

## **Aprovechamiento didáctico de la actividad «Fotografía y matemáticas»**

**Antonio Fernández-Aliseda Redondo  
José Muñoz Santonja  
Águeda Porras Ruiz**

**C**UANDO DIEUDONNÉ lanzó el grito de «Abajo Euclides» y el grupo Bourbaki comenzó a editar libros de Geometría sin prácticamente ningún gráfico, pudo parecer que la Matemática había alcanzado tal grado de abstracción, que ya no necesitaba de ningún dibujo, pudiéndose reducir a una serie de fórmulas de claras ascendencias cabalísticas, sólo entendibles por un selecto grupo de iniciados. Este nivel de abstracción teórica también llegó a impregnar los niveles no universitarios, como se pudo ver en la enseñanza de las matemáticas a partir de la reforma del año 1970.

Casi desde un primer momento, los movimientos de renovación, con los grupos Cero a la cabeza, se dieron cuenta de que la enseñanza de la matemática no podía restringirse únicamente al aula sino que debía abrirse más al entorno que rodeaba a la escuela. Desde entonces, algo se ha avanzado en esa línea, pero no tanto, cuando ha sido necesario crear una asignatura denominada «Matemática de la Vida Cotidiana» como optativa en Andalucía en 2.º de ESO. Han surgido muchas experiencias en estos años que desarrollan una amplia labor de divulgación de las matemáticas a través de multitud de medios: radio, televisión, prensa, concursos, olimpiadas, etc. En este artículo nos vamos a referir, en particular, a la actividad titulada «Fotografía y Matemáticas» que acaba de cumplir un decenio de vida.

### **Orígenes**

En el curso 1987-88, el profesor Evaristo González González organizó un primer Concurso de Matemáticas y Fotografía en su centro, el C.P. Sierra Nevada de Granada (González, 1989).

El objetivo de esta actividad es la divulgación y popularización de las Matemáticas, entendiendo la populariza-

En los últimos diez años se han celebrado en muchos lugares concursos y exposiciones sobre fotografías acompañadas por un título o lema matemático. Presentamos nuestra experiencia en Sevilla, donde celebramos este año el VIII Concurso Provincial. Queremos resaltar el aprovechamiento de esta actividad a través de una exposición itinerante, acompañada de un cuaderno de trabajo (del que presentamos un ejemplo), además, este año hemos incluido la nueva modalidad de «Imágenes Matemáticas», que hemos creado para que puedan participar los que se encuentren con algún tipo de dificultad en el terreno fotográfico.

**IDEAS  
Y  
RECURSOS**

ción como cualquier acción que dé a conocer o haga más atractivas las matemáticas, dado su alto grado de impopularidad, dificultad, incomprensión y tedio para algunos, así como la pobre visión social de las misma.

La idea central de esta actividad consiste en que los alumnos presenten fotografías realizadas por ellos mismos, acompañadas de un lema relacionado con la imagen fotográfica y con contenido matemático.

El profesor González ha divulgado su experiencia con entusiasmo, siendo siempre muy bien acogida por parte de profesores y alumnos. Por eso, desde esa fecha se han multiplicado los concursos de este tipo.

En casi todos los lugares en los que se ha realizado, se han elaborado exposiciones, con las fotografías presentadas, que han tenido mucho éxito de crítica y público (como se dice en los grandes eventos culturales).

Quizás el mejor exponente de esta actividad fue la muestra que, con motivo del ICME-8, celebrado en 1996 en Sevilla, se expuso en la Antigua Fábrica de Tabacos (actual Universidad) de esa ciudad.

## La experiencia de Sevilla

Como hemos comentado, esta actividad fue muy bien acogida por los profesores que vieron el gran potencial educativo que presentaba. Por ello, la Sociedad Thales alentó y promovió desde el principio que esa experiencia se reprodujera en otras provincias andaluzas, nombrando coordinadores provinciales de esos concursos, allí donde comenzaron a organizarse.

En Sevilla, y bajo la coordinación de María Jesús Serván, se convocó el primer concurso provincial en 1991 y a partir de él se ha seguido convocando sin interrupción hasta hoy día. En lo que concierne al concurso en sí existen distintos niveles de participación, desde Primaria hasta un apartado *Libre* para cualquier persona que quiera presentar fotografías.

Cuando en los primeros concursos se montó la exposición con las fotografías presentadas, se vio claro que, aunque estuviesen expuestas durante varias semanas en distintas salas culturales, era un derroche tener todo ese potencial didáctico sin aprovechar, pues la experiencia estaba pensada para los alumnos y, sin embargo, llegaba a un número muy reducido. Por ello, en Sevilla, se decidió hacer una exposición que pudiese trasladarse a los centros educativos, donde el número de alumnos que se acercasen a la actividad siempre sería mucho mayor.

Para ello se montaron las fotografías sobre paneles de cartón pluma blanco y con un acetato transparente de protección. Estos paneles (aproximadamente de 0,6 por 1 m) son fáciles de transportar y montar.

*...entendiendo  
la popularización  
como cualquier  
acción que dé  
a conocer o haga  
más atractivas  
las matemáticas,  
dado su alto  
grado de  
impopularidad,  
dificultad,  
incomprensión  
y tedio  
para algunos,  
así como  
la pobre  
visión social  
de las misma.*

Gracias a esto la exposición se puede enviar a cualquier centro que la solicite, que puede tenerla expuesta durante una semana. Para ello la coordinadora de la actividad pone en contacto a los profesores que tienen las fotografías y quienes las van a recibir la semana siguiente y ellos se ponen de acuerdo para traspasarse la exposición.

La acogida que tiene la exposición suele ser inmejorable, como lo demuestra el hecho de que el centro que la recibe un año, también la solicita al año siguiente. En este momento es tal la avalancha de peticiones, que aparte del último montaje fotográfico, también está circulando la exposición del año anterior. Hay exposiciones que han pasado por más de dos docenas de centros, tanto de Primaria como de Secundaria.

La facilidad de transporte y manejo de la exposición permite trasladarla a cualquier lugar sin mucho esfuerzo, por ello, aparte de la provincia de Sevilla ha estado expuesta en centros de la provincia de Cádiz o en las jornadas, tanto nacionales como comarcales del Algarve, realizadas por los compañeros portugueses. También se ha expuesto en la Delegación de Educación o en el CEP de Sevilla, donde han podido observar la exposición una gran cantidad de compañeros de otras materias.

La exposición también promueve el que esa actividad se reproduzca en los centros. Así, en algunos lugares que visita, se realizan posteriormente, y a nivel local, concursos de fotografías con carácter matemático, de los cuales se suele surtir muchas veces de fotos el concurso provincial.

## El cuaderno de trabajo

En algunos centros, cuando se han tenido expuestas las fotografías correspondientes al concurso, se han elaborado cuadernillos de actividades para visitar de una manera más activa la exposición. Nosotros, a nivel personal, tam-

bién elaborábamos algunas actividades para realizar con las exposiciones que nos llevábamos a nuestros centros. Pero a partir del curso 1994/95, la entonces coordinadora Águeda Porras nos invitó a participar en esta experiencia, consistente en la elaboración de un cuaderno de actividades que se pudiese mandar previamente a los profesores que solicitaran la exposición y que permitiese sacar un mayor rendimiento de la misma.

Al elaborar dicho cuadernillo nos planteamos obtener una herramienta de trabajo que junto con la exposición proporcionase al profesor una manera distinta de enseñar y al alumno de aprender las matemáticas. Tras tres años de trabajar esta idea y con los comentarios recogidos de otros compañeros, hemos estructurado el cuaderno de la siguiente manera.

## Esquema del cuaderno

### Introducción

En esta primera parte se explica la exposición que se va a visitar y se exponen los objetivos que queremos conseguir con ella.

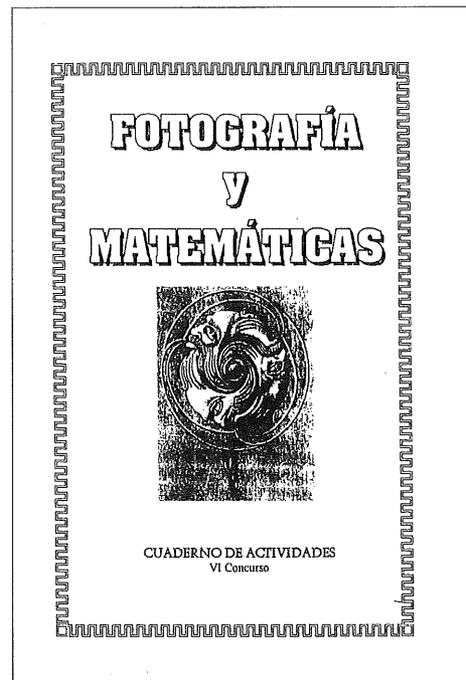
### Actividades generales

En este apartado se hacen preguntas sobre fotos y lemas en general, sin referirse a ninguna fotografía en particular, con lo que son preguntas que pueden hacerse sobre cualquier exposición y prácticamente no varían de un año para otro, y cuyo objetivo es que los alumnos vayan conociendo las fotos expuestas en la misma y entendiendo la finalidad de la exposición.

### Actividades específicas

Se entra ya de lleno en la exposición y se hacen preguntas concretas. Normalmente solemos agrupar esas cuestiones por bloques temáticos: «Números», «Álgebra», «Funciones y Representación

*Al elaborar dicho cuadernillo nos planteamos obtener una herramienta de trabajo que junto con la exposición proporcionase al profesor una manera distinta de enseñar y al alumno de aprender las matemáticas.*



Gráfica», «Geometría» y «Estadística y Azar». Como es lógico el que aparezcan estos bloques o su extensión depende de las fotografías que compongan ese año la exposición. Por eso, en el ejemplo que vamos a desarrollar posteriormente, este apartado aparece más reducido que en el cuaderno original pues lo hemos restringido a aspectos generales o relacionados con aquellas fotografías que acompañan este artículo.

### Actividades varias

En el último bloque solemos incluir aquellos aspectos que, cuando aparecen, superan un poco el nivel de la enseñanza obligatoria como cónicas, límites, combinatoria, etc.

### Cuestionario

Para cerrar se plantean unas preguntas sobre la actitud de los alumnos ante la exposición y su influencia sobre su opinión con respecto a las matemáticas.

Pensamos que el diseño y la maquetación de todas estas actividades es un aspecto importante que hay que cuidar a la hora de presentárselas a los alumnos, para fomentar una actitud positiva ante la experiencia y las matemáticas en general. Por ello, el cuaderno de trabajo se suele completar con una frase final sobre matemáticas o de algún matemático que sirva de reflexión. También solemos incluir imágenes artísticas de contenido matemático, independientes de la exposición. Así en el último cuaderno

elaborado hemos incluido obras de Guillermo Pérez Villalta, Elena Alsina, José María Iglesias, M.C. Escher y Eusebio Sempere; obras que son fáciles de localizar en los suplementos culturales que suelen acompañar los fines de semana a los periódicos de mayor tirada.

A continuación presentamos, convenientemente adaptado según se ha comentado antes, el cuaderno correspondiente al VI Concurso Provincial, cuya exposición se montó en 1997.

## Ejemplo de cuaderno

### Introducción

Los que habéis visto exposiciones de este concurso en años anteriores, ya estáis familiarizados con el tema, pero quizá los que vean por primera vez la exposición, se asombren ante la peregrina idea de unir matemáticas y fotografía. «¿Qué tienen que ver?», se preguntarán. Y es que, generalmente, no se nos ocurre pensar que las matemáticas puedan salir de los libros, aburridos e incomprensibles muchas veces, y nos acompañen constantemente en nuestra vida cotidiana.

Pues aunque os parezca increíble, así es. Estamos rodeados de matemáticas por todas partes, y no sólo eso, las necesitamos casi para todo en esta sociedad nuestra. Si te fijas un poco en las cosas que te rodean, seguro que encuentras referencias numéricas, geométricas, gráficas, etc., que podrás fotografiar. Si a la foto le añades un lema matemático que haga referencia a lo fotografiado y que incite a la reflexión, tu foto probablemente estará en la Exposición del año próximo. Si lo miras desde este punto de vista, verás como las Matemáticas son divertidas e interesantes, y se pueden aprender de muchas formas. ¿Por qué no con fotografías?

Para ayudaros a entender mejor las fotos y que podáis trabajar en clase, hemos elaborado este cuaderno de actividades, deseando que le saquéis el mayor rendimiento y que disfrutéis con las Matemáticas. De verdad que se puede hacer.

### Actividades

En estos días están expuestas en tu centro las fotos que componen la exposición sobre el VI Concurso Provincial de «Fotografía y Matemáticas» organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Cada foto está acompañada de un lema compuesto por una frase donde aparece algún concepto matemático, al mismo tiempo que hace referencia a lo reflejado en la fotografía. En esta ocasión, las fotografías del concurso se complementan

*Cada foto está acompañada de un lema compuesto por una frase donde aparece algún concepto matemático, al mismo tiempo que hace referencia a lo reflejado en la fotografía. En esta ocasión, las fotografías del concurso se complementan con fotos sacadas de periódicos y revistas...*

con fotos sacadas de periódicos y revistas, para que veas que aunque no tengas conocimientos fotográficos, tu también puedes relacionar, si quieres, fotografías y matemáticas.

Ahora vas a visitar la exposición y después tendrás que contestar a las siguientes cuestiones, que hemos agrupado en distintos bloques temáticos.

### Generales

- Elige las cuatro fotografías que más te gusten. Escribe sus lemas, inventate otros y explica su relación con la imagen de la foto.
- Escoge las dos fotografías que menos te gustan y explica por qué.
- ¿Hay algún lema que consideres erróneo?, es decir, ¿hay alguno que no tenga ninguna relación con lo que aparece en la foto o que esté mal en comparación con la fotografía? En caso afirmativo, indica a cuál te refieres y por qué es incorrecto.
- En la exposición hay dos imágenes que no tienen lema. Una de ellas es la fotografía que aparece en el panel presentación, la otra está incluida en uno de los paneles de Imágenes Matemáticas, en particular, la que pide que te inventes un lema. En ambos casos escribe uno que creas adecuado para ellos.

### Números

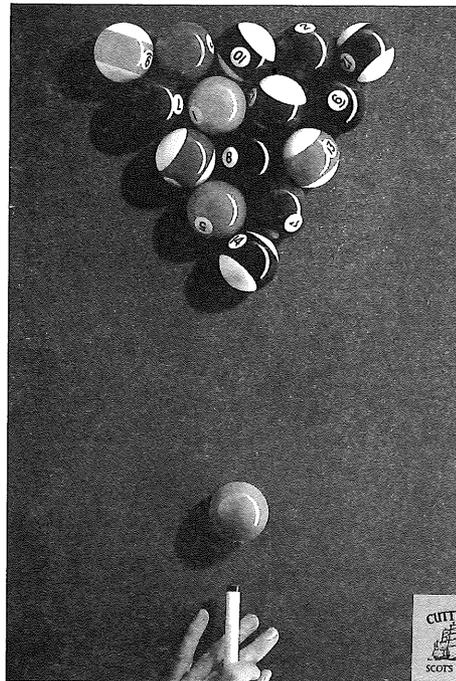
- Entre las fotografías y los lemas aparecen números de muchos tipos. Intenta encontrarlos todos. ¿Cuál es el número más grande que has podido encontrar?
- Entre las Imágenes matemáticas hay una donde aparece un decimal. ¿Cuál es?, ¿en qué foto aparece?, ¿de qué tipo es? Calcula su fracción generatriz.
- En la foto ¿Quién sabe donde está la raíz cuadrada? es posible descubrir, entre las raíces del árbol, escondida la «r deformada» que es el símbolo clásico de la raíz cua-

drada. Intenta encontrarla y haz un esquema de dónde está situada.

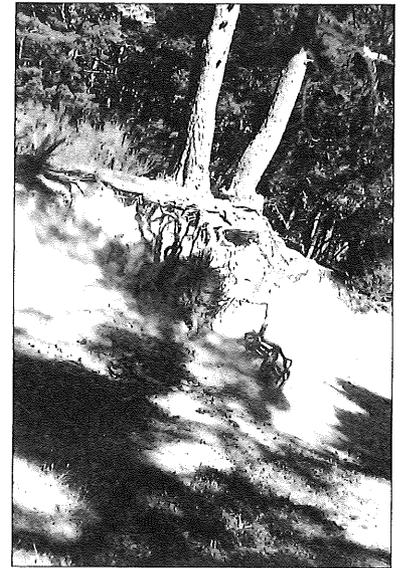
- En la exposición aparecen varias veces referencias al número  $\pi$ , que es un número real, ¿es también racional? Razona la respuesta. ¿Cuánto vale aproximadamente? Da la solución, redondeando, con dos, tres, cuatro y cinco cifras decimales.
- Otra foto tiene el título de *Números triangulares*. Estos números fueron usados por un matemático que te sonará mucho, Pitágoras. Estaban formados, como quizás sepas, por puntos que formaban triángulos. Sabrías decir qué números naturales correspondían al primero, segundo, tercero, cuarto y quinto (el de la fotografía) números triangulares. ¿Qué características tenían estos números?, ¿cómo se obtiene de un número el siguiente?

### Geometría

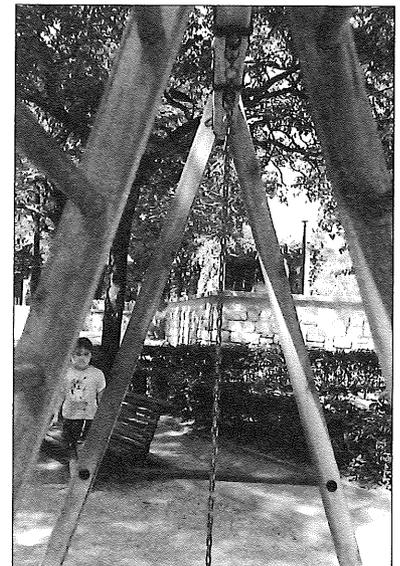
- Vamos a comenzar como siempre por la figura más simple de todas: el triángulo. Hay una fotografía de título *Altura*. ¿Cómo se define la altura de un triángulo?, ¿de qué tipo es el que aparece en la fotografía? Toda altura divide a un triángulo en otros dos, ¿cómo son esos triángulos en general? En esta fotografía, ¿qué característica tienen los triángulos en que se divide por la altura?
- En las demás fotografías puedes encontrar más polígonos de diversos lados. Haz una lista de polígonos según el número de lados, junto con el lema de la fotografía donde aparecen. ¿Cuál es el de mayor número de lados que has encontrado? ¿Cuáles son regulares?
- Uno de los aspectos que se repite con mucha frecuencia en las imágenes es el de tangencia. En particular existe una foto denominada *Tangente y secante*. Define cada uno de esos conceptos. La tangencia también puede darse entre circunferencias. Escribe todos los



Números triangulares



¿Quién sabe dónde está la raíz cuadrada?



Altura



Tangente



Sécante

encontrado anteriormente, escribe las fórmulas que les correspondan y que incluyan al número  $\pi$ .

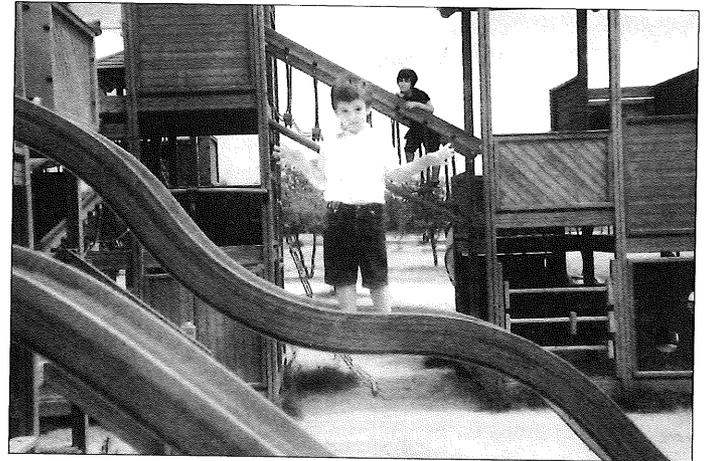
### **Funciones y gráficas**

Entre las fotografías aparecen muchos conceptos relacionados con funciones. Haz una lista con todos los que conozcas y define cada uno de ellos.

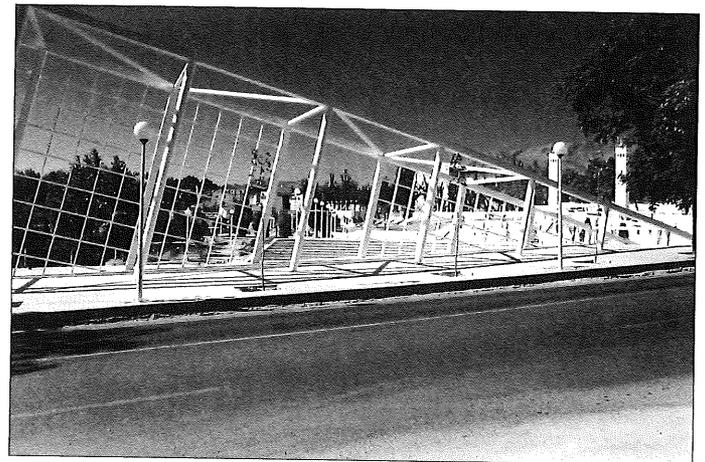
Observa que en la foto *Sobre el punto de inflexión* aparece un tobogán cuya figura puede simular una función continua. Define qué se entiende por «Punto de inflexión». En la foto, ¿qué tipo de tangente tiene la función en ese punto? ¿Cómo son la derivada primera y segunda?

lemas de fotografías en donde aparezca algún tipo de tangencia.

- Entre las fotografías se encuentran varias, cuyos lemas hablan de ángulos. Una de ellas recibe el lema de *Ángulos complementarios*, ¿sabes definir dichos ángulos? ¿Qué són ángulos suplementarios?, ¿puedes encontrar algunos en las fotografías? ¿Qué características tienen los ángulos opuestos por el vértice?
- La Sociedad de Profesores que organiza esta exposición lleva el nombre de un gran matemático: Thales. ¿Qué conoces de él?, ¿sabes aproximadamente en qué tiempo (época, siglo, etc.) vivió? Quizás lo que más te suene sea su Teorema. Hay una foto en la exposición que lleva ese lema, copia el esquema de la figura y enuncia lo que decía el famoso teorema.
- Una de las ideas en las que se basa el Teorema de Thales es en el paralelismo. Busca otras fotografías donde también aparezcan paralelas. ¿Puedes encontrar algunas rectas perpendiculares?, ¿en qué fotos?
- Vamos a dejar ahora el plano y pasar a las tres dimensiones. Busca las figuras que no sean planas.
- Con respecto a la idea de elemento que genera una figura, fíjate en la imagen de título *Del círculo a la esfera*. Si el círculo y la esfera de la foto tuviesen el mismo radio, ¿qué relación existiría entre los dos elementos?
- Ya en el bloque de Números has trabajado con el número  $\pi$ . Como sabes dicho número aparece en las fórmulas de longitudes, áreas y volúmenes de distintas figuras geométricas. A partir de las figuras que has



Sobre el punto de inflexión



Teorema de Thales

## Varios

- En la foto *Permutaciones con repetición*, aparecen algunas de las posibilidades de permutar seis elementos, donde se repiten dos a dos los colores. ¿Cuántas permutaciones distintas hay en este caso? Como puedes apreciar, en la primera fila aparece una permutación en la que los colores repetidos van unidos. ¿Cuántas permutaciones de las anteriores serán de estas características? Dibuja o escribe todas las que no aparecen en la foto.

## Cuestionario

Una vez realizadas las actividades anteriores, contesta a las siguientes cuestiones:

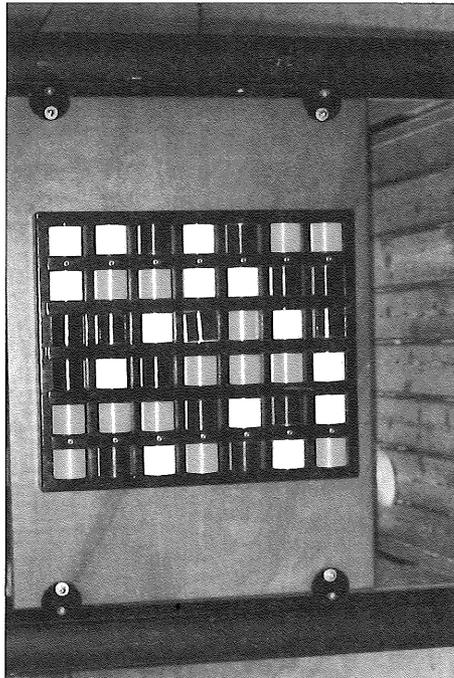
- ¿Te ha gustado la exposición de fotografía? ¿Por qué?
- Destaca algún aspecto que te parezca interesante de la experiencia de hacer fotografías matemáticas.
- ¿Te ha servido la exposición para tener una idea distinta de las matemáticas? ¿Por qué?
- Después de ver la exposición nos damos cuenta de que «las matemáticas son omnipresentes en nuestro entorno». ¿Estás de acuerdo con esta frase? ¿Por qué?
- ¿Eres capaz de buscar fotografías en periódicos o revistas y ponerles un lema matemático?
- ¿Te animarías a participar en el próximo concurso de «Fotografía y Matemáticas»?

*Verdaderamente, lo que más placer proporciona no es el saber, sino el estudiar; no la posesión, sino la conquista; no el estar aquí, sino el llegar allá.*

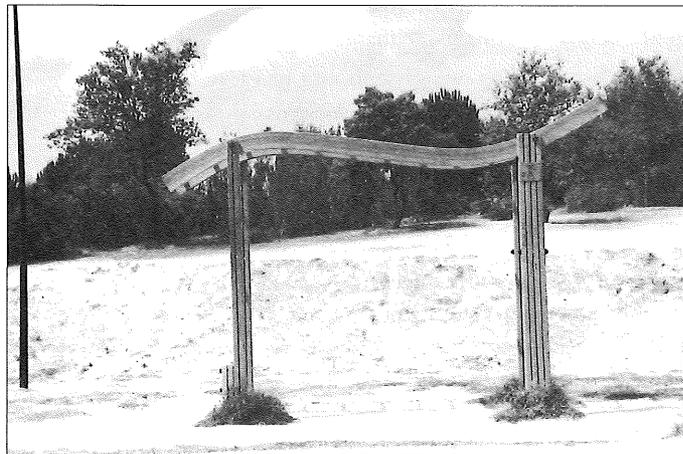
Karl Friedrich Gauss  
Matemático alemán (1777-1855)

## Imágenes matemáticas

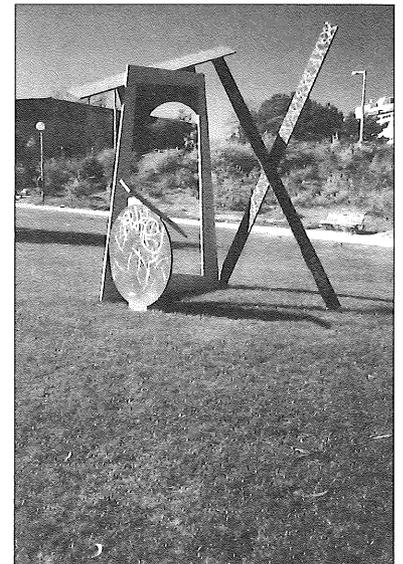
Durante los últimos años estamos observando que, a veces, el número de



Permutaciones con repetición



$\int \pi$  o área limitada bajo la función?



Opuestos por el vértice

fotografías que se presentan a concurso, sobre todo en el nivel de Primaria, desciende con respecto a otras convocatorias. Las razones pueden ser varias: la dificultad propiamente matemática, carencias de técnicas y materiales fotográficos, coste económico del revelado del carrete y ampliación para el concurso, indiferencia de los profesores (que al fin y al cabo son los que promueven la participación), el propio desgaste de la actividad,...

Las circunstancias anteriores pueden llevar a la desaparición de las dos actividades que intervienen: el concurso y la exposición.

Por ello en el curso 1996-97 nos planteamos que las dificultades fotográficas y económicas se pueden superar modificando la idea y haciendo uso de imágenes obtenidas de periódicos o revistas. De esta manera, se hace especial hincapié en el lema matemático que acompaña a la imagen que el alumno seleccione. Con este giro se facilita la implicación de los profesores que pueden plantear como actividad de su clase la realización de un concurso local de Imágenes Matemáticas. Todo esto sin eliminar la existencia del Concurso Fotográfico. De esta manera, cuando las aportaciones artísticas de los alumnos y profesores disminuyan, al menos los objetivos matemáticos permanecerán inalterados.

El curso pasado realizamos la experiencia en nuestros centros exclusivamente como actividad de clase, la respuesta de los alumnos (que ya habían visto previamente la exposición) fue muy notable.

En la Exposición de Fotografías y Matemáticas del VI Concurso, incorporamos dos paneles con imágenes y lemas seleccionados por nosotros para dar a conocer la idea y que los profesores pudieran reproducir la actividad. Como ejemplo, hemos incorporado a este artículo una de esas imágenes. Como nosotros seleccionamos las fotografías que más nos gustaron, elegimos aquellas que tuvieran un posterior aprovechamiento a la hora de crear actividades para el cuaderno de trabajo.

En el curso 1997/98 queremos que las imágenes que seleccionemos de nuestros centros formen parte, fuera de

concurso, de la exposición. Y que los alumnos vean el trabajo realizado por compañeros suyos.

Finalmente, para el próximo concurso propondremos un apartado de Imágenes Matemáticas que, paralelo al de Fotografía, revitalice esta idea, al mismo tiempo que nos proporcione materiales para la elaboración de la exposición y actividades de aprovechamiento didáctico.

#### **Nota:**

Todas las fotografías que acompañan el texto (salvo las extraídas de revistas) están realizadas por José Muñoz.

### **Bibliografía**

- BUENO JIMENEZ, A. y M. MONTEOLIVA SÁNCHEZ, M. (1993): «Fotografía y Matemáticas: Una experiencia en la Axarquía», *Epsilon*, n.º 27, 63-68.
- GONZÁLEZ GONZÁLEZ, E. (1989): «Fotografía y Matemáticas», *Suma* n.º 2, 44-46.
- GONZÁLEZ GONZÁLEZ, E. (1993): «La fotografía, recurso en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Procedimientos para llevarla a cabo», *Actas de V Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, 483-501.
- GONZÁLEZ, E., J. GUTIÉRREZ y A. TORTOSA (1990): «La fotografía como recurso en la clase de matemáticas», *Actas de IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, 163-170.
- VV.AA. (1995): *Fotografía y Matemáticas*, S.M.P.M. «Emma Castellnuovo», Madrid.

**Antonio Fernández-Aliseda**

IES Camas

**José Muñoz**

IES Macarena

**Águeda Porras**

IES Punta del Verde

Sociedad Andaluza de Educación Matemática

«Thales»

# SUMA

## **ENVÍO DE COLABORACIONES**

**Revista SUMA**

ICE Universidad de Zaragoza

Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA