$\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$		

Recto del *Papiro de Rhind*

Presentación (planteamiento del problema)

Ahmes fue un escriba del antiguo Egipto al que se atribuye la autoría de uno de los más valiosos documentos matemáticos que han llegado hasta nuestros días, el conocido como *Papiro de Rhind*, que está datado en el año 1650 A.C.

En ese papiro, además de las soluciones de problemas, aparece una tabla, conocida como *Recto* (Gillings, 1982), que recoge los valores que para los egipcios tenían las que actualmente llamaríamos fracciones de la forma *2/n*, siendo *n* impar y con valores entre 3 y 101. Constituye la tabla más completa y extensa de las que han llegado hasta nosotros. Con la simbología habitual, el *Recto* se puede transcribir tal como se muestra en la página anterior.

En esta transcripción se entiende que los egipcios no conocen las fracciones en la misma forma que nosotros las escribimos en la actualidad. Para Ahmes las cantidades fraccionarias son de la forma *1/n*, fracciones unitarias, y la suma de estas fracciones unitarias permite representar cualquier cantidad. Y, como se observa en la tabla, también se concede el mismo *status* a la expresión 2/3 puesto que ésta no se descompone en suma de fracciones unitarias.

En la escritura original, las fracciones unitarias vienen indicadas por una raya encima del denominador, $\overline{n}$. De este modo, los egipcios pueden escribir las cantidades fraccionarias con los mismos signos que utilizan para escribir las cantidades enteras, entendiendo que $\overline{n}$ expresa la cantidad de magnitud resultante de dividir la unidad en *n* partes iguales. Tan sólo hay una excepción: la fracción 2/3 se escribe con dos rayas encima del 3, es decir $\overline{\overline{3}}$.

También hay que hacer notar que en la escritura egipcia no aparecen los signos + que figuran en el cuadro ya que su sistema de numeración aditivo conlleva que la presencia de dos símbolos seguidos se interprete como la suma de las cantidades que cada uno representa.

Para Ahmes las cantidades fraccionarias son de la forma 1/n, fracciones unitarias y la suma de estas fracciones unitarias permite representar cualquier cantidad.

...la propuesta no es la de ejercitarse en la práctica de una técnica sobre la que se les ha instruido previamente, sino que la propuesta es la de describir una técnica de la que conoce el resultado.

Al observar la tabla parece evidente que la idea de fracción que usó el escriba difiere notablemente de la que tenemos nosotros, pero ¿qué hay que hacer para escribir las fracciones en la forma que lo hizo Ahmes?

Esta pregunta, nos lleva a practicar un juego apasionante en el que ganar significa descubrir cómo funcionaba la mente de una persona de la que sólo conocemos los resultados y no cómo obtenerlos.

Así que se propone el siguiente reto:

Descubrir un método para pasar de nuestra escritura de fracciones a la escritura empleada por Ahmes.

Aunque planteado como un juego, realmente se propone a los alumnos una tarea diferente a las que habitualmente se realizan en la educación matemática. Y la diferencia radica en que ahora la propuesta no es la de ejercitarse en la práctica de una técnica sobre la que se les ha instruido previamente, sino que la propuesta es la de describir una técnica de la que conoce el resultado de aplicarla en 50 casos particulares. Por tanto, se les pide a los alumnos que formulen hipótesis y que las confirmen o modifiquen si no se verifican en los resultados que ya conocen.

Es posible que los alumnos comiencen a hacer algunas conjeturas que se irán desvaneciendo en cuanto traten de verificar su validez. Después de estos intentos iniciales, y dada la complejidad de la tarea, el profesor constituirá la referencia obligada para orientar el trabajo. Estas ayudas las hemos denominado pistas.

Las ayudas del juego (algunas pistas)

Parece evidente que si Ahmes escribe las fracciones en la forma que lo hizo es porque tenía una concepción distinta de la nuestra. Por tanto, habrá que recabar información acerca de las fracciones en tiempos de los escribas, aunque debemos advertir que solamente podemos hacer algunas suposiciones razonadas puesto que en ninguno de los escasos documentos que han llegado hasta nosotros hay información al respecto.

Primera pista: usos de la fracción egipcia

Analizando los informes de los historiadores de la matemática encontramos un cierto acuerdo sobre el hecho de que en el antiguo Egipto las fracciones aparecen en la resolución de problemas sobre repartos (Fauvel y Gray, 1987; Eves, 1969) y en la presentación de resultados de cálculos aritméticos (Grattan-Guinnes, 1993). De modo que tomaremos como ciertas las siguientes consideraciones:

- Las fracciones surgen en el contexto de la resolución de problemas de reparto de cantidades enteras. Son nuevas cantidades que aparecen cuando el resultado del reparto no da una unidad entera sino una parte de la unidad.
- Los egipcios no conocen el significado de una fracción como un número: no encuentran sentido a expresiones como por ejemplo 2/11. Para ellos los números van asociados a cantidades, de forma que lo que sí entenderán es que al repartir 2 panes entre 11 personas cada una de ellas recibe 1/6 de pan y 1/66 de pan.

A cualquiera de los jóvenes estudiantes que les preguntásemos el significado de la fracción 2/5 daría una respuesta similar a esta: si tienes una tarta (o una barra de helado, u otro modelo) la divides en 5 partes iguales y tomas 2 de ellas. Por tanto, para estos jóvenes la fracción tiene una entidad numérica y utilizan objetos físicos si necesitan ejemplificar su significado.

Pero esa no es la situación en la que se encuentra la matemática egipcia, en esos momentos todavía se asocia número y cantidad. En consecuencia, los estudiantes deberán ampliar la idea de fracción como número abstracto y ligar las fracciones a objetos físicos. Item más, con esta nueva situación el alumno debe ampliar su concepción de la fracción como relación parte-todo y asociar las fracciones a acciones de reparto, lo que exige dar significado a la fracción como cociente partitivo de cantidades enteras. Esta interacción entre dos constructos diferentes de las fracciones le proporcionará mejores argumentos para la posterior identificación de las representaciones fraccionaria y decimal del número racional.

Para no distraer al alumno de la tarea propuesta no nos parece de interés ahondar en el significado de la fracción entre los egipcios por cuanto no hay acuerdo entre los historiadores de la matemática. Así por ejemplo, resultaría complejo y, en nuestra opinión, de escaso interés, defender o rebatir el significado ordinal de Gardiner (en Fauvel-Gray, 1987:22) o la concepción de Ritter (Benoit y otros, 1992:30-31) de asociar la fracción a procesos de medida.

Segunda pista: formas de repartir

Si, como hemos señalado, las fracciones egipcias aparecen al hacer repartos tiene sentido hacerse la pregunta ¿cómo se hace un reparto?

Para acercarnos más al pensamiento de los egipcios se propone hacer un reparto pero en una situación de la vida real:

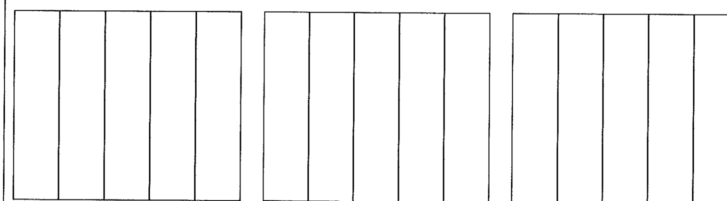
Se tienen que repartir tres bizcochos rectangulares entre cinco personas de modo que cada una reciba la misma cantidad de bizcocho, ¿cuánto le corresponde a cada persona?

Básicamente, son dos los procedimientos que aparecen como respuestas de los alumnos.

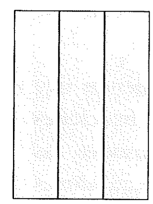
Procedimiento 1

Consiste en dividir cada bizcocho en 5 partes iguales y dar 3 de ellas a cada una de las personas.

Técnica de reparto



Resultado del reparto



...con esta nueva situación el alumno debe ampliar su concepción de la fracción como relación parte-todo y asociar las fracciones a acciones de reparto, lo que exige dar significado a la fracción como cociente partitivo de cantidades enteras.

Este procedimiento de reparto se corresponde con una manipulación numérica de las fracciones derivada de los conocimientos de los alumnos. Pero no se tiene en cuenta que para resolver el problema real hay que dividir cada uno de los 3 bizcochos en 5 partes iguales. Ahora bien, hacer divisiones en 5 partes iguales no es sencillo y repetir el proceso tres veces aún complica más el trabajo.

Este tipo de respuesta surge al transformar el problema para poder operar con números naturales y encontrar la respuesta por medio de una división: al cortar cada bizcocho en 5 partes lo que tenemos son 15 partes iguales de bizcocho de tamaño [1/5] de unidad, que hay que repartir entre 5 personas. Resulta sencillo hacer la división para concluir que cada persona recibe 3 partes de la 15 que se tenían. En resumen, se utiliza nuestro conocimiento matemático para llegar a la igualdad:

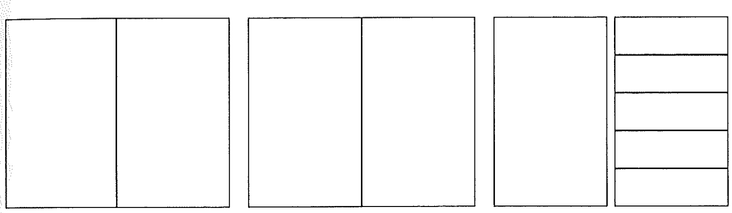
$$\frac{3}{5} = 3[1] \div 5 = 3 \cdot 5\left[\frac{1}{5}\right] \div 5 = 15\left[\frac{1}{5}\right] \div 5 = 3\left[\frac{1}{5}\right]$$

Procedimiento 2

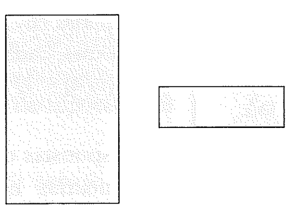
Dar a cada una de las personas una cantidad lo suficientemente grande como para realizar el reparto en una sola fase; y si ello no se cumpliese, proceder a repartir las cantidades sobrantes. De forma más detallada podíamos hacer los pasos siguientes:

- Es evidente que a cada una de las 5 personas no podemos darle un bizcocho entero; tan sólo le corresponderá una parte de un bizcocho.
- Intentemos dar a cada una de las personas una mitad de bizcocho: todos reciben la mitad de la unidad bizcocho (1/2)[1], y sobra la mitad de un bizcocho [1/2].
- Esta mitad sobrante si se distribuye entre cinco personas a cada una de ellas le corresponderá una quinta parte de ese trozo (1/5)[1/2], es decir, 1/10 de bizcocho.

Técnica de reparto



Resultado del reparto



Este procedimiento de reparto al ponerlo en práctica indica que hay que dividir los bizcochos en mitades, que es una tarea más sencilla que la de dividir en 5 partes iguales. Y la división en 5 partes iguales se tiene que hacer una sola vez con lo que, es de suponer, este reparto produce un menor número de errores, hace las partes más iguales. Este procedimiento nos lleva a la descomposición en fracciones unitarias de la forma siguiente:

$$\frac{3}{5} = 3[1] \div 5 = \frac{1}{2}[1] + 1\left[\frac{1}{2}\right] \div 5 = \frac{1}{2}[1] + \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}$$

A partir de esta concepción es como podemos entender el origen de las fracciones egipcias como suma de fracciones de numerador 1, fracciones unitarias, que indican la cantidad resultante de dividir la unidad en n partes iguales.

Desde la perspectiva de la educación matemática hay significados implícitos en el uso de los procedimientos anteriores. Si tomamos en consideración los aprendizajes que subyacen en los procedimientos de reparto indicados, observamos que:

- En el procedimiento 1, la fracción aparece como entidad única, como una totalidad. La única relación de la fracción con otras fracciones se limita a una estructura aditiva: 3/5 = 1/5 + 1/5 + 1/5, estructura que es aplicable a cualquier fracción $a/b = a\cdot(1/b)$.
- En el procedimiento 2, en la cultura egipcia antigua, la fracción no se concibe más que como suma de partes de la unidad de tamaños diferentes: cada uno de los sumandos es de tamaño más pequeño que el anterior, puesto que los sucesivos sumandos son el resultado de repartir las partes que han quedado en fases anteriores del reparto. Y cada una de esas partes diferentes son partes de partes de la unidad. De este modo, las fracciones aparecen con las estructuras aditiva y multiplicativa.

Además, este procedimiento 2 proporciona un entorno adecuado para interiorizar los principios de cambio de unidades que, como indican Behr y otros (1993:306) son aplicables a los conceptos de fracción, número racional, porcentaje, razón y proporción.

Finalmente, la aplicación del procedimiento 2, exige la adopción de un sistema simbólico que permita controlar las partes que hay que repartir, el número de individuos que participan en el reparto y el tamaño de las partes.

La práctica del juego (¿el enigma está resuelto?)

Pensar el modo en que hacía los repartos el escriba Ahmes y comprobar si los resultados coinciden con los del *Recto;* así, si queremos buscar el equivalente egipcio a nuestra fracción 2/5 tenemos que resolver el problema de repartir 2 panes entre 5 personas y hacer el reparto de acuerdo con la forma en que cada uno piense que lo hacía Ahmes.

Con el ejemplo que se ha utilizado es previsible que los alumnos opten por el modo de reparto que hemos denominado procedimiento 2. El modo de trabajo ante cada fracción será similar al que hemos empleado en el ejemplo de repartir 3 bizcochos entre 5 personas.

Si el profesor lo considera conveniente, el método de ensayo y error utilizado en el mencionado ejemplo puede sustituirse por un procedimiento más formalizado en los términos que se exponen seguidamente:

Definición: llamamos «la parte mayor» de la fracción a/b a la fracción unitaria $1/n$ tal que $n \cdot a \geq b > (n - 1) \cdot a$.

Esta definición, interpretada en el contexto de las fracciones egipcias, significaría que «la parte mayor» es la mayor cantidad de magnitud que puede darse a cada uno de los b individuos entre los que hay que repartir igualmente a unidades de esa magnitud.

El reparto de a unidades entre b individuos siguiendo el procedimiento de dar a cada individuo «la parte mayor» en cada una de las fases del proceso, se resume en los siguientes puntos:

1. Dada la fracción a/b, encontrar en número natural n tal que $n \cdot a \geq b > (n - 1) \cdot a$ y establecer como primera fase del reparto la descomposición:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \ldots$$

2. Si $n \cdot a \neq b$ no se ha concluido el reparto, aparecen nuevas fases del reparto para la fracción c/d, siendo:

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{n} = \frac{n \cdot a - b}{b \cdot n} = \frac{c}{d} < \frac{1}{n}$$

3. Si $c \neq 1$, la reiteración del proceso exige encontrar un número natural m, tal que:

$$m \cdot c \geq b \cdot n > (m - 1) \cdot c$$
$$m \cdot (n \cdot a - b) \geq b \cdot n > (m - 1) \cdot (n \cdot a - b)$$

En esta segunda fase, cada uno de los b individuos recibe una parte de tamaño $1/m$ de unidad y el reparto se simboliza como:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \ldots$$

4. El proceso continúa hasta que en la fracción del tipo c/d el numerador sea 1, en cuyo caso se completa la descomposición en la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{d}$$

La propia construcción del proceso nos muestra que el procedimiento de descomposición en fracciones unitarias con el procedimiento de «la parte mayor» es único y contiene un número finito de sumandos.

Análisis de las jugadas (el enigma no está resuelto)

Los resultados de descomposiciones en fracciones que van obteniendo los alumnos seguramente levantarán pronto algunas voces de alarma: esta forma de repartir no sirve, no salen los resultados del *Recto*,...

Ahmes no sólo debía pensar en indicar cómo hacer el reparto, también debía pensar en cómo llevarlo a la práctica.

En realidad, lo que está ocurriendo es que los alumnos utilizan como técnica de reparto la que hemos denominado «la parte mayor». Ahora bien, el problema, que en principio parecía resuelto, se ha complicado puesto que al aplicar este procedimiento hace que las fracciones del tipo $2/n$ (n impar) se descomponga en suma de sólo dos fracciones unitarias, mientras que en el *Recto* aparecen fracciones descompuestas en suma de hasta cuatro fracciones unitarias.

Pista tres: la tarea de dividir en partes iguales

Hemos dicho que Ahmes no sólo debía pensar en indicar cómo hacer el reparto, también debía pensar en cómo llevarlo a la práctica. Vamos a simular la tarea de Ahmes y así es posible que entendamos su forma de actuar.

Observad las fracciones que utiliza Ahmes en el *Recto* para ver en cuántas partes se divide la unidad. Después, analizad la forma en que se llega a la construcción de esas fracciones o partes de la unidad: así, por ejemplo, para obtener la fracción 1/12 significa que la unidad hay que dividirla en 2 mitades, dos partes de tamaño 1/2; una de esas mitades hay que dividirla en dos partes iguales, cada una de ellas de tamaño 1/2 [1/2] = 1/4 de unidad; y, por último, una de esas partes hay que dividirla en tres partes iguales, cada una de ellas de tamaño 1/3 [1/4] = 1/12 de unidad.

Las respuestas de los alumnos hay que encaminarlas hacia los aspectos que son de mayor interés para nuestro objetivo de reconstrucción del *Recto*. Y en este sentido nos parece oportuno destacar los siguientes aspectos:

- Las fracciones de Ahmes tienen dos partes diferenciadas: la que corresponde a la primera fracción, primera fase del reparto, y las restantes fracciones.
- De la igualdad:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{n} + \frac{n \cdot a - b}{b}\left[\frac{1}{n}\right]$$

se deduce que la primera fracción, primer trozo del reparto, puede ser del tamaño que se «quiera», mientras que las fracciones restantes tendrán como denominador un múltiplo del denominador de la fracción inicial, salvo los casos 2/35 y 2/91 En otras palabras, la forma de realizar el reparto exige que, con independencia de las partes en que se haya dividido la unidad en la primera fase, en las sucesivas fases del mismo se debe dividir en tantas partes como personas participen en el reparto.

- En la mayor parte de los casos, las fracciones que Ahmes utiliza en el primer reparto se obtienen haciendo divisiones en 2 y en 3 partes iguales. En varios casos también aparecen divisiones en 5 partes y, en contadas ocasiones, las divisiones hay que hacer en 7, 11, 13, 17, 19 y 29 partes.
- Las fracciones de Ahmes que corresponden a las otras fases del reparto se obtienen, en su mayor parte, por divisiones en mitades y en tercios. Son escasas las divisiones en 5 partes y mucho más escasas en 7 partes.

La descomposición en factores de los denominadores de las fracciones unitarias que hay en el *Recto* hacen posible un amplio debate en torno a las relaciones de divisibilidad entre el denominador de la fracción *2/n* y los de las fracciones unitarias en que se descompone. Sin embargo, es dificultoso establecer normas de comportamiento por cuanto existen casos anómalos que impiden la formulación de hipótesis de validez general.

Con independencia del debate sobre los aspectos de divisibilidad que se estimen oportunos, lo que resulta más llamativo es la tendencia general que se aprecia a utilizar fracciones de denominador formado por múltiplos de 2 y de 3. Lo que vendría a ratificar la fuerte presencia de la relación con problemas de la vida real que subyacen en las fracciones egipcias. La constante presencia de este tipo de fracciones en la matemática egipcia induce a Neugebauer (1969:74) a denominarlas fracciones «naturales» o fracciones que tienen asignado desde el principio un signo especial y que son unidades individuales consideradas como conceptos básicos en igual nivel que los enteros.

...lo que resulta más llamativo es la tendencia general que se aprecia a utilizar fracciones de denominador formado por múltiplos de 2 y de 3. Lo que vendría a ratificar la fuerte presencia de la relación con problemas de la vida real que subyacen en las fracciones egipcias.

Los alumnos pueden encontrar justificaciones al comportamiento de Ahmes si se les formulan propuestas como las siguientes:

Sin utilizar más que el doblado, y tomando como unidad el folio de papel:

1. Hacer 2 partes iguales. ¿Se pueden hacer 4 partes iguales? y ¿ocho partes iguales? ...,
2. Hacer 3 partes iguales. Hacer 9 partes iguales, ...
3. Dividir el folio en 6 partes iguales. Idem para 12, 18, ...
4. Buscar algún modo de dividir el folio en 5 partes iguales.
5. Buscar algún modo de dividir el folio en 7 partes iguales.

...

Pista cuatro: la obtención real de las partes

Aplicando el procedimiento de «la mayor parte» se llega a la descomposición de la fracción:

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$$

Esta descomposición hay que interpretarla en el sentido de que al dividir 2 panes entre 5 personas hay que dividir la unidad en 8 partes iguales, que entendemos es fácil de llevar a la práctica (la mitad de la mitad de medio pan). Sin embargo, la descomposición que aparece en el Recto, la que prefiere el escriba Ahmes, es:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

¿Por qué Ahmes ha elegido esa forma de reparto?

Responder a esta cuestión implica analizar las diferentes acciones que son necesarias para realizar cada una de las opciones que se quieren estudiar.

I. Procedimiento de «la mayor parte»

Para alcanzar el resultado:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{120}$$

se necesitan dar los pasos siguientes:

1) Dividir un pan en 8 partes iguales, que se hace por divisiones sucesivas en dos partes.
2) Dividir el segundo pan en 8 partes iguales. En total hay 16 partes, de tamaño 1/8, así que podemos hacer un primer reparto: cada una de las 15 personas recibe 1/8 de pan y sobra 1/8 de pan.

3) Al repartir entre 15 personas este trozo sobrante, de tamaño 1/8, hay que hacer la partición en 3 partes iguales y, después, volver a subdividir cada una de esas partes en 5 partes iguales. De este modo se presume que las últimas particiones serán complejas por la «pequeñez» de los trozos.

II. Procedimiento alternativo

La descomposición en:

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

requiere seguir este proceso:

1) Dividir el primer pan en 10 partes iguales, es decir dividirlo en dos partes y cada una de ellas subdividirla en 5 partes iguales.

2) Dividir el segundo pan en dos mitades, y una de ellas volverla a subdividir en 5 partes iguales. Tenemos 10+5=15 trozos de tamaño 1/10, cada uno de los cuales lo podemos dar a las 15 personas y sobra 1/2 de pan.

3) La mitad de pan que queda dividirla en 15 partes iguales: primero en 3 partes y, después, cada una de ellas en 5 partes. De esta forma tenemos 15 trozos, de tamaño 1/15 [1/2] que podemos distribuir entre las 15 personas y dar por finalizado el reparto.

Se deduce, en consecuencia, que Ahmes actúa desde la solución real de problemas de reparto. De este modo, la elección, entre distintas opciones de distribuir igualmente, viene condicionada porque las divisiones se hagan utilizando, prioritariamente, mitades y tercios, pero esa norma se desestima si con ello se logra que los repartos posteriores se hagan sobre cantidades de tamaño mayor.

La aparición de las distintas pistas permite al alumno ir formulando una hipótesis acerca del modo en que actuaba el escriba Ahmes. De las discusiones entre alumnos o entre profesor y alumnos deben perfilarse las ideas básicas:

1. Hay que analizar individualmente cada situación de reparto y tener presente que se busca una solución que garantice la facilidad de su puesta en práctica.
2. El reparto se comienza utilizando el procedimiento que hemos denominado «la parte mayor».
3. Si este procedimiento lleva a hacer una primera fase del reparto en la que se tengan que realizar divisiones «anómalas» se investiga otro alternativo. La denominación de «anómalas» hace referencia a aquellas que no sean en mitades y tercios.
4. Se investigan nuevos procedimientos en los que las divisiones iniciales sean en partes «anómalas» por si el reparto de las siguientes fases se puede hacer sobre cantidades de magnitud de tamaño mayor que las que se obtenían en el procedimiento del punto 3.

...la elección, entre distintas opciones de distribuir igualmente, viene condicionada porque las divisiones se hagan utilizando, prioritariamente, mitades y tercios, pero esa norma se desestima si con ello se logra que los repartos posteriores se hagan sobre cantidades de tamaño mayor.

Encontrar la solución (definir el método de trabajo de Ahmes)

Pista cinco: modificar el tamaño de las partes

Con todas las informaciones acumuladas, veamos si hay datos suficientes para descomponer cualquiera de las fracciones que aparecen en el *Recto*. En concreto, se propone resolver la siguiente situación problemática:

En el supuesto de repartir igualmente 2 panes entre 13 personas, encontrar una justificación a la solución que aparece en el Recto:

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

Hagamos uso, de forma ordenada, de todos los resultados que hemos ido obteniendo:

I. Hallar «la mayor parte»

Como ya hemos indicado anteriormente, la primera cantidad que aparece en el reparto se obtiene al hacer una división primera en p partes iguales, siendo $p = (n+1)/2$. De este modo:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{7}+\frac{1}{91}$$

Ahora bien, al llevar este resultado a la práctica real del reparto observamos que debemos dividir un pan en 7 partes iguales; después una de esas partes hay que dividirla en 13 partes iguales. Este tipo de divisiones es de las que denominábamos «anómalas» por lo que debemos buscar algún procedimiento alternativo.

II. Búsqueda de otras particiones iniciales

El proceso consistirá en aumentar el número inicial de las partes en que se dividen los panes e ir analizando la dificultad de hacer esas particiones y de repartir las partes sobrantes.

Si cada persona recibe una parte de tamaño [1/8] de pan y sobran 3 partes de tamaño [1/8] de pan:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{3}{13}\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}+(3\div 13)\left[\frac{1}{8}\right] \quad (*)$$

Ahora queda resolver la tarea de repartir 3 partes de tamaño [1/8] de pan entre 13 personas.

Volviendo a aplicar el principio de «la mayor parte»:

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{5}+\frac{2}{13}\left[\frac{1}{5}\right]$$

Y sustituyendo este resultado en (*), el reparto se formularía como:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{3}{13}\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{8}+\frac{1}{5}\left[\frac{1}{8}\right]+\frac{2}{13}\left[\frac{1}{5}\right]\left[\frac{1}{8}\right]=$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{40}+\frac{2}{13}\left[\frac{1}{40}\right]$$

Este resultado nos obliga a abandonar el proceso por cuanto aparece de nuevo un reparto similar al inicialmente planteado: repartir 2 unidades (de tamaño [1/40] de pan), entre 13 personas.

Al aumentar, de manera ordenada, el tamaño inicial de las partes de la primera fase el reparto de 3 unidades (de tamaño [1/8] de pan) entre 13 personas proporciona los resultados siguientes:

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{6}+\frac{5}{13}\left[\frac{1}{6}\right]$$

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{7}+\frac{8}{13}\left[\frac{1}{7}\right]$$

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{8}+\frac{11}{13}\left[\frac{1}{8}\right]$$

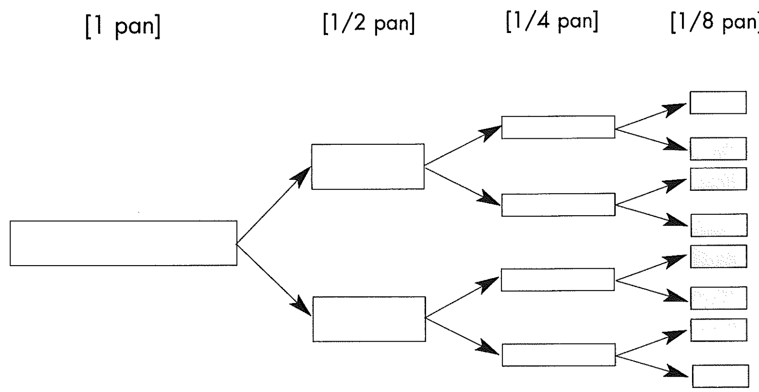
$$\frac{3}{13}=\frac{1}{9}+\frac{14}{13}\left[\frac{1}{9}\right]$$

$$\frac{3}{13}=\frac{1}{10}+\frac{17}{13}\left[\frac{1}{10}\right]$$

Es evidente que este proceso no va a permitir la descomposición (reparto) buscada puesto que cada vez aumenta el número de partes, lo que implica que el tamaño de cada una de ellas es cada vez menor.

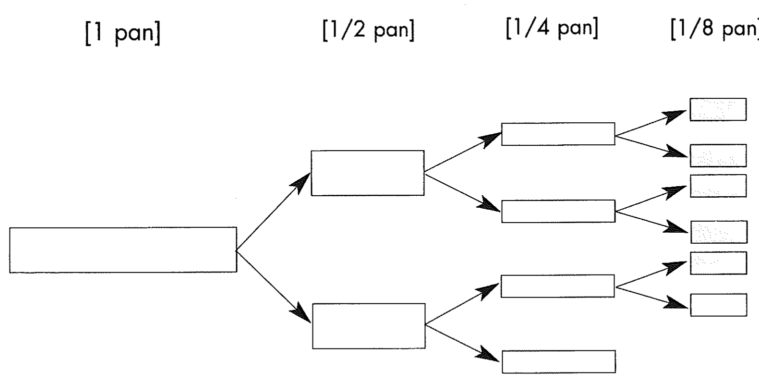
III. Modificar el tamaño de las partes

Por el resultado que figura en el *Recto* sabemos que la primera fase del reparto hace que cada persona reciba una parte de pan de tamaño [1/8]. Sin embargo, los resultados que obtiene el escriba Ahmes indican que el procedimiento de aumentar el número de partes no es adecuado. De nuevo se impone retomar la tarea de hacer efectivo el reparto de forma práctica. Para ello, observemos en qué modo hay que actuar para que las 13 personas reciban 1/8 de pan:



Al dividir el primero de los panes, disponemos de 8 partes iguales (de tamaño [1/8 de pan]), pero como hay 13 personas necesitamos más partes de ese tamaño, que hemos de conseguir del segundo pan. En concreto necesitamos 5 partes (de tamaño [1/8 de pan]).

Procedemos así con el segundo pan:



Se observa que para conseguir las 5 partes (de tamaño [1/8 de pan]) que nos hacían falta para completar la primera fase del reparto, nos han sobrado dos trozos: uno de tamaño [1/4 de pan] y otro de tamaño [1/8 de pan].

Para completar el reparto no queda más que distribuir esos dos trozos sobrantes. De este modo cada persona recibirá:

$$\frac{1}{13}\left[\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{13}\left[\frac{1}{8}\right]=\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

Estas dos partes que recibe cada persona sumadas a la parte que le ha correspondido en la primera fase del reparto completan la solución que aparece en el *Recto*:

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

Volviendo al terreno de los símbolos, la tarea inicial de repartir 3 partes de tamaño [1/8] de pan entre 13 personas, se transforma en dos: repartir 2 de esas partes entre 13 personas y la otra parte entre 13 personas. De este modo, modificando el tamaño de las partes se tendría:

- 2 partes de tamaño [1/8] se convierten en 1 parte de tamaño [1/4] , que distribuida entre 13 personas proporciona 1/13 [1/4] = 1/52 de pan por persona.
- 1 parte de tamaño [1/8] distribuida entre 13 personas proporciona 1/13 [1/8] = 1/104 de pan por persona.

En general, modificar el tamaño de las partes significará descomponer la cantidad dada por la expresión:

$$\frac{c}{b}\left[\frac{1}{p}\right]$$

en suma de fracciones unitarias. Y ello se conseguirá siempre que:

$$c\left[\frac{1}{p}\right] \text{ se pueda escribir como } q\left[\frac{1}{p}\right]+r\left[\frac{1}{p}\right]+s\left[\frac{1}{p}\right]+\ldots$$

$$\text{siendo } c=q+r+s+\ldots$$

Ahora bien, cada sumando se transforma en una fracción unitaria solamente si es 1 o un divisor de p. Por tanto, el modificar el tamaño de las partes significa descomponer c en suma de divisores de p, divisores del número de partes en que se divide la unidad en la primera fase del reparto. No obstante, y teniendo en cuenta que cada uno de los sumandos anteriores representa una parte de la unidad que hay que repartir entre b individuos, interesa que entre las posibles descomposiciones de c en suma de divisores de p se elijan aquellos que, siendo distintas, permitan que las partes resultantes sean del tamaño más grande posible. Por ejemplo, nos planteamos modificar el tamaño de las partes en el caso de la expresión 37 [1/60].

Como los divisores de 60 son 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 y 60, hay distintas maneras de formar sumas con resultado 37: 30 + 4 + 2 + 1; 30 + 6 + 1; 30 + 5 + 2; 30 + 4 + 3; 20 + 15 + 2; 20 + 10 + 5 + 2; 20 + 12 + 5; 15 + 12 + 10; ...

La elección de la más conveniente, de acuerdo con el proceder del escriba, sería 15 + 12 + 10, puesto que ello permite que las 37 partes de tamaño [1/60] se transformen en las partes de mayor tamaño de las que originan otras sumas:

$$15\left[\frac{1}{60}\right]+12\left[\frac{1}{60}\right]+10\left[\frac{1}{60}\right]=\left[\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}\right]+\left[\frac{1}{6}\right]$$

Recopilando todas las informaciones obtenidas a través de las pistas que se han proporcionado, podemos enunciar una formulación sobre el modo en que los egipcios llevaban a la práctica el reparto de a unidades entre b individuos, y sobre cómo ello se refleja en suma de fracciones unitarias:

A la vista de la complejidad del proceso se comprende perfectamente la existencia de tablas en las que los escribas recogían resultados de operaciones y que así evitaba repetir el proceso en situaciones similares.

1. El procedimiento inicialmente utilizado es el de «la parte mayor», lo que lleva a un reparto en la forma:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{p}+\frac{c}{b}\left[\frac{1}{p}\right]$$

2. Si el procedimiento de «la parte mayor» se considera dificultoso para poner en práctica, se analizan otras opciones incrementando de forma ordenada el valor de p. Inicialmente se eliminan algunas opciones: que p sea impar, que p sea múltiplo de 7 o de 11,... Estas opciones se reconsideran en el caso de que no se encuentre una solución satisfactoria.
3. En cada una de las opciones que aparezcan al aumentar el valor de p, se estudia la viabilidad del reparto que representa la expresión $(c/b)[1/p]$ y ello se puede hacer por dos vías:
   - Reiterar el proceso de división $c \div b$ hasta completar el reparto.
   - Modificar el tamaño de las partes, es decir, buscar la descomposición de c $[1/p]$ en suma de fracciones con denominador menor o igual que p.
4. La elección entre dos resultados:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{p'}+\frac{c'}{b}\left[\frac{1}{p'}\right] \quad \text{y} \quad \frac{a}{b}=\frac{1}{p''}+\frac{c''}{b}\left[\frac{1}{p''}\right]$$

   viene determinada por dos factores:
   - Se elige de entre los valores p' y p'' aquel que permita hacer las particiones de la forma menos dificultosa.
   - Se prefiere aquel de los repartos (c'/b) $[1/p']$ y $(c''/b)[1/p]$ que conlleve divisiones sobre partes de unidad de mayor tamaño.

A la vista de la complejidad del proceso se comprende perfectamente la existencia de tablas en las que los escribas recogían resultados de operaciones y que así evitaba repetir el proceso en situaciones similares. Así que lo que en la actualidad nos aparece como una simple tabla de resultados en el tiempo de los faraones constituyó una herramientas de trabajo de los escribas con una valor práctico muy valioso.

Ganar (escribir la solución)

Puesto que ya se ha detallado el método que se asocia con la manera en que procedía el escriba Ahmes, queda la tarea de verificar su aplicabilidad a los resultados que aparecen en el *Recto*. En orden a facilitar la tarea, se hacen las siguientes sugerencias:

— El reparto *a/b* ha de hacerse en distintas fases.

— En la primera fase hay que determinar el tamaño de las partes que se otorga a cada individuo, así como las partes que restan y el tamaño de las mismas. Sugerimos la utilización de expresiones del tipo *a/b* = *1/n* + (*c/b*)[*1/n*] para indicar que al repartir *a* unidades entre *b* personas se da a cada una de ellas una parte de tamaño *1/n* de unidad, y que queda por repartir *c* unidades, de tamaño [*1/n*], entre las *b* personas.

— En la división de la unidad considerar prioritariamente las fracciones 1/2, 1/3 y las que resultan de productos entre ellas. Si ello no fuese suficiente tomar en consideración otras fracciones como 1/5, 1/7,...

— En el estudio de otras opciones, eliminar las descomposiciones en sumas de más de cuatro fracciones, pues no son recogidas en el *Recto*.

Ya estamos en condiciones de ver si funciona todo lo que hemos ido diciendo. Así que escondemos los resultados que aparecen en el *Recto*, y vosotros debéis conseguir escribir cada una de las fracciones de la forma *2/n* en la forma que lo hizo Ahmes.

La calidad del trabajo reside más en reflexionar sobre el significado de la fracción egipcia que en la práctica exhaustiva de técnicas de cálculo. Por tanto, serán las circunstancias particulares del aula las que aconsejen reconstruir todo el *Recto*; o solamente hasta la fracción 2/35, por ejemplo; o bien las fracciones que se descomponen en tres sumandos,...

La calidad del trabajo reside más en reflexionar sobre el significado de la fracción egipcia [...] serán las circunstancias particulares del aula las que aconsejen reconstruir todo el Recto; o solamente hasta la fracción 2/35, por ejemplo; o bien las fracciones que se descomponen en tres sumandos,...

También se puede contemplar la posibilidad de establecer discusiones sobre temas más concretos, siempre en torno al significado de la fracción egipcia, como los siguientes :

a) En la fracción 2/45 el escriba opta por la descomposición: 2/45 = 1/30 + 1/90.

   ¿En qué mejora la propuesta del escriba a la descomposición 2/45 = 1/36 + 1/60?

b) ¿Qué descomposición te parece más adecuada 2/55 = 1/30 + 1/330 (opción del escriba) o 2/55 = 1/40 + 1/88? Justifica tu respuesta.

c) El autor Guillings (1972:68) argumenta que la descomposición que hace el escriba de la fracción 2/95 = 1/60 + 1/380 + 1/570 se obtiene del producto 1/5 × 2/19. Comprueba si es cierta la formulación de dicho autor.

d) ¿Encuentras alguna justificación a que el escriba opte por la descomposición anterior de la fracción 2/95 frente a la descomposición 2/95 = 1/60 + 1/228?

e) Es conocida por los escribas la descomposición 1 = 1/2 + 1/3 + 1/6. A la vista de las descomposiciones que has encontrado para 2/101, ¿se puede utilizar la igualdad anterior para mejorar los resultados?

Bibliografía

ARGUELLES, J. (1989): *Historia de la Matemática*, Akal, Madrid.

BENOIT, P., K. CHEMLA y J. RITTER (editores) (1992): *Histoire de fractions, fractions d'historie*, Birkhäusen Verlang, Berlin.

BEHR, M. J. y otros (1993): «Rational number, Ratio, and Proportion», en D. A. GROWS (edit.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Macmillan Publishing Company, New York.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

BUNT, L. N. H., P. S. JONES y J. D. BEDIENT (1987): *Le radice storiche delle matehematiche elementari*, Cm4-Zanichelli, Bologna.

CAMPBELL, D. M. y J. HIGGINS (editores) (1984). *Mathematics. People. Problems. Results*, Wadworth international, Belmont (California).

CARPENTER, T. P., E. FENNEMA y T. A. ROMBERG (1993): «Toward a unified discipline of scientific inquiry», en T. P. CARPENTER, E. FENNEMA y T. A. ROMBERG (edits.): *Rational numbers*, Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hilldale, New Jersey.

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España, Madrid.

CROSSLEY, J. N. (1987): *The emergence of number*, World Scientific, Singapore.

DAHAN-DALMENICO, A. y J. PEIFFER (1986): *Une histoire des mathématiques*, Editions du Seuil, Paris.

DICKSON, L., M. BROWN y O. GIBSON (1991): *El aprendizaje de las matemáticas*, Ministerio de Educación y Ciencia-Labor, Madrid.

EVES, H. (1969): *History of mathematics* (tercera edición), Holt, Rinehart y Winston, New York

FAUVEL, J. y J. GRAY (Editores) (1992): *The History of Mathematics. A reader,* Tercera edición, Macmillan Press-The Open University, London.

FLEGG, G. (1989): *Numbers through the ages,* Macmillan-The Open University, London.

GILLINGS, R. J. (1982): *Mathematics in the time of the pharaohs,* Dover Publications, New York.

GIMÉNEZ, J. (1991): *Didáctica especial del número racional positivo,* Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

GRATTAN-GUINNES (editores) (1994): *Companion enciclopedia of the history and fhilosophy of the mathematical sciences,* Vol 1, Routledge, London.

KIEREN, T. E. (1993). «Rational and fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding», en T. P. CARPENTER, E. FENNEMA y T. A. ROMBERG (edits): *Rational numbers,* Lawrence Erlbaum Associates, publishers, Hilldale, New Jersey.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antiguedad a nuestros dias, I,* Alianza Universidad, Madrid.

LLINARES, S. y M. V. SANCHEZ (1985): *Fracciones,* Síntesis, Madrid.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989): *Historical topics of the mathematics classroom,* N.C.T.M., Reston (Virginia).

NEUGEBAUER, O. (1969): *The Exact sciences in antiquity,* Segunda edición, Dover Publications, New Yok

NEWMAN, J. R. (1980): *Sigma. El mundo de las matemáticas, Vol. 1,* Grijalbo, Barcelona.

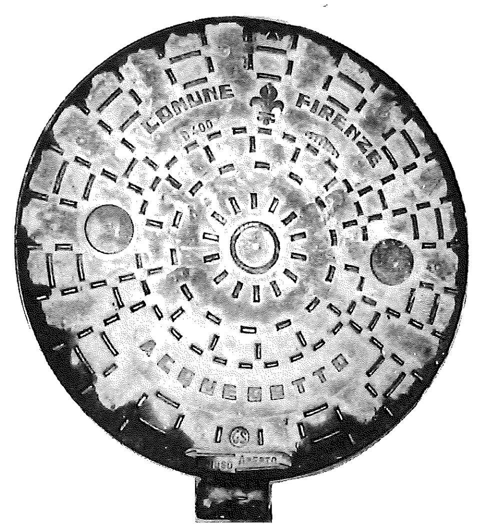
RICO, L. y E. CASTRO (1995): «Pensamiento numérico en Educación Secundaria Obligatoria», en *Aspectos didácticos de Matemáticas. 5,* Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

STREEFLAND, L. (1991): *Fractions in Realistic mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers, Doordrecht.

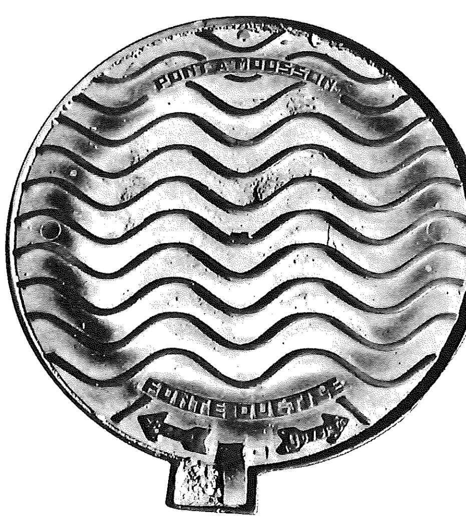
José M.ª Gairín
E.U. de Formación del
Profesorado de EGB.
Universidad de Zaragoza.
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»

Mérida

Florencia



Fotos:
Luis
Balbuena



Maison
La Fitte

Las Palmas
de
Gran
Canaria

SUMA 31

junio 1999, pp. 67-72

El problema de Arquímedes del rebaño de reses

Emilio Fernández Moral
Mariano Banzo Marraco

En este artículo se documenta el clásico *Arquimedes problema bovinum*, presentando una implementación en *Mathematica* de su solución, así como, en general, de la solución en mínimos enteros positivos x e y de la *ecuación de Pell* $x^2 - ny^2 = 1$, con n entero positivo dado.

AMIGO, si has heredado la sabiduría, calcula cuidadosamente a qué número ascendía la multitud de las reses del Sol que en otro tiempo pacían en las llanuras de la isla Trinacria,[1] divididos en cuatro manadas de distinto pelaje: una, de color blanco como la leche, otra de negro lustroso, una tercera oscura, la cuarta manchada. Los toros, que superaban en número a las vacas, se repartían en cada manada de la siguiente manera: imagina, amigo mío, que los toros blancos eran en igual número que la mitad y un tercio de los negros además de todos los oscuros, mientras que los negros eran en igual número que la cuarta más la quinta parte de los manchados, más todos los oscuros. Considera además que los manchados eran en igual número que la sexta más la séptima parte de los blancos, más todos los oscuros. Las vacas estaban así repartidas, por su parte: las blancas eran en igual número que la tercera más la cuarta parte de toda la manada negra, mientras que las negras eran en igual número que la cuarta más la quinta parte de toda la manada manchada; a su vez las manchadas eran en igual número que la quinta más la sexta parte de toda la manada oscura, mientras que las oscuras eran en igual número que la mitad de la tercera parte más la séptima parte de toda la manada blanca.

Amigo, si me dices cuántas eran exactamente las reses del Sol, y, en particular, cuál era el número de toros y vacas de cada pelaje, no se te podrá calificar de ignorante ni de inhábil en el manejo de los números, pero aún no podrás contarte entre los sabios. Pues atiende aún a dos distintas maneras en que las reses del Sol solían disponerse: cuando los toros blancos unían su multitud a la de los toros negros, formaban un grupo compacto de igual medida en profundidad que en anchura que llenaba enteramente las inmensas llanuras de Trinacria. Por otra parte, reunidos solamente los oscuros y los manchados, se agrupaban por filas de tal manera que, estando constituida la primera por uno solo de ellos, formaban gradualmente una figura triangular, sin faltar ni sobrar ninguno. Amigo, si encuentras la relación oportuna entre todas estas cosas y, en una palabra, si concentrando tu espíritu expresas todas las cantidades correspondientes a esas manadas, podrás vanagloriarte de haber conquistado la victoria y estar convencido de ser juzgado consumado conocedor de esta ciencia.

1 Θρινακιή en el epigrama (y en Homero, ver más adelante), también Τριναχρια, es el antiguo nombre de Sicilia, por razón de los tres grandes cabos o promontorios (τριααχρα) que forma esta isla al NE. (Pelorum), al O. (Lilybaeum) y al SE. (Pachynus).

ARTÍCULOS

Este es el «problema que Arquímedes [encontró entre (algunos) epigramas/ideó, en forma de epigrama] y envió, para que fuera resuelto por quienes en Alejandría se ocupaban de estas materias, en una carta a Eratóstenes de Cirene.» (Recogemos básicamente las traducciones castellanas que dan Babini (1948, 123-125), seguramente del texto en francés de ver Eecke (1960, II, 545-547) y Vera (1970, II, 218-219); en el corchete anterior la primera posibilidad parece la traducción literal.)

El manuscrito griego que contiene este texto (un epigrama de 22 dísticos jonios con la anterior cabecera) fue publicado por primera vez en 1773 por el escritor alemán Teófilo Efraím Lessing,[2] junto con otros tesoros de la Biblioteca Wolfenbüttel de Brunswick de la que fue director al final de su vida. Si no el epigrama, el problema en su forma completa es atribuible a Arquímedes (287-212) para la crítica moderna más autorizada (Krumbiegel, Tannery, Heiberg, Heath), y sería el que originó en la antigüedad referencias a un cierto «πρόβλημα βοεικήν» de Arquímedes (en un escoliasta de Platón, en Herón) como ejemplo de problema de «Λογιστικα», o a un «πρόβλημα Ἀρχιμήδειον» para glosar algo de gran dificultad (en Cicerón)[3]. La formulación bovina del problema le pudo ser sugerida a Arquímedes[4] por conocidos pasajes del Canto XII de la Odisea de Homero, el primero de los cuales es:

> Tuerce el rumbo después a la isla feraz de Trinacria
> donde pacen las vacas del Sol y sus gruesas ovejas,
> siete hatos de ovejas y siete manadas de vacas,
> de cincuenta por grey,...

Y parece que el destinatario de tan, como se verá, envenenado desafío pudo haber sido Apolonio, con quien Arquímedes mantenía ciertas desavenencias.[5]

Traslademos la formulación del problema a simbolismo algebraico, en la misma forma que Elena Martín Ortega (1990); Sean *B, N, M, O* y *b, n, m, o*, respectivamente, los números de los toros blancos, negros, manchados y oscuros y de las vacas blancas, negras, manchadas y oscuras. La primera parte del enunciado conduce a un sistema homogéneo de 7 ecuaciones lineales en esas 8 incógnitas:

$$\begin{cases} B = (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})N + O = \frac{5}{6}N + O \\ N = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})M + O = \frac{9}{20}M + O \\ M = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})B + O = \frac{13}{42}B + O \\ b = (\frac{1}{3}+\frac{1}{4})(N+n) = \frac{7}{12}(N+n) \\ n = (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})(M+m) = \frac{9}{20}(M+m) \\ m = (\frac{1}{5}+\frac{1}{6})(O+o) = \frac{11}{30}(O+o) \\ o = (\frac{1}{6}+\frac{1}{7})(B+b) = \frac{13}{42}(B+b) \end{cases}$$

2 Manuscrito «77 Gud. Graec.». Publicado en *Beiträge zur Geschichte und Literatur*, Braunschweig, 1773, 421. Hay otra copia del epigrama en la Bibliothèque Nationale de París, cod. Paris Gr. 2448, saec. XIV, fol. 57.

3 Cicerón en *Cartas a Atico*: «Sed de Catone, πρόβλημα' Αρχιμήδειον *est...*» XII-iv; «Abiit illud qod tum me stimulabat cum tibi dabam πρόβλημα Ἀρχιμήδειον...» XIII-xxviii. Platón (citado por Heiberg), en *Scholia al Charmides*, 165e, (traducción de Heath): «Logística es la ciencia que trabaja con cosas contadas, no con los números que las cuentan..., que considera 3 como una terna y 10 como una decena..., es, pues, logística lo que investiga de un lado el que Arquímedes llamó problema de los bueyes...» También en Herón: *Definitiones, Opera omnia*, IV, 98. (Heiberg, Leipzig, 1899-1914).

4 Señalado por J. Struve en *Altes griechisches Epigramm mathematisches Inhalts*, Altona, 1821. También se lee antes, en el Canto XI: «...en cuanto hayas tu armónica nave atracado en la isla/ de Trinacia, escapando del ponto violáceo, y encuentres/ pastoreando a las Vacas del Sol y a las grandes ovejas/ del que nada se escapa a sus ojos y todo lo oye...». La traducción de este pasaje y del citado en el texto son de Fernando Gutiérrez, en verso, en la edición de la Odisea de Homero con intro. y notas de José Alsina, Planeta 1980, Barcelona, páginas 172 y 194, resp. Más pasajes a continuación en el mismo Canto XII.

5 Ver Dijksterhuis (1987) p. 399, que cita la opinón de Heath.

De las tres primeras resulta el sistema

$$\begin{cases} 6B - 5N = 6 \cdot O \\ 20N - 9M = 20 \cdot O \\ 42M - 13B = 42 \cdot O \end{cases}$$

de donde, con fracciones irreducibles,

$$B = \frac{742}{297}O, \quad N = \frac{178}{99}O, \quad M = \frac{1580}{891}O$$

Ya que se buscan números enteros, deberá ser O = 891·X con *X* entero, y así también B = 2226·X, N = 1602·X, M = 1580·X.

Sustituyendo estos valores en las otras cuatro ecuaciones se obtiene ahora el sistema

$$\begin{cases} 12b - 7n = 11214 \cdot X \\ 30m - 11o = 9801 \cdot X \\ 20n - 9m = 14220 \cdot X \\ 42o - 13b = 28938 \cdot X \end{cases}$$

de donde, con fracciones irreducibles,

$$b = \frac{7206360}{4657}X$$
$$n = \frac{4893246}{4657}X$$
$$m = \frac{3515820}{4657}X$$
$$o = \frac{5439213}{4657}X$$

Deberá ser entonces X = 4657·x, con *x* entero positivo, y entonces los valores de las ocho incógnitas expresados como múltiplos enteros de la variable auxiliar *x* son los siguientes: (los menores números resultan para x = 1)

$$\begin{cases} B = 10366482 \cdot x \\ N = 7460514 \cdot x \\ M = 7358060 \cdot x \\ O = 4149387 \cdot x \\ b = 7206360 \cdot x \\ n = 4893246 \cdot x \\ m = 3515820 \cdot x \\ o = 5439213 \cdot x \end{cases}$$

y el número total de reses en la manada, A = 50389082x.

El manuscrito griego va seguido por la solución de un escoliasta, que es la misma anterior para x = 80. Pero esos números no verifican las otras dos condiciones del problema.

Estas dos condiciones de la segunda parte del enunciado son:

B+N = cuadrado, M+O = triangular

$B+N = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot x$ es un cuadrado perfecto si y solo si $x = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot u^2$ con u entero. Queda la última condición,

$$M+O = 7 \cdot 353 \cdot 4657 \cdot x =$$
$$= 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657^2 \cdot u^2 = q \cdot (q+1)/2$$

Poniendo $2q + 1 = v$, ésta se convierte en

$$v^2 - 1 = 4q(q+1) =$$
$$= 2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657^2 \cdot u^2 =$$
$$= 410286423278424 \cdot u^2 ,$$

luego todo se «reduce» a calcular el menor valor entero positivo de u que satisface la ecuación (con v también entero)

$$v^2 - 410286423278424 \cdot u^2 = 1 \qquad [1]$$

para obtener los números de vacas y toros del rebaño más pequeño que cumple todas las condiciones de Arquímedes. Por ejemplo, el número total de reses en el rebaño sería, con dicho valor de u,

$$A = 50389082 \cdot x =$$
$$= 50389082 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 \cdot u^2 \qquad [2]$$

La ecuación [1] es una ecuación de Pell, así denominadas las ecuaciones diofánticas del tipo $x^2 - M \cdot y^2 = 1$, (en general igual a n), reinventadas por Fermat en el siglo XVII y estudiadas de modo completo por Euler y Lagrange en el XVIII. Para todo M que no sea un cuadrado perfecto tienen infinitas soluciones en enteros positivos. Bien pudo Arquímedes haber tratado con ecuaciones de este tipo, para números M pequeños sin duda, por ejemplo cuando buscaba aproximaciones racionales para la raíz cuadrada de 3 en la «medida del círculo», aunque no ha llegado ninguna otra evidencia de ello. El problema con la ecuación [1] es concretamente el tamaño de su mínima solución u: sus 103266 cifras seguramente desbordaban la capacidad de cálculo alejandrina del siglo III a.C.

Lo mejor que humanamente puede hacerse[6] para acercarse a la solución de [1] lo hizo A. Amthor en 1880.[7] Podemos recrear un resumen:

En primer lugar, como

$$410286423278424 = 4729494 \cdot 2^2 \cdot 4657^2,$$

el problema se reduce a encontrar la mínima solución entera positiva u de la ecuación de Pell

$$v^2 - 4729494 \cdot u^2 = 1 \qquad [3]$$

que sea divisible por 2 y por 4657.

La solución mínima de [3] es la siguiente:

$$v_1 = 109931986732829734979866232821433543901088049$$
$$u_1 = 50549485234315033074477819735540408986340$$

Y la solución general de [3] viene dada por

$$v_n + u_n\sqrt{M} = (v_1 + u_1\sqrt{M})^n$$

donde M = 4729494, lo que da en particular la siguiente ley de recurrencia para calcular las sucesivas u_n:

$$u_2 = 2u_1v_1, \quad u_{n+2} = 2v_1u_{n+1} - u_n \quad (n > 1)$$

Como u_1 es par, u_n es siempre par; el primer u_n que es divisible por 4657 es u_{2329}; este es el valor de u que interesa, la menor solución de la ecuación [1].

Amthor pudo llegar entonces, tras arduo trabajo, a la conclusión de que B = 1598<206541>, donde <206541> indica que siguen otras 206541 cifras, y que, con la misma notación, A = 7766<206541>. Añade Amthor:

> Fácil es comprobar que una esfera que tuviera el diámetro de la Vía Láctea, que la luz tarda diez mil años en atravesar, podría contener tan sólo una parte de este enorme número de animales, aunque cada uno de ellos tuviera el tamaño de la menor bacteria... Imprimir los ocho números de la solución, a 2500 cifras por página, requeriría un volumen de en torno a 660 páginas.

Después de Amthor, en 1895, tras cuatro años de duro y no remunerado trabajo de cálculo, A.H.Bell y los otros dos únicos miembros del denominado «Hillsboro Mathematics Club» de Hillsboro, Illinois, publicaron 30 o 31 de las primeras cifras y 12 de las últimas de cada uno de los ocho números incógnita de toros y vacas y del número total del rebaño. Este número en concreto comenzaba 7760271..., en desacuerdo con el mucho más modesto cálculo de Amthor.[8] «Eso abría», ironiza[9] E.T.Bell (sin relación de parentesco, como él mismo señala, con A.H.Bell) en (1990), pp. 152-153, «un campo de comprobaciones y mejoras más ancho aún que las llanuras de Trinacria» del que ya no tenemos más noticias.

Tras la aparición de ordenadores cada vez más capaces, el cálculo efectivo de la solución del problema pasaba a ser una trivialidad. En 1965 se hizo por primera vez el

6 K. B. Mollweide, que nació en Wolfenbüttel, se cita como autoridad para la afirmación de que su amigo personal K. F. Gauss resolvió completamente el problema del rebaño. Para E. T. Bell (1990) «eso es muy improbable, por decirlo suavemente».

7 A. Amthor, «Das Problema bovinum des Archimedes», *Zeitschr.für Math.und Phys.*, Hist.literar.Abt.,Leipzig, 1880, vol. 25, 153-171. Este artículo está precedido, en 121-136 por una traducción alemana del manuscrito y una discusión filológica de B.Krumbiegel.

8 De hecho es A = 7760<206541>, como corrigió a Amthor el Club de Matemática de Hillsboro. Ver las referencias de estos trabajos en el artículo de Archibald citado en la bibliografía del final, 414.

9 Dice Bell: «Ya señaló un cínico que mientras haya un problema sin resolver, algún mentecato intentará resolverlo, sobre todo si es irresoluble, y al Hillsboro Mathematics Club de Hillsboro le faltó poco para encajar en la observación cínica».

7760271406486818269530232833213886664
2323224059233761031506192269032159306
1406953194348955323833033238580023195
0890047033440942119828335089534461575
5887436491896796665512546477258454651
0461602748276908192273273239624708376
7521718123833193071062059470897781028
4615137192999898681118688416927278569 6
5734742675969833374086301327572518139
9039295240867535897511016330381995952
2862248989774767949347775886227372374
6255675090116296340679382452054261676
9323712193802126066318528132663283452
3325818221612627982067522627938255320
4835331774536078819419510012902535378
9079430770802223904770027123239826800
5475107063331240640184249410626455913
5633570932873950709846825186508464899
7734103578487702314212070231873054292
1959831095003754661935911649226657552
0991844006671059444489935414661474017
8809647842125684176862138118817367066
4948693934942747838804473398437179965
6338216395615067290682140459765856258
9543801065495963894323168124620435108
3550687417880221537048762073557878731
7123762036035001543668020475611971279
5879795153546119920216229966968169313
8757515962720759360360577327122115282
9620797779419362426744039263593532057 3
9799122321516745605645457914929244 56...

Figura 1. Primeras cifras del número de 206.545 dígitos que es solución del problema para M = 31.

cálculo completo de las 206545 cifras de la respuesta total pero no se imprimió. Harry Nelson (1980-1981) recalculó y publicó la solución impresa (con cifras de pequeño formato). Nelson quería usar este cálculo como prueba para un nuevo ordenador, pero encontró que la máquina acababa las cuentas demasiado rápidamente como para disponer con esto de un buen test. Entonces hizo que su máquina calculase sucesivas soluciones del problema. Con las del orden de 1 millón de cifras el trabajo parece que era más a la medida de las posibilidades.

Hoy día el reto arquimediano lo puede afrontar con éxito un ordenador personal. Nosotros hemos realizado el cálculo de la solución mínima u_1 de la ecuación «grande» (la ecuación [1]) del problema del rebaño de reses en un «Pentium 166». Solamente hemos hecho que se calculara e imprimiese el número total de las reses, no u_1 ni los otros ocho números del rebaño.

Hemos utilizado el algoritmo usual de Lagrange (versión Rey Pastor (1981)) para el cálculo de la solución mínima (v_1,u_1) de $v^2-M\cdot u^2 = 1$ como la fracción reducida convergente

$$(p_n, q_n) \equiv \frac{p_n}{q_n}$$

de la fracción contínua del número

$$\sqrt{M} = \left[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_m}\right],$$

$(a_m = 2a_0)$, con n = m–1 si *m* es par o n = = 2m–1 si *m* es impar. Cálculos previos más rápidos nos aseguraban que para nuestro M la longitud del período de la fracción contínua de $\sqrt{M}$ es par (de hecho, 203254) y que por consiguiente había que parar el programa en la reducida de orden *m–1* (cuando $a_m = 2a_0$ por primera vez) y así, $u_1 = q_{m-1}$.

Hemos desarrollado el algoritmo además con las siguientes fórmulas de recurrencia (a_i son los cocientes incompletos, p_i y q_i el numerador y el denominador de la reducida de orden *i*, los corchetes indican parte entera):

$$\begin{cases} a_0 = \left[\sqrt{M}\right] \\ B_0 = 0 \\ D_0 = 1 \\ p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \\ B_n = a_{n-1} \cdot D_{n-1} - B_{n-1} \\ D_n = (M - B_n^2)/D_{n-1} \\ a_n = \left[(a_0 + B_n)/D_n\right] \\ p_1 = a_1 \cdot a_0 + 1 \\ p_n = a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_1 = a_1 \\ q_n = a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases}$$

Así por ejemplo, para M = 31:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
B_n	0	5	1	4	5	5	4	1	5
D_n	1	6	5	3	2	3	5	6	1
a_n	**5**	1	1	3	5	3	1	1	**10**
p_n	5	6	11	39	206	657	863	**1520**	
q_n	1	1	2	7	37	118	155	**273**	

Se tiene:

$$\sqrt{31} = \left[5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}\right] = 5 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{10+\ldots}$$

El período de los cocientes incompletos es de longitud 8 (par), alcanzado cuando $a_n = 2 \cdot a_0 = 2 \cdot 5 = 10$.

La séptima reducida,

$$5 + \frac{1}{1+}\frac{1}{1+}\frac{1}{3+}\frac{1}{5+}\frac{1}{3+}\frac{1}{1+}\frac{1}{1+} = \frac{1520}{273}$$

y se tiene $1520^2 - 31 \cdot 273^2 = 1$. De hecho, (1520, 273) es la solución mínima en enteros positivos de $v^2 - 31 \cdot u^2 = 1$.

(Se tiene

$$\frac{1520}{273} - \sqrt{31} \cong 0{,}0000012,$$

y no hay una fracción con menor denominador que dé mejor aproximación que ésta a la $\sqrt{31}$. Si la longitud del período es impar, la «primera vez» se llega a una solución (p, q) de la ecuación $v^2 - M \cdot u^2 = -1$, y la solución mínima (P, Q) de $v^2 - M \cdot u^2 = 1$ se obtiene a partir de

$$(p^2 - M \cdot q^2)^2 = P^2 - M \cdot Q^2 = 1.$$

Nuestra implementación, al objeto de que la salida del programa sea ya directamente el número total de reses del rebaño en un fichero recuperable luego desde un procesador de textos, ha sido la función *keytel* para *Mathematica* que se puede examinar en el Apéndice, donde recogemos también una función *solucionPell* que da la solución mínima de una ecuación de Pell; esta función se puede aligerar para dar solamente la longitud del período de la fracción continua de la $\sqrt{M}$. Escribiendo las funciones *cattle* y *keytel* como In[1] e In[2], con la entrada In[3]:=keytel, a los 32 minutos en la pantalla se lee:

El numero tiene 206545 cifras
Out[3]={1895.81 Second, Null}

y el número, recuperado luego del fichero también denominado *keytel*, empieza, de acuerdo con el Club de Hillsboro, 7760271… y acaba 55081800. Nuestro ordena-

...96095836661972577791484981298372800
76813420717092864850110832038027695
08892080619047365346640166033665713
54957498618546305966264566434434133
70576736741796162068746587816251381
96865029045509264704958936719606399
41784645640029927367860809417910917
74287931170123369601874070857769922
44787836231541880275807433007001270
27460322767270524056001245771481341
21289815481942572853969039302280155
44927432077964133952391787622639882
49740977373188153440673325018542305
57590615418068647327661594587408623
80424902449274447501046932922489527
09916982033631671932713388117289351
93059808866128626705017161220339911
02832889509474495599283178351133874
69470777738533466752569357352799830
43872817995021779644625917412057100
67837492280129466557319149912947044
25345255843200604565060174992051799
24220271972472512501269010986437364
56215434422571452101831188776880686
30298971337856633004406809998551939
17424466337493894703903752457792566
99660303265435652072678728835138492
56166954389604815500599463014429250
035488311897372340662671945508 1800

Figura 2. Últimas cifras del número de 206.545 dígitos que es solución del problema para M = 31.

dor ha conquistado la victoria. Y el trabajo, realizado con energía eléctrica industrial, empieza en realidad en el apéndice posterior a la bibliografía.

Bibliografía

ARCHIBALD, R.C. (1918): «The Cattle Problem of Archimedes», *Amer. Math. Monthly*, XXV, pp. 411-414.

BABINI, J. (1948): Arquímedes, Austral Serie Marrón, Espasa Calpe, Buenos Aires.

BELL, E.T. (1990): *The Last Problem*, revised and updated by U. Dudley, The Mathematical Association of America, U.S.A.

BLACHMAN, N. (1993): *Mathematica. Un enfoque práctico*, Ariel Informática. Madrid.

DIJKSTERHUIS, E. J. (1987): *Archimedes*, Princeton Univ. Press. Princeton, New Jersey.

DÖRRIE, H. (1965): *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, New York.

HEATH, T. (1981): *A history of Greek Mathematics*, 2 vol., reimp. Dover, New York.

MARTÍN ORTEGA, E. (1990): *La ecuación de Pell*, Monografías del B.I., Instituto Sagasta, Logroño. (Sin publicar.)

NELSON, H. (1980-1981): «A solution to Archimedes' cattle problem», *Journal of Recreational Maths.*, 13, 162-176.

REY PASTOR, J. (1981): *Elementos de Análisis Algebraico*, Euler Libros-Gómez Puig Ediciones, Madrid, 433 y siguientes.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos, 2 vol.* Aguilar, Madrid.

VER EECKE, P. (1960): *Oeuvres Complètes d'Archimede*, 2 vol., Blanchard, Paris.

Emilio Fernández
IES Práxedes Mateo Sagasta.
Logroño
Mariano Banzo
IES Práxedes Mateo Sagasta.
Logroño
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo».

Apéndice

```
(* La función para el número del rebaño de Arquímedes *)
cattle[m_,q_]:= Block[{b,d,a,q1,q2,au,cifras},
   b=q;d=m-q^2;a=Quotient[2 q,d];q1=0;q2=1;
   While[a != 2 q,(au=q1;q1=q2;q2=a q2+au;
      b=a d-b;d=(m-b^2)/d;
      a=Quotient[q+b,d])
      ];
   cifras=Floor[14.35 + 2 Log[10,q2+.0]]+1;
   50389082 4456749 q2^2 >>> keytel;
   Print[«El numero tiene «,cifras,» cifras»]
   ]
keytel:=Timing[cattle[410286423278424,20255528]]
(*20255528 es la parte entera de la raíz cuadrada de 4102...24.*)
(* Una función que da la solución mínima en enteros positivos de la ecuación de Pell x2 - n·y2 = 1 *)
solucionPell[n_Integer]:=
   Block[{b,d,q,a,j,lis,p1,q1,p2,q2,au1,au2,au3},
      b=0;d=1;q=Floor[Sqrt[n+.0]];
      If[n == q^2,
      Print[«sin solución no trivial,»,n,» es un cuadrado»],
      (a=Quotient[q+b,d];lis={a};j=0;p1=1;
      q1=0;p2=Quotient[q+b,d];q2=1;b=a d-b;
      d=(n-b^2)/d;a=Quotient[q+b,d];AppendTo[lis,a];
      j=1;
      While[a != 2 q,(au1=p1;au2=q1;p1=p2;q1=q2;
         p2=a p2+au1;q2=a q2+au2;
         b=a d-b;d=(n-b^2)/d;
         a=Quotient[q+b,d];AppendTo[lis,a];
         j=j+1)
         ];
Print[«fracción continua de la raiz cuadrada de «,n,»:»,lis];
   Print[«longitud del período : «,j];
   If[OddQ[j+1],
      (Print[«X = «,p2];Print[«Y = «,q2]),
      (au3=p2;p2=p2^2+n q2^2;
      q2=2 au3 q2;Print[«Impar»];
      Print[«X = «,p2];Print[«Y = «,q2])
   ] )]]
(* Para hacer una tabla de soluciones de ecs. de Pell *)
tabPell[max_Integer]:= For[i=2,i<=max,++i,
   Block[{q},q=Floor[Sqrt[i+.0]];
   If[i==q^2,,Print[«n=»,i];
      solucionPell[i]]]]
(* Si queremos solamente la fracción continua *)
fraccontsqrt[n_Integer] := Block[{b,d,q,a,lis,j},
   b=0;d=1;q=Floor[Sqrt[n+0.]];
   a=Quotient[q+b,d];lis={a};b=a*d-b;d=(n-b^2)/d;
   a=Quotient[q+b,d];AppendTo[lis,a];j=1;
While[a!=2*q,b=a*d-b;d=(n-b^2)/d;a=Quotient[q+b,d];
   AppendTo[lis,a];j=j+1];
Print[«fraccion continua de la raiz cuadrada de «,n,»:»,lis];
Print[«longitud del periodo : «, j]]
(* Y si solamente la longitud del período de la fracción continua *)
longperfrac[n_Integer]:=Block[{b,d,q,a,j},
   q=Floor[Sqrt[n+.0]];b=q;d=n-q^2;
      a=Quotient[2*q,d];j=1;
   While[a!=2*q,b=a*d-b;d=(n-b^2)/d;
      a=Quotient[q+b,d];j=j+1];j]
```

SUMA 31
junio 1999, pp. 73-86

Evolución de un grupo de alumnos en la resolución de problemas

M.ª del Carmen Pinilla Fernández-Castañón

ARTÍCULOS

Este trabajo de investigación narra y describe el desarrollo de un curso de Taller de Matemáticas impartido en el IES «Siete Colinas» de Ceuta dentro de la programación habitual que el centro oferta al alumnado entre sus asignaturas optativas.
El marco teórico para el diseño de la asignatura ha sido *Problemas con pautas y números* del Shell Centre for Mathematical Education.
Se intenta comprobar la evolución de un grupo de alumnos de Secundaria en la resolución de problemas y el análisis final se ha centrado en la constatación de los resultados obtenidos por el grupo en la utilización de estrategias, en el progreso en la resolución y en la culminación con éxito de la misma, distinguiendo en su caso cuándo un problema se ha resuelto por más de un procedimiento plausible.
Esta investigación enfatiza lo particular e individual y no pretende llegar a leyes generales como objetivo fundamental sino más bien analizar la singularidad de los fenómenos estando orientada a la aplicación y a la adquisición de conocimientos con el propósito de dar respuesta a

De los diferentes contenidos curriculares que en el área de Matemáticas se contemplan en el segundo ciclo de Secundaria, he sentido siempre un especial interés por el de la Resolución de Problemas. En el desarrollo de mi práctica educativa y en mis cursos de perfeccionamiento dedico una particular atención y realizo un atento seguimiento de las actitudes críticas y de las estrategias utilizadas por los alumnos en este ámbito.

Creo que el profesor de matemáticas tiene la gran oportunidad de poder ayudar al alumno en una fase de construcción de su pensamiento matemático, no debe por tanto presentarle las matemáticas como algo cerrado donde no tenga la oportunidad de aportar su heurística: las matemáticas que trabajan con frecuencia en clase son contenidos acabados, donde a una demostración le sigue una fórmula y a la aplicación correcta de esa fórmula el resultado plausible. Pero, si al alumno se le da la oportunidad de enfrentarse con un problema, en el que las estrategias personales son imprescindibles para la comprensión del problema y su posible resolución, éste se siente partícipe de esta «creación» matemática y su pensamiento y estrategias matemáticas avanzan gracias a la experiencia de investigar en la resolución de problemas.

Cuando se trabaja un problema en clase, ésta debe estar regida por un patrón de tiempo diferente, ya que hay que «gastar» tiempo pues su resolución exige paciencia y perseverancia. El resultado al que se llega tras intentar resolver un problema es tan importante como el proceso que se ha seguido, así que no encontrar la solución no quiere decir que se haya perdido el tiempo.

Después de una deliberada actuación en la observación y reflexión en la microárea de la práctica personal, compruebo que el alumno de matemáticas de la etapa 14-16 no obtiene de sus potencialidades intelectuales y de sus capacidades cognitivas todos los resultados que serían deseables, no sólo para solucionar los problemas específicos de matemáticas, sino también para el desarrollo de su personalidad como ser social que ha de desenvolverse en un marco más amplio de relaciones humanas e interdisciplinares, respondiendo con agilidad y reflejos a los nuevos retos que el mundo en evolución le ha de plantear. Este alumno de Secundaria está influenciado por una inercia de aprendizaje en la que existe una relación causa-efecto: a una sola cuestión, una sola respuesta. Pretendía por tanto, enseñarles una serie de procedimientos, estrategias y heurísticas específicas y constatar si son eficaces a la hora de resolver problemas.

Dado que la sociedad demanda una formación básica del individuo que pueda responder con eficacia a los retos que plantea en los diversos campos tecnológicos y científicos, la base matemática del alumno ha de ser muy versátil para que sepa y pueda adaptarse a cualquier situación; la resolución de problemas puede ser un factor determinante para la adquisición de estos recursos.

Además de estas argumentaciones expuestas, que pueden tener un carácter subjetivo, existen documentos de organismos oficiales y tomas de posición de personas significativas en el campo de la educación matemática, que hacen hincapié en la importancia de la Resolución de Problemas en la enseñanza de las Matemáticas. Cito alguno de ellos.

- La normativa de Secundaria obligatoria de Matemáticas del MEC.
- Las sugerencias contenidas en el informe Cockroft (1985).
- Los Estándares Curriculares y de Evaluación (NCTM, 1991).
- El Programa de estudios de Québec (1983).
- El Currículo Nacional Británico (1992).
- Las últimas tendencias en educación matemática propuestas en el ICME 8 (Sevilla, 1996).

Objetivo

Constatar la evolución de un grupo de alumnos con los que se ha trabajado en la resolución de problemas con la propuesta didáctica sugerida en el libro *Problemas con pautas y números* (Shell Centre for Mathematical Education, 1993).

Los alumnos del segundo ciclo de Secundaria, no se han enfrentado a verdaderos problemas matemáticos. En general los problemas que han visto siempre, están relacionados con los contenidos que están estudiando, y su principal estrategia para resolver el problema es recordar la fórmula que tiene que utilizar.

Marco teórico

> Pocas personas se atreverían a negar que el corazón de la actividad matemática es la resolución de problemas y que por tanto, hay que concederle un lugar prioritario en la formación matemática inicial. (Callejo, 1994:1)

Hoy en día, la importancia de la resolución de problemas está clara en el mundo de la educación matemática, aunque su implantación en clase no esté tan extendida y la resolución de problemas no sea, en general, el marco desde el que se trabajen los contenidos matemáticos. Es más, se crean asignaturas optativas para que tenga cabida «hacer problemas», ya que éstos requieren unas secuencias temporales diferentes.

Los alumnos del segundo ciclo de Secundaria, no se han enfrentado a verdaderos problemas matemáticos. En general los problemas que han visto siempre, están relacionados con los contenidos que están estudiando, y su principal estrategia para resolver el problema es recordar la fórmula que tiene que utilizar.

La resolución de problemas supone una innovación en relación con lo que ha sido para ellos tradicional en las anteriores etapas de sus ciclos educativos. Ante nuevos retos, nuevos recursos, y el alumno instintivamente pretende utilizar antiguos recursos –las fórmulas–, para nuevos objetivos –la resolución de problemas.

Al no ser totalmente satisfactorios los resultados de esta causalidad: innovación (resolución de problemas)/recurso tradicional (fórmulas), los alumnos se encuentran en una encrucijada mental, indecisos, parados. ¿Qué hacer? Buscan en su bagaje de aprendizajes y no encuentran esa estrategia que les solucionaría su duda. No han utilizado ese algo necesario para esta ocasión, su capacidad de pensar, su capacidad de aprender y desarrollar nuevas estrategias.

Para que este binomio Enseñanza-Aprendizaje esté impregnado de una dinámica constructiva, es necesario implementar una metodología innovadora sustentada fundamentalmente en la adquisición de nuevas estrategias y la posterior verificación de los resultados.

La inserción de la resolución de problemas en el currículo de matemáticas se articula según Kilpatric citado en Gómez Chacón, (1992) en torno a tres ejes direccionales fundamentales: *resolución de problemas como contexto, como habilidad y como arte.*

Una forma de entender la resolución de problemas es como argumenta Stevenson (p. 165):

> La resolución de problemas es un arte que no está satisfactoriamente entendido, casi todos los expertos podrían estar de acuerdo, sin embargo, en que los estudiantes que tengan para trabajar más herramientas matemáticas, se convertirán en los mejores resolutores de problemas.

Cuando Poincaré en su conferencia en la Sociedad Psicológica de París, a principios de siglo, reflexionó sobre su propio proceso de creación apuntó lo siguiente (1995):

> Hemos visto que la tarea matemática no es meramente mecánica...
>
> No se trata sólo de aplicar reglas, de hacer el mayor número de combinaciones posibles según determinadas leyes fijas... La verdadera tarea del inventor consiste en escoger entre estas combinaciones eliminando las inútiles, mejor aún, no molestándose en hacerlas...

¿Podría entreverse, de la lectura atenta de estas líneas, una definición a*vant la lettre* del «Control Schoenfeldiano»?

Quizá una de las referencias más nítidas para cualquier investigación en la resolución de problemas sea George Polya, éste define el proceso de resolución como sigue (p.448):

> Resolver un problema es un proceso extremadamente complejo. Ninguna descripción o teoría de ese proceso puede agotar sus múltiples aspectos; cualquier descripción o teoría del mismo está abocada a ser incompleta, esquemática y muy simplificada.

Hemos visto que la tarea matemática no es meramente mecánica... No se trata sólo de aplicar reglas, de hacer el mayor número de combinaciones posibles según determinadas leyes fijas... La verdadera tarea del inventor consiste en escoger entre estas combinaciones eliminando las inútiles, mejor aún, no molestándose en hacerlas... (Poincaré)

El modo de trabajo que sigue Schoenfeld es diferente del de Polya, aunque se declara continuador de éste. Polya sigue el modelo de los psicólogos de la Gestalt, mientras que Schoenfeld sigue el modelo del procesamiento de la información y le da importancia al papel de la memoria y a los protocolos escritos. Su modelo de investigación se basa en la observación entrando en el terreno cognitivo y descubriendo el papel tan importante que tiene el control del proceso.

Chi y Glaser han analizado la capacidad de resolver problemas como una aptitud cognitiva compleja que caracteriza una de las actividades humanas más inteligentes.

Indagando acerca de la posibilidad de que se pueda enseñar a los estudiantes a resolver problemas, Tall se pregunta:

> ¿Podemos enseñar a los estudiantes a pensar matemáticamente? ¿Podemos estimular a los estudiantes a pensar como matemáticos?

Schoenfeld escribió que el uso de las *estrategias heurísticas* ayuda a la comprensión del problema (p. 23):

> Las estrategias heurísticas son reglas empíricas para la resolución de problemas con éxito, indicaciones generales que ayudan al individuo a comprender mejor un problema o a hacer progresos hacia su solución...
>
> Hay consenso entre los matemáticos que estas estrategias son provechosas. Por ejemplo, el pensamiento heurístico contribuye a las soluciones de cada uno de los problemas.

Miguel de Guzmán señala que estas estrategias se pueden utilizar en la resolución de problemas en la vida cotidiana (p. 14).

> ¡Ah! Una última observación. No pienses que las estrategias de pensamiento que aquí tienes son sólo buenas para resolver problemas y juegos matemáticos. En líneas generales, cambiando lo que hay que cambiar, esas mismas estrategias las puedes utilizar en un montón de problemas de la vida ordinaria. Esto es algo muy importante que la matemática puede enseñar a todo el mundo, un método de pensamiento sobrio, razonable, fiable...

La enseñanza de estrategias es motivo de reflexión en Freudenthal (1983), citado en Callejo (1994):

> Mi idea acerca de la enseñanza de las estrategias es tratar de que una vez que se resuelva un problema se tome conciencia inmediata de la estrategia que se ha seguido de forma que se guarde en la memoria pero de una forma general como para no atenerse a ella al pie de la letra. Las estrategias sólo son válidas si se tiene en cuenta la flexibilidad para su aplicación. Mas que apodícticamente deberían ser aprendidas heurísticamente.

La reflexión sobre el proceso seguido y su registro son aspectos importantes en el aprendizaje, Guzmán (1991) expresa (p. 55):

> Si pretendemos mejorar nuestros propios procesos de pensamiento es absolutamente necesario disponer de técnicas que nos permitan examinarlos a fondo.
>
> Pero para quien desea asimilar a fondo los mecanismos de reacción de los expertos es útil ejercitarse no sólo en resolver muchos problemas, sino también en examinar sus propios procesos mentales al tiempo que lo hace.

Callejo (1994) cita la elaboración de registros para favorecer la toma de conciencia de los procesos de pensamiento de la siguiente manera (p. 37):

> Las técnicas para tomar conciencia de los procesos de pensamiento son la introspección o autoreflexión en el curso del proceso, y la retrospección o reflexión una vez concluido el mismo. Para favorecerlos se hacen registros de diversa naturaleza denominados protocolos.

En relación con la reflexión sobre la experiencia Dreyfus (1991) señala que (Schoenfeld, 1985):

> La reflexión sobre la experiencia matemática propia es de particular importancia en la solución de los problemas no triviales (como opuesto a ejercicios estándar) y es en esta conexión que la importancia de los procedimientos ha sido comprendida en primer lugar por los educadores matemáticos.

En el libro *Pensar Matemáticamente* Burton y otros (1992), sus autores se refieren a los procesos que rigen el pensamiento matemático y sugieren una pautas para mejorarlo: atacando los problemas concienzudamente, reflexionando sobre la experiencia acumulada, conectando las impresiones recibidas con la acción, estudiando cuidadosamente el proceso de resolución de problemas y observando cómo encaja lo que se va aprendiendo con la propia experiencia.

Otro de los factores que facilitan el aprendizaje en la resolución de problemas es el trabajo cooperativo. Así lo manifiesta, el nuevo «Scottish Standard Grade»:

> ...el intercambio de ideas que se produce durante la discusión constituye una parte esencial del aprendizaje...

Y en las Orientaciones didácticas del MEC se considera que el trabajo en grupo facilita el aprendizaje (p. 96):

> El reparto de tareas, la selección de estrategias, la revisión del trabajo de unos por los otros, etc., tienen buenos resultados.

Un referente paradigmático han sido las sugerencias contenidas en el *Informe Cockroft*.

De las diferentes referencias bibliográficas básicas sugeridas para la elaboración de la tesis, una vez conocidas y analizadas todas ellas, he singularizado: *Problemas con pautas y números*, del Shell Centre for Mathematical Education (1993) por las siguientes razones:

- Este libro promueve una serie equilibrada de actividades curriculares.
- Pretende desarrollar el rendimiento de los alumnos a la hora de abordar problemas y pone énfasis en una serie de estrategias específicas que pueden ayudar en esa resolución de problemas.

Asimismo en refuerzo de los procedimientos de recogida de información que hay que utilizar en el desarrollo del trabajo (pretest, postest), he analizado con detenimiento el marco teórico de Schoenfeld, (1985) en su libro *Mathematical Problem Solving*.

Para el análisis de los datos en uno de sus apartados he utilizado el capítulo 2 del libro de M.ª Luz Callejo: *Un Club Matemático para la Diversidad*.

Para el diseño de la instrucción, el capítulo 6 del libro antes citado, me ayudó en la evaluación de los aprendizajes.

Para el análisis de los protocolos utilicé el modelo que presenta Miguel de Guzmán en el libro *Para pensar mejor*.

Las técnicas para tomar conciencia de los procesos de pensamiento son la introspección o autoreflexión en el curso del proceso, y la retrospección o reflexión una vez concluido el mismo. Para favorecerlos se hacen registros de diversa naturaleza denominados protocolos. (Callejo)

Diseño y desarrollo de una experiencia de resolución de problemas en el aula

Las diferentes propuestas didácticas que inicialmente se podrían utilizar para este trabajo se analizaron de acuerdo con diversos aspectos:

- Idoneidad de la intervención didáctica en consonancia con mi perfil docente.
- Modelo de enseñanza.
- Estrategias didácticas.
- Evaluación de los aprendizajes.
- Recursos.
- Planteamiento de situaciones que favorecen el tránsito de un lenguaje matemático a otro (algebraico, numérico, gráfico, figurativo).

- Presentación de las actividades de acuerdo al desarrollo evolutivo de los alumnos.

Fue la propuesta del libro *Problemas con pautas y números*, la que obtuvo una baremación más acorde con las pretensiones deseadas.

Para la explicitación de esta propuesta didáctica elegida, era conveniente disponer semanalmente de no menos de tres clases de cincuenta y cinco minutos. El Taller de Matemáticas al estar integrado por alumnos de cuarto de Secundaria de entre 15 y 16 años y ser una asignatura optativa era el ámbito idóneo para desarrollar este proyecto.

Las Orientaciones Didácticas de esta asignatura están establecidas por el MEC así como las directrices sobre el papel del profesor para fomentar el trabajo cooperativo de los alumnos, la motivación y el tratamiento diversificado a éstos.

La programación del curso se realizó en tres fases en las que se graduaron las orientaciones por parte de la profesora. En una primera fase se mostró a los alumnos actividades matemáticas en las que era necesario aplicar una serie de destrezas y estrategias. Posteriormente, en una segunda fase, se les estimuló a que aplicasen las estrategias aprendidas a problemas y actividades de mayor dificultad en las que se les daban menos indicaciones por parte de la profesora; siempre que los alumnos se encontraron en situaciones de bloqueo tuvieron alguna ayuda para poder continuar el proceso de resolución. Por último en la tercera fase, la ayuda fue meramente de apoyo, pues no se pretendió darles indicaciones con respecto a la forma de abordar estos problemas. Como los alumnos trabajaron en grupo hicieron al final de cada problema una puesta en común, ello les facilitó la comprensión del problema y les sirvió para resolver otro posterior.

Las actividades propuestas se pueden agrupar en tres bloques, relacionados con las fases anteriores. En el primer bloque se acompañaron de indicaciones, hojas de trabajo y estrategias completas para la resolución de los problemas propuestos. En el segundo bloque no hubo hojas de trabajo aunque sí indicaciones estratégicas orales y los alumnos tuvieron que desarrollar por ellos mismos alguna particular. Además se plantearon problemas que no podían resolverse completamente con las destrezas y estrategias vistas, lo que obligó a los alumnos a combinarlas o a desarrollar por ellos mismos alguna particular. El tercer bloque contenía problemas más abiertos e intervino bastante la creatividad de los alumnos y su capacidad para hacerse preguntas.

Fue la propuesta del libro Problemas con pautas y números, la que obtuvo una baremación más acorde con las pretensiones deseadas.

En todos los casos se les pidió que expresasen por escrito todas sus ideas y explicaran sus soluciones. Estos problemas se han acompañado de:

1. Hojas de trabajo.
2. Normas para la elaboración del protocolo. Adaptado del libro de M. de Guzmán (1991), *Para pensar mejor*.
3. Pasos a seguir en la resolución de un problema tomados también del libro de M. de Guzmán (1991), *Para pensar mejor*.
4. Criterios de evaluación de problemas.
5. Pautas para el trabajo en grupo.

Con todo este bagaje documental el alumno conocía *qué* problema debía resolver, *cuáles* eran las ofertas de estrategias válidas para el mismo, *cómo* debía trabajar en grupo, *cuántas* fases debía considerar en la resolución, *de qué* manera habría de reflejar los movimientos subconscientes de su proceso de resolución y *con qué* criterios serían evaluados.

Los alumnos han trabajado individualmente y en grupo. Cuando han trabajado juntos han tenido una primera fase individual de lectura y comprensión del problema, una segunda fase de trabajo en grupo, con «lluvia de ideas», selección de estrategias, abordaje del problema y comprobación de los resultados, para posteriormente hacer una puesta en común.

El modo de intervención de la profesora estaba relacionado con los diferentes roles del profesor en las clases cuando éstas están orientadas hacia la resolución de problemas: *explicación, dirección, marcar la tarea, orientación y actuar como recurso*.

El objetivo de la intervención era mejorar el balance de las actividades de aprendizaje en el aula estimulando la resolución de problemas e investigaciones abiertas. Los materiales para clase ayudaban a esto.

La instrucción se realizó durante el primer y el segundo trimestre del curso 1995/96. Tuvieron tres sesiones semanales de cincuenta minutos La distribución de problemas y número de sesiones por fase fue la siguiente:

1.ª fase	9 problemas	14 clases
2.ª fase	10 problemas	20 clases
3.ª fase	10 problemas	20 clases

La evaluación se realizó al final de las tres fases.

Para la elección de los problemas para las pruebas fue necesario armonizar una pluralidad de factores, como los siguientes:

1. La adecuación del objetivo con los contenidos y los criterios de evaluación.
2. La atención a la diversidad.
3. La experiencia personal de la profesora desde una perspectiva holística con el problema

Para los alumnos el trabajo en grupo como norma ha supuesto una experiencia enriquecedora, si bien fue necesario pulir algunas divergencias.

Los protocolos, por su novedad, las peculiaridades de su elaboración, las singularidades de su estilo narrativo, el contenido de los movimientos del subconsciente y los hitos temporales tan profusamente recordados, han ocupado en los alumnos un lugar especial en sus inquietudes.

La interrelación profesora-alumnos, debe ser observada desde una pluralidad de perspectivas atendiendo al papel metodológico desempeñado.

En la primera fase, las explicaciones, han constituido un factor, cualitativa y cuantitativamente, no desdeñable de la intervención de la profesora. Una vez hecha la transferencia de información la mayor parte de esta intervención *–dirigiendo–* la ocupó las sugerencias a los alumnos de la elaboración del protocolo. La función orientativa ha intervenido como hilo conductor de las vicisitudes de los alumnos.

En la segunda fase la interrelación profesora-alumnos, observada desde diferentes perspectivas, cubre el mismo espectro anterior, –explicación, dirección, marcar la tarea, orientación y actuar como un recurso– aunque su incidencia cuantitativa es diferente.

En la tercera fase se mantuvo la tendencia ya iniciada en la fase anterior. Mientras que algunos aspectos de la intervención han decrecido (explicación, dirección y orientación), otros han incrementado porcentualmente su incidencia como ha sido: *Actuar como un recurso.*

	Clases	*Explica*	*Dirige*	*Tarea*	*Orient*	*Recurso*
1.ª Fase	14	8	6	10	10	11
		57%	43%	71%	71%	79%
2ª Fase	20	6	3	10	10	17
		30%	15%	50%	50%	85%
3ª Fase	20	2	0	9	2	19
		11%	0%	45%	11%	95%

Tabla 1. Resumen de la intervención de la profesora en las tres fases

Se prima más el proceso de resolución que el resultado y por ello se les enseña a reflexionar sobre sus propias producciones.

Diseño y desarrollo de la investigación

El objetivo específico es constatar la evolución de un grupo de alumnos con los que se ha trabajado en la resolución de problemas con la propuesta didáctica sugerida en el libro *Problemas con pautas y números* (Shell Centre for Mathematical Education, 1993).

Los aspectos o variables que se van a considerar para constatar la evolución de los alumnos son los siguientes:

a) Los procedimientos plausibles aplicados a la resolución de problemas.

b) Las valoraciones cualitativas de los alumnos de su resolución de problemas.

c) La fluidez y transferencia de heurísticas cuando se les pide a los alumnos que comenten cómo abordarían un problema sin resolverlo.

d) La autorregulación del proceso.

Esta investigación se enmarca en el paradigma *interpretativo,* en el que el máximo interés se sitúa en el proceso de comprensión e interpretación de cómo los alumnos resuelven problemas. Se prima más el proceso de resolución que el resultado y por ello se les enseña a reflexionar sobre sus propias producciones.

Es «un estudio de evolución». Las características de esta investigación educativa son:

1. Es una *investigación aplicada.*
2. Es una *investigación longitudinal* (*diacrónica*) y *de panel* por haber sido el mismo grupo de alumnos el observado a lo largo de toda la investigación.
3. Por la profundidad u objetivo hay que considerarla como una *investigación descriptiva* puesto que su objetivo central es la descripción de los fenómenos
4. Utiliza los dos tipos de caracteres de la medida: *cuantitativo* y *cualitativo.*
5. Según el marco en que tiene lugar es *de campo o sobre el terreno.*

6. Como enfatiza lo particular e individual es una *investigación idiográfica* y no pretende llegar a leyes generales como objetivo fundamental.
7. Considerando la dimensión temporal de la investigación es ésta *descriptiva*.
8. Es una *investigación orientada a la aplicación y a la adquisición de conocimientos* con el propósito de dar respuesta a problemas concretos.

Partiendo de la teoría constructivista en la que se propone que el aprendizaje matemático en algún sentido es producto de la actividad interpretativa y en oposición a ella la posición filosófica que argumenta que el conocimiento es la representación acertada de lo que está fuera de la mente, puede existir una posición intermedia en la que el propio alumno adapte los contenidos necesarios para entender y favorecer el proceso de resolución de un problema.

Como el aprendizaje matemático desde el punto de vista antropológico es un proceso de construcción cognitiva y de aculturación, para favorecer este aprendizaje se utilizan las siguientes estrategias: por un lado el papel de la profesora puede ser visto como guía de este aprendizaje y por otro el trabajo en grupo podrá favorecer el proceso de aculturación.

Los alumnos dispusieron de la máxima información posible en el desarrollo de la investigación con el fin de que se sintieran partícipe y colaboradores entusiastas.

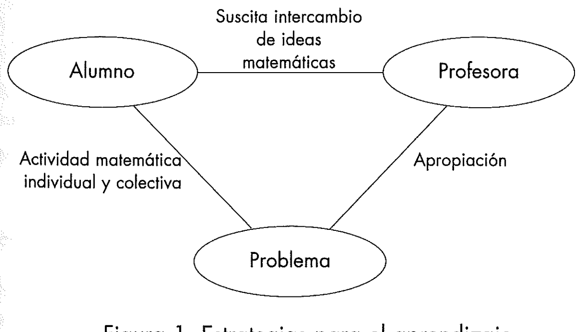


Figura 1. Estrategias para el aprendizaje

Existe una interrelación sujeto-objeto que está influida por factores subjetivos tales como mis propias concepciones de cómo se resuelve un problema, las creencias sobre los diferentes tipos de aproximación para la resolución (gráfica, numérica, algebraica...).

Esta investigación parte de una hipótesis de trabajo: *¿A una mayor disponibilidad de estrategias heurísticas por parte de los alumnos seguirá un porcentaje mayor de problemas resueltos?*

Los alumnos dispusieron de la máxima información posible en el desarrollo de la investigación con el fin de que se sintieran partícipes y colaboradores entusiastas.

La elección de la población para esta investigación ha sido escogida de acuerdo a un perfil académico determinado: su elección de la asignatura optativa Taller de Matemáticas.

Existió un marco ambiental o condiciones extrínsecas, que influyeron positivamente en el grupo de alumnos que colaboró con la profesora en el desarrollo temporal de la investigación: las peculiaridades del Taller con trabajo en grupo, mayor libertad de programación de la asignatura y propuesta didáctica específica.

Estuvo formada por diecisiete alumnos de cuarto de Secundaria con edades comprendidas entre 15 y 16 años, del los cuales hay nueve chicas y ocho chicos, de un grupo de Taller de Matemáticas del IES Siete Colinas de Ceuta. Este grupo pertenece a la opción B de Matemáticas de 4.° curso. Son alumnos que en principio elegirán el bachillerato de Ciencias de la Naturaleza.

Recogida de datos

Para valorar los procedimientos plausibles de análisis de problemas completamente resueltos, se propuso a los alumnos que resolvieran cinco problemas que se les pasaron al inicio de la instrucción en el transcurso de cuatro clases y otros semejantes que se pasaron al final de la misma. El objetivo era analizar la capacidad de los alumnos para generar, seleccionar y abordar caminos plausibles para la resolución de problemas. No se les hizo ninguna sugerencia estratégica para su resolución. En esta primera parte su trabajo fue individual.

Estos problemas estaban directamente relacionados con los que se plantearían en la instrucción. Cada estrategia heurística empleada para la resolución de ellos sería estudiada a lo largo del curso. En la primera parte de la instrucción se les facilitó a los alumnos diferentes problemas, similares a los que habían resuelto en el pretest, y que resolverían en el postest, pero abordados desde diversas estrategias.

Para conocer las valoraciones cualitativas de los alumnos de su resolución de problemas, se utilizó un cuestionario de valoración, que se pasó al inicio de la instrucción (después de la resolución de los cinco problemas) y otro igual que se pasó al final de la instrucción. Los alumnos lo rellenaban a medida que terminaban cada problema.

Para apreciar la fluidez y transferencias de heurísticas se les pidió a los alumnos que comentasen cómo abordarían un problema sin resolverlo tanto al comienzo de la instrucción (pero después de las anteriores) como al final de la misma.

Se les propuso seis problemas que estaban agrupados de dos en dos, según los grados de relación con los habituales de la instrucción. No se les pidió que los resolvieran pero sí que buscasen alguna pauta o forma de abordarlos, qué procedimientos utilizarían, cómo empezarían a resolverlos y cómo lo justificarían.

Se les expuso en la pizarra una serie de indicaciones de cómo abordar este trabajo. Fueron éstas:

> Por favor lee el problema, piensa unos minutos en cómo lo resolverías y dame el plan de la solución.
>
> Dime que harías si tuvieras tiempo para trabajar el problema, las pautas que sacarías, los procedimientos que emplearías, cómo comenzarías a resolverlo y cómo lo justificarías.

Al final de cada fase, coincidiendo con los exámenes se recogieron los protocolos que realizaron los alumnos de los problemas propuestos.

Para el primer problema el trabajo sería individual. En el segundo problema el trabajo se llevó a cabo en grupo, los mismos grupos que habían estado formados a lo largo de la segunda fase. El tercer problema había que resolverlo de manera individual.

Se llevó un diario semiestructurado de clase donde se registró observaciones de las sesiones de trabajo con los alumnos y también se llevó un registro de observaciones sobre actitudes y modos de abordar los problemas. Consta de 18 cuestiones en la que se pretende sistematizar por parte de la profesora la actitud del alumno en relación con la resolución de problemas. Está basado fundamentalmente en la «Lista de registro de observaciones» de *Un club Matemático para la diversidad* (Callejo, 1994) y ampliado con otros aspectos que se consideran adecuados.

Análisis de datos

Para analizar los cinco problemas que los alumnos han resuelto se han utilizado los procedimientos de *Puntuación múltiple y Puntuación del mejor procedimiento* de Alan H. Schoenfeld (1985).

El procedimiento *puntuación múltiple* consiste en hacer al comienzo una lista de todos los procedimientos plausibles para resolver el problema esbozados al menos por un alumno. Después para cada solución intentada por cada alumno, para cada problema y para cada procedimiento plausible se hacen las siguientes preguntas:

1.ª ¿Muestra el alumno evidencia de conocer este procedimiento concreto? (Evidencia).

2.ª ¿Busca el alumno el camino? (Búsqueda).

3.ª Si busca el camino, ¿qué progreso hace hacia la solución? (Progreso).

   a) Poco o ninguno. (Poco).

   b) Dispone de cantidad razonable pero no suficiente de información. (Algo).

   c) Una solución errónea por un cálculo incorrecto. (Casi).

   d) Solución correcta. (Resuelto).

Para apreciar la fluidez y transferencias de heurísticas se les pidió a los alumnos que comentasen cómo abordarían un problema sin resolverlo tanto al comienzo de la instrucción (pero después de las anteriores) como al final de la misma.

La puntuación para cada ítem será de 0 o 1; y en el tercero se dará un 1 al más alto de los apartados correspondientes.

Este esquema proporciona una forma rápida para conocer la capacidad global de la clase para generar y aplicar procedimientos plausibles de resolución de problemas. Pero para puntuar el esfuerzo del alumno en cada problema se utiliza puntuación del mejor procedimiento que consiste en puntuar por separado cada procedimiento que emplea el alumno del siguiente modo: si el procedimiento no es perseguido 0 puntos, si se considera poco progreso se les da de 1 a 5 puntos, si hacen algún progreso recibirán de 6 a 10 puntos, los problemas casi resueltos obtendrán de 11 a 15 puntos y los resueltos de 16 a 20 puntos.

Por cada problema se le asigna al alumno la puntuación máxima conseguida en todos los procedimientos que empleó en ese problema. Por tanto la puntuación global para los cinco problemas será como máximo de 100 puntos.

Los protocolos y la evaluación de los procesos correspondientes a los problemas se han analizado según las indicaciones de Guzmán (1991).

La detenida relectura propició la estructuración del proceso de análisis en tres apartados: A, B y C.

Parte A. ¿A qué fase del proceso corresponde?

Parte B. Relación entre las acciones contempladas y el resto de sus actuaciones.

Parte C. Momentos decisivos en la resolución del problema.

Fue necesario disponer de un elemento auxiliar de trabajo que armonizando funcionalidad/totalidad de información/visualización global e inmediata, permitiera la recogida informatizada de datos y el balance gráfico temporal de las etapas. Con tales pretensiones se diseñó el «Análisis del protocolo».

El análisis correlativo de cada una de las divisiones se hizo en función de su contenido, bien de actividad o bien afectivo. Se analizaron también los cambios de actividad y los orígenes de estos cambios, a qué podrían ser debidos y cómo afectaban a la marcha del proceso.

Se contabilizó el tiempo que el alumno había permanecido en cada una de las cuatro fases: familiarización, búsqueda, desarrollo y revisión, así como *los retornos* (regresos momentáneos a fases anteriores) entre las mismas.

Con esta información se elaboró el diagrama temporal por etapas que se incluye en el impreso de análisis.

La evaluación del proceso ha consistido en expresar en breve síntesis, las consideraciones que a la profesora le ha sugerido el balance total de las actuaciones realizadas por el alumno en su protocolo.

Esta investigación está focalizada en torno a dos cuestiones vinculadas por un principio de causalidad: estrategias y solución correcta del problema. ¿A una mayor disponibilidad de estrategias heurísticas por parte de los alumnos seguirá un porcentaje mayor de problemas resueltos.

¿Qué ha ocurrido en el pretest?

Los alumnos han utilizado once estrategias diferentes para los cinco problemas, pero una vez hecha la media evidencias por alumno, se obtiene un resultado de 4,94. La ratio estrategia / problema es de 0,99, es decir, que a cada problema le corresponde una estrategia por alumno.

Esta investigación está focalizada en torno a dos cuestiones vinculadas por un principio de causalidad: estrategias y solución correcta del problema.

El balance final de problemas resueltos es exiguo, seis problemas en total, lo que distribuido por alumno arroja un resultado de 0,35 para los cinco problemas propuestos. Disponiendo cada alumno de casi una «evidencia» por problema, consigue un 0,06, es decir 6 % de éxito en la resolución de cada problema.

A un leve incremento de «evidencias» le corresponde un leve incremento de resultados correctos del problema.

En la Planificación de la resolución de problemas los alumnos han utilizado 14 estrategias, de las cuales ocho son diferentes entre sí, puesto que algunas de ellas se repiten en los seis problemas de esta fase. En las tablas están representadas en los correspondientes diagramas de barras aquellas que son coincidentes con las de la Resolución de problemas y también las que suponen una innovación heurística.

La asignación *evidencia/alumno* es de 2,82 La ratio estrategia/problema es de 0,47.

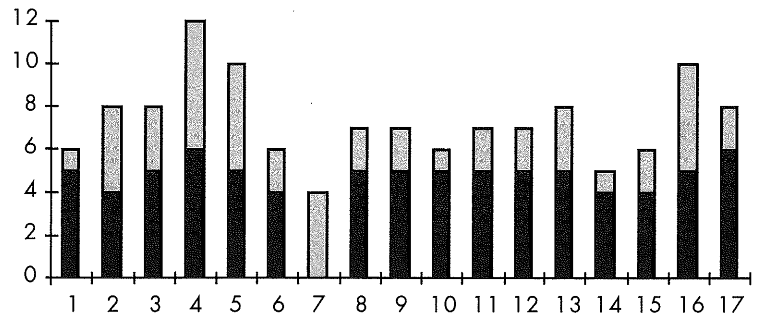


Figura 2. Número total de heurísticas por alumno en el pretest.

¿Qué ha ocurrido en el Postest?

En la Resolución de problemas, los alumnos han utilizado dieciséis estrategias, de las cuales catorce son diferentes, pero una vez hecha la media de *evidencia/alumno* se obtiene un resultado de 7,88. La ratio *estrategia/problema es* de 1,57, es decir, que a cada problema le corresponde más de una estrategia y media por alumno.

El balance final de problemas resueltos es de 43, lo que distribuido por alumno arroja un resultado de 2,5 resueltos para los cinco problemas propuestos.

Disponiendo cada alumno de 1,57 evidencia por problema, consigue un 50 % de éxito en la resolución de cada problema.

No se ha detectado que a un incremento de evidencias le corresponda un incremento de resultados correctos aunque sí, que existe una gran correlación entre el número de evidencias y el grado de *progreso* («casi» y «resuelve») que los alumnos alcanzan en la resolución de problemas, siendo r = 0,96.

Interesa destacar cuál ha sido el aporte de heurísticas realizado globalmente por los alumnos en el pretest. Con esa finalidad se ha elaborado la tabla que en un diagrama de barras que refleja cuantitativamente estos datos.

En la Planificación de la resolución de problemas los alumnos han utilizado 14 estrategias, de las cuales ocho son diferentes entre sí, puesto que algunas de ellas se repiten en los seis problemas de esta fase. En las tablas están representadas en los correspondientes diagramas de barras aquellas que son coincidentes con las de la Resolución de problemas y también las que suponen una innovación heurística.

La asignación evidencia/alumno es de 2,82 La ratio estrategia/problema es de 0,47.

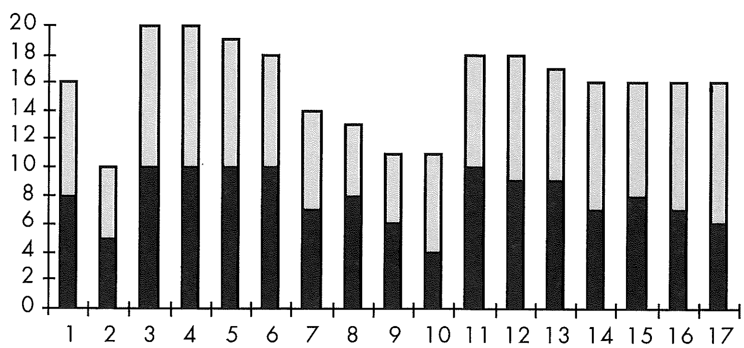


Figura 3. Número total de evidencias en el postest.

Intermedios (Primera fase-Segunda fase-Tercera fase)

Después de ser observados y analizados los protocolos de los alumnos de las tres fase se hizo un detenido estudio de la distribución que cada uno de los alumnos realizó de los minutos de que dispuso para el problema. Se contabilizó la parte de este tiempo que cada fase –familiarización, búsqueda, desarrollo y revisión– acaparó. Los retornos, entendiendo por tales una vuelta a una fase anterior, también fueron computados. La porción útil de tiempo y la desechada fue objeto de valoración.

La estadía del alumno en cada fase ha sido gráficamente representada como puede verse en la figura 4.

Se observa que existe una relación directa entre el tiempo utilizado en la resolución del problema, el número de retornos y el tiempo dedicado a los mismos (tabla 2)

Máximas notas				
Alumno	T. revisión	N.° retornos	T. utilizado	Nota
E 4	35	2	100	7
E 5	20	3	100	7,3
11	15	5	100	7,8
E 16	10	2	100	8
Mínimas notas				
Alumno	T. revisión	N.° retornos	T. utilizado	Nota
E 3	0	0	83	4
E 9	0	3	76	4
E 10	5	3	59	4
E 17	0	0	75	4,8

Tabla 2

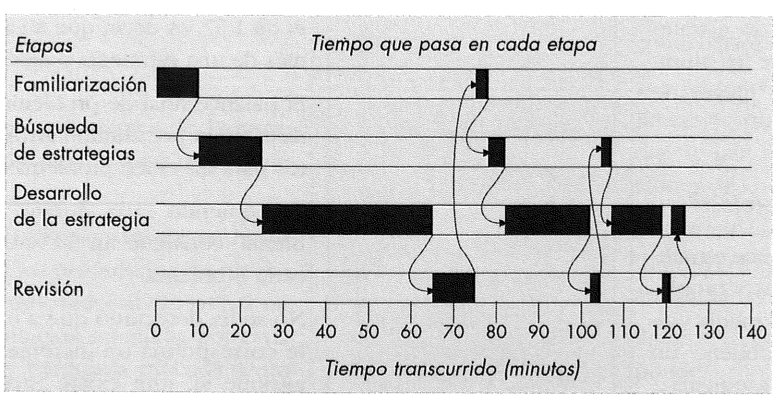


Figura 4. Reparto del tiempo dedicado a un problema entre las etapas y número de retornos.

Resultados y conclusiones

¿Cómo han evolucionado los alumnos?

El progreso ha sido notable en prácticamente todos los alumnos atendiendo a los parámetros más significativos como evidencias y número de problemas resueltos (figuras 5 y 6).

Como el objetivo de este trabajo es observar cómo ha evolucionado un grupo de alumnos, el análisis final se ha centrado en la constatación de los resultados obtenidos por el grupo en la utilización de estrategias, en el *progreso* en la resolución y en la culminación con éxito de la misma, distinguiendo en su caso cuándo un problema se ha resuelto por más de un procedimiento plausible.

¿Qué ocurrió en el pretest y qué ha ocurrido en el postest atendiendo a la Resolución de los problemas, a la Valoración y a la Planificación de la resolución de problemas?

Resolución de problemas. Se ha elaborado una tabla en la que se representan los valores medios que el grupo obtuvo en el pretest y en el postest. (Tabla 3)

En el número de problemas resueltos en el postest las cifras arrojan un incremento del 502% sobre el valor obtenido en el pretest (0,35/1,76).

Las estrategias evidenciadas por el grupo en ambos momentos 4,88/7,88 experimentan un incremento del 161%.

Es conveniente reseñar en este balance, el *descenso* que se ha producido en poco 1,53/0,7 es decir, que se ha reducido a más de la mitad. Tiene una lógica argumentación: al aumentar notoriamente *casi* (0,94/2,53) y *resuelve* (0,58/2,59) la vinculación inversa que los relaciona hace que se produzca el descenso apuntado.

La lectura mesurada de los datos contenidos en la tabla de valoración elaborada proporciona consecuencias muy interesantes sobre el posicionamiento de los alumnos (tabla 4 y figura 7).

El 65% de los alumnos en el postest recuerda haber visto problemas relacionados con los que ahora resuelven,

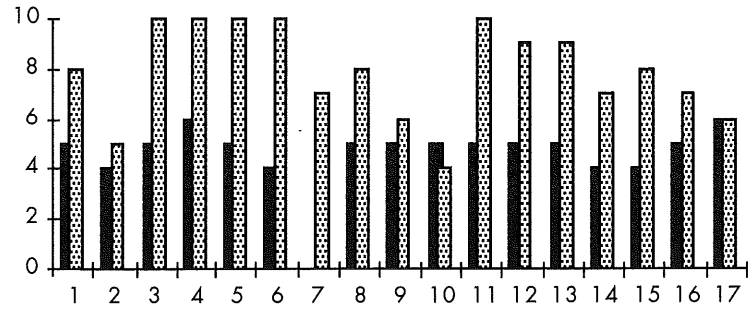


Figura 5. Evidencias por alumno. Pretest/Postest.

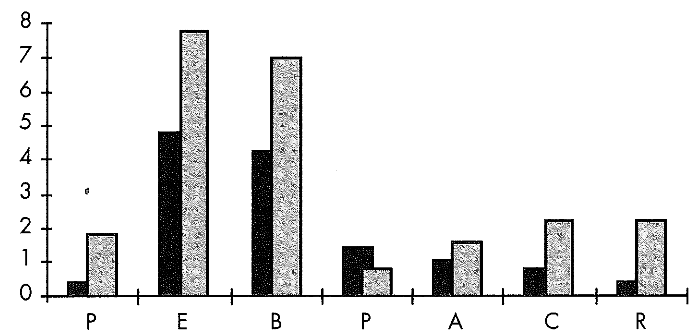


Figura 6. Puntuación múltiple de la resolución de problemas. Pretest/Postest.

N = 17	N.º de problemas diferentes resueltos	Procedimientos plausibles		Progreso			
		E	B	P	A	C	R
Pretest	0,35	4,88	4,58	1,53	1,18	0,94	0,58
Postest	1,76	7,88	7,41	0,7	1,76	2,53	2,59

Tabla 3. Comparación del número total de problemas resueltos en el pretest y postest

N = 17	¿Viste este problema antes?		¿Viste uno relacionado?		¿Tuviste idea de cómo empezar?	
	Sí	No	Sí	No	Sí	No
Pretest %	0	100	19	81	46	54
Postest %	5	95	65	35	68	32

Tabla 4. Cuadro comparativo de valoración. Pretest/Postest

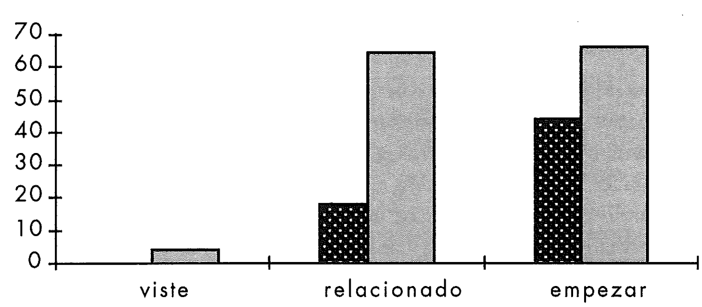


Figura 7. Valoración de la resolución de problemas. Pretest/Postest

mientras que en el pretest se manifestaba así el 19 % de ellos. El 68% tuvo idea de cómo empezar en tanto que en el pretest era el 47% el que así se manifestaba (tabla 5 y figura 8).

N = 17	N.° de problemas diferentes resueltos	Procedimientos plausibles		Progreso			
		E	B	P	A	C	R
Pretest	0	2,76	1,82	0,76	0,29	0,18	0
Postest	0,35	7,94	6,94	1,35	2,76	1,88	0,41

Tabla 5. Planificación de la resolución de problemas. Pretest/Postest

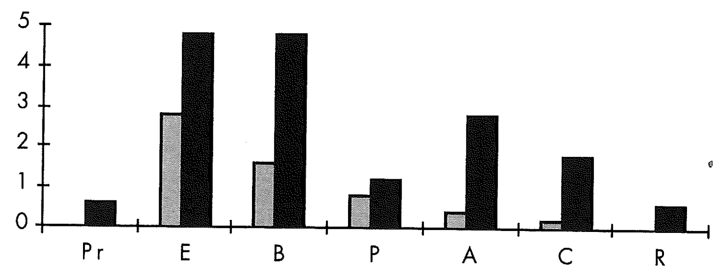


Figura 8. Puntuación múltiple de la Planificación de la resolución de los problemas. Pretest/Postest

Ha sido en la Planificación de la resolución de los problemas donde el avance experimentado por el grupo se manifiesta con perfiles más sobresalientes. En la consideración de las evidencias apuntadas, 2,76/7,94, el aumento del 288% es indicativo de la mejora cualitativa.

A pesar de que en esta prueba sólo se les pedía a los alumnos que adelantaran procedimientos plausibles de resolución y de estar constreñidos por el tiempo, ocho minutos por problema, cuatro alumnos en el postest resolvieron siete problemas, frente a ningún problema resuelto en el pretest.

Interpretación de los resultados

Este trabajo tenía como hilo conductor de la investigación el constatar la eficacia de una propuesta didáctica en la resolución de problemas y observar diacrónicamente cómo evolucionaban un grupo de alumnos de 4.° de ESO.

Desde el comienzo del curso (octubre) en que los alumnos desconocían totalmente expresiones tales como heurística, procedimiento plausible, estrategia, abordaje, etc. y su primer contacto con un bloque de cinco problemas diferentes en el pretest, hasta ahora, final de curso, los alumnos a la par que maduraban cronológicamente, lo hacían matemáticamente con intensidad y su confianza en el uso correcto de aquellos términos e incluso el aporte original de heurísticas innovadoras, se ha incrementado considerablemente.

Es infrecuente que los alumnos en general mediten, de forma ordenada y metódica, sobre su propio proceso de trabajo en el aula de matemáticas.

Después de realizado el pretest, trabajado durante tres fases de instrucción y concluido el postest, la evolución progresiva de los alumnos adquiere perfiles y rasgos destacables en las siguientes variables observables.

Procedimiento plausible/resultado

Existe un incremento progresivo de la correlación evidencia/problema resuelto atendiendo a las distintas perspectivas desde la que ésta se observe.

Si se considera *número de evidencias por alumno/problemas resueltos el resultado es* 0,44.

Si la estudiamos tomando como observables número de *evidencias por alumno/casi* + *resuelto* la correlación existente es de 0,64

Pero donde esta correlación está más próxima a una relación lineal r = 0,96 es cuando se comparan número de *evidencias por problema/ casi* + *resuelto.*

Del contacto directo con los alumnos a lo largo de un curso escolar en Taller de Matemáticas es posible colegir que aún para alguno de ellos la fase de formalización no se ha fraguado definitivamente y el peso específico de la misma en el aporte cuantitativo de la investigación se hace sentir en la importancia que «casi» adquiere como dato decisivo para la eficaz interpretación de los resultados.

Existe una relación directa fuerte entre el número de procedimientos plausibles utilizados en la resolución de un problema y la culminación con éxito de la misma, siempre que se incluya la fase «casi» en el estudio.

Revisión/valoración

Es infrecuente que los alumnos en general mediten, de forma ordenada y metódica, sobre su propio proceso de trabajo en el aula de matemáticas. Ha de ser ésta una labor enseñada a través de unas secuencias específicas de aprendizaje. Esta parcela del mismo ha tenido su cuota temporal y organizada a lo largo de la investigación por parte de la profesora. La insistencia a los alumnos en la necesidad de dejar constancia escrita de sus procesos de resolución y la elaboración de informes retrospectivos en los que narran con frases adverbiales la estructuración racional de su trabajo, les ha ejercitado en sus análisis introspectivos y en la ágil y fiable contestación de los apartados de los cuestionarios *ad hoc*.

De la organización sistemática de los datos contenidos en los cuestionarios se infiere que los alumnos han adquirido una mayor consciencia de sus propios procesos de resolución que podrían concretarse en el siguiente aforismo:

Planificación y dificultad mantienen entre sí una relación inversa.

Los alumnos han aprendido a archivar en su memoria problemas conocidos en los que, aunque los textos de los mismos sean diferentes en su presentación literaria, les sugieren vías de aproximación hacia la resolución de los nuevos problemas e inducen procesos de *feedback* todavía sin demasiado realce pero interesante para seguir trabajando en esa dirección.

Procedimiento plausible/planificación de los problemas resueltos

Ya se hizo constar con anterioridad que ha sido en la Planificación de la resolución de problemas donde más se ha notado el aporte de evidencias de estrategias.

Los alumnos han sido capaces de adquirir a lo largo de la instrucción un fondo de heurísticas que les ha permitido acudir, transfiriéndolas, a aquellos problemas más o menos relacionados con los ya conocidos para que, incluso en el caso más alejado de su familiaridad como es el de los no relacionados, les haya permitido disponer de 36 evidencias de estrategias para sólo dos problemas. Lo que induce a considerar que la adquisición, conservación e idónea distribución de las mismas ha sido provechosa.

Un alumno incluso ha resuelto uno de los problemas no relacionados.

A un mayor número de procedimientos plausibles mayor transferencia de heurísticas a nuevos problemas.

Los alumnos han sido capaces de adquirir a lo largo de la instrucción un fondo de heurísticas que les ha permitido acudir, transfiriéndolas, a aquellos problemas más o menos relacionados con los ya conocidos...

Protocolos/estrategias

En las tres fases de instrucción los alumnos han trabajado 29 problemas abordándolos desde diferentes estrategias. De todos ellos han realizado protocolos y casi todos han sido analizados por la profesora.

Considerando el tiempo de permanencia de los alumnos en cada una de las fases –familiarización, búsqueda, desarrollo y revisión– el número de retornos efectuados (entendiendo por tales los regresos a una fase anterior en busca de estrategias nuevas o ya apuntadas) y revisión de su proceso de resolución, como variables a relacionar para la elucidación de conclusiones, pueden esbozarse ya algunas de ellas:

A mayor tiempo en la fase de búsqueda de estrategias, mayor éxito en la resolución.
A mayor número de retornos, mayor éxito en la resolución.
A mayor tiempo en la fase de revisión, mayor éxito en la resolución.

Los alumnos que iniciaron el curso con un total desconocimiento de la «Resolución de problemas», en un ambiente diferente como ha sido el Taller de matemáticas, trabajando en grupos y sin la presión de una clase convencional, con una cierta resistencia inicial a la elaboración de los protocolos, han asimilado con agrado y eficacia, ahora al final del curso, los nuevos procedimientos transfiriendo no sólo sus heurísticas a los nuevos problemas sino que han evolucionado también en su relación con las Matemáticas.

Al comienzo de la instrucción y durante el desarrollo de la misma, se ha insistido a los alumnos por parte de la profesora en la necesidad de reflexionar sobre el propio proceso de resolución, bien por medio de la elaboración individual de los protocolos como por la puesta en común de los procesos seguidos y resultados obtenidos. ¿Los diferentes bloques de contenido del currículo estarían mejor introducidos y el aprovechamiento de sus potencialidades sería mayor si se desarrollasen a través de la resolución de problemas con alumnos que como éstos disponen ya de un bagaje de heurísticas que no poseen aquellos que no han trabajado la resolución de problemas? Es una línea de investigación que podría desarrollarse.

Referencias bibliográficas

ARNAL, J., D. DEL RINCÓN y A. LATORRE (1992): *Fundamentos y metodología*, Labor, Barcelona.

BOLT, B. (1988): *Más actividades matemáticas*, Labor, Barcelona.

BOLT, B. y D. HOBBS (1991): *101 proyectos matemáticos*, Labor, Barcelona.

CALLEJO, M. L. (1992): *Orientaciones para la Elaboración de Unidades Didácticas. Área de Matemáticas*, Monografía, 13. Documentos I.E.P.S, Madrid.

CALLEJO, M. L. (1994): *Un club matemático para la diversidad*, Narcea, Madrid.

CALLEJO, M. L. (1995): «Evaluación de los alumnos en resolución de problemas: Tres estudios de casos», en F. HERNAN y otros: *Aspectos didácticos de matemáticas.* col. Educación Abierta, 115, 49-88, ICE de la Universidad de Zaragoza.

CÁMARA, M. T., M. F. MONTEAGUDO y J. PAZ (1996): *Materiales Didácticos. Taller de Matemáticas*, MEC, Madrid.

CAÑÓN, C. (1993): *La matemática. Creación y descubrimiento*, U.P.C.O., Madrid.

CHI, M. y T. GLASER (1986): «Capacidad de resolución de problemas», en R. J. STENBERG (Ed): *Las capacidades humanas: Un enfoque desde el procesamiento de la información*, 293-324, Labor, Barcelona.

COCKCROFT, W. H. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan: Informe Cockcroft*, MEC, Madrid.

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1996): *Cuadernos de la ESO, 3: Área de matemáticas*, Junta de Andalucía, Sevilla.

DREYFUS, T. (1991): «Advanced Mathematical Thinking Processes», en TALL, D. *Advanced Mathematical Tinking*, 25-41, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.

EL QUINZET (El Centro de Recursos Matemáticos) (1996): *The new party city. European week for scientific and technological culture*, Museu de la Ciencia, Barcelona (noviembre).

GÓMEZ, I. M. (1992): *Los juegos de estrategia en el currículo de matemáticas*, Apuntes I.E.P.S., 55, Narcea, Madrid.

GUZMÁN, M. (1991): *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. (1995): *Aventuras matemáticas*, Pirámide, Madrid.

ICME 8 (1996): *8º Congreso Internacional de Educación Matemática*, Sevilla

MARTIN, J. C. (1984): «Una renovación necesaria de la educación Matemática», en *Matemáticas para todos*, 15-20, División de Educación Científica, Técnica y Ambiental, UNESCO.

MASON, J., L. BURTON, y K. STACEY (1992): *Pensar matemáticamente*, Labor, Barcelona.

MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMÉRICA (1996): *Concursos de matemáticas*, Tortuga de Aquiles, 8, Euler Editores, Madrid

MEC (1992): *Secundaria obligatoria. Matemáticas*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

MEC (1992): *Secundaria Obligatoria. Optativas*, Taller de Matemáticas, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

MINISTERE de L'EDUCATION (1993): *Guide Pedagogique, Secondaire Mathèmatique;* Direction Générale du Développement Pédagogique, Québec.

N.C.S. (1992): *General Certificate of Secondary Education*, Mathematics, SEG. London.

N.C.T.M (1991): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, S.A.E.M. Thales, Sevilla.

PÉREZ, M. G. (1990): *Investigación-Acción. Aplicaciones al campo social y educativo*, Dykinson, Madrid.

PÉREZ, M. G. (1994): *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*, Muralla, Madrid.

POINCARÉ, H. (1995): «La creación matemática. Conferencia pronunciada en la Sociedad Psicológica de París», en *Temas I. Revista de Investigación y Ciencia*, 2-4, Prensa Científica, Barcelona.

POLYA, G. (1990): *How to solve it*, Penguin Books, London (or. 1945).

POLYA, G. (1966): *Matemática y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid. (or. 1954)

SCHOENFELD, A. H. (1985): *Matematical problem solving*, Academic Press Inc, Orlando.

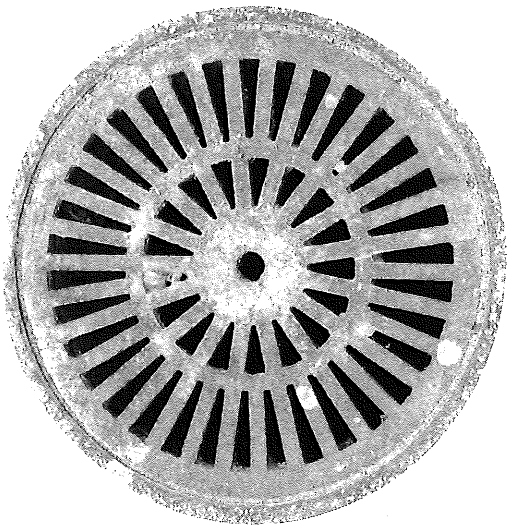
SHELL CENTRE FOR MATHEMATICS EDUCATION (1994): *Problemas con pauta y números*, Universidad del País Vasco.

STEVENSON, F. W. (1992): *Exploratory problems in mathematics*, N.C.T.M, USA.

TALL, D. (1991): *Advanced Mathematics Thinking*, Dordrechet, Kluwer.

UNESCO (1984): *Matemáticas para todos del ICME 5*, Serie de documentos, 20, División de Educación Científica, Técnica y Ambiental, París.

M.ª del Carmen Pinilla
IES Siete Colinas. Ceuta
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»



París (Foto: Luis Balbuena)

SUMA 31
junio 1999, pp. 87-95

Equivalencia y orden: la enseñanza de la comparación de fracciones

Carlos Maza Gómez

ARTÍCULOS

La construcción del número racional se suele hacer a través del establecimiento de fracciones equivalentes. Sin embargo, su categoría matemática de número viene garantizada por la posibilidad de ordenación. Ello supone que una enseñanza completa del concepto de número racional debe conjuntar la equivalencia y orden entre fracciones englobadas en la acción de comparar el tamaño de las mismas. En este artículo se examinan las dificultades de aprendizaje que supone esta tarea general tal como se extrae del análisis de las investigaciones y se establece y discute una secuencia de enseñanza de la comparación de fracciones que aparece dividida en distintas fases para su mejor aplicación en el aula.

LA FRACCIÓN es, aparentemente, una pareja de números enteros y no, como nos afirma la Matemática, un solo número. Históricamente era considerado un número especial, desde luego, y por ello se le denominaba número «roto» o, como después se popularizó, «quebrado». Pero seguía siendo un número y no dos.

¿Cuál es el lugar de la fracción? Para entenderlo es imprescindible considerar la relación de equivalencia que se puede definir sobre dos fracciones. Así, decimos que 2/3 y 4/6 son equivalentes y que 2/3 y 4/7 no lo son. Si partimos de la idea de que la fracción es un par ordenado de números no se puede entender que las dos primeras sean equivalentes. Ni 2 es igual a 4 ni 3 es igual a 6. Si los consideramos como un solo número, el número 2/3 y el número 4/6 no serán equivalentes sino idénticos. La idea que justifica la denominación «equivalentes» reside, como es conocido, en el hecho de que 2/3 y 4/6 representan al mismo número racional aunque sean distintos como pares ordenados. Tal como lo expresa acertadamente Ohlsson (1988, 71):

> La solución de la paradoja de la equivalencia consiste en postular la existencia de un tercer tipo de ente abstracto que es intermedio, de alguna manera, entre el par ordenado y el correspondiente número racional. Estos entes intermedios se parecen a los pares ordenados en que su identidad es determinada por el primer y segundo elementos, pero se parecen a los números en que pueden ser ordenados, sumados y multiplicados. Dos entes intermedios tales son equivalentes cuando tienen diferentes propiedades como pares ordenados pero propiedades numéricas idénticas. Sugiero que un uso común del término «fracción» se refiere a estos entes intermedios.

Esta larga cita pone en evidencia que las fracciones tienen una apariencia (como pares ordenados) y una sola naturaleza (como números) y que dicha naturaleza sólo se manifiesta cuando las fracciones se ordenan y se operan entre sí. Para la comprensión numérica de las fracciones, es decir, para entenderlas en relación con el número racional, su equivalencia es importante pero no lo es menos el considerarlas susceptibles de admitir un orden y una operación entre ellas.

En la enseñanza de fracciones la definición de una relación de equivalencia ha sido, casi en exclusiva, el punto más tratado. Particularmente, desde la introducción de la Matemática Moderna, uno de los objetivos prioritarios era el de construir el número racional a partir de esta relación. Las características estructuralistas del currículum de los años sesenta conllevaban una consideración menor respecto al orden, mientras que las operaciones, cuya importancia era tradicional dentro de la enseñanza de las Matemáticas, seguían presentes. Ahora bien, la Educación Matemática actual defiende, entre otras cosas, que la noción de equivalencia de fracciones no debe ser el único camino para la comprensión numérica de las mismas ya que dicho aspecto debe ser complementado con la concepción de las fracciones como entes matemáticos ordenados.

El aprendizaje de la equivalencia de fracciones

Existen dos fuentes principales de dificultad en el aprendizaje de la equivalencia de fracciones: en primer lugar, el paso de las representaciones manipulativas o icónicas a las simbólicas y, en segundo lugar, las provenientes de las mismas manipulaciones simbólicas. La segunda depende, de alguna forma, de la primera.

En efecto, en el comienzo del aprendizaje y mientras el alumno aún no puede manipular los símbolos por sí mismos, el reconocimiento o la construcción de fracciones equivalentes depende de lo que Post y sus colegas (1985) denominan la «traslación coordinada de las representaciones». Así, el reconocer que las fracciones 3/4 y 6/8 son equivalentes implica el trasladar ambas formas simbólicas a representaciones icónicas (figura 1), comparar éstas últimas y trasladar la comparación y su resultado, de nuevo, al nivel simbólico.

Es por ello que la noción de equivalencia es adquirida con más facilidad cuando se comienza con el plegado de papel o, incluso, con el modelo de área que directamente a través de una forma simbólica, como es el caso de la multiplicación por uno (Bohan, 1971; cit. por Dickson, Brown y Gibson, 1991):

$$\frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{2} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 2} = \frac{6}{8}$$

...la Educación Matemática actual defiende, entre otras cosas, que la noción de equivalencia de fracciones no debe ser el único camino para la comprensión numérica de las mismas ya que dicho aspecto debe ser complementado con la concepción de las fracciones como entes matemáticos ordenados.

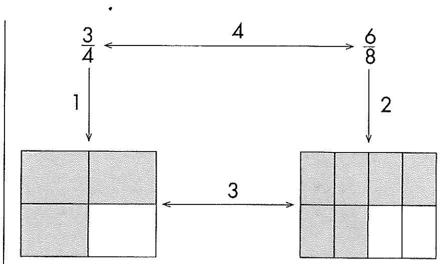


Figura 1

En este primer momento, por tanto, existen dos pasos fundamentales en el aprendizaje de la equivalencia: por un lado, reconocer la equivalencia entre las dos representaciones icónicas y, por otro, trasladar adecuadamente esta comparación a las representaciones simbólicas.

Respecto al primer paso, la cuestión reside en reconocer que ante un todo con dos particiones distintas, la fracción expresada es la misma (parte inferior de la figura 1). El planteamiento de esta cuestión como mero reconocimiento o como una operación a realizar en el todo puede cambiar los resultados del aprendizaje. Además, la presencia de «distractores perceptivos» (como es el caso de referirse a 3/4 y aparecer el diagrama dividido en cuatro u ocho o doce partes) dificultaría la comparación entre las dos representaciones icónicas.

El segundo paso se refiere a trasladar a nivel simbólico la comparación realizada sobre las representaciones manipulativas (plegado de papel) o icónicas (el modelo de área). Esta traslación, desde luego, no es inmediata. El mismo Bohan (1971) encontraba que, tras un aprendizaje efectivo de la equivalencia basado en el plegado de papel, menos de la mitad de los estudiantes de 11 años eran capaces de simplificar fracciones en el nivel simbólico (pasar de 9/12 a 3/4, por ejemplo). Esta falta de inmediatez en la traslación a lo simbólico y, simultáneamente, su enorme importancia en el aprendizaje de la equivalencia de fracciones, hacen de esta traslación un objetivo prioritario de la enseñanza.

Se ha comentado antes que otra fuente de errores y dificultades en el aprendizaje de la equivalencia se encuentra en las mismas manipulaciones simbólicas. A este respecto, traeremos a colación la distinta dificultad de dos tareas aparentemente basadas en reglas semejantes. Así, Dickson y sus colegas (1991) citan diferentes estudios que señalan que:

$$\text{de } \frac{8}{12} \text{ a } \frac{2}{3}$$

es más difícil que

$$\text{de } \frac{2}{3} \text{ a } \frac{8}{12}$$

es decir, que es más fácil construir fracciones equivalentes a partir de una más elemental que al revés, simplificar una fracción dada. ¿A qué es debido este hecho? Para Ettline (1985) la división de numerador y denominador por el mismo número lleva a confusión con la división de fracciones, donde la regla marca «invertir y multiplicar». Sin descartar esta explicación creemos que la distinta dificultad de ambas tareas reside en que el alumno tiene, en general, un deficiente aprendizaje de la regla de multiplicación por uno (reflejada en lineas anteriores). Sin embargo, posee estrategias incompletas o informales para sustituir a esta regla. En cambio, la división de numerador y denominador por el mismo número depende directamente, por inversión, de la regla de multiplicación por uno.

Estas estrategias se revelan con bastante claridad en tareas de encontrar el cuarto número frente a dos fracciones equivalentes. Por ejemplo, Hart (1981) planteaba encontrar la incógnita en

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{?}$$

El porcentaje de aciertos oscilaba entre el 72% a los 12 años y el 79% a los 15 años lo cual podría ser relativamente satisfactorio. Sin embargo, ante el mismo tipo de prueba, Vance (1992) encontraba alumnos que justificaban que 1/2 = 2/4 = 3/6 porque

$$\frac{1+1}{2+2} = \frac{2}{4} \quad y \quad \frac{2+1}{4+2} = \frac{3}{6}$$

sin que vieran la conexión entre lo realizado y la multiplicación. A este respecto (Dickson y otros, 1991:316):

...es más fácil construir fracciones equivalentes a partir de una más elemental que al revés, simplificar una fracción dada.

Es difícil saber si los niños que obtuvieron resultados correctos en estas cuestiones numéricas están demostrando auténtica comprensión de la equivalencia y no limitándose a detectar pautas o regularidades.

Otros investigadores (Hart, 1981; Ohlsson y Bee, 1991, por ejemplo) han detectado resultados erróneos en estas pruebas al basarse en pautas o regularidades basadas en la comparación de los números, en la suma o en la resta de los mismos. Por ejemplo, se puede afirmar que 3/5 = 7/9 porque 3–5 = 7–9. O que 12/15 = 2/5 dado que a los dos términos de la primera fracción les restamos una decena (una generalización incorrecta de la regla de que operando ambos términos del mismo modo la fracción no varía).

¿Qué conclusiones se pueden sacar de todos estos datos?

1. La regla de multiplicar una fracción por uno no es ni elemental ni inmediata ya que el alumno la va construyendo, muy probablemente, a partir de la suma del numerador y el denominador consigo mismos, tal como detectaba Vance (1992).
2. Existen otros criterios (de comparación numérica entre numerador y denominador, de falsa generalización de las reglas, entre otros) que obstaculizan seriamente el aprendizaje de la regla de multiplicación por uno.

¿A qué se debe la presencia de estos obstáculos? La respuesta residiría en la escasa transparencia de los símbolos y reglas utilizados, es decir, en que el estudiante no reconoce el referente de estas fracciones y reglas y, por ello, este referente no actúa a modo de restricción de las acciones que ejecuta. Es por ello necesario que se refuerce la conexión símbolo-referente de modo que se compruebe que, sobre el segundo, las erróneas manipulaciones simbólicas carecen de sentido.

Por ejemplo, ¿es posible que 3/4 sea una fracción equivalente a 7/8? Para el alumno que razone en términos de la diferencia entre numerador y denominador, sí. Pero si se enfrenta a una representación más elemental (figura 2) se puede comprobar con facilidad que la regla es errónea.

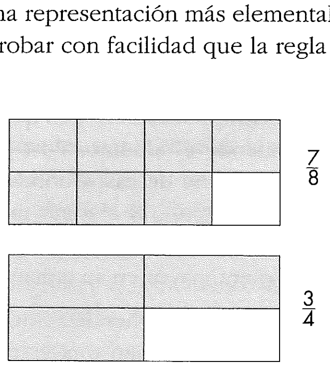


Figura 2

Kieren (1992) recuerda que la idea de equivalencia entre fracciones implica, entre otras cosas, la comprensión de dos tipos de igualdades: la «relativa» (traducible a la regla de la multiplicación por uno) y la «deductiva», que afirma que dos fracciones son equivalentes cuando es igual el producto de «medios» y de «extremos». Esta conocida regla basa su presencia en la forma en que los matemáticos definen la relación de equivalencia entre fracciones pero, en la práctica, se revela como de difícil aprendizaje y desligada de la igualdad anterior (la multiplicación por uno). En efecto, esta última es construida desde la suma de numeradores y denominadores consigo mismos. La igualdad deductiva, en cambio, es vista antes como una regularidad observable que como una regla construida en relación con las acciones sobre el referente.

El aprendizaje del orden de fracciones

Las propiedades numéricas de las fracciones implican, no sólo su posible equivalencia, sino la posibilidad de que sean distintas en cuyo caso son susceptibles de ser ordenadas. El alumno, cuando se enfrenta a la necesidad de efectuar ese orden, tiene una serie de dificultades que provienen de distintas fuentes: la influencia de los números naturales, las características lingüísticas del orden entre fracciones y la constitución de la fracción como pareja de números. Examinemos con detalle estas dificultades.

En primer lugar, el estudiante ya sabe ordenar números pero su experiencia se reduce a los naturales. Por ello, enfrentado a dos fracciones como

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

puede llegar a la conclusión de la segunda fracción es mayor, dado que 4 es mayor que 3. Esta regla es válida cuando se comparan numeradores siendo iguales los denominadores, como en

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{4}$$

pero no lo es cuando se comparan denominadores siendo iguales los numeradores, como en el primer caso planteado.

Existe también un conjunto de dificultades lingüísticas que fomentan la incomprensión entre lo que pide el profesor y lo que entiende el alumno. Post y sus colegas (1985) describen una serie de casos donde, ante la pregunta «Dime cuál es mayor», el alumno manifestaba no entender si se preguntaba por cuál fracción tenía mayor número de partes o era mayor en su tamaño.

Estas dos dificultades (falsa generalización del orden de naturales y la lingüística) tienen una estrecha relación con otro obstáculo básico: la incomprensión de que el orden de las fracciones se determina por la consideración simultánea de sus numeradores y denominadores entre sí. En otras palabras, el hecho de que un mayor número de partes (numerador) puede venir compensado por un menor tamaño de cada parte (denominador) y viceversa.

Las propiedades numéricas de las fracciones implican, no sólo su posible equivalencia, sino la posibilidad de que sean distintas en cuyo caso son susceptibles de ser ordenadas. El alumno, cuando se enfrenta a la necesidad de efectuar ese orden, tiene una serie de dificultades que provienen de distintas fuentes...

Esta incomprensión es el origen, prácticamente, de todos los errores observables, en algunos casos de forma evidente (Post y Cramer 1987, 33):

> Cuando se les pide comparar 3/9 y 4/9, algunos argumentan: «3/9 es mayor que 4/9 porque en los cuartos las piezas son más pequeñas y debemos tomar más para igualar la unidad entera» o, similarmente, «porque en 3/9 las piezas son mayores porque hay pocas».

Cuando el estudiante no dispone de este conocimiento (la relación inversa entre el número de divisiones y el tamaño de la fracción unitaria) repara esta incomprensión con estrategias alternativas. Por ejemplo, ante las fracciones

$$\frac{2}{5}, \frac{6}{9}$$

puede afirmar que son iguales porque si suma cuatro tanto al numerador como al denominador de la primera resulta la segunda. Otra forma de razonar en semejante caso es que la diferencia entre los denominadores y numeradores es igual en ambas fracciones.

Existen también dos estrategias que son válidas pero no aplicables a todos los casos y que revelan, además de un interesante conocimiento informal que el profesor debe potenciar y aprovechar, un rechazo a los métodos escolares formales, sobre todo cuando persisten a lo largo de los años, como luego se verá. Son las siguientes:

1. Presencia de una fracción intermedia. Aplicable cuando una de las fracciones excede y otra es menor que una fracción conocida (preferentemente la unidad pero también 1/2). Por ejemplo,

$$\frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$$

2. Comparación del complementario a la unidad. Esta estrategia sólo es aplicable para fracciones muy próximas a la unidad, como es el caso de

$$\frac{7}{8}, \frac{4}{5}$$

A la primera fracción le falta 1/8 para llegar a la unidad mientras que a la segunda le falta 1/5. Dado que 1/5 es mayor que 1/8, a la segunda fracción le falta más para llegar a la unidad y, por tanto, será menor. Obsérvese la economía mental que supone este procedimiento: una comparación entre parejas de números se ha reducido a una comparación entre dos de ellos (los denominadores), labor que, sin embargo, es conceptualmente más compleja.

Desde el punto de vista matemático es evidente que, en cualquier pareja de fracciones, su ordenación vendrá determinada con facilidad si las transformamos en fracciones equivalentes con el mismo denominador. Así, la ordenación de 7/8 y 4/5 se basaría en reducir a denominador común de manera que la determinación de la mayor se dedujera de la comparación de sus nuevos numeradores:

$$\begin{array}{ccc} \frac{7}{8} & & \frac{4}{5} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \frac{35}{40} & > & \frac{32}{40} \end{array}$$

¿Se aprende con facilidad el mecanismo de cálculo de una fracción intermedia a otras dos? Por ejemplo, si pedimos escribir una fracción situada entre 1/2 y 2/3, la forma de resolver este problema es expresar ambas fracciones con unas equivalentes que presenten un denominador común: 3/6 y 4/6 no serán adecuadas, pero sí 6/12 y 8/12 para determinar a 7/12 como fracción intermedia. Esta pregunta era planteada por Hart (1981) que encontraba, entre jóvenes de 15 años, un 21% de acierto.

...la perspectiva estructuralista de los años sesenta resaltaba la equivalencia como más importante, fundamentalmente porque permite una construcción rigurosa del conjunto de números racionales. La necesidad de enseñar la ordenación de fracciones se ha ido abriendo paso con cierta dificultad.

¿Dónde situar la equivalencia?

El punto de vista más tradicional indica que la enseñanza sobre la equivalencia de fracciones debe preceder a la de su orden aunque éste, en general, es apenas abordado. Ya hemos comentado que la perspectiva estructuralista de los años sesenta resaltaba la equivalencia como más importante, fundamentalmente porque permite una construcción rigurosa del conjunto de números racionales. La necesidad de enseñar la ordenación de fracciones se ha ido abriendo paso con cierta dificultad.

Hay que tener en cuenta que el orden de fracciones sólo sirve para destacar las propiedades numéricas de las fracciones. La equivalencia, en cambio, es una herramienta imprescindible para construir otros conocimientos fraccionarios: La propia ordenación, la simplificación de fracciones, la suma y la resta. Esta utilidad de la equivalencia ha llevado a que se valore como un conocimiento previo que el alumno tiene que tener antes de abordar el resto de conocimientos. Sin embargo, existen otras opiniones al respecto.

Ellerbruch y Payne (1978) defendían que la equivalencia se integrara dentro de la enseñanza de la suma de fracciones. La creencia que fundamenta esta postura podría expresarse del siguiente modo: si la equivalencia de fracciones sirve para resolver con métodos generales la suma de fracciones, ¿por qué aislar un conocimiento del otro? Abordemos la equivalencia cuando sea necesaria dentro de una secuencia de enseñanza de la suma.

Este enfoque tiene sus limitaciones y condiciona de manera decisiva el tipo de equivalencias que se tratan. Por ejemplo, la simplificación de fracciones, más difícil que la generación de fracciones equivalentes a través de la multiplicación por uno, es simplemente descartada (Ellerbruch y Payne, 1978:140):

> No se incluye en este punto la simplificación de fracciones a términos más bajos por la dificultad que tienen los estudiantes con la reducción y la confusión que resulta de tratar, en el caso general de la suma, dos temas difíciles al mismo tiempo.

Desde otro punto de vista, sin embargo, se llegaría a la conclusión contraria: es mejor enseñar la simplificación como procedimiento inverso y, por tanto, estrechamente relacionado, con la multiplicación de una fracción por uno.

Partiendo de la misma base que estos autores tomaremos en este artículo, no obstante, un camino diferente. Coincidimos en que la equivalencia no debe ser enseñada aislada de otros conocimientos sobre fracciones sino en estrecha relación y, aún más, incluida en dichos conocimientos. Sin embargo, relacionar la equivalencia con la suma, aunque es una opción válida, no parece la mejor habida cuenta de los resultados observados en apartados anteriores.

En efecto, se puede afirmar que la ordenación de fracciones es un campo lleno de procedimientos intuitivos, incompletos, informales y de falsas generalizaciones. No existe un conocimiento conceptual que garantice la unificación de métodos como los basados en las fracciones equivalentes. Al mismo tiempo, la consideración numérica de las fracciones es un aprendizaje con notables debilidades, mediatizado por numerosos obstáculos. El estudiante tiene serias dificultades para entender la relación entre fracciones y números racionales, lo que conlleva una limitación de todo su aprendizaje sobre fracciones.

Es por ello que entendemos necesario incluir la noción de equivalencia dentro de la del orden de fracciones. La idea no es nueva, tal como comenta Giménez (1991), pero nunca ha pasado del estado de idea sin concretar. Aquí nos proponemos llegar a una propuesta didáctica al respecto. Será importante, a partir de esta decisión, no limitar el conocimiento de la equivalencia por su mayor o menor dependencia de la ordenación, como pasaba en el caso de la suma antes tratado. Por otro lado, este planteamiento tiene una ventaja. La interrelación equivalencia/orden permite entender esta fase del aprendizaje sobre fracciones como la ejecución de una acción general: la comparación del tamaño de dos fracciones. En unos casos el alumno encontrará que son distintas y habrá de determinar cuál es menor y mayor y, en otros casos, las dos fracciones serán del mismo tamaño y las llamaremos equivalentes.

Secuencia de tareas escolares

Con todo lo dicho se hace necesario establecer una secuencia de tareas que, puestas en práctica en el aula, conduzcan a un conocimiento integrado de la equivalencia y el orden de fracciones y, en suma, a una comprensión del carácter numérico de las fracciones. Las tres primeras corresponderán preferentemente al tercer ciclo de Educación Primaria mientras que las restantes tendrían su mejor ubicación en el primer ciclo de la ESO.

…se hace necesario establecer una secuencia de tareas que, puestas en práctica en el aula, conduzcan a un conocimiento integrado de la equivalencia y el orden de fracciones y, en suma, a una comprensión del carácter numérico de las fracciones.

Ordenar fracciones de igual denominador

1. Comparar fracciones obtenidas por iteración de una fracción unitaria.
2. Comparar fracciones con igual denominador y numerador cualquiera.
3. Comparar el tamaño de dos números mixtos cuya parte fraccionaria tenga el mismo denominador.

Evidentemente, esta labor es la más sencilla y se inicia con la construcción de distintas fracciones de igual denominador a partir de una fracción unitaria. Esta fase únicamente complementa este último aprendizaje con la comparación de distintas fracciones de igual denominador. Sin embargo, surgen distintos casos particulares de interés: Por ejemplo, la comparación entre dos fracciones complementarias respecto de la unidad o la de dos fracciones impropias expresadas como números mixtos. La consideración de la fracción unitaria debe ser el mecanismo adecuado para resolver los problemas planteados.

Ordenar fracciones con igual numerador

1. Comprender la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de cada parte en el reparto de la unidad.
2. Comparar fracciones no unitarias del mismo numerador.
3. Ordenar tres fracciones simultáneamente con igual numerador.

La ordenación de dos fracciones cualesquiera requiere tener en cuenta la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de las mismas dentro de la división de la unidad. Esta consideración simultánea de dos cantidades variables es difícil, sobre todo para un alumno acostumbrado a ordenar números naturales. Por esta razón conviene separar esta variación: En el punto anterior se ha hecho variar el numerador (observando el tamaño diferente de cada fracción) y en este punto se aborda la labor inversa de variación del denominador. Se debe pasar así, paulatinamente, de una comparación cualitativa del tamaño de las fracciones a otra cuantitativa.

En este caso las fracciones unitarias volverán a ser de gran importancia para fundamentar el aprendizaje. En efecto, la primera labor consistirá en comparar el tamaño relativo de las distintas fracciones unitarias respecto de la misma unidad. Este caso es aquél donde el numerador es constantemente uno. La resolución de los casos restantes (cuando el numerador es distinto de uno) se apoyará en el anterior.

El material fundamental que se debe utilizar será el diagrama circular. El rectangular, presente en el aprendizaje del concepto de fracción, es aquí de una limitada aplicación por lo complicado que resulta comparar sus distintas fracciones unitarias. Así, 1/4 y 1/3 de una hoja de papel son partes que varían en dos dimensiones mientras que estas mismas fracciones, en un diagrama circular, varían en una (su ángulo central). Cuando se rebasen las fracciones unitarias esta diferenciación perderá importancia, como se verá en los ejemplos que planteemos oportunamente.

Distintas fracciones como expresión del mismo estado o acción

1. Comprobar que varias fracciones expresan la misma relación parte-todo.
2. Comprobar que distintas fracciones expresan la misma acción de reparto o medida.
3. Expresar en la línea numérica la equivalencia de fracciones.

Las fracciones han debido servir, inicialmente, para describir una relación entre un todo y una de sus partes o bien, posteriormente, para describir una acción (repartir, medir o comparar) dentro de otras interpretaciones del concepto de fracción. El alumno ha de comprobar que esta labor puede realizarse con distintas fracciones que expresan lo mismo o actúan igual.

Este primer contacto con las fracciones equivalentes empezará con la utilización de las primeras formas de representación: manipulativas (con el doblado de una hoja de papel, por ejemplo) e icónicas (como en la división de un diagrama o en las distintas expresiones de una medida sobre la línea numérica). La conclusión, alcanzando ya un nivel plenamente simbólico, consistirá en la aplicación de la noción de operador considerando distintas fracciones que mostrarán el mismo funcionamiento al llegar a idéntico resultado final.

Este primer contacto con las fracciones equivalentes empezará con la utilización de las primeras formas de representación: manipulativas (con el doblado de una hoja de papel, por ejemplo) e icónicas (como en la división de un diagrama o en las distintas expresiones de una medida sobre la línea numérica).

Construcción de fracciones equivalentes

1. Manipular simbólicamente una fracción para obtener fracciones equivalentes.
2. Describir la regla de transformación de una fracción en otras mayores y equivalentes.

El primer contacto con las fracciones equivalentes es de naturaleza inductiva y reducida a dos formas de representación. El punto más importante y delicado en este aprendizaje consistiría en trasladar las descripciones anteriores a una forma simbólica. Por ello, este punto no es independiente del anterior sino que está totalmente entrelazado. Cuando el estudiante doble de formas diferentes un papel deberá expresar de forma simbólica los resultados de sus acciones. Cuando mida una longitud y exprese los resultados en una linea numérica deberá describir simbólicamente lo realizado.

La cuestión más importante aquí es que el estudiante debe pasar, ahora, a la manipulación simbólica y al descubrimiento de las reglas que la rigen. Así, deberemos mostrar dos fracciones como

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{6}$$

¿Cómo se puede llegar de una a la otra a través del doblado de un papel? ¿Cómo llegar de una a la otra por medio de los símbolos numéricos? Dada una fracción cualquiera, como 1/4, ¿cómo construir a partir de ella otras fracciones que expresen lo mismo? En este punto, se debe favorecer una evolución de las estrategias infantiles desde lo simplemente aditivo:

$$\frac{2}{3} = \frac{2+2}{3+3}$$

hasta lo multiplicativo:

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2}$$

Ordenar fracciones con denominadores múltiplos

1. Ordenar fracciones que presenten denominadores múltiplos.
2. Aplicar el método de construcción de fracciones equivalentes.

Una inmediata aplicación del punto anterior la constituye la ordenación de fracciones de manera que un denominador sea múltiplo del otro, como en

$$\frac{3}{5}, \frac{7}{10}$$

El objetivo, como es fácil de apreciar, es que el conocimiento adquirido antes sobre construcción de fracciones equivalentes sea aplicado inmediatamente a estas tareas de ordenación. Este punto encierra una decisión que es conveniente mencionar. Ellerbruch y Payne (1978:145) afirman que

> Los problemas no deben ser separados en tipos especiales, tales como los de denominadores múltiplos simples o primos relativos u otros casos especiales. Si ciertos tipos de fracciones son tratados como casos especiales, los alumnos tenderán a desarrollar algoritmos especiales para cada caso.

No creemos que esta recomendación deba entenderse en el sentido de presentar conjuntamente todos los casos indiferenciados, como por ejemplo

$$\frac{3}{5}, \frac{11}{15}; \frac{3}{4}, \frac{5}{6}; \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$$

ante el temor de que se adopten todo ese tipo de estrategias intuitivas o incompletas que examinamos anteriormente. El consejo de estos autores debe entenderse en el sentido de utilizar un mismo método, crecientemente generalizable, en todos los casos a medida que se van abordando.

En este punto comenzaríamos a aplicar el método consistente en el cálculo de fracciones equivalentes: de una fracción para llegar a la otra (si los denominadores son múltiplos) o de los dos simultáneamente hasta coincidir en un denominador común (si son primos).

Se alternarían las tareas de reconocimiento con las de construcción teniendo en cuenta las limitaciones que el tipo de fracciones imponen. Ello es particularmente aplicable a la ordenación de fracciones construidas por los propios alumnos, puesto que éstas, de momento, no pueden ser cualesquiera. La graduación aquí defendida, que tiene por objetivo desarrollar estrategias de equivalencia y orden que se apoyen en las anteriores, tiene el inconveniente de que la enseñanza debe limitar el conjunto de fracciones sobre el que se actúa de manera algo directiva.

Ordenar a través de la simplificación de fracciones

1. Construir fracciones equivalentes a través de la división por el mismo número del numerador y denominador.
2. Descubrir el carácter inverso de este método respecto al de la multiplicación por uno.
3. Formular la regla de simplificación de fracciones.
4. Utilizar la simplificación de fracciones en su ordenación.

Los problemas no deben ser separados en tipos especiales, tales como los de denominadores múltiplos simples o primos relativos u otros casos especiales. Si ciertos tipos de fracciones son tratados como casos especiales, los alumnos tenderán a desarrollar algoritmos especiales para cada caso.

La generación de fracciones equivalentes por la multiplicación por uno tiene su acción inversa en la simplificación, obtenida por división de numerador y denominador entre el mismo número. Ahora bien, sobre esta tarea se deben hacer dos observaciones. La primera es que, por dicho carácter inverso, la simplificación no debe enseñarse aislada del método de multiplicación por uno sino en relación con él. Por ello la hemos colocado inmediatamente después de su aplicación de ordenar fracciones con denominadores múltiplos. Lo segundo que hay que destacar es que esta aplicación puede ser, precisamente, el mejor nexo de unión entre ambos métodos de construcción de fracciones equivalentes.

En efecto, si la ordenación ha de hacerse entre las dos siguientes fracciones:

$$\frac{4}{5}, \frac{36}{40}$$

antes que partir de 4/5 para llegar a otra fracción de denominador 40, quizá también sea posible (y más sencillo para realizar la comparación final) reducir el tamaño de 36/40 encontrando su fracción original (la canónica). Así puede llegarse a que

Dividiendo por 2 se obtiene
18/20
Dividiendo nuevamente por 2 se llega a
9/20

siendo relativamente fácil la comparación entre 4/5 y 9/10, sea por la construcción de una fracción equivalente a la primera (8/10) o a través de una estrategia informal como el examen de la fracción complementaria de la unidad. Este método, junto al de la utilización de una fracción intermedia de referencia, deben ser potenciados por la flexibilidad en la ordenación que suponen.

No obstante, será necesario un trabajo previo de construcción de fracciones equivalentes a partir de una cuyo numerador y denominador sean grandes. Es decir, realizar una tarea de simplificación al objeto de descubrir y formular la regla característica.

Ordenar fracciones con denominadores primos

1. Aplicar sistemáticamente el método de multiplicación por uno para la ordenación de fracciones cualesquiera.

El procedimiento a aplicar será el mismo: la generación simultánea de fracciones equivalentes hasta llegar a una coincidencia de denominadores. Este método tiene la ventaja de preparar en el alumno la noción de mínimo común múltiplo frente a la regla tan conocida de encontrar el denominador común multiplicando simplemente los denominadores. Esto es adecuado para 5 y 7, por ejemplo, pero sobreabundante en el caso de 4 y 6. Esta regla supone tal simplificación mental que no es difícil observar a los alumnos aplicándola incluso a los denominadores 4 y 8, por ejemplo.

El procedimiento que aquí se defiende (generación simultánea de fracciones equivalentes), tal como lo proponen Ellerbruch y Payne (1978) no favorece tales simplificaciones aunque, desde luego, tampoco la impiden.

Obsérvese que, en todo caso, nos vamos a mover, como en puntos anteriores, en un terreno estrictamente simbólico. Ello no obsta para que, eventualmente, se utilicen diagramas de algún tipo. Esta recomendación es particularmente aplicable a los casos en que el imperio de las reglas memorizadas haga ver en el profesor un olvido por el alumno de los referentes.

...las tareas anteriores se han orientado siempre hacia la ordenación de dos fracciones que vienen dadas por el profesor. La construcción de fracciones por parte del alumno será una labor complementaria de la anterior y de una mayor creatividad.

Carlos Maza
Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Sevilla.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Calculo de una fracción intermedia a otras dos

1. Dadas dos fracciones no equivalentes, construir una fracción menor que una y mayor que la otra.
2. Aplicar lo descubierto a la ampliación de la línea numérica.

No es una tarea que suela realizarse habitualmente pero creemos que es un digno colofón a las actividades de ordenación. Tiene, al tiempo, la ventaja de utilizar fracciones equivalentes de manera sistemática y el favorecer la representación de las fracciones sobre la línea numérica percibiendo la densidad de los números racionales. Démonos cuenta, además, de que las tareas anteriores se han orientado siempre hacia la ordenación de dos fracciones que vienen dadas por el profesor. La construcción de fracciones por parte del alumno será una labor complementaria de la anterior y de una mayor creatividad.

Bibliografía

DICKSON, L., M. BROWN y O. GIBSON (1991): *El aprendizaje de las Matemáticas*, Labor, Barcelona.

ELLERBRUCH, L. y J. N. PAYNE (1978): «A teaching sequence from initial fraction concepts through the addition of unlike fractions», en M. N. SUYDAM y R. E. REY (Eds): *Developing computational skills*, N.C.T.M. Reston, Virginia.

ETTLINE, J. F. (1985): «A uniform approach to fractions». *Arithmetic Teacher*, 32, 7, 42-43.

GIMÉNEZ, J. (1991): «Realidad y material para un conocimiento intuitivo del orden en las fracciones», *Epsilon*, 19, 25-34.

HART, K. (1981): *Children's understanding of Mathematics: 11-16.* J. Murray, Londres.

KIEREN, T. E. (1992): «Rational and fractional numbers as mathematical and personal knowledge: Implications for curriculum and instruction», en G. LEINHARDT, R. PUTNAM y R. A. HATTRUP (Eds): *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*, L.E.A. Hillsdale, New Jersey.

OHLSSON, S. (1988): «Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts», en J. HIEBERT y M. BEHR (Eds): *Number concepts and operations in the middle grades*, 2. L.E.A. Hillsdale, New Jersey.

OHLSSON, S. y N. BEE (1991): «Intra-individual differences in fractions arithmetic», *Proceedings Fifteenth PME Conference*, III, Assisi, Italia.

POST, T. R. y otros (1985): «Order and equivalence of rational numbers: A cognitive analysis», *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 1, 18-36.

POST, T. R. y K. CRAMER (1987): «Children's strategies in ordering rational numbers», *Arithmetic Teacher*, 35, 2, 33-35.

VANCE, J. H. (1992): «Understanding equivalence: A number by any other name». *School, Science and Mathematics.* 23, 231-246.

9as

J
A
E
M

LUGO

SUMA 31
junio 1999, pp. 97-104

Aprovechamiento didáctico de la actividad «Fotografía y matemáticas»

Antonio Fernández-Aliseda Redondo
José Muñoz Santonja
Águeda Porras Ruiz

IDEAS Y RECURSOS

En los últimos diez años se han celebrado en muchos lugares concursos y exposiciones sobre fotografías acompañadas por un título o lema matemático. Presentamos nuestra experiencia en Sevilla, donde celebramos este año el VIII Concurso Provincial. Queremos resaltar el aprovechamiento de esta actividad a través de una exposición itinerante, acompañada de un cuaderno de trabajo (del que presentamos un ejemplo), además, este año hemos incluido la nueva modalidad de «Imágenes Matemáticas», que hemos creado para que puedan participar los que se encuentren con algún tipo de dificultad en el terreno fotográfico.

CUANDO DIEUDONNÉ lanzó el grito de «Abajo Euclides» y el grupo Bourbaki comenzó a editar libros de Geometría sin prácticamente ningún gráfico, pudo parecer que la Matemática había alcanzado tal grado de abstracción, que ya no necesitaba de ningún dibujo, pudiéndose reducir a una serie de fórmulas de claras ascendencias cabalísticas, sólo entendibles por un selecto grupo de iniciados. Este nivel de abstracción teórica también llegó a impregnar los niveles no universitarios, como se pudo ver en la enseñanza de las matemáticas a partir de la reforma del año 1970.

Casi desde un primer momento, los movimientos de renovación, con los grupos Cero a la cabeza, se dieron cuenta de que la enseñanza de la matemática no podía restringirse únicamente al aula sino que debía abrirse más al entorno que rodeaba a la escuela. Desde entonces, algo se ha avanzado en esa línea, pero no tanto, cuando ha sido necesario crear una asignatura denominada «Matemática de la Vida Cotidiana» como optativa en Andalucía en 2.° de ESO. Han surgido muchas experiencias en estos años que desarrollan una amplia labor de divulgación de las matemáticas a través de multitud de medios: radio, televisión, prensa, concursos, olimpiadas, etc. En este artículo nos vamos a referir, en particular, a la actividad titulada «Fotografía y Matemáticas» que acaba de cumplir un decenio de vida.

Orígenes

En el curso 1987-88, el profesor Evaristo González González organizó un primer Concurso de Matemáticas y Fotografía en su centro, el C.P. Sierra Nevada de Granada (González, 1989).

El objetivo de esta actividad es la divulgación y popularización de las Matemáticas, entendiendo la popularización como cualquier acción que dé a conocer o haga más atractivas las matemáticas, dado su alto grado de impopularidad, dificultad, incomprensión y tedio para algunos, así como la pobre visión social de las misma.

La idea central de esta actividad consiste en que los alumnos presenten fotografías realizadas por ellos mismos, acompañadas de un lema relacionado con la imagen fotográfica y con contenido matemático.

El profesor González ha divulgado su experiencia con entusiasmo, siendo siempre muy bien acogida por parte de profesores y alumnos. Por eso, desde esa fecha se han multiplicado los concursos de este tipo.

En casi todos los lugares en los que se ha realizado, se han elaborado exposiciones, con las fotografías presentadas, que han tenido mucho éxito de crítica y público (como se dice en los grandes eventos culturales).

Quizás el mejor exponente de esta actividad fue la muestra que, con motivo del ICME-8, celebrado en 1996 en Sevilla, se expuso en la Antigua Fábrica de Tabacos (actual Universidad) de esa ciudad.

La experiencia de Sevilla

Como hemos comentado, esta actividad fue muy bien acogida por los profesores que vieron el gran potencial educativo que presentaba. Por ello, la Sociedad Thales alentó y promovió desde el principio que esa experiencia se reprodujera en otras provincias andaluzas, nombrando coordinadores provinciales de esos concurso, allí donde comenzaron a organizarse.

En Sevilla, y bajo la coordinación de María Jesús Serván, se convocó el primer concurso provincial en 1991 y a partir de él se ha seguido convocando sin interrupción hasta hoy día. En lo que concierne al concurso en sí existen distintos niveles de participación, desde Primaria hasta un apartado *Libre* para cualquier persona que quiera presentar fotografías.

Cuando en los primeros concursos se montó la exposición con las fotografías presentadas, se vio claro que, aunque estuviesen expuestas durante varias semanas en distintas salas culturales, era un derroche tener todo ese potencial didáctico sin aprovechar, pues la experiencia estaba pensada para los alumnos y, sin embargo, llegaba a un número muy reducido. Por ello, en Sevilla, se decidió hacer una exposición que pudiese trasladarse a los centros educativos, donde el número de alumnos que se acercasen a la actividad siempre sería mucho mayor.

Para ello se montaron las fotografías sobre paneles de cartón pluma blanco y con un acetato transparente de protección. Estos paneles (aproximadamente de 0,6 por 1 m) son fáciles de transportar y montar.

...entendiendo la popularización como cualquier acción que dé a conocer o haga más atractivas las matemáticas, dado su alto grado de impopularidad, dificultad, incomprensión y tedio para algunos, así como la pobre visión social de las misma.

Gracias a esto la exposición se puede enviar a cualquier centro que la solicite, que puede tenerla expuesta durante una semana. Para ello la coordinadora de la actividad pone en contacto a los profesores que tienen las fotografías y quienes las van a recibir la semana siguiente y ellos se ponen de acuerdo para traspasarse la exposición.

La acogida que tiene la exposición suele ser inmejorable, como lo demuestra el hecho de que el centro que la recibe un año, también la solicita al año siguiente. En este momento es tal la avalancha de peticiones, que aparte del último montaje fotográfico, también está circulando la exposición del año anterior. Hay exposiciones que han pasado por más de dos docenas de centros, tanto de Primaria como de Secundaria.

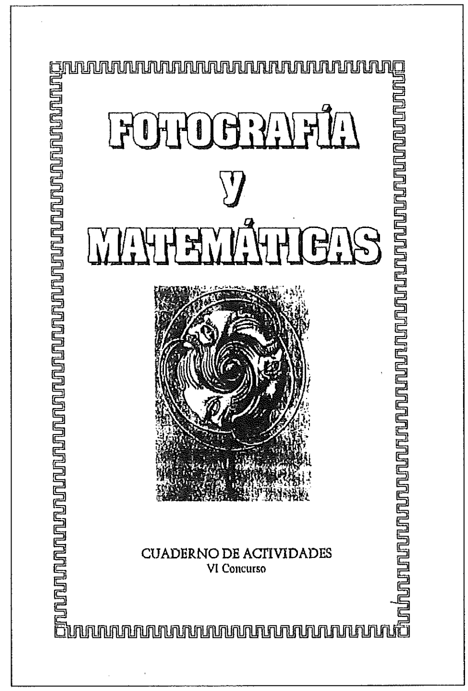
La facilidad de transporte y manejo de la exposición permite trasladarla a cualquier lugar sin mucho esfuerzo, por ello, aparte de la provincia de Sevilla ha estado expuesta en centros de la provincia de Cádiz o en las jornadas, tanto nacionales como comarcales del Algarve, realizadas por los compañeros portugueses. También se ha expuesto en la Delegación de Educación o en el CEP de Sevilla, donde han podido observar la exposición una gran cantidad de compañeros de otras materias.

La exposición también promueve el que esa actividad se reproduzca en los centros. Así, en algunos lugares que visita, se realizan posteriormente, y a nivel local, concursos de fotografías con caracter matemático, de los cuales se suele surtir muchas veces de fotos el concurso provincial.

El cuaderno de trabajo

En algunos centros, cuando se han tenido expuestas las fotografías correspondientes al concurso, se han elaborado cuadernillos de actividades para visitar de una manera más activa la exposición. Nosotros, a nivel personal, también elaborábamos algunas actividades para realizar con las exposiciones que nos llevábamos a nuestros centros. Pero a partir del curso 1994/95, la entonces coordinadora Águeda Porras nos invitó a participar en esta experiencia, consistente en la elaboración de un cuaderno de actividades que se pudiese mandar previamente a los profesores que solicitaran la exposición y que permitiese sacar un mayor rendimiento de la misma.

Al elaborar dicho cuadernillo nos planteamos obtener una herramienta de trabajo que junto con la exposición proporcionase al profesor una manera distinta de enseñar y al alumno de aprender las matemáticas. Tras tres años de trabajar esta idea y con los comentarios recogidos de otros compañeros, hemos estructurado el cuaderno de la siguiente manera.



Al elaborar dicho cuadernillo nos planteamos obtener una herramienta de trabajo que junto con la exposición proporcionase al profesor una manera distinta de enseñar y al alumno de aprender las matemáticas.

Esquema del cuaderno

Introducción

En esta primera parte se explica la exposición que se va a visitar y se exponen los objetivos que queremos conseguir con ella.

Actividades generales

En este apartado se hacen preguntas sobre fotos y lemas en general, sin referirse a ninguna fotografía en particular, con lo que son preguntas que pueden hacerse sobre cualquier exposición y prácticamente no varían de un año para otro, y cuyo objetivo es que los alumnos vayan conociendo las fotos expuestas en la misma y entendiendo la finalidad de la exposición.

Actividades específicas

Se entra ya de lleno en la exposición y se hacen preguntas concretas. Normalmente solemos agrupar esas cuestiones por bloques temáticos: «Números», «Álgebra», «Funciones y Representación Gráfica», «Geometría» y «Estadística y Azar». Como es lógico el que aparezcan estos bloques o su extensión depende de las fotografías que compongan ese año la exposición. Por eso, en el ejemplo que vamos a desarrollar posteriormente, este apartado aparece más reducido que en el cuaderno original pues lo hemos restringido a aspectos generales o relacionados con aquellas fotografías que acompañan este artículo.

Actividades varias

En el último bloque solemos incluir aquellos aspectos que, cuando aparecen, superan un poco el nivel de la enseñanza obligatoria como cónicas, límites, combinatoria, etc.

Cuestionario

Para cerrar se plantean unas preguntas sobre la actitud de los alumnos ante la exposición y su influencia sobre su opinión con respecto a las matemáticas.

Pensamos que el diseño y la maquetación de todas estas actividades es un aspecto importante que hay que cuidar a la hora de presentárselas a los alumnos, para fomentar una actitud positiva ante la experiencia y las matemáticas en general. Por ello, el cuaderno de trabajo se suele completar con una frase final sobre matemáticas o de algún matemático que sirva de reflexión. También solemos incluir imágenes artísticas de contenido matemático, independientes de la exposición. Así en el último cuaderno elaborado hemos incluido obras de Guillermo Pérez Villalta, Elena Alsina, José María Iglesias, M.C. Escher y Eusebio Sempere; obras que son fáciles de localizar en los suplementos culturales que suelen acompañar los fines de semana a los periódicos de mayor tirada.

A continuación presentamos, convenientemente adaptado según se ha comentado antes, el cuaderno correspondiente al VI Concurso Provincial, cuya exposición se montó en 1997.

Ejemplo de cuaderno

Introducción

Los que habéis visto exposiciones de este concurso en años anteriores, ya estáis familiarizados con el tema, pero quizá los que vean por primera vez la exposición, se asombren ante la peregrina idea de unir matemáticas y fotografía. «¿Qué tienen que ver?», se preguntarán. Y es que, generalmente, no se nos ocurre pensar que las matemáticas puedan salir de los libros, aburridos e incomprensibles muchas veces, y nos acompañen constantemente en nuestra vida cotidiana.

Pues aunque os parezca increíble, así es. Estamos rodeados de matemáticas por todas partes, y no sólo eso, las necesitamos casi para todo en esta sociedad nuestra. Si te fijas un poco en las cosas que te rodean, seguro que encuentras referencias numéricas, geométricas, gráficas, etc., que podrás fotografiar. Si a la foto le añades un lema matemático que haga referencia a lo fotografiado y que incite a la reflexión, tu foto probablemente estará en la Exposición del año próximo. Si lo miras desde este punto de vista, verás como las Matemáticas son divertidas e interesantes, y se pueden aprender de muchas formas. ¿Por qué no con fotografías?

Para ayudaros a entender mejor las fotos y que podáis trabajar en clase, hemos elaborado este cuaderno de actividades, deseando que le saquéis el mayor rendimiento y que disfrutéis con las Matemáticas. De verdad que se puede hacer.

Actividades

En estos días están expuestas en tu centro las fotos que componen la exposición sobre el VI Concurso Provincial de «Fotografía y Matemáticas» organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Cada foto está acompañada de un lema compuesto por una frase donde aparece algún concepto matemático, al mismo tiempo que hace referencia a lo reflejado en la fotografía. En esta ocasión, las fotografías del concurso se complementan con fotos sacadas de periódicos y revistas, para que veas que aunque no tengas conocimientos fotográficos, tu también puedes relacionar, si quieres, fotografías y matemáticas.

Ahora vas a visitar la exposición y después tendrás que contestar a las siguientes cuestiones, que hemos agrupado en distintos bloques temáticos.

Generales

- Elige las cuatro fotografías que más te gusten. Escribe sus lemas, invéntate otros y explica su relación con la imagen de la foto.
- Escoge las dos fotografías que menos te gustan y explica por qué.
- ¿Hay algún lema que consideres erróneo?, es decir, ¿hay alguno que no tenga ninguna relación con lo que aparece en la foto o que esté mal en comparación con la fotografía? En caso afirmativo, indica a cuál te refieres y por qué es incorrecto.
- En la exposición hay dos imágenes que no tienen lema. Una de ellas es la fotografía que aparece en el panel presentación, la otra está incluida en uno de los paneles de Imágenes Matemáticas, en particular, la que pide que te inventes un lema. En ambos casos escribe uno que creas adecuado para ellos.

Números

- Entre las fotografías y los lemas aparecen números de muchos tipos. Intenta encontrarlos todos. ¿Cuál es el número más grande que has podido encontrar?
- Entre las Imágenes matemáticas hay una donde aparece un decimal. ¿Cuál es?, ¿en qué foto aparece?, ¿de qué tipo es? Calcula su fracción generatriz.
- En la foto *¿Quién sabe donde está la raiz cuadrada?* es posible descubrir, entre las raíces del árbol, escondida la «r deformada» que es el símbolo clásico de la raíz cua-

Cada foto está acompañada de un lema compuesto por una frase donde aparece algún concepto matemático, al mismo tiempo que hace referenci a lo reflejado en la fotografía. En esta ocasión, las fotografías del concurso se complementan con fotos sacadas de periódicos y revistas...

drada. Intenta encontrarla y haz un esquema de dónde está situada.

- En la exposición aparecen varias veces referencias al número π, que es un número real, ¿es también racional? Razona la respuesta. ¿Cuánto vale aproximadamente? Da la solución, redondeando, con dos, tres, cuatro y cinco cifras decimales.

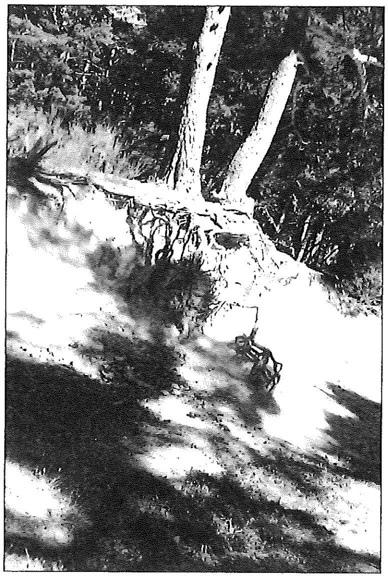
- Otra foto tiene el título de *Números triangulares*. Estos números fueron usados por un matemático que te sonará mucho, Pitágoras. Estaban formados, como quizás sepas, por puntos que formaban triángulos. Sabrías decir qué números naturales correspondían al primero, segundo, tercero, cuarto y quinto (el de la fotografía) números triangulares. ¿Qué características tenían estos números?, ¿cómo se obtiene de un número el siguiente?

Geometría

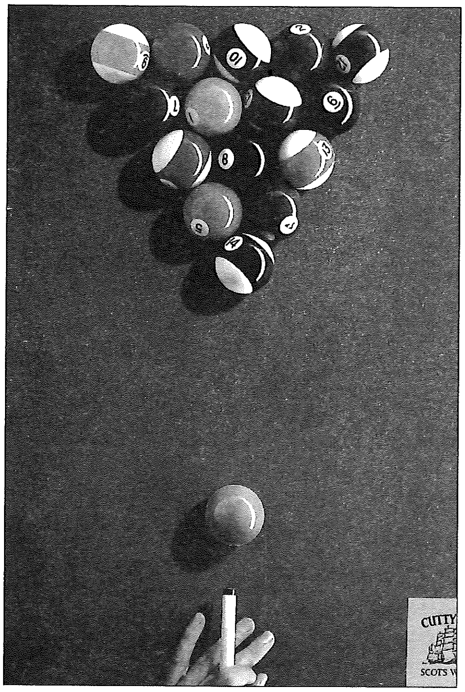
- Vamos a comenzar como siempre por la figura más simple de todas: el triángulo. Hay una fotografía de título *Altura*. ¿Cómo se define la altura de un triángulo?, ¿de qué tipo es el que aparece en la fotografía? Toda altura divide a un triángulo en otros dos, ¿cómo son esos triángulos en general? En esta fotografía, ¿qué característica tienen los triángulos en que se divide por la altura?

- En las demás fotografías puedes encontrar más polígonos de diversos lados. Haz una lista de polígonos según el número de lados, junto con el lema de la fotografía donde aparecen. ¿Cuál es el de mayor número de lados que has encontrado? ¿Cuáles son regulares?

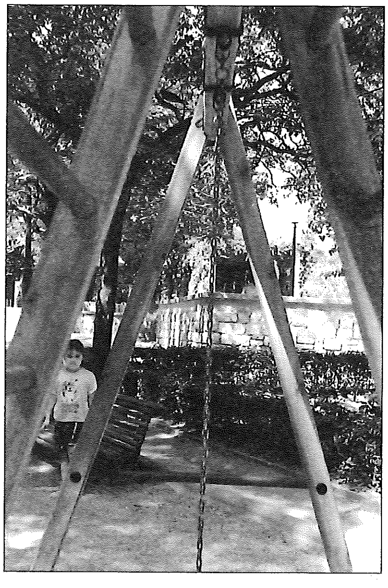
- Uno de los aspectos que se repite con mucha frecuencia en las imágenes es el de tangencia. En particular existe una foto denominada *Tangente y secante*. Define cada uno de esos conceptos. La tangencia también puede darse entre circunferencias. Escribe todos los



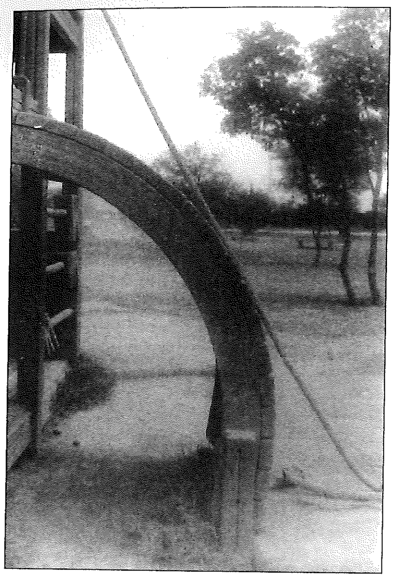
¿Quén sabe dónde está la raíz cuadrada?



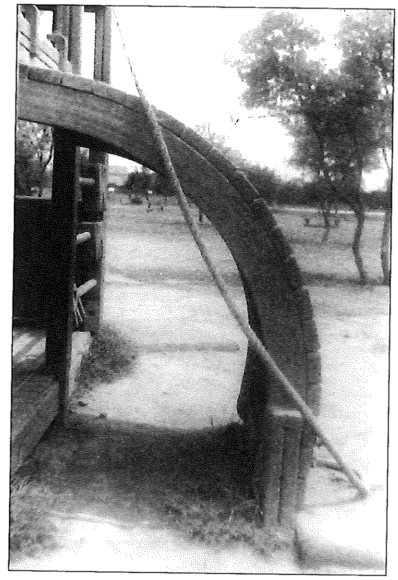
Números triangulares



Altura



Tangente



Sécante

lemas de fotografías en donde aparezca algún tipo de tangencia.

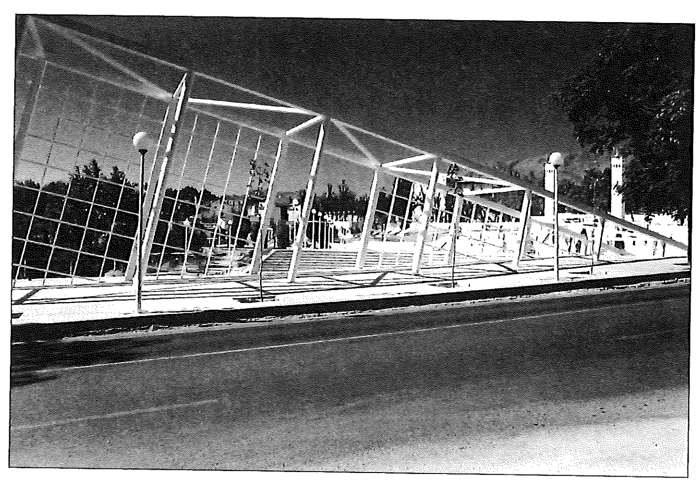
- Entre las fotografías se encuentran varias, cuyos lemas hablan de ángulos. Una de ellas recibe el lema de *Angulos complementarios*, ¿sabes definir dichos ángulos? ¿Que són ángulos suplementarios?, ¿puedes encontrar algunos en las fotografías? ¿Qué características tienen los ángulos opuestos por el vértice?
- La Sociedad de Profesores que organiza esta exposición lleva el nombre de un gran matemático: Thales. ¿Qué conoces de él?, ¿sabes aproximadamente en qué tiempo (época, siglo, etc.) vivió? Quizás lo que más te suene sea su Teorema. Hay una foto en la exposición que lleva ese lema, copia el esquema de la figura y enuncia lo que decía el famoso teorema.
- Una de las ideas en las que se basa el Teorema de Thales es en el paralelismo. Busca otras fotografías donde tambien aparezcan paralelas. ¿Puedes encontrar algunas rectas perpendiculares?, ¿en qué fotos?
- Vamos a dejar ahora el plano y pasar a las tres dimensiones. Busca las figuras que no sean planas.
- Con respecto a la idea de elemento que genera una figura, fíjate en la imagen de título *Del círculo a la esfera.* Si el círculo y la esfera de la foto tuviesen el mismo radio, ¿qué relación existiría entre los dos elementos?
- Ya en el bloque de Números has trabajado con el número π. Como sabes dicho número aparece en las fórmulas de longitudes, áreas y volúmenes de distintas figuras geométricas. A partir de las figuras que has encontrado anteriormente, escribe las fórmulas que les correspondan y que incluyan al número π.

Funciones y gráficas

Entre las fotografías aparecen muchos conceptos relacionados con funciones. Haz una lista con todos los que conozcas y define cada uno de ellos.

Observa que en la foto *Sobre el punto de inflexión* aparece un tobogán cuya figura puede simular una función continua. Define qué se entiende por «Punto de inflexión». En la foto, ¿qué tipo de tangente tiene la función en ese punto? ¿Cómo son la derivada primera y segunda?

Sobre el punto de inflexión



Teorema de Thales

Varios

- En la foto *Permutaciones con repetición*, aparecen algunas de las posibilidades de permutar seis elementos, donde se repiten dos a dos los colores. ¿Cuántas permutaciones distintas hay en este caso? Como puedes apreciar, en la primera fila aparece una permutación en la que los colores repetidos van unidos. ¿Cuántas permutaciones de las anteriores serán de estas características? Dibuja o escribe todas las que no aparecen en la foto.

Cuestionario

Una vez realizadas las actividades anteriores, contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Te ha gustado la exposición de fotografía? ¿Por qué?
- Destaca algún aspecto que te parezca interesante de la experiencia de hacer fotografías matemáticas.
- ¿Te ha servido la exposición para tener una idea distinta de las matemáticas? ¿Por qué?
- Después de ver la exposición nos damos cuenta de que «las matemáticas son omnipresentes en nuestro entorno». ¿Estás de acuerdo con esta frase? ¿Por qué?
- ¿Eres capaz de buscar fotografías en periódicos o revistas y ponerles un lema matemático?
- ¿Te animarías a participar en el próximo concurso de «Fotografía y Matemáticas»?

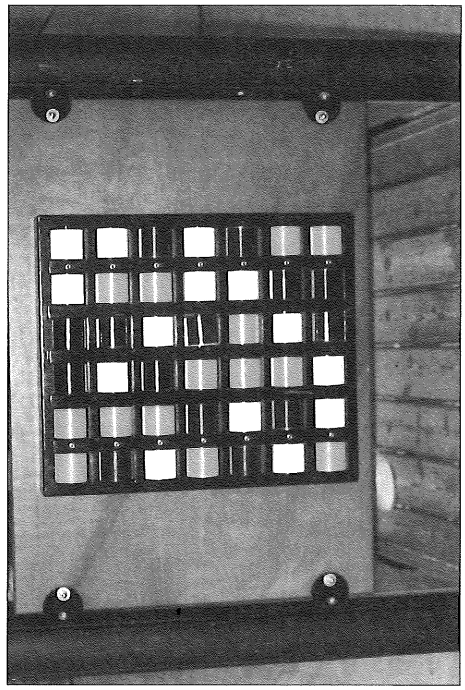
Verdaderamente, lo que más placer proporciona no es el saber, sino el estudiar; no la posesión, sino la conquista; no el estar aquí, sino el llegar allá.

Karl Friedrich Gauss

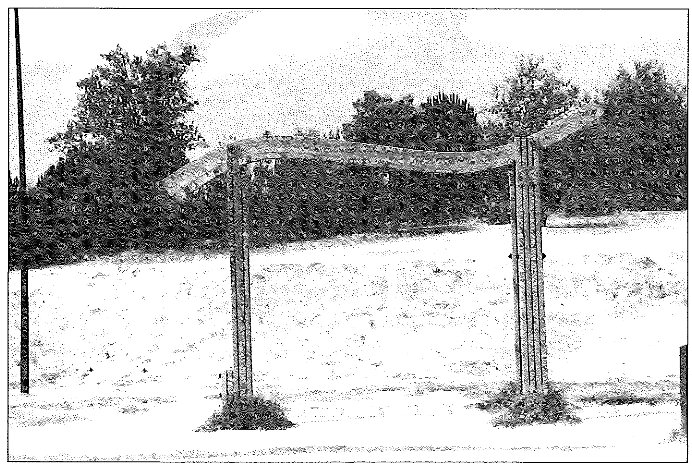
Matemático alemán (1777-1855)

Imágenes matemáticas

Durante los últimos años estamos observando que, a veces, el número de



Permutaciones con repetición



¿π o área limitada bajo la función?

Opuestos por el vértice

fotografías que se presentan a concurso, sobre todo en el nivel de Primaria, desciende con respecto a otras convocatorias. Las razones pueden ser varias: la dificultad propiamente matemática, carencias de técnicas y materiales fotográficos, coste económico del revelado del carrete y ampliación para el concurso, indiferencia de los profesores (que al fin y al cabo son los que promueven la participación), el propio desgaste de la actividad,...

Las circunstancias anteriores pueden llevar a la desaparición de las dos actividades que intervienen: el concurso y la exposición.

Por ello en el curso 1996-97 nos planteamos que las dificultades fotográficas y económicas se pueden superar modificando la idea y haciendo uso de imágenes obtenidas de periódicos o revistas. De esta manera, se hace especial hincapié en el lema matemático que acompaña a la imagen que el alumno seleccione. Con este giro se facilita la implicación de los profesores que pueden plantear como actividad de su clase la realización de un concurso local de Imágenes Matemáticas. Todo esto sin eliminar la existencia del Concurso Fotográfico. De esta manera, cuando las aportaciones artísticas de los alumnos y profesores disminuyan, al menos los objetivos matemáticos permanecerán inalterados.

El curso pasado realizamos la experiencia en nuestros centros exclusivamente como actividad de clase, la respuesta de los alumnos (que ya habían visto previamente la exposición) fue muy notable.

En la Exposición de Fotografías y Matemáticas del VI Concurso, incorporamos dos paneles con imágenes y lemas seleccionados por nosotros para dar a conocer la idea y que los profesores pudieran reproducir la actividad. Como ejemplo, hemos incorporado a este artículo una de esas imágenes. Como nosotros seleccionamos las fotografías que más nos gustaron, elegimos aquellas que tuvieran un posterior aprovechamiento a la hora de crear actividades para el cuaderno de trabajo.

En el curso 1997/98 queremos que las imágenes que seleccionemos de nuestros centros formen parte, fuera de concurso, de la exposición. Y que los alumnos vean el trabajo realizado por compañeros suyos.

Finalmente, para el próximo concurso propondremos un apartado de Imágenes Matemáticas que, paralelo al de Fotografía, revitalice esta idea, al mismo tiempo que nos proporcione materiales para la elaboración de la exposición y actividades de aprovechamiento didáctico.

Nota:

Todas las fotografías que acompañan el texto (salvo las extraídas de revistas) están realizadas por José Muñoz.

Antonio Fernández-Aliseda
IES Camas
José Muñoz
IES Macarena
Águeda Porras
IES Punta del Verde
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Bibliografía

BUENO JIMENEZ, A. y M. MONTEOLIVA SÁNCHEZ, M. (1993): «Fotografía y Matemáticas: Una experiencia en la Axarquía», *Epsilon*, n.° 27, 63-68.

GONZÁLEZ GONZÁLEZ, E. (1989): «Fotografía y Matemáticas», *Suma* n.° 2, 44-46.

GONZÁLEZ GONZÁLEZ, E. (1993): «La fotografía, recurso en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Procedimientos para llevarla a cabo», *Actas de V Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, 483-501.

GONZÁLEZ, E., J. GUTIÉRREZ y A. TORTOSA (1990): «La fotografía como recurso en la clase de matemáticas», *Actas de IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, 163-170.

VV.AA. (1995): Fotografía y Matemáticas, S.M.P.M. «Emma Castellnuovo», Madrid.

SUMA 31
junio 1999, pp. 105-108

Explorando un problema de extremos con un programa de Geometría Dinámica

Francisco Botana

Este artículo ilustra cómo un problema ambiguamente formulado admite diferentes lecturas y soluciones, permitiendo así distintas aproximaciones según el nivel y las capacidades del alumno.
El problema de optimización es explorado en un entorno de geometría dinámica (*The Geometer's Sketchpad*). Esta aproximación geométrica facilita la formulación de conjeturas y su prueba visual, allanando el camino a la prueba analítica, si ésta se considera pertinente.

EN LA OBTENCIÓN de puntos extremos de funciones, la práctica docente tradicional propone simplemente una función, eventualmente sometida a alguna restricción. A veces el problema se reviste con un enunciado relativo al «mundo real» ocultando la función que hay que optimizar tras una descripción en lenguaje ordinario. Sin embargo, en ambos planteamientos usualmente se concede escasa importancia a la comprensión profunda por el alumno de la situación que se debe estudiar y se magnifica la importancia de procesos mecánicos como la derivación y resolución de sistemas.

Una cabal comprensión de los problemas por el alumno se ve reforzada si éste puede construir un modelo gráfico del problema e interactuar con él. En el proceso de esta construcción el alumno ha de explicitar las variables intervinientes y las relaciones entre ellas. La interacción con el modelo permite la formulación de conjeturas y las pruebas visuales.

En la sección siguiente se presenta un problema de optimización ambiguamente formulado que ilustra la aproximación comentada.

El problema

Un clásico problema de extremos propone que *en la construcción de un transformador de corriente alterna interesa insertar en la bobina un núcleo de hierro de área máxima. La figura 1 muestra la sección recta del núcleo con dimensiones aproximadas. Hallar los valores más adecuados de x e y si el radio de la bobina es a.*

La solución analítica se obtiene, como es sabido, calculando el máximo de la función Área = $8xy+4x^2$, cuyas variables están ligadas por $a^2 = x^2+(x+y)^2$

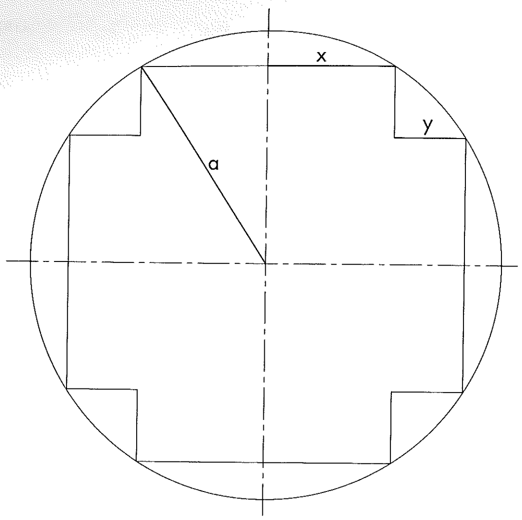


Figura 1. Sección recta del núcleo de una bobina con una cruz inscrita

Introducida la ecuación de ligadura en la expresión del área, la obtención de la solución es mecánica, es decir, puede (¡y debe!) ser buscada con un sistema de cálculo simbólico.

Quedándonos sólo con el contenido geométrico podríamos reescribir el problema es estos términos: *inscribir en una circunferencia de radio a una cruz de área máxima.* Con esta relectura, no equivalente, del problema éste admite varias interpretaciones, que son exploradas mediante un programa de geometría dinámica (*The Geometer's Sketchpad*).

El Diccionario de la Lengua Española, en su vigésimo primera edición, registra dieciséis entradas para *cruz*, de las cuales la pertinente aquí es la primera, «figura formada de dos líneas que se atraviesan o cortan perpendicularmente». También describe, entre otras, la *cruz griega* como «la que se compone de un palo y un travesaño iguales, que se cortan en los puntos medios» y la *cruz latina* como «la figura ordinaria, cuyo travesaño divide al palo en partes desiguales». Considerando ambos tipos de cruces y distintas configuraciones se presentan cinco casos. Los dos correspondientes a una cruz latina (palo y travesaño iguales o distintos) son desechados por el alumno cuando éste traza una circunferencia y al inscribir los rectángulos del palo y travesaño comprueba que el último divide siempre al primero en partes iguales. Los casos restantes se discuten a continuación.

Cruz griega con brazos cuadrados

En esta cruz el travesaño oculta la tercera parte de la longitud del palo, estando formada por cinco cuadrados iguales. La cruz inscrita es única, salvo giro de centro el

Introducida la ecuación de ligadura en la expresión del área, la obtención de la solución es mecánica, es decir, puede (¡y debe!) ser buscada con un sistema de cálculo simbólico.

de la circunferencia. Para ilustrarlo se propone al alumno que suponga el problema resuelto, es decir, que construya una cruz tal y que busque cuántas circunferencias pueden circunscribirse a ella. El programa de geometría dinámica muestra que sólo hay una circunferencia de centro el de masas de la cruz que pasa por cada uno de los vértices de ésta (figura 2). Una sencilla consideración prueba que dado el radio *a* queda unívocamente determinada la longitud *l* de la cruz y, por tanto, su área, $5l^2$:

$$a^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\frac{3l}{2}\right)^2$$

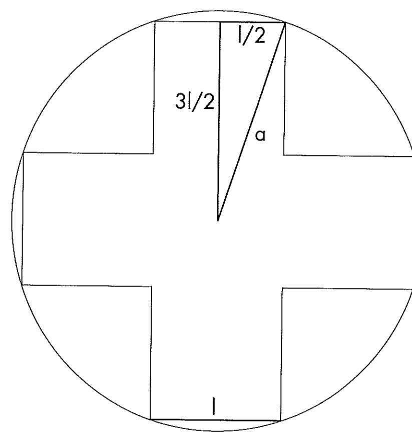


Figura 2. Cruz griega de brazos cuadrados inscrita en la circunferencia

Cruz griega: caso general

Interpretado así, el problema coincide con la formulación original (figura 1). Estudiando el problema en un entorno de geometría dinámica el alumno traza una circunferencia cualquiera e inscribe en ella un segmento, que hace girar ángulos de 90°, 180° y 270°, reduciendo si es necesario el tamaño de aquél si tras los giros existen cortes o contactos. La cruz se completa trazando segmentos perpendiculares a los segmentos, definiendo sus puntos de corte y, con la herramienta *Polígono*, definiendo la cruz (figura 3).

Se observa que el área de la cruz se hace máxima para valores de x distin-

a = 4,8 cm
x = 2,6 cm
y = 1,5 cm
Área cruz = 56,2 cm²

x	2,02	2,26	2,56	2,82	3,00
y	2,33	1,96	1,50	1,06	0,75
Área cruz	53,96	56,09	56,87	55,74	53,87

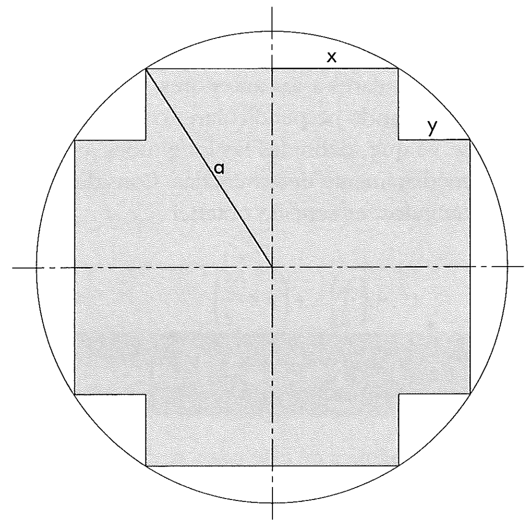


Figura 3. Cruz griega general inscrita en una circunferencia

tos (y mayores) que los de la *y*. El uso de la herramienta *Tabular* ilustra los sucesivos valores numéricos del área de la cruz de *x* e *y*, permitiendo aproximar la solución para un radio dado. El arrastre de un punto cualquiera de la circunferencia, es decir, la variación del radio de ésta, permite visualizar los cálculos para diferentes radios. Puede crearse de esta forma una tabla de valores de *a y x* y, exportada a un programa de cálculo simbólico u hoja de cálculo, obtener una expresión aproximada de la dimensión *x* de la cruz de área máxima inscrita en una circunferencia de radio *a*. Por ejemplo, si en *The Geometer's Sketchpad* se tiene que el área se hace máxima para los valores de la Tabla 1, el polinomio de interpolación (calculado aquí con *Mathematica)* es

$$-2{,}7+6{,}68333a-4{,}95a^2+1{,}66667a^3-0{,}2a^4$$

En la figura 4 se muestran las gráficas de este polinomio y de la función

$$x = g(a) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{5}}}\,a}{\sqrt{2}}$$

obtenida analíticamente, para valores de *a* entre 1 y 3.

a	1	1,5	2	2,5	3
x	0,5	0,8	1	1,3	1,6

Tabla 1. Valores aproximados de *a* y *x* que maximizan el área de la cruz

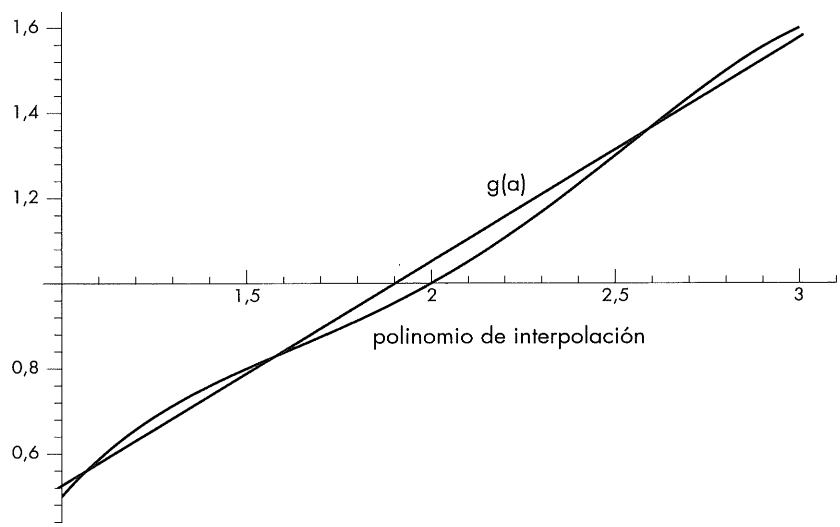


Figura 4. Gráficas de las soluciones aproximada y exacta del problema para una cruz griega cualquiera

Palo y travesaño distintos, cortándose en los puntos medios

Para construir esta cruz puede procederse como sigue (Figura 5): trácese una circunferencia cualquiera y una cuerda en ella, *x*; el otro segmento extremo del palo es el simétrico respecto del centro de la circunferencia.

Elegido un punto en ésta, fuera de los arcos subtendidos por los segmentos, los segmentos extremos del travesaño, *y*, son perpendiculares a los anteriores. Los segmentos *z* y *t* se trazan usando perpendiculares o paralelas. En este proceso se ve que, definidas las longitudes *x* e *y*, *z* y *t* quedan inmediatamente determinadas. Considerando triángulos rectángulos, es sencillo obtener

$$a^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{y}{2}\right)^2$$

$$a^2 = \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + t\right)^2$$

En la exploración dinámica de este caso, se conjetura que el máximo se alcanza cuando x = y (y, por tanto, z = t) resultando que el área se extrema para una cruz de las consideradas en la subsección anterior.

La resolución analítica de este caso es tediosa si se hace a mano e introduce complicaciones que no se tratarán aquí si se usa un sistema de cálculo simbólico. Los puntos críticos de la función área

$$\text{Área} = 2ty+xy+2xz$$

teniendo en cuenta las ligaduras anteriores, son las soluciones del sistema de ecuaciones no lineales

$$-y - \frac{x^2}{\sqrt{4a^2 - x^2}} + \sqrt{4a^2 - x^2} = 0$$

$$-x - \frac{y^2}{\sqrt{4a^2 - y^2}} + \sqrt{4a^2 - y^2} = 0$$

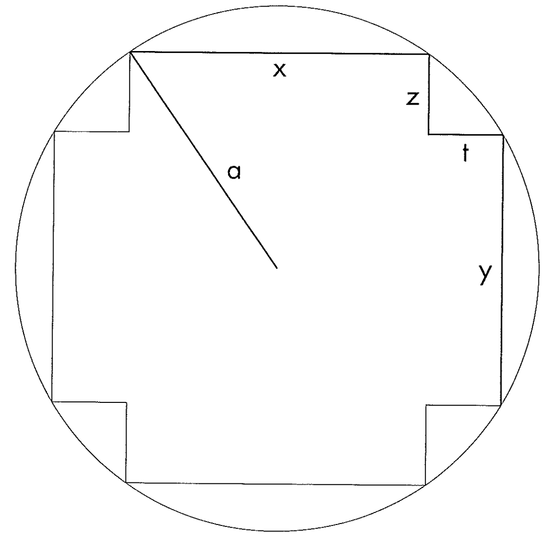


Figura 5. Cruz de palo y travesaño distintos inscrita en una circunferencia de radio *a*

Derive es incapaz de encontrar solución alguna de este sistema y tanto *Maple V R3* como *Mathematica* (versiones 2.2.3 y 3.0) devuelven soluciones erróneas, además de la correcta.

Francisco Botana
Departamento de Matemática Aplicada.
Universidad de Vigo en Pontevedra

Recursos *online*

Sketches en *The Geometer's Sketchpad* y animaciones *Java* de las figuras presentes en el artículo pueden verse en el URL http://www-mapo.uvigo.es/dg/cruz/.

Versalles

Fotos: Luis Balbuena

Las Tullerías

SUMA 31
junio 1999, pp. 109-117

El poder y las coaliciones

María Candelaria Espinel Febles

IDEAS Y RECURSOS

Para medir el poder en organizaciones donde no se aplica el sistema de «un hombre, un voto» se recurre a un campo de la matemática denominado Teoría de la Elección Social. Los sistemas de votación con peso son frecuentes en política, economía, etc., donde algunos países o personas tienen más influencia que otros.
En este artículo analizamos dos ejemplos reales de sistemas de votación con peso: el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas y el Consejo de Ministros de la Comunidad Económica Europea.
Lo presentamos como un estudio teórico–práctico sobre los sistemas de votación y el poder de las coaliciones. Además mostramos una fuerte conexión entre la política y la matemática, en particular, el índice de poder y la combinatoria. Consideramos que estas aplicaciones de la matemática deberían formar parte de los conocimientos del ciudadano.

LA NOCIÓN de poder aparece en distintos órganos de decisión. El poder de un individuo puede cambiar cuando se forman coaliciones. Dependiendo del contexto, electores, accionistas, partidos o naciones distribuyen el poder en un colectivo que puede ser un consejo escolar, el claustro de una universidad, órganos de decisión de sociedades empresariales, parlamento de una comunidad, Consejo de Seguridad de Naciones Unidas, etc.

Una de las características del siglo XX ha sido el surgir grupos sociales de diverso tipo y tamaño. Al analizar la organización de algunos de estos grupos se puede llegar a entender mejor la historia moderna. Tomaremos como ejemplo el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas. Este Consejo es el que toma las decisiones más importantes y sus miembros se eligen de la Asamblea General que reúne a todos los países que forman parte de la Organización de Naciones Unidas (ONU). Estudiaremos tres épocas en el tiempo teniendo en cuenta la composición del Consejo.

Primera época: Hasta 1966

Hasta 1966, el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas estuvo formado por once naciones:

- Cinco naciones permanentes, que eran China Nacionalista, Estados Unidos, Francia, Inglaterra y Rusia.
- Seis naciones no permanentes que se tomaban por turno rotatorio de la Asamblea General.

La aprobación de cualquier resolución requería de, al menos, siete votos de los once posibles. Lo indicaremos por 7/11.

Pero las cinco naciones permanentes tienen derecho a veto, es decir que cualquier aprobación requiere la aceptación de los cinco miembros permanentes. Este hecho incrementa el poder de las cinco naciones permanentes.

Segunda época: De 1966 a 1998

En la actualidad, el Consejo de Seguridad lo forman 15 naciones:

- Siguen siendo las mismas cinco las naciones permanentes, excepto la China Nacionalista, que fue expulsada y sustituida por la China Comunista.
- Diez son ahora las naciones no permanentes o rotatorias.

La aprobación de cualquier resolución exige nueve de los quince, es decir, 9/15.

Se sigue conservando el derecho a veto de las cinco naciones permanentes, pero aumenta el número de naciones no permanentes con respecto a la época anterior.

Tercera época: Después de 1998

Propuesta anunciada en marzo de 1997, por el presidente Ismail Razzli de Malasia, para que entre en vigor el 28 de febrero de 1998. La composición vendría dada por:

- Cinco miembros permanentes con derecho a veto.
- Cinco miembros permanentes sin derecho a veto. Dos de estos cinco serían estados industrializados, posiblemente, Alemania y Japón; y los otros tres se elegirían entre los estados de mayor peso de África, Asia y América Latina.
- Diez no permanentes con el mismo sistema que en la época anterior.
- Cuatro también no permanentes; estos cuatro alternos surgirían de los mismos tres continentes, África, Asia y América Latina, y uno de Europa del Este.

La aprobación de cualquier resolución exigiría al menos 16 de los 24 votos, es decir, 16/24.

Por tanto, se necesitarían las dos terceras partes de los votos, mientras que en la actualidad, segunda época, sólo son necesarios tres quintos de los votos.

Olvidemos el derecho a veto de los cinco países permanentes y fijémonos sólo en las cuotas en las tres épocas: 7/11, 9/15, 16/24. Se puede observar como en la primera época no se puede aprobar nada sin la aceptación de al menos una de las naciones permanentes, ya que se necesitan siete votos y naciones no permanentes sólo hay seis. En la segunda época al aumentar el número de naciones no permanentes, se podría sacar adelante una propuesta con sólo los votos de estas naciones, supuesto que las permanentes se abstengan o no veten la propuesta. En la tercera época también seguiría siendo posible sacar adelante una resolución sin los cinco miembros fijos con derecho a veto, siempre que no ejerzan este derecho.

En el siguiente apartado trataremos de cuantificar el derecho a veto. Veremos el peso real que supone el veto de cada una de las cinco naciones.

Cualquier subconjunto de un conjunto de votantes se le llama coalición, supuesto que el voto es sí o no. Una coalición de votantes que tenga suficientes votos para que una resolución se apruebe se llama coalición ganadora, en caso contrario se llama coalición perdedora.

Sistemas con cuota. Veto. Coaliciones. Notación

Trataremos de incorporar dos cuestiones que se dan en cualquiera de los tres sistemas de votación del Consejo de Seguridad. La primera es que no todos los países tienen la misma influencia, evidentemente los cinco países permanentes con derecho a veto tienen más peso que el resto. La segunda es la cuota, o sea, el menor número de votos necesarios para que una resolución se apruebe.

Cualquier subconjunto de un conjunto de votantes se le llama *coalición*, supuesto que el voto es sí o no. Una coalición de votantes que tenga suficientes votos para que una resolución se apruebe se llama *coalición ganadora*, en caso contrario se llama *coalición perdedora*.

Busquemos los pesos y la cuota para la *primera época* del Consejo. Puesto que todos los países no permanentes tienen la misma influencia, comenzamos asignándoles a cada país el mismo peso, digamos 1. También todos los permanentes tienen el mismo peso, le asignaremos a cada uno un peso x. Indicaremos por q la cuota o condición de mayoría.

Consideremos una coalición formada por los 6 miembros no permanentes junto con 4 cualquiera de los permanentes. Ésta tiene un peso de $4x + 6$, y sería perdedora puesto que un miembro permanente tiene derecho a veto. Se tiene pues que $4x + 6 < q$. Por otro lado, los cinco miembros permanentes unidos a dos cualquiera no permanentes sería una coalición ganadora, esto es, $5x + 2 \geq q$. Poniendo juntas las dos desigualdades se tiene:

$$4x + 6 < 5x + 2 \Rightarrow 4 < x,$$

así que a cada miembro no permanente le asignaremos peso 1 y, a cada miembro permanente peso 5.

Las mismas desigualdades nos dan la cuota:

$$4x + 6 < q \leq 5x + 2$$
$$26 < q \leq 27$$
$$q = 27.$$

Realmente el Consejo de Seguridad sigue un sistema de votación con pesos, ya que no todos los países tienen la misma influencia. Para este ejemplo se expresa:

[27; 5,5,5,5,5,1,1,1,1,1,1]

Llevando un proceso análogo a la *segunda época* del Consejo de las Naciones Unidas, se tiene:

$$4x + 10 < 5x + 4 \Rightarrow 6 < x$$

$$4x + 10 < q \leq 5x + 4 \Rightarrow 38 < q \leq 39$$

por lo tanto se tiene la representación:

[39; 7,7,7,7,7,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1].

Para la *tercera época* se tendría:

$$4x + 5 + 14 < 5x + 5 + 6 \Rightarrow 8 < x$$

Realmente el Consejo de Seguridad sigue un sistema de votación con pesos, ya que no todos los países tienen la misma influencia.

$$4x + 19 < q \leq 5x + 11 \Rightarrow 55 < q \leq 56$$

lo que permite escribir la representación:

[56; 9,9,9,9,9,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]

En las tres épocas del Consejo de Seguridad, la condición de veto impone una cuota de 27, 39 y 56, respectivamente. Esto supone que en las tres épocas para sacar un proyecto adelante debe ser aprobado siempre por los cinco miembros permanentes con derecho a veto, y por, al menos, dos más en la primera época, cuatro más en la segunda época y once más en la tercer época.

En la siguiente tabla se puede observar el porcentaje de votos en las tres épocas según sean países con derecho a veto o no. El porcentaje de votos de los países con derecho a veto en las tres épocas da un total de 80,65%, 77,77% y 39,06%, mientras que para los países que no tienen derecho a veto se tiene 19,32%, 22,22% y 29,68%.

País	*Primera época*		*Segunda época*		*Tercera época*	
	Peso	*%*	*Peso*	*%*	*Peso*	*%*
China	5	16,13	7	15,5	9	7,81
Estados Unidos	5	16,13	7	15,5	9	7,81
Francia	5	16,13	7	15,5	9	7,81
Inglaterra	5	16,13	7	15,5	9	7,81
Rusia	5	16,13	7	15,5	9	7,81
1	1	3,22	1	2,2	1	1,56
2	1	3,22	1	2,2	1	1,56
3	1	3,22	1	2,2	1	1,56
4	1	3,22	1	2,2	1	1,56
5	1	3,22	1	2,2	1	1,56
6	1	3,22	1	2,2	1	1,56
7	–	–	1	2,2	1	1,56
8	–	–	1	2,2	1	1,56
9	–	–	1	2,2	1	1,56
10	–	–	1	2,2	1	1,56
11	–	–	–	–	1	1,56
12	–	–	–	–	1	1,56
13	–	–	–	–	1	1,56
14	–	–	–	–	1	1,56
15	–	–	–	–	1	1,56
16	–	–	–	–	1	1,56
17	–	–	–	–	1	1,56
18	–	–	–	–	1	1,56
19	–	–	–	–	1	1,56
Peso total: T	31	–	45	–	64	–
Cuota: q	27	–	39	–	56	–

En general un sistema de votación con pesos se representa por el símbolo:

$$[q;\ w^1, w^2, \ldots, w^n]$$

donde q es la cuota necesaria para ganar, y los números $w^1, w^2, \ldots, w^n$ son los pesos para los n votantes indicados por 1, 2, ..., n.

Un subconjunto de votos se llama *coalición ganadora* si la suma de sus pesos es igual o excede de la cuota q. Generalmente, se supone que la cuota q necesaria para ganar excede a T/2, siendo T la suma de todos los pesos:

$$T = w^1 + w^2 + \ldots + w^n.$$

También es frecuente que la cuota sea la mitad más uno, o sea, $q = \mathrm{int}(T/2) + 1$.

La influencia de una nación o de un votante puede deberse no sólo al derecho a veto sino a las posibilidades que tenga de asociarse con otras naciones para conseguir la cuota, en definitiva para subirse al tren de los ganadores. En el siguiente apartado trataremos de buscar un número que mida el poder en este sentido.

Sistemas de votación con peso. Poder y coaliciones

El poder es un ingrediente básico en la toma de decisiones en grupo. También la noción de poder es fundamental para conocer y justificar los eventos políticos.

Si intentamos buscar un índice numérico para medir el poder en abstracto, estaremos de acuerdo en que el poder tiene que ver con el número de formas que una persona puede convertir una derrota en victoria o viceversa, es decir, si el cambio de su voto puede invertir el resultado.

Así, una medida razonable del poder es la frecuencia con que un votante o un voto es fundamental para una decisión. Por tanto, a cada votante se le asignará un índice que se determina en relación con el número de veces que su voto es crítico para conseguir el poder. En cierta forma, es el número de veces que hace de pivote o comodín.

Diremos que una persona es *pivote* o comodín en una votación particular si un cambio en su voto altera el resultado de la votación.

Establecemos como *medida relativa de poder el número de formas en que un individuo puede unirse a una coalición perdedora para convertirla en ganadora* y le llamaremos índice de poder.

Veremos esta idea mediante algunos ejemplos sencillos.

Ejemplo 1

Consideremos una comisión formada por un presidente que tiene 2 votos y otros dos miembros con un voto cada uno, se representaría por: [3; 2,1,1].

La influencia de una nación o de un votante puede deberse no sólo al derecho a veto sino a las posibilidades que tenga de asociarse con otras naciones pårra conseguir la cuota...

El poder es un ingrediente básico en la toma de decisiones en grupo.

Tenemos un sistema de cuota 3, y tres votantes, el votante 1 con peso 2, el votante 2 con peso 1 y el votante 3 también con peso 1.

Coaliciones ganadoras serían: 12; 13; 123.

Coaliciones perdedoras serían: 1; 2; 3; 23.

A la coalición perdedora 1 le puedo unir el votante 2 y obtengo la coalición ganadora 12. También se le puede unir el votante 3 y se tiene la coalición ganadora 13. A la coalición perdedora 2 se le puede unir 1 y se tiene la colación ganadora 12. Análogamente, a la coalición perdedora 3 se le une 1 y se tiene la coalición ganadora 13. Y por último, a la coalición perdedora 23 se le une 1 y se tiene la coalición ganadora 123. Se puede ver que el votante 1 ha hecho de pivote tres veces, el votante 2 una vez y el votante 3 también una vez, por tanto, el índice de poder respectivo de cada votante es: 3,1,1.

Como resumen de este proceso tenemos:

Coaliciones ganadora: 12, 13, 123.

Coaliciones perdedoras:	1		2	3	23
Pivotes para conseguir coaliciones ganadoras:	2	3	1	1	1
Coaliciones que resultan:	12	13	12	13	123

Índice de poder para este ejemplo es (3,1,1), que también se puede expresar como (3/5, 1/5, 1/5).

Evidentemente, este cálculo es muy monótono por ello se han diseñado distintos procedimientos. Recogemos un método práctico para calcular este índice.

Se construye una tabla colocando las coaliciones ganadoras en vertical y los votantes en horizontal. A cada votante se le asigna un 1 si está en la coalición respectiva y un –1 si no está. Sumando por columnas se obtiene el índice de poder de cada votante.

En el ejemplo resulta:

	1	2	3
123	1	1	1
12	1	1	–1
13	1	–1	–1
	3	1	1

Ejemplo 2

Consideramos el caso numérico

[6; 4,3,2,1]

Parece lógico comenzar listando las 2^4=16 coaliciones, despreciamos el vacío.

La obligatoriedad de encontrar las coaliciones ganadoras aconseja buscar alguna pauta para encontrar estas coaliciones. En este caso sabemos que las coaliciones ganadoras deben tener como suma de pesos como mínimo 6, la cuota; y como máximo 10, la suma de todos los pesos, por lo tanto ordenando las coaliciones ganadoras por sus pesos se tiene:

13, 234, 12, 134, 124, 123, 1234.

> *...no siempre la influencia de una persona es proporcional a la fracción de los votos o del reparto.*

Coaliciones perdedoras:

	1		2	3	4	34		24		14		23	
Comodines:	2	3	1	1		1	2	1	3	2	3	1	4
Ganadoras:	12	13	12	13		134	234	124	234	124	134	123	234

Contabilizando el número de veces que cada votante hace de comodín, se tiene:

Votantes:	1	2	3	4
Índice:	5	3	3	1

El índice de poder sería

(5, 3, 3, 1)

o bien

(5/12, 3/12, 3/12, 1/12).

Con el método práctico citado, se obtiene el mismo resultado:

Suma de pesos	Coaliciones	Votantes			
		1	**2**	**3**	**4**
6	**13**	1	–1	1	–1
6	**234**	–1	1	1	1
7	**12**	1	1	–1	–1
7	**134**	1	–1	1	1
8	**124**	1	1	–1	1
9	**123**	1	1	1	–1
10	**1234**	1	1	1	1
	Índice	5	3	3	1

Con la siguiente tabla queremos hacer ver la diferencia entre fracción de votos y fracción de poder:

Votantes	Peso	Fracción de votos	Fracción de poder
1	4	2/5 (40%)	5/12 (42%)
2	3	3/10 (30%)	1/4 (25%)
3	2	1/5 (20%)	1/4 (25%)
4	1	1/10 (10%)	1/12 (8%)

Con los datos anteriores se puede ver que no siempre la influencia de una persona es proporcional a la fracción de los votos o del reparto. Tomando el poder en el sentido de los votos necesarios para la aprobación de cualquier cuestión, el significado real de un voto está en si es esencial para la victoria. Así en este caso los votantes 2 y 3 tienen el mismo porcentaje de poder teniendo el votante 2 un porcentaje de votos mayor. Con este ejemplo y el siguiente se ilustra que fracción de votos y fracción de poder no necesariamente son la misma cosa.

Ejemplo 3

Supongamos que los cuatro accionistas de una compañía tienen respectivamente el 28%, 27%, 26% y 19% del capital y que una mayoría simple, digamos del 51%, es suficiente para ganar una votación. Utilizando un sistema de votación con pesos se representaría: [51; 28,27,26,19].

El índice que se obtiene es (1,1,1,0). El accionista cuarto es falso o ficticio, *dummy* en inglés, puesto que nunca hace de pivote, es decir no tiene ninguna influencia en el reparto de poder.

Obsérvese en la siguiente tabla la diferencia entre porcentaje de votos y porcentaje de poder, en especial, en relación con el accionista que posee el 19% del capital.

Porcentaje de votos	*Índice*	*Porcentaje de poder*
28	1/3	33,3
27	1/3	33,3
20	1/3	33,3
10	0	0

En este tercer ejemplo se puede ver como en realidad el poder se lo reparten a partes iguales los tres primeros accionistas, el cuarto es ficticio, pues no es necesario para ningún acuerdo. Sin embargo, en el ejemplo 1, [3; 2,1,1] que expresado en porcentajes quedaría [75; 50,25,25], cada uno de los tres votantes es imprescindible, todos tienen poder.

Los tres ejemplos ilustran que el poder depende más de alianzas entre los votantes que de la proporción de votos que las personas posean.

En los sistemas de votación con peso las coaliciones perdedoras siempre tienen menos peso que las coaliciones ganadoras. La mayor importancia de un votante está en convertir una coalición perdedora en una coalición ganadora.

Índice de Banzhaf

El índice de poder definido y utilizado en los tres ejemplos del apartado anterior se debe a Hohn F. Banzhaf (1965). Es un índice muy utilizado para analizar sistemas de votación con peso y también para diseñarlos. Otro índice muy utilizado en algunas instituciones es el propuesto por el matemático Lloyd S. Shapley (1954). Este índice utiliza todos los órdenes de formación posibles, es decir, el número de *permutaciones* de todos los votantes en que éstos hacen de comodín. En el índice de poder de Banzhaf el poder de un votante es proporcional al número de combinaciones en que este votante es comodín o pivote.

Tanto el índice de Banzhaf como el de Shapley toman como medida de poder el número de formas diferentes en que un individuo puede unirse a una coalición perdedora y convertirla en coalición ganadora.

En la mayoría de las instituciones los votos individuales no es un indicador significativo de su contribución al poder.

Tomaremos como aplicación práctica la Comunidad Económica Europea.

En 1957, mediante el Tratado de Roma se forma la Comunidad con seis países. La Comunidad ha sufrido diversas modificaciones. En la siguiente tabla se recogen los pesos de los distintos países que han formando parte de la Comunidad en tres épocas distintas y la cuota en el Consejo de Ministros.

La mayor importancia de un votante está en convertir una coalición perdedora en una coalición ganadora.

Consejo de Ministros Pesos				
País		*1957*	*1973*	*1986*
Alemania	**A**	4	10	10
Francia	**F**	4	10	10
Italia	**I**	4	10	10
Bélgica	**B**	2	5	5
Holanda	**H**	2	5	5
Luxemburgo	**L**	1	2	2
Reino Unido	**U**	•	10	10
Dinamarca	**D**	•	3	3
Irlanda	**R**	•	3	3
España	**E**	•	•	8
Grecia	**G**	•	•	5
Portugal	**P**	•	•	5
Peso total: T		17	58	76
Cuota: q		12	41	54

Primera época

En 1957, el paso o aprobación de cualquier resolución requiere 12 de 17. La notación con pesos sería:

[12; 4,4,4,2,2,1]

Intuitivamente se puede ver que uniéndose los tres países con más peso, se tiene 4+4+4 o bien, dos países cualquiera de peso 4 y los dos países de peso 2, daría lugar a 4+4+2+2 que pueden sacar adelante cualquier resolución.

Otras coaliciones ganadoras serían con peso: 4+4+4+1, 4+4+2+2+1, de las que hay seis distintas; 4+4+4+2, de las que hay dos; y 4+4+4+2+2+1. En total, se tienen catorce coaliciones ganadoras.

Una forma organizada de encontrar las coaliciones ganadoras es la que se explica a continuación. Llamaremos x, y, z las tres clases de países según su peso, esto es:

$$x \equiv 4, \quad y \equiv 2, \quad z \equiv 1.$$

La suma de pesos de las coaliciones tiene que alcanzar como mínimo la cuota, 12, y como máximo el peso total, 17. Colocando por orden de peso las coaliciones se obtiene las distintas clases de coaliciones y con un recuento elemental del número de países por clase se obtienen el número de coaliciones por clase:

Suma de pesos	*Clase de coalición*	*Número de coaliciones*
12	3x	1
12	2x + 2y	3
13	3x + z	1
13	2x + 2y + z	3
14	3x + y	2
15	3x + y + z	2
16	3x + 2y	1
17	3x + 2y + z	1
Total	8	14

Con el método práctico citado y utilizando las catorce coaliciones anteriores obtenemos, como se muestra en la siguiente tabla, el índice de poder (10,10,10,6,6,6,0). Sorprende la situación en que queda Luxemburgo.

	A	**F**	**I**	**B**	**H**	**L**
AFI	1	1	1	–1	–1	–1
AFBH	1	1	–1	1	1	–1
AIBH	1	–1	1	1	1	–1
FIBH	–1	1	1	1	1	–1
AFIL	1	1	1	–1	–1	1
AFBHL	1	1	–1	1	1	1
AIBHL	1	–1	1	1	1	1
FIBHL	–1	1	1	1	1	1
AFIB	1	1	1	1	–1	–1
AFIH	1	1	1	–1	1	–1
AFIBL	1	1	1	1	–1	1
AFIHL	1	1	1	–1	1	1
AFIBH	1	1	1	1	1	–1
AFIBHL	1	1	1	1	1	1
Índice: Suma	10	10	10	6	6	0

En la siguiente tabla se muestra el porcentaje de votos y el porcentaje de poder utilizando el Índice de Banzhaf.

País	*Votos*	*Porcentaje de votos*	*Índice*	*Porcentaje de poder*
Alemania	4	23,5	5/21	23,8
Francia	4	23,5	5/21	23,8
Italia	4	23,5	5/21	23,8
Bélgica	2	11,8	3/21	14,3
Holanda	2	11,8	3/21	14,3
Luxemburgo	1	5,9	0	0

Como se puede observar Alemania, Francia e Italia poseen el 70,5% de los votos y un 71,4% del poder y Luxemburgo es un socio ficticio.

Realmente como se puede ver en este ejemplo la importancia de un individuo o de un país está relacionada con la habilidad para imponerse, es decir, con ser imprescindible para conseguir ganar, para contribuir al poder.

Segunda época

Con los nueve países que forman la Comunidad Europea en 1973, se tiene el sistema:

[41; 10,10,10,10,5,5,3,3,2]

Siguiendo los mismos pasos que en la primera época se obtienen 75 coaliciones ganadoras a partir de las cinco clases presentes en este sistema.

Tercera época

Trataremos ahora de encontrar las coaliciones ganadoras en la Comunidad Europea con los países de 1986. Ello supone el análisis del sistema:

[54; 10,10,10,10,8,5,5,5,5,3,3,2]

Llamaremos, respectivamente, x, y, z, t, u, a las cinco clases de votantes teniendo en cuenta su peso.

Calculamos para este caso sólo las coaliciones ganadoras minimales, esto es, las que al suprimir uno o más países se convierten en coaliciones perdedoras.

Esto nos permite listar como coaliciones ganadoras las reflejadas en el cuadro de la página siguiente. En él se observa que hay 14 clases de coaliciones vencedoras que suponen un total de 135 coaliciones minimales.

Con tantas coaliciones ganadoras el problema resulta inabordable en una tabla. Así que para la mayoría de las situaciones reales hay que escribir un programa de ordenador que enumere y encuentre el índice de poder.

Peso total	Clases de coalición	N.º de coaliciones
54	$4x + y + t$	1
54	$3x + y + 2z + 2t$	24
54	$2x + y + 4z + 2t$	6
55	$4x + 3z$	4
55	$4x + y + z + u$	4
55	$4x + 2z + t + u$	12
55	$3x + y + 3z + u$	16
55	$3x + 4z + t + u$	8
56	$4x + 2z + 2t$	6
56	$4x + y + z + t$	8
56	$3x + 4z + 2t$	4
56	$3x + y + 3z + t32$	
58	$4x + y + 2z$	6
58	$3x + y + 4z$	4
Total	14	135

Para otros órganos de la Comunidad el análisis resulta también muy complejo. En particular, el Parlamento Europeo está formado por 518 miembros que representan a los ciudadanos de la Comunidad y donde el reparto de parlamentarios es el siguiente: Alemania, Francia, Italia y Reino Unido cuentan con 81 parlamentarios cada uno, España 60, Los Países Bajos 25, Bélgica, Portugal y Grecia 24, Dinamarca 16, Irlanda 16 y Luxemburgo 6.

Las deducciones a las que se puede llegar son muy variadas. Por ejemplo, los cuatro grandes poseen el 62,56% de los escaños. La cuota de poder es 260, que también la superan con creces una coalición de los cuatro citados. Pero aquí las alianzas pueden ser entre países o entre partidos. Así que un análisis real resulta imposible de abordar sin un programa de ordenador que calcule todas las coaliciones ganadora y los índices de poder.

De todas formas, salvo el Parlamento, los demás organismos de la Comunidad toman, en la mayoría de los casos, las decisiones por unanimidad o consenso. Esto obliga a muchas discusiones, por lo que a veces los organismos resultan poco operativos.

Reflexiones y consideraciones finales

El proceso seguido para presentar este trabajo ha sido invitar a una reflexión sobre el poder en tres sentidos. Entendido éste como porcentaje de votos, el poder cuando existe un derecho a veto y el poder cuando entre los votantes se forman bloques o coaliciones para alcanzar precisamente el poder. En la exposición se ha evitado la formalización pero poniendo de manifiesto la componente matemática.

El poder es un concepto ilusorio, muchos de sus aspectos son difíciles de identificar y medir. Es difícil que una formula matemática pueda captar totalmente la esencia del poder. Las coaliciones surgen muchas veces como consecuencia de afinidades, sentimientos, intereses comunes u otras influencias externas, más que de simples números.

El poder es un concepto ilusorio, muchos de sus aspectos son difíciles de identificar y medir. Es difícil que una formula matemática pueda captar totalmente la esencia del poder. Las coaliciones surgen muchas veces como consecuencia de afinidades, sentimientos, intereses comunes u otras influencias externas, más que de simples números. Sin embargo indicadores como los índices de poder permiten observar la fuerza que tienen las alianzas, los pactos, la cooperación...

Creemos en la relevancia de estos conocimientos en Ciencias Sociales, en Política, Economía, en la Historia Moderna....

Un buen ejemplo lo tenemos en el ya descrito Consejo de Seguridad de la ONU. Calculando el índice de Shapley, en la primera época, cada nación permanente tiene 0,1964 de poder, por tanto las cinco naciones permanentes tienen el 98,20% del poder del Consejo. En la segunda época, estas cinco naciones continúan teniendo el 98,15% del poder. Y para la tercera época no están dispuestas a perderlo. Para la tercera época hay una novedad con respecto a las dos épocas anteriores, se incorporan países permanentes sin derecho a veto. Si con 24 países se mantuviesen sólo dos clases, como en las dos épocas anteriores, se tendría el sistema:

[96; 9,9,9,9,9,9,9,9,9,9,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1]

Uno se pregunta por una causa racional para que sólo cinco países tengan el poder y no diez. Un análisis reflexivo de estos sistemas de poder ponderados ayuda a comprender parte del orden internacional.

Queda claro la necesidad de un programa de ordenador para situaciones reales, aunque la interpretación y capacidad decisoria seguirá siendo de los humanos.

En cuanto a la política, en general, no se forman alianzas o coaliciones con un número superfluo de miembros. Los partidos tienden a construir mayorías parlamentaria ajustadas. De esta forma el reparto de poder, el trueque de favores en mutuo acuerdo, toca a más por cabeza. Los cambios de coaliciones sin intervención electoral en ayuntamientos y comunidades autónomas, el transfuguismo y los repartos de poder que corresponden con la representatividad suelen sorprender al ciudadano de a pie. En relación con los tránsfugas, son individuos o grupos que suelen tener mala prensa, se cambian para estar siempre en el poder. Pero resulta que sin ellos prácticamente no se podría gobernar un país. La causa está en que siempre que la cuota sea mayor que la mitad de la suma de los pesos, esto es, $q > T/2$, cada dos coaliciones vencedoras tienen algún votante en común.

En cuanto a las matemáticas, en toda la exposición anterior está presente el conteo, es decir, la combinatoria. Claro que no es la combinatoria a la que posiblemente estamos más acostumbrados, aplicar fórmulas. Sí que hay aquí una necesidad de enumeración y de conteo reflexivo. A menudo, el fatigoso aprendizaje oscurece la importancia que tiene como instrumento de análisis.

Este trabajo pretende ilustrar de qué manera la combinatoria puede contribuir a una mejor comprensión de la política. Sin exigir más que unos conocimientos de conteo mínimos.

En la actualidad un grupo de profesores está diseñando material curricular para hacer accesible la idea de los índices de poder a estudiantes de secundaría. Procuramos utilizar datos reales. Algunos sacados de la prensa, por ejemplo, reparto de poder en «Versace»; Gianni tenía el 45% de capital (que pasa a una sobrina); Santo, el 35% y Donatella, el 20%. Otros ejemplos son cercanos a los estudiantes como la composición del Consejo Escolar.

El poder tiene mucho de arte para negociar y de saber matemáticas.

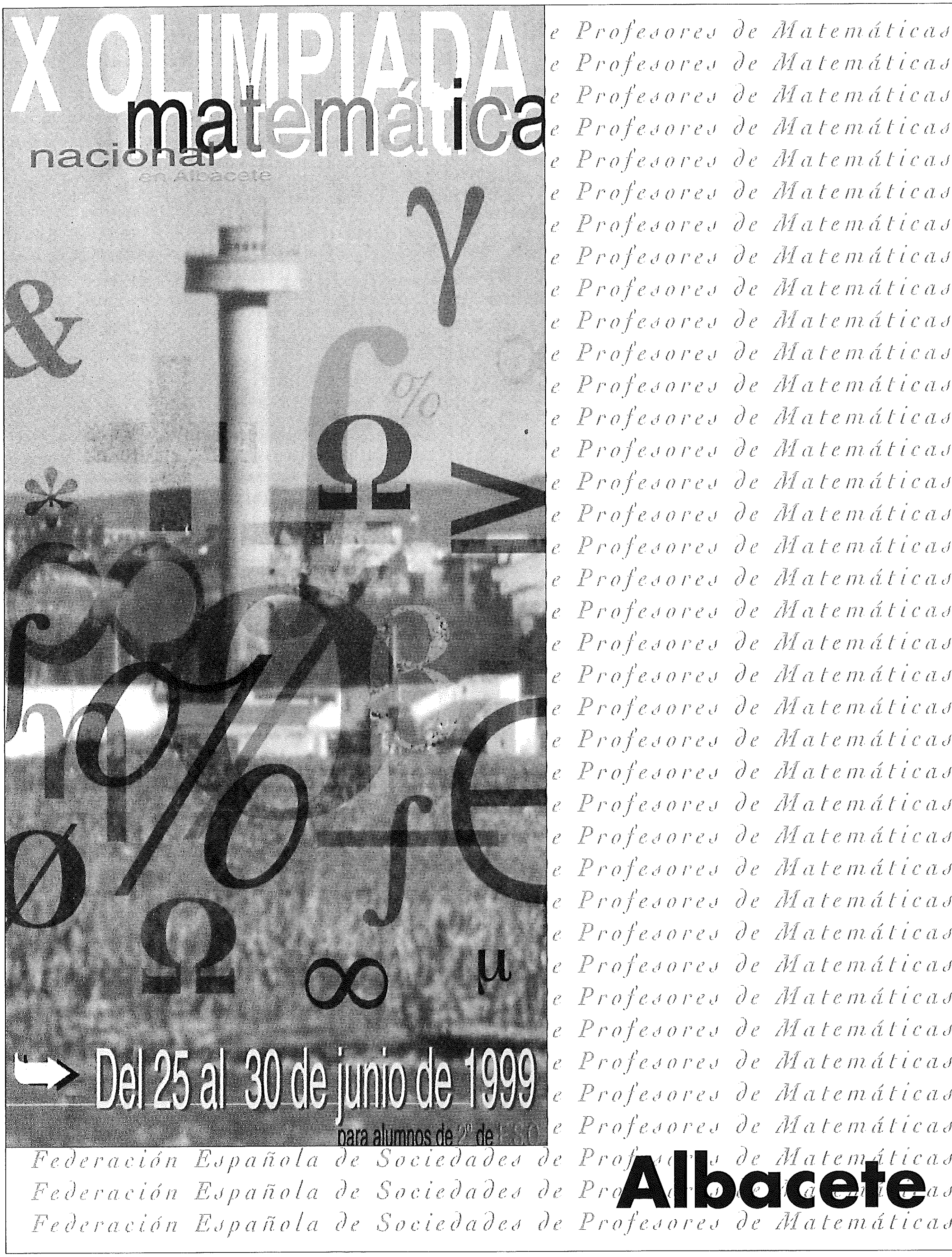
M.ª Candelaria Espinel
Facultad de Matemáticas
Universidad de La Laguna
Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas
«Isaac Newton»

Bibliografía

COMISIÓN EUROPEA (1997): *Europa: preguntas y respuestas. Orígenes, funcionamiento y objetivos de la U.E.,* Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas, Luxemburgo.

GARFUNKEL, S. (Director) (1991): *For All Practical Purposes. Introduction to Comtemporary Mathematics*, W.H. Freeman and Company, New York.

POUNDSTONE, W. (1995): *El dilema del prisionero*, Alianza, Madrid.


X OLIMPIADA
matemática
nacional
en Albacete
Del 25 al 30 de junio de 1999
para alumnos de 2º de
Profesores de Matemáticas
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
Albacete

SUMA 31
junio 1999, pp. 119-124

La inferencia estadística con Microsoft Excel

Julián Sainz Ruiz

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se dan algunas ideas prácticas para empezar a trabajar la inferencia estadística, por ejemplo, dentro del programa de Segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales. Lo esencial del artículo es el uso de la hoja de cálculo *Microsoft Excel* para que, mediante procesos de simulación, se comprendan las ideas de la materia. El programa permite realizar cálculo que de otra forma podrían resultar largos y complicados

Los nuevos currículos de Bachillerato proponen un enfoque inferencial de la Estadística trabajando con muestras y extrapolando los resultados. Existe gran cantidad de programas informáticos para tratar la Estadística, algunos de ellos de una potencia que desbordan los contenidos curriculares. La hoja de cálculo *Microsoft Excel* dispone de un serie de herramientas que nos pueden facilitar la investigación de fenómenos y la resolución de los problemas de una forma rápida y sencilla. La *simulación de fenómenos* a través del ordenador va a constituir una herramienta útil para trabajar la Probabilidad y la Estadística. Mediante la simulación podemos simplificar y comprender mejor el problema y crearnos pautas para la teorización del mismo mas adelante.

Las funciones para hojas de cálculo son herramientas de cálculo que ayudan a tomar decisiones, llevar a cabo acciones y ejecutar operaciones que devuelven valores automáticamente. *Microsoft Excel* ofrece una amplia gama de funciones que permiten realizar diferentes tipos de cálculo.

Para el análisis estadístico de datos *Microsoft Excel* dispone de dos elementos fundamentales:

1. El Asistente para funciones.
2. Herramientas para el análisis.

El *Asistente para funciones* simplifica la introducción de fórmulas en la barra de fórmulas. Para iniciar el Asistente para funciones, elija el comando Función del menú Insertar o utilice el botón

f_x

de la barra de herramientas. Las funciones están agrupadas por categoría, tales como «Financieras», «Matemáticas y trigonométricas» o «Estadísticas». Cuando se selecciona una función del cuadro de lista, la definición de la función y de sus argumentos aparecerá automáticamente, así como la posición correcta de los puntos y comas (;) y paréntesis [( )].

Microsoft Excel proporciona un juego de funciones especiales para el análisis de datos denominadas *Herramientas para el análisis*. Entre dichas funciones están las de análisis estadísticos que pueden ser utilizadas en varios tipos de datos. Para utilizar estas funciones es necesario proporcionar la datos y parámetros requeridos para cada análisis de manera adecuada. El programa hace entonces los cálculos necesarios y muestra los resultados obtenidos. Antes de utilizar una herramienta para análisis, se deben organizar los datos que s desea analizar en columnas o en filas dentro de la hoja de cálculo. Dicha disposición se denomina rango de entrada. También se pueden incluir títulos de texto en la primera celda de una fila o de una columna para identificar las variables. Cuando se utilizan herramientas para analizar datos de un rango de entrada, *Microsoft Excel* creará una tabla de resultados. El contenido de la tabla de resultados depende de la herramienta para análisis utilizada. Si se han incluido títulos en el rango de entrada, *Microsoft Excel* los utilizará en la tabla de resultados; de lo contrario *Microsoft Excel* creará automáticamente títulos para los resultados que figuran en la tabla de resultados.

Para utilizar una de estas herramientas para el análisis hay que seguir los siguientes pasos:

1. Seleccione *Análisis de datos* en el menú *Herramientas*.

   Si el comando *Análisis de datos* no aparece en el menú Herramientas, ejecute el programa *Instalar* para instalar las *Herramientas para análisis*. Lo que haremos ahora será instalar un macro automático, herramientas para el análisis, que incluye *Microsoft Excel*.

2. En el cuadro *Funciones para análisis*, seleccione la función que desea utilizar.
3. Elija el botón «Aceptar».
4. Escriba el rango de entrada, de salida y demás opciones deseadas.

   Podrá insertar rangos de celdas en los cuadros «Rango de entrada» y «Rango de salida», escribiendo referencias de celda en el cuadro, o seleccionando el contenido de cada cuadro, y luego el rango de celdas de la hoja de cálculo. También podrá introducir referencias en otras hojas de cálculo en los cuadros «Rango de entrada» y «Rango de salida».

5. Elija el botón «Aceptar».

   Los resultados del análisis aparecerán en el rango designado.

Microsoft Excel proporciona un juego de funciones especiales para el análisis de datos denominadas Herramientas para el análisis. Entre dichas funciones están las de análisis estadísticos que pueden ser utilizadas en varios tipos de datos.

Analizar cada una de estas herramientas que dispone *Microsoft Excel* sería bastante interesante, pero me centraré en poner algún ejemplo para trabajar la teoría de muestras en una clase de Segundo de Bachillerato de Ciencias Sociales.

Para introducirnos en el tema vamos a utilizar la herramienta *Generación de números aleatorios* que dispone *Excel* para obtener mediante un proceso de *simulación estadística* muestras aleatorias de determinadas poblaciones de manera muy rápida. Mediante este muestreo artificial vamos a comprobar que:

- La media muestral y la desviación típica corregida son buenos estimadores de la media y desviación típica poblacional. Sin embargo, la desviación típica muestral no estima bien a la poblacional.
- Las propiedades de la media muestral.

Con la ayuda de la función *Generación de números aleatorios*, construimos una tabla que contiene siete muestras de tamaño 5 de una población que sigue una distribución Normal de media 18,1 y desviación típica 0,4. En las tres últimas filas, para cada muestra, calculamos su media, desviación típica y desviación típica corregida. Obteniéndose los siguientes resultados:

Muestra	1	2	3	4	5	6	7
	17,1672295	18,8532362	17,6147073	17,8628474	19,3898818	17,2469449	17,3774865
	17,8156865	18,1946125	18,5550002	18,0178099	17,8757564	17,4872407	18,3255938
	18,2543249	18,2539875	18,1825548	18,2368981	18,6365764	18,0120005	18,2599569
	18,3322331	18,5330395	17,8296882	18,0390793	17,8808136	18,1457821	17,7256383
	18,1588111	18,3091256	18,0939423	17,9766266	17,6959988	18,3247675	18,3609986
Media	17,945657	18,4288003	18,0551786	18,0266523	18,2958054	17,8433471	18,0099348
σ_n	0,42731565	0,2411378	0,32012806	0,12146646	0,63585459	0,40845658	0,39146208
σ_{n-1}	0,47775342	0,26960026	0,35791405	0,13580363	0,71090705	0,45666834	0,43766791

Se observa fácilmente que la media muestral es un buen estimador de la media poblacional. Se ve que la desviación típica muestral, en la mayor parte de los casos, subestima a la desviación típica de la población y que es mejor estimador de esta la desviación típica corregida. Es conveniente repetir la simulación varias veces para comprobar que los resultados son ciertos. Incluso es aconsejable hacerlo tomando muchas más muestras y estas con un tamaño mayor. Esto, con ayuda de la hoja de cálculo se hace de una forma rápida y visual.

El siguiente paso va a ser estudiar que la serie estadística de las medias de las muestras constituyen una nueva variable, que llamamos media muestral $\overline{X}$, y que sigue una distribución Normal de media la media poblacional y desviación típica la poblacional dividida por $\sqrt{n}$.

Es decir, $\overline{X}$ es

$$N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

La media de esta serie es 18,0864822 que prácticamente podemos decir que coincide con la media poblacional.

La desviación típica de esta serie es 0,18911949. Si hacemos

$$\frac{0,4}{\sqrt{5}} = 0,178885438$$

Para ver que los datos se ajustan a una distribución Normal podemos utilizar el papel probabilístico o aplicar el test de la χ^2 de Pearson.

Teorización del problema

En primer lugar, consideremos X la variable aleatoria de una población de tamaño *N*. Si tomamos todas las posibles muestras de tamaño *n* de dicha población y para cada una de ellas calculamos su media, ésta se comporta como una nueva variable, que denotaremos $\overline{X}$ y llamaremos *Distribución de la media muestral*; $\overline{X}$ cumple:

Es conveniente repetir la simulación varias veces para comprobar que los resultados son ciertos. Incluso es aconsejable hacerlo tomando muchas más muestras y estas con un tamaño mayor. Esto, con ayuda de la hoja de cálculo se hace de una forma rápida y visual.

$$\mu_{\overline{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Si N es lo suficientemente grande

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \rightarrow 1$$

En general si $N \geq 30$, $\overline{X}$ es

$$N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Denotando

$$f = \frac{n}{N}$$

fracción de muestreo tenemos que

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1-f}$$

Cuando N es grande la fracción de muestreo es algo que no afecta significativamente la precesión de resultados.

Ejemplo

Supongamos que 8295 es el promedio de kilómetros en 6 meses recorridos por los automovilistas de una muestra de 1000 que se extrajo de una población de 100000. Además $\sigma = 3100$ km.

$$f = \frac{n}{N} = 0,01$$

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1-f} = \frac{3100}{\sqrt{1000}} \cdot \sqrt{1-0,01} = 97,5$$

Si N lo hubiéramos tomado 800000,

$$\sqrt{1-f} = \sqrt{1-0,00125}$$

y

$$\sigma_{\overline{X}} = 97,9$$

Luego para todo propósito práctico el error estándar o desviación típica es el mismo para las dos muestras, pues en ambos casos el segundo término de la ecuación se aproxima a 1.

Consideremos, nuevamente, X la variable aleatoria de una población de tamaño N. Sea p la ocurrencia de un suceso. Si tomamos todas las posibles muestras de tamaño *n* de dicha población y para cada una de ellas calculamos la ocurrencia del suceso, ésta se comporta como una nueva variable, que denotaremos $\hat{p}$ y llamaremos *distribución de las proporciones*. Esta variable cumple

$$\mu_{\hat{p}} = p; \quad \mu_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p \cdot q(N-n)}{n \cdot (N-1)}}$$

Para N grandes tenemos que

$$\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \rightarrow 1$$

En general si $N \geq 30$, es

$$N(\mu_{\hat{p}}, \sigma_{\hat{p}})$$

con

$$\mu_{\hat{p}} = p$$

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}$$

Este resultado también es valido para poblaciones finitas con muestreo con reposición.

Margen de error e intervalo de confianza

Supongamos que se observa una muestra de 50 personas que realizan diariamente un trayecto, y que la duración media de dicho trayecto es de 30 minutos, con una desviación estándar de la población de 2,5. Se trata de obtener un intervalo de confianza del 95% para la media de la población.

Veamos como resolver este problema.

Nos están pidiendo que encontremos *a* y *b* de modo que la media μ esté entre estos valores con probabilidad del 95%, esto es, $p(a \leq \mu \leq b) = 0{,}95$. Este intervalo será:

$$\left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Llamamos *margen de error* –y lo denotamos ε– al radio de este intervalo.

Hay que observar que los extremos de este intervalo no son fijos, ya que para cada muestra que tomemos tenemos un intervalo distinto. Sin embargo μ, aunque desconocida, si lo es. Es aquí donde se ve claramente la interpretación de lo que es un intervalo de confianza, en este caso para la media de la población. Los extremos del intervalo son unas variables aleatorias que varían con la muestra tomada. Si tomáramos muchas muestras cada una de ella originaría un intervalo de confianza y el 95% de ellos contendrían, en este caso, a la media.

Los extremos del intervalo son unas variables aleatorias que varían con la muestra tomada. Si tomáramos muchas muestras cada una de ella originaría un intervalo de confianza y el 95% de ellos contendrían, en este caso, a la media.

La función INTERVALO.CONFIANZA( ), que *Excel* suministra en su asistentes de funciones, devuelve precisamente el margen de error. Dicha función posee la siguiente sintaxis INTERVALO.CONFIANZA(alfa; desv_estándar; tamaño) donde

- *Alfa:* es el nivel de significación empleado para calcular el nivel de confianza. El nivel de confianza es igual a 100(1 – alfa)%, o sea, un alfa de 0,05 indica un nivel de confianza de 95%.
- *Desv_estándar:* es la desviación estándar de la población y se asume que es conocida.
- *Tamaño:* es el tamaño de la muestra.

Para este ejemplo el radio del intervalo o margen de error es igual al valor que devuelve la función INTERVALO.CONFIANZA(0,05;2,5;50).

INTERVALO.CONFIANZA(0,05;2,5;50)=
= 0,692951

Luego el intervalo de confianza al 95% para μ es:

$$(30 - 0{,}692951, 30 + 06951) = (29{,}3\ ;30{,}7)$$

En ambos casos las unidades de los resultados son, obviamente, minutos

Determinación del tamaño de una muestra

Para ilustrar este tema vamos a empezar con un caso práctico.

Una empresa esta pensando utilizar una muestra aleatoria para determinar la vida media de las bombillas que ha recibido en un embarque de 20000 bombillas. Se sabe de una muestra que se extrajo de un embarque previo que la desviación estándar de la población es de 77 horas en la vida de la bombilla. Se desea tener un nivel de confianza de 98% en la precisión del estimado y que éste no fluctúe en más de 10 horas, por encima y por debajo, del verdadero valor de la vida promedio de las bombillas. ¿Cuál debe de ser el tamaño de la muestra?

$$\bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Es el intervalo de confianza para μ, luego

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 10$$

Para un nivel de confianza de 98%,

$$1 - \alpha = 0{,}98$$

tenemos que $Z_{\alpha/2} = 2{,}33$

$$n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{10} \right) = \left(\frac{2,33 \cdot 77}{10} \right)^2 = 321,879481$$

Por consiguiente, n = 322

Utilizando la función INTERVALO.CONFIANZA(0,05;2,5;n) se construye la siguiente tabla que muestra el margen de error para distintos tamaños de la muestra.

n	ε
200	12,6662856
250	11,3290702
300	10,3419789
318	10,0450179
319	10,029261
320	10,013578
321	9,99796834
322	9,98243147
350	9,5748119
400	8,95641642

Como se puede observar al aumentar el tamaño de la muestra disminuye el margen de error.

Podemos utilizar la función INTERVALO.CONFIANZA(alfa; desv_estándar; tamaño) para determinar qué tamaño tendrá la muestra para un error y nivel de confianza determinado.

α	n	ε (σ=1)	ε (σ=2,5)
0,01	25	0,5151669	1,28791726
0,05	50	0,27718035	0,69295089
0,02	75	0,26862283	0,67155707
0,1	100	0,1644853	0,41121325
0,01	150	0,21031601	0,52579002
0,05	300	0,11315841	0,28289601
0,02	600	0,09497251	0,23743128
0,1	1200	0,04748282	0,11870704

Como se puede observar al aumentar el tamaño de la muestra disminuye el margen de error.

Muestras de tamaño pequeño

Cuando la muestra es pequeña ($n \leq 30$) y la desviación típica es desconocida es necesario estimarla por S_{n-1} (corregida) y el estadístico:

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S_{n-1}}{\sqrt{n}}}$$

sigue una distribución *t* de Student con n-1 grados de libertad.

Excel dispone de la función DISTR.T.INV( ) que devuelve, para una probabilidad dada, el valor de la variable aleatoria siguiendo una distribución *t* de Student para los grados de libertad especificados. Su sintaxis es DISTR.T.INV(probabilidad; grados_libertad), donde:

- *Probabilidad* es la probabilidad asociada con la distribución t de Student dos colas.
- *Grados_libertad* es el número de grados de libertad para diferenciar la distribución.

Utilizando esta función se ha construido la siguiente tabla:

α	n–1	$t_{\alpha,n-1}$
0,05	2	4,30265573
0,05	4	2,77645086
0,05	6	2,44691364
0,02	2	6,96454663
0,02	4	3,74693627
0,02	6	3,14266799
0,01	2	9,92498826
0,01	4	4,60408046
0,01	6	3,70742782

La tabla siguiente, construida con la hoja *Excel*, calcula los extremos *a* y *b* del intervalo de confianza al 95% para la media poblacional, a partir de cuatro muestras de tamaño 5, generadas aleatoriamente de una población Normal N(19,2).

Muestra	1	2	3	4
	18,3007123	17,3835141	18,8507678	19,6904884
	23,392241	18,0060451	20,7934872	15,352617
	16,4613593	19,3010996	18,2100265	18,8200474
	19,8266966	17,6805551	20,5027695	19,4973526
	16,1599027	17,6719467	17,5397062	16,044406
$t_{\alpha,n-1}$ = 2,77645086				
$\overline{X}$	18,8281824	18,0086321	19,1793514	17,8809823
S_{n-1}	2,95073949	0,7553547	1,42239796	2,03312888
a	15,1643478	17,0707334	17,4132074	15,3565141
b	22,4920169	18,9465308	20,9454954	20,4054504

Bibliografía

CUADRAS, C. (1999): *Problemas de Probabilidades y Estadística*, PPU.

GARCÍA, R. C: *Métodos estadísticos: Teoría y práctica*, Scott, Foresman and Co.

QUESADA, V., A. ISIDORO, y L. A. LÓPEZ (1994): *Curso y Ejercicios de Estadística*, Alhambra Universidad.

SPIEGEL, M. R. (1997): *Estadística*, McGraw-Hill.

STRUM, R. D. y E. K. DONALD (1988): *First Principles of Discrete Systems and digital Signal Processing*, Addison-Wesley Publishing Company.

VAN BUREN, C.: *Excel 5.0 para Windows*, Anaya.

Manual del usuario de Microsoft Excel, Microsoft Corporation.

Julián Sainz
IES Santa Catalina
El Burgo de Osma (Soria)
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas

Sevilla

Fotos:
Luis Balbuena

Copenhague

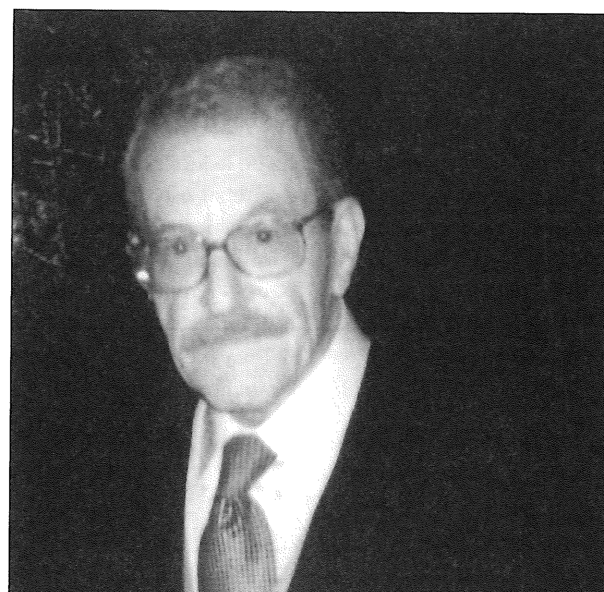
Bremen

SUMA 31
junio 1999, pp. 125-126

Miguel Antonio Esteban: Premio Gonzalo Sánchez Vázquez

NACIDO EN CÁCERES el 24 de mayo de 1926. Casado y padre de seis hijos, dos de ellos también docentes y uno de matemáticas. Licenciado en Ciencias por la Universidad Complutense de Madrid, comenzó a desarrollar su labor docente en el Instituto de Enseñanzas Medias «El Brocense» de Cáceres en 1949 como Profesor Ayudante Gratuito de Clases Prácticas. En los años siguientes pasó a ser profesor interino, simultaneando este puesto con la impartición de clases en varios colegios privados de la capital. Después de ganar la oposición de profesor Adjunto de EEMM, también obtuvo la de profesor numerario de la Escuela de Maestría Industrial de esta ciudad y por si todas estas clases eran pocas, aún preparaba a alumnos para reválidas, preuniversitario, ingresos en Escuelas de Ingenieros, etc.

En la reunión de la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, celebrada en Madrid el día ¿¿¿¿¿¿, fue otorgado por unanimidad el I Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez» al profesor Miguel Antonio Esteban, propuesto por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Retes Prósper».



SEMBLANZA

En el año 1979 accedió al hoy extinguido Cuerpo de Catedráticos de Bachillerato y por este motivo continuó impartiendo sus clases en el IB «Norba Caesarina» (antiguo femenino) de Cáceres. Durante los 42 años en que ha desarrollado su labor docente, siempre en Cáceres, ha sido un profesor ejemplar, siempre a disposición de la comunidad educativa de la que formaba parte y, sobre todo, de sus queridos alumnos. Por este motivo ha desempeñado cargos directivos y es una persona muy admirada y recordada en su ciudad.

Al convocarse por parte de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) el «I Premio Gonzalo Sánchez Vázquez» a los valores humanos y méritos en la docencia, los compañeros y amigos que lo conocemos bien, pensamos en Miguel como un magnífico candidato.

Su afición por la docencia, su disposición, aún después de su jubilación y su hombría de bien, nos indujeron a presentarlo como candidato al premio, propuesto por nuestra Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper».

Al iniciarse las primeras experiencias para reformar las Enseñanzas Medias, allá por el año 1984, Miguel fue uno de los profesores que se prestó voluntario para trabajar con las nuevas tendencias metodológicas. Cuando comenzaron los primeros movimientos de Renovación Pedagógica, Miguel estaba en ellos. En 1987, se formó en Cáceres, un grupo de profesores de Matemáticas (HALLEY), que más tarde, junto con otro de Badajoz, el grupo BETA, fueron el germen de la Sociedad Extremeña, que inicia su andadura en 1990. Miguel es socio fundador de ambos, Tesorero del primero y Vicepresidente Primero de la segunda. Con la aparición de los ordenadores, Miguel se entusiasma con los ZX-81, Spectrum, etc y se inicia en el lenguaje BASIC, asistiendo a cursos de formación en la Residencia de la Universidad de Extremadura en Jarandilla de la Vera y fomentando su introducción entre el profesorado como recurso metodológico.

En 1991 le llega la obligada fecha de la jubilación, y nunca mejor dicho lo de obligada, porque su estado anímico y su entrega en las clases le hubieran permitido continuar su labor a plena satisfacción. Para matar el «gusanillo» se ofreció a la APA del Instituto «Norba» para impartir clases gratuitas a los alumnos que quisieran, y por sus muchos conocimientos de geometría métrica (como a él le gusta denominarla), es requerido por muchos centros de profesores como ponente de cursos de perfeccionamiento. Ha impartido varios en la región: en Badajoz, Cáceres, Trujillo, Plasencia etc. siendo siempre valorado de forma muy satisfactoria.

Su lado humano es reconocido por muchos de sus alumnos que al enterarse de la propuesta de su candidatura, se han adherido de forma voluntaria y cariñosa

MIGUEL ANTONIO ESTEBAN es un dignísimo merecedor del I Premio Gonzalo Sánchez Vázquez, pues en muchos aspectos, su labor tras la jubilación, se asemeja a la del recordado Gonzalo.

Fruto de su trabajo son varios libros, algunos individuales y otros en grupo, sobre geometría y problemas de Olimpiadas Matemáticas para alumnos de EGB y ESO. Su gran mérito, no es solamente participar en los grupos de trabajo para su resolución, sino también, el maquetarlos en su ordenador personal.

Su afición por la resolución de problemas tipo Olimpiada, le hacen ser todos los años uno de los principales responsables en su organización, colaborando activamente en las fases comarcal y autonómica, habiendo acompañado a los representantes de nuestra región a la fase nacional de la III Olimpiada que se celebró en Huelva.

En muchas ocasiones se premia al investigador, al sabio, pero en pocas, al honrado profesor que disfruta con sus clases y ayudando a sus alumnos, tanto en la parte informativa, como en la formativa. Su lado humano es reconocido por muchos de sus alumnos que al enterarse de la propuesta de su candidatura, se han adherido de forma voluntaria y cariñosa.

Por todo ello, creemos que MIGUEL ANTONIO ESTEBAN es un dignísimo merecedor del I Premio Gonzalo Sánchez Vázquez, pues en muchos aspectos, su labor tras la jubilación, se asemeja a la del recordado Gonzalo.

Ricardo Luengo González
Presidente

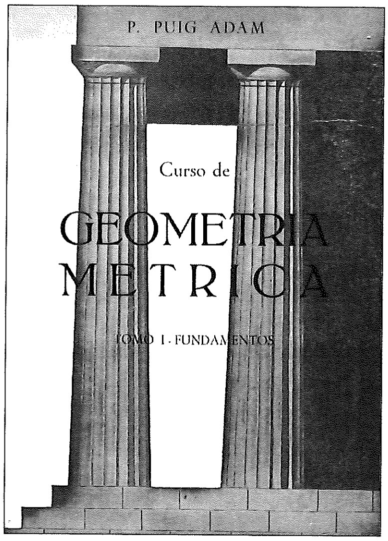
Antonio Molano Romero
Vocal de Actividades

Junta Directiva de la Sociedad Extremeña
de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»

SUMA 31
junio 1999

Un clásico de la geometría

CURSO DE GEOMETRÍA MÉTRICA
Tomo 1: Fundamentos. Tomo 2: Complementos.
Pedro Puig Adam
Euler Editorial
Madrid, Decimotercera edición, 1986.
ISBN: 84-85731-06-9.
Tomo 1: VIII + 372 páginas
Tomo 2: VIII + 324 páginas



Las obras pedagógicas de Pedro Puig Adam (1900-1960) han influido de forma decisiva y directa en la formación de una buena parte de los ingenieros y científicos españoles desde 1930 hasta nuestros días. Además, su forma de exponer las matemáticas y sus inquietudes pedagógicas han marcado la manera de hacer y de enseñar esta disciplina de muchos matemáticos españoles.

La vida de estudiante de matemáticas de Puig Adam en la Universidad de Barcelona está enmarcada por un hecho de vital importancia para la vida científica del país: la visita de muchos científicos a esa Universidad entre las que debe destacarse la de Einstein, invitado por el profesor

RECENSIONES

de la Universidad de Barcelona Esteban Terradas (1883-1950). Este profesor organizó, entre los años 1920 y 1923, la visita a Barcelona de algunos físicos y matemáticos de vanguardia, todos ellos invitados en el marco de Cursos Monográficos. Tullio Levi-Civitá (enero de 1921), Jacques Hadamard (abril de 1921), Hermann Weyl y Arnold Sommerfeld (los dos en marzo de 1923) y B. Kerékjarto (mayo-junio de 1923). Entre todas las visitas la que más expectación despertó fue la de Einstein, pero la acumulación de tantos científicos de renombre ponía de manifiesto las inquietudes y la actividad científica de la Universidad de Barcelona al comenzar la tercera década del siglo XX.

Las visitas de estos sabios fructificaron ya que asentaron relaciones personales entre científicos españoles con profesores de distintas universidades europeas. Así el profesor José M. Plans y Freire (1878-1934) mantuvo una abundante correspondencia con Levi-Civitá y tanto de sugerencias suyas como de copias de artículos y del inmenso interés que tenía Plans por la obra del italiano se beneficiaron algunos estudiantes suyos para los que extrajo temas para sus tesis doctorales. Entre los estudiantes de Plans estaban Fernando Lorente del No, Fernando Peña, María del Carmen Martínez Sancho y Pedro Puig Adam.

Puig Adam siempre guardó un recuerdo emocionado por sus profesores y compañeros en la Universidad de Barcelona como lo prueba la entrañable y agradecida evocación que hizo, desde el prólogo de la primera edición de su *Curso Teórico-práctico de Ecuaciones Diferenciales* en 1950, a su maestro y amigo Esteban Terradas.

Cuando, terminada la licenciatura, Pedro Puig Adam fue a Madrid a hacer el doctorado en Ciencias Exactas, no es extraño que presentase una memoria de tesis titulada *Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica relativista restringida*, que era un tema de investigación, marcado por Leví-Civitá, moderno y mucho más brillante y oportuno después de la confirmación de la Teoría de la Relatividad General en las observaciones del eclipse total de Sol de 1919 realizadas por Dyson y Eddington.

Las actividades pedagógicas de Puig Adam comenzaron en 1926, cuando obtuvo por oposición la cátedra de Matemáticas del Instituto San Isidro de Madrid. A partir de esa fecha y hasta la guerra civil escribió, en colaboración con Julio Rey Pastor (1888-1962), una serie de libros de texto para el Bachillerato del Plan de 1903, estas obras son *Nociones de Aritmética intuitiva, Nociones de Geometría intuitiva, Elementos de Aritmética intuitiva, Elementos de Geometría intuitiva, Lecciones de Aritmética y geometría, Elementos de geometría racional, Álgebra y Trigonometría.* Los libros tuvieron excelente acogida y se hicieron muchas ediciones.

En estas obras didácticas de primera época esbozó los principios prácticos del «método heurístico» que coinciden con las estrategias pedagógicas expuestas por G. Polya, en 1953 en, *Mathematics and Plausible Reasoning* (Editorial Tecnos 1966), obra en la que apostó por la intuición en Matemáticas en el sentido siguiente:

En estas obras didácticas de primera época esbozó los principios prácticos del «método heurístico» que coinciden con las estrategias pedagógicas expuestas por G. Polya...

> Hay que intuir un teorema matemático antes de probarlo, así como la idea de la prueba antes de llevar a cabo los detalles: hay que combinar observaciones, seguir analogías y probar una y otra vez.

Puig Adam mantuvo esta línea didáctica hasta el final de su carrera. En 1955 marcó esta orientación participando activamente en las Comisiones de Enseñanza Media en la sección para la mejora del Bachillerato, comisiones que marcaron la orientación científica del Plan del Bachillerato de 1957. De esa época son publicaciones docentes tales como *Decálogo de Didáctica de la Matemática, Didáctica de la Matemática Heurística*, obras que culminan con la publicación de *La matemática y su enseñanza actual.*

El *Curso de Geometría Métrica* de Puig Adam lo escribió para preparar adecuadamente el ingreso en las Escuelas de Ingenieros Industriales en un tiempo, año 1947, en el que la selección se hacía mediante el cómodo recurso (para el seleccionador) de proponer a los aspirantes una tanda de problemas y admitir como futuros alumnos a los que más habían resuelto. Este método, podía tener una cierta objetividad, pero no era una situación en la que se seleccionaran los mejores alumnos en matemáticas, sino la aquellos aspirantes que habían acumulado (ellos o las academias preparatorias) buenas colecciones de problemas de las partes de la Matemática más variadas, generalmente de Teoría de Números o de Geometría.

La situación de los aspirantes a las Escuelas de Ingenieros era sobradamente conocida por Pedro Puig Adam, pues en 1931 acabó la carrera de Ingeniero Industrial y desde 1934 hasta su muerte tuvo a su cargo la Cátedra de Cálculo de dicha Escuela.

Puig Adam manifestaba en el prólogo del primer tomo de la *Geometría Métrica* que, aunque el examen con el que se encontraban los aspirantes a las Escuelas y el método de selección que se llevaba a cabo con los mismos era muy duro no se conseguía que los alumnos alcanzaran una formación óptima, tal y como se desprende de sus propias palabras:

Pero, a una técnica examinadora, se adapta siempre una técnica preparadora. Para el preparador y el preparado se trata, ante todo, de asegurar el éxito o de aumentar su probabilidad. Vengan, pues, millares de problemas y ejercicios: regístrense y archívense codiciosamente las soluciones, cuantas más mejor, aunque la teoría quede reducida a un segundo plano, aunque los conceptos fundamentales terminen deslavazados y desvaídos en la mente del escolar. Lo que importa es ingresar. Y la pretendida formación científica del futuro técnico resulta, en definitiva, convertida en una gimnasia contraproducente y deformadora por defectuosa alimentación.

La propuesta de Puig Adam era volver discretamente a la teoría y dar normas seguras para los problemas prácticos. Para ello redactó un libro en el que quedaban patentes los principios de la Geometría, destacando la estructura conceptual interna de la misma y haciendo uso práctico de sus métodos para orientar, con criterio científico, la solución de los problemas. En sus propuestas pedagógicas manifestaba que la ciencia del ingeniero debía ser práctica. A continuación seleccionamos unas palabras del prólogo a la primera edición que ponen de manifiesto cómo suponía el autor del *Curso de Geometría Métrica* que debe ser la formación del ingeniero:

La ciencia del ingeniero debe ser práctica, pero no empírica. El empirismo termina en rutina y la rutina en ceguera. El ingenio se cultiva también con la luz de la razón cuando la intuición no lo ilumina bastante y la matemática que necesita el técnico debe proporcionar, no sólo los conocimiento pragmáticos, los útiles de trabajo, sino también el hábito de manejarlos con buen criterio.

Después de estas consideraciones de carácter general sobre el tipo de conocimientos científicos que debe adquirir el ingeniero a lo largo de su etapa formativa pasaba a justificar la razón de haber elegido determinados temas y el enfoque dado a los mismos. Según sus propias palabras en la estructuración de la obra siguió un camino que calificó de personal, en la medida que hacía

...redactó un libro en el que quedaban patentes los principios de la Geometría, destacando la estructura conceptual interna de la misma y haciendo uso práctico de sus métodos para orientar, con criterio científico, la solución de los problemas.

...se decantó por una axiomática que establecía las propiedades del movimiento frente a las que se fijaban en congruencias de segmento y de ángulos, cosa habitual en la mayor parte de los tratadistas de la época.

adaptaciones originales con el fin de facilitar los estudios geométricos y poder llegar de forma directa a los temas prácticos y a las cuestiones metodológicas que necesitaban los ingenieros.

Así, en los axiomas, se decantó por una axiomática que establecía las propiedades del movimiento frente a las que se fijaban en congruencias de segmentos y de ángulos, cosa habitual en la mayor parte de los tratadistas de la época. Y dice:

Más educativo parece, sobre todo para técnicos, caracterizar desde un principio los movimientos, las transformaciones típicas de la Geometría y ligar a cada figura aquellas transformaciones que pone de manifiesto sus propiedades.

De este modo encuadró la Geometría Métrica en el marco de la clasificación general de las Geometrías dada por Félix Klein (1849-1925) en su famoso Programa de Erlangen. De igual manera habían enfocado la Geometría Elemental treinta años antes Julio Rey Pastor y Puig Adam en la obra de matemática elemental para niños *Elementos y complementos de geometría* al introducir métodos intuitivos en la enseñanza de la matemática elemental española. Faltaba, a juicio del autor, ampliar estas ideas en plan racional para recoger los frutos de los planteamientos intuitivos anteriores y esto fue lo que hizo en el Tomo primero, que se ocupó de los fundamentos de la Geometría.

Aunque optó por un camino personal a la hora de exponer la Geometría dio una sucinta bibliografía y, según sus propias palabras, había huido de transcripciones más o menos disimuladas y utilizó los libros citados para delimitar temario y para contrastar procedimientos demostrativos. Las obras citadas son las de: Hilbert *Grundlagen der Geometrie*, Klein *La Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Enriques *Questioni riguardanti le Matematiche elementari*, Berzolari *Enciclopedia delle Matematiche elementari*, Thieme *Die Elemente der Geometrie*, Hadamard *Lecons de Géometrie élémentaire*, Torroja *Tratado de Geometría de la Posición y sus aplicaciones a la Geometría de la medida*, Rouché Comberouse *Traité de Géometrie*, Deltheil *Géométrie*, Schwan *Elementaire Geometrie*, Zacharias *Elementargeometrie der Ebene und des Raumes*, Halsted *Géométrie Rational*. A toda esta bibliografía añadió las enseñanzas de quienes fueron sus maestros Antonio Torroja, Miguel Vegas y Julio Rey Pastor.

En el primer tomo se ocupa de todas las cuestiones fundamentales metodológicas y por hacer una obra comprensible, dada la cantidad de temas tratados, tuvo que optar muchas veces por enfoque personales y originales en temas tales como en los problemas de orientación, tanto en el plano como en el espacio, (introdujo la noción de haz abierto), la adición del axioma III (de rigidez) a los axiomas de movimiento, la deducción de las propiedades de los movimientos especiales y las primeras relaciones métricas, así como la definición de equivalencia de polígonos y demostraciones derivadas de él y la demostración del teorema de Jordan para polígonos simples y para curvas cerradas cuyo número de puntos de intersección con cualquier recta es finito.

No ha sido mi propósito escribir un libro de Geometría pura, sino métrica, aun en el sentido etimológico de la palabra y, por tanto, he introducido en el momento oportuno la noción de medida con el objeto de operar cuanto antes con medidas de segmentos, en lugar de instituir un cálculo segmentario autónomo desvinculado de la Aritmética, como se hace en los modernos tratados alemanes.

En el primer tomo se debe destacar el enorme cuidado que puso el autor en la descripción de los procedimientos geométricos que se deben adquirir y que consideraba más importantes que la propia demostración de los teoremas. Puede observarse, en este sentido, el cuidado que tuvo en la explicación de la metodología de las construcciones geométricas. Y en lor argumentos, reflexiones y consideraciones que aportó sobre el hermoso método de resolución de problemas que es la inversión, a la que colocó después de las homotecias, aunque no fuera una transformación del grupo métrico.

A continuación se destacan algunos detalles que ponen de manifiesto la orientación metodológica de la obra y su originalidad:

a) Para generalizar la ordenación establecida en la recta al plano definió la noción de haz abierto. Concepto que se basa en la eliminación de un rayo del haz completo al cual tomamos como origen con lo que, dado un rayo cualquiera, se pueden definir rayos precedentes y siguiente a él. Resumiendo al eliminar un rayo de un haz se consigue un conjunto abierto, denso y linealmente ordenado.

b) En la equivalencia de áreas de polígonos parte de la transformación de un polígono en otro de igual área, pero de un lado menos, para concluir deduciendo la equivalencia geométrica de áreas demostrando que dos polígonos son geométricamente equivalentes si es posible transformar uno en otro agregando y restándole polígonos congruentes dos a dos.

c) Es destacable la elegante demostración del teorema de Jordan sobre curvas que cortan a una recta cualquiera en un número finito de puntos.

En el segundo tomo, dedicado a temas complementarios de geometría, insistió en el carácter práctico de la obra con estas palabras:

> Alguien ha dicho con frase esquemática que la formación del técnico consiste en aprender a «ver» y a «pensar»: Aunque la Matemática más parece destinada a esta segunda misión no hay que divorciarla de la primera. Mejor que «ver» y «pensar» yo diría «ver pensando» y «pensar viendo»; en términos más precisos. Aprender a ver el contenido matemático abstracto de los hechos reales y a proyectar en el campo de lo concreto los resultados de los razonamientos abstractos.

En el segundo tomo el autor complementó los recursos analíticos desarrollados en el primero con el manejo de funciones, tablas trigonométricas y recursos gráficos. Junto con un visión teórica de los temas tratados aplicó la trigonometría a los más variados temas que van desde la Astronomía, la Mecánica y la Topografía hasta la resolución de ecuaciones algebraicas. Aplicó la proyectividad a los sistemas de representación, a la obtención de perspectiva de un edificio o a la restitución de la planta a partir de una fotografía. Pero, además del gran número de aplicaciones que realizó en este segundo tomo, dio un curso casi completo de Geometría Proyectiva en el que estaban incluidos los teoremas de Staudt, la identidad de las cónicas métricas y proyectivas, y los teoremas de Legendre y Steiner. No contento con hacer un curso lleno de indicaciones prácticas y con indicaciones teóricas de gran nivel (las cuestiones teóricas de mayor nivel y las anotaciones a los diferentes temas las pone en letra pequeña) hizo una selección de problemas históricos que han ocupado a los matemáticos durante más de dos mil años y justificaba en el prólogo esta decisión con las siguientes palabras:

> El gran interés teórico e histórico de algunos problemas que han tenido en jaque a la Humanidad durante veintitantos siglos me ha inducido a cerrar este Curso con dos apéndices: uno sobre irresolubilidad de problemas geométricos y otro sobre la indemostrabilidad del postulado de Euclides. Ambos constituyen la concesión final a la curiosidad científica del lector. Hemos procurado elementalizar todo lo posible las demostraciones contenidas en ellos, con todo, su lectura exige un nivel algo más elevado que el resto de la obra, fácilmente alcanzable tras el estudio de una pocas cuestiones de Álgebra.

Los capítulos que abarca cada tomo son los siguientes:

Tomo I

1. Enlace, ordenación y sentido en el plano.
2. Congruencia y paralelismo en el plano.
3. Primeras relaciones métricas entre figuras planas.
4. Continuidad y construcciones fundamentales con regla y compás.
5. Medida y proporcionalidad.
6. Homotecia y semejanza.
7. Relaciones métricas derivadas de la semejanza.

En el primer tomo se debe destacar el enorme cuidado que puso el autor en la descripción de los procedimientos geométricos que se deben adquirir y que consideraba más importantes que la propia demostración de los teoremas.

En el segundo tomo el autor complementó los recursos analíticos desarrollados en el primero con el manejo de funciones, tablas trigonométricas y recursos gráficos.

8. Inversión y polaridad en el círculo.
9. Equivalencia y áreas.
10. Medida de figuras circulares.
11. Metodología de las construcciones geométricas.
12. Enlace, ordenación y sentido en el espacio.
13. Los movimientos y las congruencias en el espacio.
14. Propiedades métricas de los anguloides y de los poliedros.
15. Cuerpos redondos.
16. Homotecia, inversión y polaridad en el espacio.
17. Las áreas en el espacio.
18. Los volúmenes.
19. Apéndice: Concepto de curva, tangente, longitud de una curva y área de un recinto curvo. Teorema de Jordan.

Tomo 2

TRIGONOMETRÍA

1. Los problemas clásicos de la geometría rectilínea.
2. Propiedades de las funciones circulares.
3. Los problemas clásicos de la trigonometría esférica.

NOCIONES DE GEOMETRÍA PROYECTIVA

4. Invariantes métricos de la proyectividad.
5. Proyectividad entre figuras de primera categoría.
6. Proyectividad entre figuras de segunda y tercera categoría.
7. Ideas generales sobre sistemas de representación y sus aplicaciones.

LAS CÓNICAS

8. Estudio métrico de las cónicas.
9. Estudio proyectivo de las cónicas.
10. Apéndice 1: Sobre la irresolubilidad de algunos problemas.
11. Apéndice 2: Sobre la indemostrabilidad del postulado de Euclides.

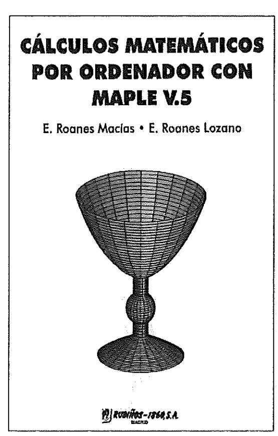
Cada uno de los capítulos anteriores está subdividido, a su vez, en dos, tres o cuatro lecciones, según palabras de Puig Adam la división en lecciones la hizo, más que para facilitar el estudio de los lectores, para poder acotar mejor los temas.

El segundo tomo acaba con los enunciados de los problemas de Geometría propuestos en los exámenes de ingreso de distintas Escuelas Especiales de Ingeniería , casi todos del curso 1946-47 (Aeronaúticos, Agrónomos, Caminos Canales y Puertos, Industriales, Minas, Montes, Navales y Telecomunicación) lo que contribuye a mantener el tono de ser *Curso de Geometría Métrica* un libro para preparar a los estudiantes para el ingreso en las Escuelas de Ingenieros, pero la obra de Puig Adam se eleva sobre eso y aporta a los libros de Geometría españoles originalidad en la exposición, belleza en las demostraciones, reglas claras de construcción de figuras y métodos de resolución de problemas geométricos además de información sobre muchos problemas históricos y exposición de métodos utilizados en distintas etapas de la evolución del saber matemático.

Es esta obra, en suma, una obra clara para acercarse a los estudios de Geometría en los que el lector puede encontrar, además de un hilo conductor, que une los diferentes temas tatados en la obra con enorme brillantez y claridad, diferentes métodos de construcciones geométricas minuciosamente explicados y hermosos ejemplos y problemas resueltos en los diferentes apartados que hacen que la obra sea fuente de inspiración para los profesores actuales. En suma, esta obra es un clásico de la literatura matemática y como tal siempre que alguien la estudie sacará ideas, inspiración y provecho.

Javier Arenzana Romeo

Víctor Arenzana Hernández



CÁLCULOS MATEMÁTICOS POR ORDENADOR CON MAPLE V.5
E. Roanes Macías
E. Roanes Lozano
Ed. Rubiños-1860
Madrid, 1999
ISBN: 84-8041-112-0
444 páginas
y un disquete de 3,5".

En la actualidad, los sistemas informáticos de cálculo simbólico están siendo muy utilizados tanto por los que se dedican a la enseñanza de las Matemáticas como por los que investigan en ellas o las utilizan como auxiliar en el desarrollo de las más diversas disciplinas científicas o tecnológicas.

Entre los distintos sistemas de cálculo simbólico existentes, MAPLE V ocupa un lugar muy destacado que lo ha conseguido, tanto por la enorme extensión de los campos de las matemáticas a que se aplica (algunos muy especializados), como por su cómodo y simple manejo. Este último aspecto es tan notable, que la introducción al uso del MAPLE V para tareas sencillas, apenas requiere aprendizaje ni lectura de manuales, bastando la consulta ocasional de las excelentes «ayudas en línea» que suministra el mismo sistema y de los «tutoriales» que lo acompañan.

No obstante, los usuarios no informáticos que tengan que utilizar cálculos matemáticos en sus trabajos científicos, técnicos o docentes, desearán, sin duda, profundizar más, conociendo a fondo la valiosa ayuda que puede ofrecerles el sistema MAPLE V, sin limitarse a esa simple introducción. Pero precisamente la riqueza de posibilidades que ofrece ese sistema en su enorme repertorio de comandos y procedimientos y, sobre todo, en lo que contienen los numerosos «paquetes» especializados de su biblioteca compartida, hacían que, hasta ahora, fuese bastante penoso conseguirlo con la simple consulta de los manuales disponibles. Además, aquellos que vayan a hacer un uso intenso del sistema, agradecerían la posibilidad de entrenarse mediante un repertorio adecuado de ejercicios.

Son estos deseos los que viene a satisfacer la obra que comentamos hoy. A lo largo de sus 26 capítulos, nos proporciona una completísima colección de ejemplos y ejercicios, con los que se puede ir aprendiendo cómo utilizar todas las prestaciones de MAPLE V, en forma cómoda y agradable. Estos ejemplos están presentados con gran sentido didáctico, ordenados en forma adecuada para un aprendizaje progresivo y clasificados por las partes de las matemáticas a las que se aplican, de tal modo que el lector puede escoger los que sean de su interés inmediato o recorrerlos todos, si desea tener un panorama general de las posibilidades del sistema.

Cada capítulo, además de ejemplos ilustrativos, contiene un elevado número de ejercicios, cuyas soluciones detalladas aparecen al final. Estos ejercicios no forman un simple repertorio de enunciados para entrenamiento, sino que constituyen en sí mismos una introducción didáctica que sustituye por completo a cualquier estudio de manuales.

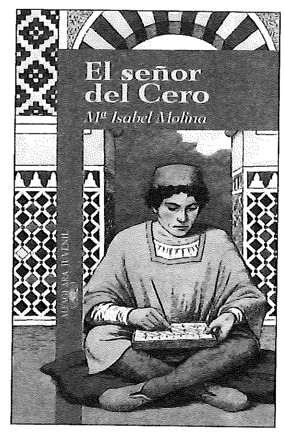
El libro va acompañado de un disquete de 3,5" en el que, entre otras cosas, se encuentran los archivos *.mws correspondientes a los ejemplos de cada uno de los capítulos, lo que, si el usuario lo desea, le evita el trabajo de teclear los enunciados; no obstante, para el principiante puede ser aconsejable hacerlo manualmente, para habituarse a la ortografía y sintaxis propias del sistema. También se dan en el disquete listas de datos que se utilizan en algunos de los ejercicios y que sería tedioso introducirlas directamente a través del teclado.

El sistema MAPLE V, además del repertorio extensísimo de comandos contenido en su núcleo y en la biblioteca compartida, ofrece las posibilidades propias de un lenguaje de programación, permitiendo al usuario la construcción de «procedimientos». Muchos de estos procedimientos, construidos por otros, están disponibles en «paquetes» que se añaden a la biblioteca compartida o incluso han sido incorporados a ella. En el libro que comentamos, ya en su capítulo 4, se puede aprender fácilmente como se construyen estos procedimientos y, a largo de todo él, se hace uso de este recurso cuando resulta conveniente.

Los autores del libro han desarrollado varios paquetes de procedimientos, de gran utilidad en ciertas áreas de las matemáticas, como son: Resolución de ecuaciones por diversos métodos específicos, Automatización de la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, Reducción de una matriz a la forma canónica de Jordán y ajuste de la matriz de paso, Aplicaciones lineales en el espacio euclídeo de dimensión 2, Isometrías, semejanzas, afinidades y proyecciones en 3 dimensiones, Geometría de la tortuga.

Al final del libro se incluye una tabla con todos los comandos mencionados en él, que son más de 600, para facilitar las consultas sobre su uso. Entre ellos están incluidos los propios de los paquetes desarrollados por los autores.

Julio Fernández Biarge



EL SEÑOR DEL CERO
Mª Isabel Molina
Col. Alfaguara Juvenil
Alfaguara
Madrid, 1996
ISBN: 84-204-4447-2
153 páginas

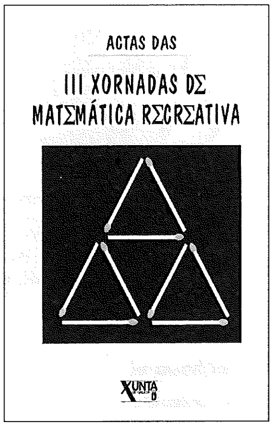
Esta breve novela está dirigida preferentemente al lector joven (a partir de 12 años), por su prosa clara y sencilla y su tono didáctico, completado con un glosario de nombres propios y términos históricos.

Se narra la peripecia de José Ben Alvar, un joven mozárabe de la Córdoba califal del siglo X donde conviven las Tres Culturas. Su condición de cristiano no es obstáculo para que José se eduque en la Escuela del Califa, donde destaca por su talento matemático, que le gana el apodo de Sidi Sifrn, «El Señor del Cero». Pero, víctima de envidias, debe huir del Califato hacia los condados catalanes de la Marca Hispánica, refugiándose en el Monasterio de Santa María de Ripoll. Allí, como en el resto de la Europa cristiana, todavía se usa el sistema de numeración romana y se desconoce el Álgebra. José se integra en la vida monástica, dedicándose a la traducción de la obra de Al-Kowarizmi que ha traído consigo. Desde la intolerancia y cerrazón religiosas, algunos juzgan que esos extraños símbolos (las cifras indo-árabes) que José utiliza son signos de herejes y que la gran rapidez de cálculo que permiten ha de deberse a conjuros diabólicos. Por segunda vez, José se verá en peligro, siendo su único «delito» el conocimiento.

Tras su lectura, la obra da pie a ricas sugerencias interdisciplinares para desarrollar con los estudiantes de Secundaria. Por una parte, desde las Matemáticas, la reflexión sobre el avance que supuso la numeración arábiga sobre la romana, así como la resolución de algunos problemas (los que aparecen en la novela y otros clásicos similares) enunciados bajo la forma de poemas orientales. También permite adentrarse en una época de la historia de nuestro país cuyo brillo universal con frecuencia se olvida: el Califato de Córdoba, su refinamiento cultural y poder político. Y al mismo tiempo, en el significado e influencia de los monasterios en la Baja Edad Media, junto a las pugnas de los obispos y condes catalanes por independizarse de los francos del norte. Más allá de la novela, los escolares pueden investigar qué ocurría en su ciudad o en su región en aquel tiempo, a qué mundo cultural y religioso pertenecía, qué huellas han quedado. Muchas sorpresas pueden aguardarles. Aunque, sobre todo, es una obra que abre posibilidades en el terreno ineludible (por acción u omisión) de la educación en valores. Permite, al hilo de una historia lejana en el tiempo, abrir el pensamiento de los escolares sobre cuestiones que siguen hasta hoy vigentes: la intolerancia religiosa frente a la ciencia, la aleatoria condición del «extranjero», la necesidad del diálogo entre culturas, etc.

En definitiva, considero que es una lectura recomendable para nuestros alumnos y su uso didáctico por los profesores de las áreas implicadas puede producir valiosas experiencias. Afortunadamente abundan los títulos de divulgación y pasatiempos matemáticos, pero no así las obras literarias en que las Matemáticas se relacionan con la historia y la vida. Animo a que éstas se divulguen a través de las Recensiones de SUMA. Pueden ser de gran utilidad en nuestra tarea educativa.

José María Sorando



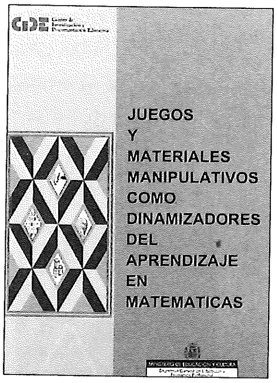
ACTAS DAS 'III XORNADAS DE MATEMÁTICA RECREATIVA'
Manuel Pazos Crespo (Edit.)
CEFOCOP da Coruña
Coruña, 1999
ISBN: 84-8416-954-5
444 páginas

En el indudable despertar de las Matemáticas recreativas en nuestro país (al menos entre una amplia minoría del profesorado) hay algunos eventos (y las personas que hay detrás) con una especial relevancia. Entre ellos, en un lugar destacado, hay que situar las Xornadas de Matemática Recreativa que se celebran en A Coruña. Y ello porque con una infraestructura mínima pero con mucho trabajo, entusiasmo y dedicación, Manuel Pazos ('Coque' para los que tenemos la fortuna de ser sus amigos) pone en marcha a cientos de enseñantes de todo Galicia y durante tres días les propone una oferta variada, rica y motivadora de distintos aspectos de la matemática recreativa que se hace en los diferentes rincones del Estado español. Y no es tarea pequeña (aunque como en tantas otras ocasiones de mérito no siempre sea reconocida por los estamentos oficiales), y más en estos tiempos de tanto hastío entre los enseñantes, juntar a unos 750 asistentes (¡sólo de Galicia, además!) a los que se les ofrecen sesenta talleres, cuatro conferencias plenarias, diez y ocho comunicaciones, diez muestras..., y un enorme ambiente lúdico y de intercambio de experiencias. Por resumir, una suerte de megaferia del placer matemático, preparado y listo para llevar al trabajo diario en las aulas de los diferentes niveles primario y medio.

Aunque ese clima sea difícil de transmitir a la letra impresa, quedan bastantes efluvios del mismo en las Actas de esas III Xornadas celebradas en junio de 1998 y que ahora aparecen editadas. Más allá de la inevitable heterogeneidad de una publicación de este tipo, recogen un interesante abanico de sugerentes propuestas aplicables a nuestras clases, en la que seguro que encontramos algunas con las que conectamos...., y podemos lograr que nuestros alumnos también lo hagan. Un buen filón del que sacar ideas para hacer que el próximo año, en que se conmemora el Año Internacional de la Matemáticas, sea inolvidable para nuestros alumnos. ¡Ánimo Coque, y a por las IV Xornadas!

Fernando Corbalán

JUEGOS Y MATERIALES MANIPULATIVOS COMO DINAMIZADORES DEL APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS
C. Sánchez Pesquero
L.M. Casas García
CIDE/Servicio de Publicaciones del MEC
Madrid, 1998
ISBN: 84-369-3151-3
301 páginas



Este Informe que reseñamos corresponde a un Proyecto de Innovación subvencionado por el MEC en el curso 1996/97 y llevado a cabo en dos colegios públicos de Badajoz, desde los niveles de Educación Infantil hasta el primer ciclo de la ESO. Su título responde fielmente al contenido del trabajo realizado, cuyo objetivo era «la búsqueda de caminos alternativos» para una mejor enseñanza de las Matemáticas mediante materiales elaborados por los participantes, «tomando como punto básico el juego, al considerar al mismo como elemento motivador para un posterior estudio de las mismas».

En la Introducción sitúan los conceptos de juego, de matemáticas y sus interacciones, y constatan que los juegos «pueden servir para desarrollar los contenidos conceptuales de las Matemáticas, [...] Pero nos parece que donde los juegos rinden todo su valor es a la hora de desarrollar los llamados contenidos procedimentales y actitudinales». Tras referirse a las formas de utilización de los juegos, no sólo hablan de las innegables ventajas que suponen, sino que también tratan de las dificultades de utilización de los mismos (problemas organizativos –«espacios para llevarlos a cabo, ruido,...»–, las dificultades materiales para tener juegos en cantidad suficiente –«en el presente trabajo ofrecemos alternativas para la fabricación de juegos con material de bajo coste»– y también la inseguridad del profesorado a la hora de utilizarlos en clase), y en particular señalan lo poco apropiados que son los materiales comercializados (sirven para una sola cosa, son caros,...). Por eso su alternativa es la fabricación por los propios alumnos de los materiales que deben utilizar, puesto que ya hasta el propio proceso de elaboración es educativo. Desde luego que es una posibilidad utilizable en los casos en que el profesorado está motivado y transmite ese mismo ánimo a sus alumnos, pero no cabe duda que no es de fácil generalización. Y por eso pienso que sería interesante (urgente quizás) que desde las (múltiples) administraciones educativas y también desde las Asociaciones de Profesores de Matemáticas (o de la Federación) se tomaran cartas en el asunto de fabricar líneas de materiales manipulativos asequibles y generalizables.

En este Informe se presenta una variada gama de posibilidades de materiales, como se puede ver con la simple enunciación de los capítulos de actividades (bloques lógicos, juegos de fichas, juegos de tableros, palillos, papel trama, poliminós, rompecabezas, pajitas de refrescos, tangrams, teselados y trioker). Ninguno de ellos especialmente novedoso (ni hace falta, hay que olvidar esa falsa idea tan extendida de que una enseñanza personal requiere inventar desde la nada textos, materiales, juegos,..., que más de un profesor utiliza como excusa para no hacer demasiadas cosas aparte de seguir el libro de texto), pero todas ellas bien estructuradas y presentadas, lo que indica que fueron bien trabajadas en clase. Y como consecuencia de ello son de fácil traslado a nuestras clases con pocos (o ningún) cambios. Si hubiera que destacar alguno me inclinaría por los rompecabezas y los teselados. Asimismo hay una interesante bibliografía sobre el tema, compuesta por libros accesibles y la mayoría de ellos se pueden encontrar en las librerías.

En cuanto a las conclusiones es preciso destacar que les sucedió lo que se suele siempre constatar cuando se hace una enseñanza manipulativa, que «los alumnos han trabajado las Matemáticas desde otro enfoque diferente al tradicional, sintiéndose felices en clase e interesándose por las mismas». Y que además «el Proyecto ha supuesto un trabajo muy enriquecedor tanto para alumnos como para profesores».

En resumen, una publicación interesante que da cuenta de un buen trabajo, que supone un paso más en la normalización de propuestas de aprendizaje de las matemáticas en la que los propios alumnos participan activamente y de la que se pueden extraer variadas posibilidades de introducción de materiales manipulativos en las clases de cada día.

Fernando Corbalán

SUMA 31
junio 1999

Año 2000, Investigación en el aula

CRÓNICAS

AÑO 2000: un reto para la comunidad matemática

Se acerca el año 2000. La cifra mítica que tanto dio que hablar hace 25, 50 años. Películas, libros, canciones, conferencias, debates... Un sinfín de previsiones: sobre la superpoblación del planeta, la vida en el espacio, la precisión de las máquinas, la producción, el comercio, las ventas a nivel mundial, etc. En todas y en cada una de estas visiones de lo que entonces era futuro, tuvieron su papel las matemáticas. No sólo las matemáticas, pero también las matemáticas.

Ya estamos en el 2000. Aquel futuro es presente y la verdad es que del mito ha quedado poco. No se vive en el espacio, más que algunos cortos períodos de tiempo. Los ordenadores no se vuelven locos como HAL, pero tenemos la amenaza del efecto 2000. La población del planeta aumenta, pero las perspectivas catastrofistas no se cumplen, al menos en todo su rigor. Y las máquinas muestran una gran precisión, especialmente las máquinas de matar. Con sus errores, dramáticos e injustificables. Se decía en televisión que los misiles conseguían su objetivo «con precisión matemática». Nos duele oír eso.

Las matemáticas y el mundo son palabras que debieran ir unidas: las matemáticas forman parte de la cultura, de aquello que más honra a la humanidad entera. Todas las culturas han desarrollado matemáticas, las matemáticas se crearon y desarrollaron para resolver problemas humanos. Quizás también puedan servir para pensar, para pasar el rato, o para amargarle la vida a algunos estudiantes, pero la razón de ser de las matemáticas es ayudar en la resolución de problemas humanos. Contar en un mercado puede favorecer el intercambio justo y equitativo. Orientarse y localizar un punto en el inmenso mar puede salvar la vida a los náufragos. Prever el desarrollo de una situación atendiendo a sus variables y a la dependencia mutua entre ellas, puede evitar un desastre, o llevar una operación a buen puerto. Medir con mayor o menor precisión permite dominar el espacio que nos rodea, construir casas donde vivir, objetos para comer, dormir, sentarse... Diseñar nos permite compartir lo útil y práctico con lo bello, unir la estética a la utilidad. Jugar, estableciendo normas que todos deben cumplir, puede acostumbrarnos al juego democrático que, con suerte, viviremos de mayores. Explicar las ideas propias, con sentido, capacidad de síntesis, claridad en la exposición, permite que nos comprendamos mejor los unos a los otros.

Ahora, como siempre, las matemáticas deben ayudar a resolver los problemas humanos. No pueden ser una herramienta de destrucción eficaz y rigurosa. Y en ello todos tenemos nuestra pizca de responsabilidad.

Llega el año 2000, declarado por la UNESCO Año Mundial de las Matemáticas el día 11 de noviembre de 1997, a instancias de la Unión Matemática Internacional (IMU). De nosotros va a depender que las matemáticas sean protagonistas del año, puesto que las declaraciones no pasan de ser sólo eso. Somos las personas las que hacemos realidad los deseos, y en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) nos lo hemos propuesto. No queremos que la celebración de las Matemáticas en el 2000 sea de puertas para adentro, dedicada en exclusiva a las personas que nos dedicamos a ellas. Al contrario, nuestra propuesta es sacar las matemáticas a la calle, que los ciudadanos y las ciudadanas tengan la oportunidad de percibirlas desde un ángulo diferente, que las reconozcan en sus actividades cotidianas, en el mundo de la comunicación, del arte, de la tecnología..., que se valore la importancia de las matemáticas y de la educación matemática para el desarrollo de nuestra sociedad.

...queremos sacar las matemáticas a la calle, que los ciudadanos y las ciudadanas tengan la oportunidad de verlas desde un prisma diferente, que las reconozca en sus actividades cotidianas, en el mundo de la comunicación, del arte, de la tecnología..., que se valore la importancia de las matemáticas y de la educación matemática para el desarrollo de nuestra sociedad.

Se ha creado un organismo para coordinar las actividades del 2000: el Comité Español para el Año Mundial de las Matemáticas (CEAMM2000). Esto ya es en sí un logro, pues por primera vez coincidimos en torno a un objetivo común –es más, nos «vemos las caras» por primera vez– todas las sociedades e instituciones de ámbito estatal relacionadas con las matemáticas y la educación matemática: hasta ocho Sociedades profesionales, el CSIC, la Real Academia de las Ciencias y el Ministerio de Educación y Cultura. Los representantes de la FESPM en el CEAMM2000 somos María Jesús Luelmo y Xavier Vilella, por decisión de nuestra Junta de Gobierno. También tenemos presencia en el Comité Ejecutivo, formado por 4 personas.

Hasta ahora, el CEAMM2000 se ha reunido media docena de veces (la última en Sevilla a finales de mayo). La primera parte de nuestro trabajo consistió en formar el comité (tardamos un tiempo en coordinar a todas las instituciones implicadas...), definir nuestros objetivos, establecer un plan de trabajo y un presupuesto, crear una mínima infraestructura económica y poner en marcha una secretaría (con la inestimable ayuda del CSIC, que ha proporcionado un administrativo, asesoría en muchas cuestiones burocráticas y locales de reunión). Pero nuestro interés se ha centrado en impulsar la creación de los comités locales, de ámbito autonómico generalmente, apoyándonos en las Sociedades de la FESPM, en los decanatos y departamentos de Matemáticas de distintas facultades universitarias, en los miembros de otras sociedades matemáticas. Estos comités locales son los encargados de diseñar las actividades para su zona; les hemos propuesto, como elemento vertebrador, la celebración de una Semana de las Matemáticas en todos los centros educativos, complementada con actividades culturales de contenido matemático para la población en general (exposiciones, concursos, cine y vídeo, conciertos, conferencias...).

Además de esta tarea de impulsar y coordinar los comités locales, nos hemos propuesto fomentar la presencia del año 2000 en las instituciones: el príncipe Felipe ha aceptado la Presidencia de Honor del Comité; la Comisión de Ciencia y Tenología del Senado ha aprobado una proposición no de ley de apoyo al año 2000, e incluso realizará algunas actividades, como una edición facsímil de una obra matemática, una exposición de libros de matemáticas y otra con documentos y aparatos de medida de la época de la implantación del Sistema Métrico Decimal. El Parlamento andaluz ha adoptado una resolución similar y tenemos noticia de que van a proponerse otras en diferentes cámaras autonómicas.

También nos parece importante potenciar la imagen del año 2000. Se ha convocado un concurso de posters, que fallaremos en breve, al que se han presentado más de un centenar de producciones, y un pintor de gran renombre está preparando un cartel conmemorativo. Podremos aprovechar todas estas imágenes para confeccionar camisetas, calendarios, pegatinas... También parece que van por buen camino las gestiones realizadas para que se emita un sello, incluso toda una serie, con imágenes de matemáticos españoles.

Televisión Española nos ha confirmado la emisión de una «noche temática» sobre las Matemáticas, se está preparando una serie para la televisión educativa, y tenemos en proyecto proponer a las grandes cadenas estatales nuevas actuaciones. Ya hay contactos con la prensa, intentamos conseguir una cobertura informativa adecuada, incluso que se dedique un suplemento dominical al año 2000. Sabemos que muchos comités locales están realizando ya gestiones en el mismo sentido en cadenas de televisión y en prensa autonómicas.

Estamos conectando con todas aquellas instituciones y empresas que puedan estar interesadas por las matemáticas o la educación matemática, con el fin de pedirles su colaboración en el ámbito estatal y local. Editoriales, casas de material didáctico, productoras de vídeo y software, distribuidoras de calculadoras, grandes fundaciones... recibirán un dossier informativo sobre nuestros objetivos y posibles puntos de colaboración.

Finalmente, nos hemos propuesto crear bancos de datos de recursos (exposiciones, películas, vídeos...) que puedan facilitar a los comités locales la organización de sus propios proyectos. Intentamos incluso recabar fondos para comprar alguna gran exposición «circulante», pero la decisión aún está sobre el tejado.

De todas las actividades concretas de las que ya tenemos noticia, queremos destacar los dos grandes eventos que se producirán en Cataluña: por una parte, el Tercer Congreso Europeo de Matemáticas, organizado por la Societat Catalana de Matemàtiques, que reunirá la elite de la matemática continental; por otro lado, el Congrés d'Educació Matemàtica cem2000, organizado por la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Queremos que al final del año 2000 la sociedad tenga una imagen más completa y positiva de las matemáticas, que las instituciones educativas se sensibilicen hacia los problemas específicos de su enseñanza, para que nuestra tarea de lograr una educación matemática justa y adecuada para toda la población sea, quizás, un poquito más fácil.

(FEEMCAT), que se celebrará por primera vez en su historia, y que ha sido aceptado como congreso satélite del 3ecm. Un reto para nuestros compañeros catalanes, más aún cuando han escogido un tema a debate que resulta ser de rabiosa actualidad: pretenden avanzar en el debate entre Sociedad y Matemáticas, planteando una pregunta: ¿Qué espera la Sociedad que se enseñe de matemáticas en los centros educativos? Para la preparación y parte del desarrollo del cem2000 desean contar con la presencia y la opinión de destacados representantes de la «Sociedad» y asimismo con la de educadores matemáticos. Cuentan con un presidente de honor, Ken Clements, y con un Comité Asesor de gala, encabezado por Alan Bishop, Paolo Boero, Paulo Abrantes, Guida de Abreu, Luis Rico, Josep Maria Fortuny, Claudi Alsina, entre otros destacados compañeros.

Pero las actividades previstas para el año 2000 no se acaban aquí y cada día surgen nuevas iniciativas. Por toda España se celebrarán conferencias, coloquios, jornadas, concursos y exposiciones, en centros educativos y en centros culturales, y se intentará que la presencia en los medios de comunicación sea constante. Queremos que al final del año 2000 la sociedad tenga una imagen más completa y positiva de las matemáticas, que las instituciones educativas se sensibilicen hacia los problemas específicos de su enseñanza, para que nuestra tarea de lograr una educación matemática justa y adecuada para toda la población sea, quizás, un poquito más fácil.

Xavier Vilella

María Jesús Luelmo
Representantes de la FESPM
en el Comité español
del año 2000 (CEAMM2000)

Investigación en el aula de Matemáticas. Los recursos

De nuevo, por cuarto año consecutivo, presentamos la crónica de las jornadas «Investigación en el aula de Matemáticas», celebradas en Granada y organizadas por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

En esta ocasión, las jornadas se han centrado en el tema «Los recursos», intentando dar continuidad al seminario titulado «Recursos para el aprendizaje en el aula de matemáticas. Elaboración y uso», celebrado también en Granada el curso pasado y promovido por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, con el fin de responder a la demanda existente en un amplio sector del profesorado de Matemáticas relacionada con este tema.

El trabajo se ha desarrollado, como viene siendo habitual, a lo largo de dos fines de semana, durante los días 12, 13 y 14 de noviembre y 10, 11 y 12 de diciembre. Más de un centenar de participantes de todos los niveles educativos –Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad– han compartido conferencias, comunicaciones, talleres, mesas redondas, además del valioso intercambio informal de puntos de vista, experiencias, ideas... que tiene lugar de forma paralela en conversaciones «de pasillo».

Al igual que en ediciones anteriores, las jornadas han estado abiertas tanto al profesorado en activo, como a estudiantes de últimos cursos de carreras, o a titulados que aún no se han incorporado al mundo laboral, quienes habitualmete encuentran dificultades para participar en actividades de formación del profesorado.

Antes de hacer referencia al trabajo desarrollado, hemos de felicitarnos, todos, por el funcionamiento de las jornadas, tanto los organizadores por el trabajo realizado y por la buena colaboración que se ha vuelto a poner de manifiesto, entre el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y la Junta Directiva de la SAEM Thales de Granada, como los participantes, por la buena calidad de sus aportaciones y todos los asistentes porque su presencia y participación posibilita y anima este tipo de actividades.

Hemos podido escuchar cinco conferencias que han abarcado, con sus temas, todos los niveles educativos:

- *¿En el aula de Matemáticas se utilizan los recursos didácticos?* José M.ª Sánchez Molina.
- *La fotografía como recurso en la enseñanza de las Matemáticas.* Evaristo González González.
- *Recursos didácticos de la enseñanza de las Matemáticas en la Universidad.* Miguel Pasadas Fernández.
- *En Educación Infantil globalizamos el conocimiento con...* A cargo del Grupo Ogíjares, coordinado por M.ª Concepción Martínez Ruiz.
- *Recursos y diversidad.* Luis Pérez Bernal.

Para potenciar un trabajo participativo, y teniendo en cuenta la peculiaridad del tema central de las jornadas, se han desarrollado cinco talleres simultáneos, contando todos ellos con una importante participación:

- *Calculadoras gráficas.* Luis Rico y Evelio Bedoya.
- *Jugamos con Matemáticas. Recursos de Infantil y Primaria.* José Damián Zaragoza.
- *Poliedros.* Grupo La X.
- *Cabri.* Agustín Carrillo de Albornoz.
- *Estadística y Probabilidad.* Coordinado por Carmen Batanero.

Además de lo anterior ha tenido lugar una mesa redonda, coordinada por José M.ª Cardeñoso Domingo, sobre el tema *Los materiales en la formación del profesor de Matemáticas.* Hay que destacar el interés suscitado por la misma, así como la alta participación de los asistentes.

Más de un centenar de participantes de todos los niveles educativos han compartido conferencias, comunicaciones, talleres, mesas redondas, además del valioso intercambio informal de puntos de vista, experiencias, ideas... que tiene lugar de forma paralela en conversaciones «de pasillo».

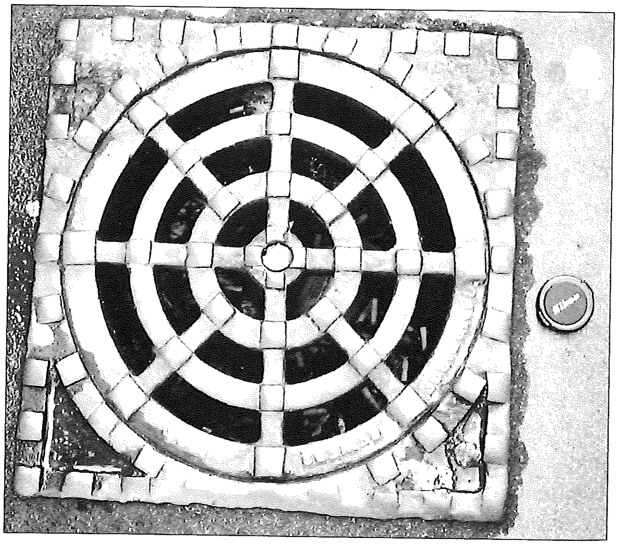
Por otro lado, se han presentado distintas comunicaciones, todas ellas relacionadas con el tema común de los recursos: «Elaboración de juegos matemáticos con cartulina», «Material didáctico para la enseñanza de la Estadística informatizada», «Una experiencia de uso de Statgraphics como recurso didáctico en la introducción de la distribución normal», «Recursos y aplicaciones de la Estadística», «Materiales en el currículo de matemáticas», «Los organizadores del curriculum en la Geometría de la Esfera». Los textos de todas ellas, así como los de las conferencias, quedan recogidas en las actas de las jornadas, que ya se han distribuido entre los asistentes.

El acto de clausura estuvo presidido por Antonio Romero, decano de la Facultad de Ciencias de la Educación; José María Sánchez, delegado de la SAEM Thales de Granada; y José María Cardeñoso, miembro del Departamento de Didáctica de la Matemática. Todos ellos elogiaron el nivel de participación y calidad de los trabajos presentados, animando a la organización a continuar con la actividad que tanto interés despierta.

Belén Cobo Merino

SAEM Thales. Granada

Cambridge
Foto:
Luis Balbuena



SUMA 31
junio 1999

IX JAEM, X Olimpiada Matemática Nacional,...

CONVOCATORIAS

IX JORNADAS para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

La novena edición de las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas convocadas por la FESPM (Federación Española de Profesores de Matemáticas), se celebrarán en Lugo los días 9, 10 y 11 de septiembre y tendrán como sede la Facultad de Veterinaria. Las jornadas en esta ocasión están organizadas por la Sección de Matemáticas de ENCIGA (Asociación dos Ensinantes das Ciencias de Galicia).

La cifra actual de inscritos ya supera los seiscientos de un tope de ochocientos matriculados, en su mayoría profesores de matemáticas de los distintos niveles educativos desde la Educación Infantil hasta la Universidad, procedentes de distintas comunidades del Estado Español. Hay que destacar la presencia de algunos profesores de Francia, Portugal, Italia, Rusia, EE.UU. y Cuba, así como la de cerca de cien estudiantes de las Facultades de Matemáticas y de la Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado.

Para este Congreso están previstas cuatro conferencias plenarias, treinta y dos ponencias y más de cien comunicaciones repartidas en diez mesas temáticas. Simultáneamente con las sesiones anteriores habrá: talleres, paneles, muestras de software y videos didácticos y exposiciones de libros y materiales didácticos.

Con motivo del Xacobeo99, están previstas rutas por el Camino de Santiago, incluyendo una visita a Santiago de Compostela.

Paralelamente a estas Jornadas se celebrarán actividades de animación matemática: el Museo Provincial de Lugo acogerá una exposición sobre «Matemática y Ciencia en Galicia» y otra sobre la «Historia de la calculadora».

La organización de las Jornadas pretende sacar a la calle actividades de popularización de las matemáticas.

Conferencias

- Rafael Pérez Gómez: *Matemáticas y Tercera Cultura.*
- Emna Castelnuovo: *La matemática escolar en este siglo.*
- André Antibi: *La motivación en matemáticas ¿La del profesor? ¿La del alumno?*
- Claudi Alsina Catalá: *Entre la realidad y la utopía... Nosotros los de mates.*

Presentación del Año Mundial de las Matemáticas

La Unión Matemática Internacional en su reunión de Río de Janeiro (1992) acordó proclamar el año 2000 como «Año Mundial de las Matemáticas», esta propuesta fue respaldada por la UNESCO en su 29.ª Conferencia General (1997).

En un acto plenario del Congreso el profesor José Luis Fernández Pérez, Presidente del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas, presentará las actividades previstas en nuestro país con motivo de esta celebración.

Ponencias por mesas temáticas

1. Tecnologías en la enseñanza de la Matemática. Calculadoras gráficas y ordenadores.
   - Manuel Cortegoso Iglesias, Enrique Gómez Cabrero: «¿Qué matemáticas habría que enseñar si se permitiese el uso de todo tipo de calculadoras en la selectividad?».
   - Mariló Fernández Mira: «Yo programo, tú calculas, el representa...».
   - Francisco Puerta García: «Tratamiento de la función derivada con calculadora gráfica».
   - Margarita Marín Rodríguez: «Encuentros telemáticos con Matemáticas».
   - Antonio Pérez Sanz: «Ver las Matemáticas».
   - José Francisco Quesada Moreno: «El proyecto Thales-CICA-Internet, como recurso didáctico y como infraestructura para la educación a distancia».
2. La enseñanza de la Estadística: Un reto pendiente.
   - Francesc Borrel Thio: «La estadística. Su presencia en la sociedad actual y en el currículum de la educación secundaria».
   - Wenceslao González Manteiga: «Una visión personal de la enseñanza de la estadística en los distintos niveles educativos».
   - Anna Pol Masjoan: «La estadística. Su presencia en la sociedad actual y en el currículum de la educación secundaria».
3. Talleres y optativas de Matemáticas.
   - José Luis Álvarez García, Antonio E. González García: «El Taller de Matemáticas: Un lugar para la investigación».
   - Luis Bou García: «Obradoiro de Matemáticas: Algunas propuestas».
4. Matemáticas en la vida real y en relación con otras materias escolares.
   - José Luis Fernández Pérez: «Mercados financieros y matemáticas».
   - Covadonga Rodríguez-Moldes Rey: «Etnomatemáticas: Las matemáticas "vivas"».
5. Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.
   - Bernardo Gómez Alfonso: «Los cambios en las nociones de número».
   - Ángeles Ortiz: «El pensamiento algebraico para todos».
6. Bases del aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil y primaria.
   - Genara Borrajo Borrajo: «Construcción del conocimiento matemático en la Educación Infantil».
   - Mequé Edo Basté: «Educación Infantil: Una realidad plural repleta de posibilidades matemáticas».
   - M.ª Antonia Canals Tolosa: «El material manipulativo en el aprendizaje de las Matemáticas en la escuela primaria».
   - Antonio R. Martín Adrián: «Principios constructivistas en la enseñanza de la Matemáticas».
7. Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad
   - Felipe Gago Couso: «La abstracción en la resolución de problemas».
   - José Méndez Pérez: «La enseñanza de las matemáticas en la Universidad».
8. Formación del profesorado de Matemáticas
   - M.ª Luz Callejo de la Vega: «Investigar sobre la propia práctica, un medio de desarrollo profesional».

IX JAEM

Lugo

septiembre 1999

Organiza: ENCIGA

Convoca: FESPM

- Constantino de la Fuente Martínez: «El desarrollo profesional y la formación permanente: ¿convergerán alguna vez hacia el mismo límite?».

9. Las Matemáticas en la ESO y en Bachillerato
   - Gillermo Aguirre Herrera: «Sentando las bases: dos, diez... (Matemáticas en la ESO)».
   - Fidela Velázquez Manuel: «Las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria: Un modelo cultural».
   - Francisco García: «¿Pueden sobrevivir las matemáticas en un Bachillerato virtualmente obligatorio?».
   - José Luis Valcalce Gómez: «Matemáticas en el Bachillerato. Reflexiones sobre estructura y currículo».

10. Matemática recreativa
   - David Barba Uriach: «¿Matemática mágica... Matemática sorprendente?».
   - Manuel Pazos Crespo: «Hacia la Matemática recreativa».

Organización

La organización de las IX JAEM tiene una página Web en la que se incluyen toda la información disponible y actualizada sobre estas jornadas:

http://www.cesga.es/jaem/

Para contactar con la organización de las IX JAEM puede hacerse en la siguiente dirección:

CEFOCOP de Lugo
Att: JAEM
Rúa Dr. Yáñez Rebolo 31, 27004 Lugo
Tfno 982 251068/ 982 250912
Fax 982 251126
Email: cflugo@teleline.es

Para contactar con la agencia colaboradora
Hemisferios Viajes S.L.
Estación de Autobuses 2ª Planta
27002 Lugo
Tfno 982 25 45 45/ 982 25 40 40
Fax 982 23 13 07
Email: hemisferios.viajes@teleline.es

X OLIMPIADA

Albacete

junio 1999

Organiza: SCMPM

Convoca: FESPM

X Olimpiada Matemática Nacional

De 25 al 30 de junio del presente año se va a celebrar en Albacete la décima edición de la Olimpiada Matemática Nacional, para alumnos de 2.° de ESO, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizada por la Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas, de reciente constitución. En esta ocasión la Olimpiada esta patrocinada por la Diputación de Albacete y colaboran en su desarrollo La Tribuna de Albacete, Texas Instrument, Librería Popular y Editorial Anaya, así como los Centros de Profesores de Albacete, Almansa, Hellín y Villarrobledo.

Presentación

Las olimpiadas matemáticas son certámenes colectivos de resolución de problemas que se remontan a los desafíos públicos de la Italia renacentista y tienen su referente en los tiempos recientes en las competiciones que se iniciaron en Hungría en el siglo XIX. Hoy en día las olimpiadas matemáticas se celebran anualmente en todos los niveles educativos y ámbitos geográficos con una masiva participación que supera con mucho a los Juegos Olímpicos deportivos. A diferencia de lo que ocurre en estos últimos, en el caso de las matemáticas, no se trata de batir marca alguna, sino estimular el gusto por el estudio de esta materia.

Desde hace diez años, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas viene convocando esta Olimpiada para los alumnos de 13-14 años en una edad estratégica para que el gusto por la resolución de problemas matemáticos se consolide entre los estudiantes.

La Olimpiada Matemática Nacional pretende contribuir de manera indudable a la popularización de las Matemáticas y a una elevación del nivel de la educación matemática de chicos y chicas implicados durante varios meses en fases provinciales y autonómicas en la tarea de resolver genuinos problemas matemáticos. Los profesionales de la educación que dedican su esfuerzo a la organización de la Olimpiada Matemática parten de la firme creencia de que su misión es mucho más amplia que la de transmitir matemáticas. Como decía Freudenthal «nunca deberíamos pensar en las Matemáticas que puede aprender un niño, sino en aquellas con cuyo aprendizaje se contribuya al desarrollo de su dignidad humana». Lo importante no son las Matemáticas, sino los alumnos y alumnas.

Propósitos

- Ofrecer a los alumnos la oportunidad de «disfrutar» con la resolución de genuinos problemas matemáticos, que no pueden resolverse con recetas previamente aprendidas, sino que requieren de diversas estrategias de pensamiento.

- Sensibilizar a la sociedad de una mayor y mejor preparación matemática en la que se persiga fundamentalmente dotar de recursos para la resolución de situaciones problemáticas.
- Contribuir a la difusión entre profesores y alumnos de aquellos aspectos de las Matemáticas más lúdicos y creativos.
- Conocer y practicar estrategias heurísticas y destrezas convenientes para la resolución de problemas.
- Servir como elemento de motivación y profundización sobre todo para aquellos alumnos más interesados por las Matemáticas.
- Contribuir a desarrollar la inquietud por la mejora de la enseñanza de las Matemáticas provocando la sensibilización de los profesores en primer lugar, pero también de los alumnos y del público en general.
- Realizar pruebas en las que se fomente el gusto por hacer matemáticas, evitando que la dificultad se convierta en sinónimo de rechazo, sino más bien en un desafío para la mente y como tal sean tomadas como un juego.
- Dar a conocer a estudiantes y profesores parte de la riqueza artística, cultural y geográfica de Castilla-La Mancha.

IV Simposio Propuestas Metodológicas y de Evaluación en la Formación Inicial de los Profesores del área de Didáctica de las Matemáticas

En el III Simposio que tuvo lugar en La Rioja, en febrero de 1998, asumimos, desde Oviedo, la responsabilidad de organizar el IV Simposio, que se celebrará los días 10, 11 y 12 de febrero del año 2000.

Siguiendo con la idea directriz de estos encuentros, nos proponemos conseguir una puesta en común sobre las experiencias reales de aula de los profesores del área de Didáctica de la Matemática.

Por ello, consideramos de interés el poder compartir aquellas metodologías que realmente forman parte de nuestra docencia, así como los distintos planos de evaluación que inciden en ella.

Desde este momento te invitamos a participar en este IV Simposio. Para más información dirigirse a:

Carmen Corral o Eduardo Zurbano
Escuela de Magisterio. Universidad de Oviedo
c/ Aniceto Sela, s/n. 33005 Oviedo
Telef.: 985 10 31 89 y 985 10 31 93
e-mail: 4sdm@correo.uniovi.es

Comisión Organizadora

Juan Carlos Cortés
Ramón Cuenca Cuenca
Bernardino del Campo
Serapio García Cuesta
Juan Emilio García Jiménez
Jesús García Segovia
Santiago Turégano Moratalla

Programa

X Olimpiada

Viernes 25

- Hasta las 14 horas. Recepción de los participantes.
- 17 horas. Inicio del concurso de fotografía matemática. Entrega de cámaras y carretes.
- 17:30 horas. Sesión de matemagia. Matemáticas lúdicas y recreativas. Geometría mojada.

Sábado 26

- De 9:30 a 13 horas. Realización de la prueba individual sobre resolución de problemas matemáticos.
- 17 horas. Visita a las Exposiciones (Medidas tradicionales, Mosaicos, Filatelia...) en el antiguo Ayuntamiento de Albacete.
- 22 horas. Acto cervantino.

Domingo 27

Viaje a Cuenca, ciudad declarada patrimonio de la humanidad.

- Visita matemática al Museo de la Ciencia de Castilla-La Mancha.
- Recorrido por los principales monumentos de interés histórico-artístico: Casas Colgadas y Museo de Arte Abstracto, catedral gótica, etc.
- Visita a la «Ciudad Encantada».

Lunes 28

- Recepción de carretes, para su revelado, para el concurso de fotografía matemática.
- De 10 a 13 horas. Realización de la Prueba por Equipos en el Museo Arqueológico y Plaza del Altozano.
- 14 horas. Excursión a Alcalá del Júcar. Actividades deportivas al aire libre.

Martes 29

- Paseo por la ciudad.
- Visita a las exposiciones.
- 12 horas. Acto de Clausura y entrega de premios. Salón de Actos de la Excma. Diputación Provincial.
- Comida de despedida.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

	Importe
☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)	
☐ N.os sueltos: ______________________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM