

Evolución de un grupo de alumnos en la resolución de problemas

M.^a del Carmen Pinilla Fernández-Castañón

DE LOS DIFERENTES contenidos curriculares que en el área de Matemáticas se contemplan en el segundo ciclo de Secundaria, he sentido siempre un especial interés por el de la Resolución de Problemas. En el desarrollo de mi práctica educativa y en mis cursos de perfeccionamiento dedico una particular atención y realizo un atento seguimiento de las actitudes críticas y de las estrategias utilizadas por los alumnos en este ámbito.

Creo que el profesor de matemáticas tiene la gran oportunidad de poder ayudar al alumno en una fase de construcción de su pensamiento matemático, no debe por tanto presentarle las matemáticas como algo cerrado donde no tenga la oportunidad de aportar su heurística: las matemáticas que trabajan con frecuencia en clase son contenidos acabados, donde a una demostración le sigue una fórmula y a la aplicación correcta de esa fórmula el resultado plausible. Pero, si al alumno se le da la oportunidad de enfrentarse con un problema, en el que las estrategias personales son imprescindibles para la comprensión del problema y su posible resolución, éste se siente participe de esta «creación» matemática y su pensamiento y estrategias matemáticas avanzan gracias a la experiencia de investigar en la resolución de problemas.

Cuando se trabaja un problema en clase, ésta debe estar regida por un patrón de tiempo diferente, ya que hay que «gastar» tiempo pues su resolución exige paciencia y perseverancia. El resultado al que se llega tras intentar resolver un problema es tan importante como el proceso que se ha seguido, así que no encontrar la solución no quiere decir que se haya perdido el tiempo.

Después de una deliberada actuación en la observación y reflexión en la microárea de la práctica personal,

Este trabajo de investigación narra y describe el desarrollo de un curso de Taller de Matemáticas impartido en el IES «Siete Colinas» de Ceuta dentro de la programación habitual que el centro oferta al alumnado entre sus asignaturas optativas.

El marco teórico para el diseño de la asignatura ha sido *Problemas con pautas y números* del Shell Centre for Mathematical Education.

Se intenta comprobar la evolución de un grupo de alumnos de Secundaria en la resolución de problemas y el análisis final se ha centrado en la constatación de los resultados obtenidos por el grupo en la utilización de estrategias, en el progreso en la resolución y en la culminación con éxito de la misma, distinguiendo en su caso cuándo un problema se ha resuelto por más de un procedimiento plausible.

Esta investigación enfatiza lo particular e individual y no pretende llegar a leyes generales como objetivo fundamental sino más bien analizar la singularidad de los fenómenos estando orientada a la aplicación y a la adquisición de conocimientos con el propósito de dar respuesta a

compruebo que el alumno de matemáticas de la etapa 14-16 no obtiene de sus potencialidades intelectuales y de sus capacidades cognitivas todos los resultados que serían deseables, no sólo para solucionar los problemas específicos de matemáticas, sino también para el desarrollo de su personalidad como ser social que ha de desenvolverse en un marco más amplio de relaciones humanas e interdisciplinares, respondiendo con agilidad y reflejos a los nuevos retos que el mundo en evolución le ha de plantear. Este alumno de Secundaria está influenciado por una inercia de aprendizaje en la que existe una relación causa-efecto: a una sola cuestión, una sola respuesta. Pretendía por tanto, enseñarles una serie de procedimientos, estrategias y heurísticas específicas y constatar si son eficaces a la hora de resolver problemas.

Dado que la sociedad demanda una formación básica del individuo que pueda responder con eficacia a los retos que plantea en los diversos campos tecnológicos y científicos, la base matemática del alumno ha de ser muy versátil para que sepa y pueda adaptarse a cualquier situación; la resolución de problemas puede ser un factor determinante para la adquisición de estos recursos.

Además de estas argumentaciones expuestas, que pueden tener un carácter subjetivo, existen documentos de organismos oficiales y tomas de posición de personas significativas en el campo de la educación matemática, que hacen hincapié en la importancia de la Resolución de Problemas en la enseñanza de las Matemáticas. Cito alguno de ellos.

- La normativa de Secundaria obligatoria de Matemáticas del MEC.
- Las sugerencias contenidas en el informe Cockroft (1985).
- Los Estándares Curriculares y de Evaluación (NCTM, 1991).
- El Programa de estudios de Québec (1983).
- El Currículo Nacional Británico (1992).
- Las últimas tendencias en educación matemática propuestas en el ICME 8 (Sevilla, 1996).

Objetivo

Constatar la evolución de un grupo de alumnos con los que se ha trabajado en la resolución de problemas con la propuesta didáctica sugerida en el libro *Problemas con pautas y números* (Shell Centre for Mathematical Education, 1993).

Los alumnos del segundo ciclo de Secundaria, no se han enfrentado a verdaderos problemas matemáticos. En general los problemas que han visto siempre, están relacionados con los contenidos que están estudiando, y su principal estrategia para resolver el problema es recordar la fórmula que tiene que utilizar.

Marco teórico

Pocas personas se atreverían a negar que el corazón de la actividad matemática es la resolución de problemas y que por tanto, hay que concederle un lugar prioritario en la formación matemática inicial. (Callego, 1994:1)

Hoy en día, la importancia de la resolución de problemas está clara en el mundo de la educación matemática, aunque su implantación en clase no esté tan extendida y la resolución de problemas no sea, en general, el marco desde el que se trabajen los contenidos matemáticos. Es más, se crean asignaturas optativas para que tenga cabida «hacer problemas», ya que éstos requieren unas secuencias temporales diferentes.

Los alumnos del segundo ciclo de Secundaria, no se han enfrentado a verdaderos problemas matemáticos. En general los problemas que han visto siempre, están relacionados con los contenidos que están estudiando, y su principal estrategia para resolver el problema es recordar la fórmula que tiene que utilizar.

La resolución de problemas supone una innovación en relación con lo que ha sido para ellos tradicional en las anteriores etapas de sus ciclos educativos. Ante nuevos retos, nuevos recursos, y el alumno instintivamente pretende utilizar antiguos recursos –las fórmulas–, para nuevos objetivos –la resolución de problemas.

Al no ser totalmente satisfactorios los resultados de esta causalidad: innovación (resolución de problemas)/recurso tradicional (fórmulas), los alumnos se encuentran en una encrucijada mental, indecisos, parados. ¿Qué hacer? Buscan en su bagaje de aprendizajes y no encuentran esa estrategia que les solucionaría su duda. No han utilizado ese algo necesario para esta ocasión, su capacidad de pensar, su capacidad de aprender y desarrollar nuevas estrategias.

Para que este binomio Enseñanza-Aprendizaje esté impregnado de una dinámica constructiva, es necesario implementar una metodología innovadora sustentada fundamentalmente en la adquisición de nuevas estrategias y la posterior verificación de los resultados.

La inserción de la resolución de problemas en el currículo de matemáticas se articula según Kilpatrick citado en Gómez Chacón, (1992) en torno a tres ejes direccionales fundamentales: *resolución de problemas como contexto, como habilidad y como arte*.

Una forma de entender la resolución de problemas es como argumenta Stevenson (p. 165):

La resolución de problemas es un arte que no está satisfactoriamente entendido, casi todos los expertos podrían estar de acuerdo, sin embargo, en que los estudiantes que tengan para trabajar más herramientas matemáticas, se convertirán en los mejores resolutores de problemas.

Cuando Poincaré en su conferencia en la Sociedad Psicológica de París, a principios de siglo, reflexionó sobre su propio proceso de creación apuntó lo siguiente (1995):

Hemos visto que la tarea matemática no es meramente mecánica...

No se trata sólo de aplicar reglas, de hacer el mayor número de combinaciones posibles según determinadas leyes fijas... La verdadera tarea del inventor consiste en escoger entre estas combinaciones eliminando las inútiles, mejor aún, no molestándose en hacerlas...

¿Podría entreverse, de la lectura atenta de estas líneas, una definición *avant la lettre* del «Control Schoenfeldiano»?

Quizá una de las referencias más nítidas para cualquier investigación en la resolución de problemas sea George Polya, éste define el proceso de resolución como sigue (p.448):

Resolver un problema es un proceso extremadamente complejo. Ninguna descripción o teoría de ese proceso puede agotar sus múltiples aspectos; cualquier

*Hemos visto
que la tarea
matemática
no es
meramente
mecánica...
No se trata sólo
de aplicar
reglas, de hacer
el mayor
número de
combinaciones
posibles según
determinadas
leyes fijas...
La verdadera
tarea
del inventor
consiste
en escoger
entre estas
combinaciones
eliminando
las inútiles,
mejor aún,
no molestándose
en hacerlas...
(Poincaré)*

descripción o teoría del mismo está abocada a ser incompleta, esquemática y muy simplificada.

El modo de trabajo que sigue Schoenfeld es diferente del de Polya, aunque se declara continuador de éste. Polya sigue el modelo de los psicólogos de la Gestalt, mientras que Schoenfeld sigue el modelo del procesamiento de la información y le da importancia al papel de la memoria y a los protocolos escritos. Su modelo de investigación se basa en la observación entrando en el terreno cognitivo y descubriendo el papel tan importante que tiene el control del proceso.

Chi y Glaser han analizado la capacidad de resolver problemas como una aptitud cognitiva compleja que caracteriza una de las actividades humanas más inteligentes.

Indagando acerca de la posibilidad de que se pueda enseñar a los estudiantes a resolver problemas, Tall se pregunta:

¿Podemos enseñar a los estudiantes a pensar matemáticamente? ¿Podemos estimular a los estudiantes a pensar como matemáticos?

Schoenfeld escribió que el uso de las *estrategias heurísticas* ayuda a la comprensión del problema (p. 23):

Las estrategias heurísticas son reglas empíricas para la resolución de problemas con éxito, indicaciones generales que ayudan al individuo a comprender mejor un problema o a hacer progresos hacia su solución...

Hay consenso entre los matemáticos que estas estrategias son provechosas. Por ejemplo, el pensamiento heurístico contribuye a las soluciones de cada uno de los problemas.

Miguel de Guzmán señala que estas estrategias se pueden utilizar en la resolución de problemas en la vida cotidiana (p. 14).

¡Ah! Una última observación. No pienses que las estrategias de pensamiento que aquí tienes son sólo buenas para resolver problemas y juegos matemáticos. En líneas generales, cambiando lo que hay que cambiar, esas mismas estrategias las puedes utilizar en un montón de problemas de la vida ordinaria. Esto es algo muy importante que la matemática puede enseñar a todo el mundo, un método de pensamiento sobrio, razonable, fiable...

La enseñanza de estrategias es motivo de reflexión en Freudenthal (1983), citado en Callejo (1994):

Mi idea acerca de la enseñanza de las estrategias es tratar de que una vez que se resuelva un problema se tome conciencia inmediata de la estrategia que se ha seguido de forma que se guarde en la memoria pero de una forma general como para no atenerse a ella al pie de la letra. Las estrategias sólo son válidas si se tiene en cuenta la flexibilidad para su aplicación. Mas que apodóticamente deberían ser aprendidas heurísticamente.

La reflexión sobre el proceso seguido y su registro son aspectos importantes en el aprendizaje, Guzmán (1991) expresa (p. 55):

Si pretendemos mejorar nuestros propios procesos de pensamiento es absolutamente necesario disponer de técnicas que nos permitan examinarlos a fondo.

Pero para quien desea asimilar a fondo los mecanismos de reacción de los expertos es útil ejercitarse no sólo en resolver muchos problemas, sino también en examinar sus propios procesos mentales al tiempo que lo hace.

Callejo (1994) cita la elaboración de registros para favorecer la toma de conciencia de los procesos de pensamiento de la siguiente manera (p. 37):

Las técnicas para tomar conciencia de los procesos de pensamiento son la introspección o autoreflexión en el curso del proceso, y la retrospección o reflexión una vez concluido el mismo. Para favorecerlos se hacen registros de diversa naturaleza denominados protocolos.

En relación con la reflexión sobre la experiencia Dreyfus (1991) señala que (Schoenfeld, 1985):

La reflexión sobre la experiencia matemática propia es de particular importancia en la solución de los problemas no triviales (como opuesto a ejercicios estándar) y es en esta conexión que la importancia de los procedimientos ha sido comprendida en primer lugar por los educadores matemáticos.

En el libro *Pensar Matemáticamente* Burton y otros (1992), sus autores se refieren a los procesos que rigen el pensamiento matemático y sugieren una pautas para mejorarlo: atacando los problemas concienzudamente, reflexionando sobre la experiencia acumulada, conectando las impresiones recibidas con la acción, estudiando cuidadosamente el proceso de resolución de problemas y observando cómo encaja lo que se va aprendiendo con la propia experiencia.

Otro de los factores que facilitan el aprendizaje en la resolución de problemas es el trabajo cooperativo. Así lo manifiesta, el nuevo «Scottish Standard Grade»:

...el intercambio de ideas que se produce durante la discusión constituye una parte esencial del aprendizaje...

Y en las Orientaciones didácticas del MEC se considera que el trabajo en grupo facilita el aprendizaje (p. 96):

El reparto de tareas, la selección de estrategias, la revisión del trabajo de unos por los otros, etc., tienen buenos resultados.

Un referente paradigmático han sido las sugerencias contenidas en el *Informe Cockroft*.

De las diferentes referencias bibliográficas básicas sugeridas para la elaboración de la tesis, una vez conocidas y

*Las técnicas
para tomar
conciencia
de los procesos
de pensamiento
son
la introspección
o autoreflexión
en el curso
del proceso, y
la retrospección
o reflexión
una vez
concluido
el mismo.
Para
favorecerlos
se hacen
registros
de diversa
naturaleza
denominados
protocolos.
(Callejo)*

analizadas todas ellas, he singularizado: *Problemas con pautas y números*, del Shell Centre for Mathematical Education (1993) por las siguientes razones:

- Este libro promueve una serie equilibrada de actividades curriculares.
- Pretende desarrollar el rendimiento de los alumnos a la hora de abordar problemas y pone énfasis en una serie de estrategias específicas que pueden ayudar en esa resolución de problemas.

Asimismo en refuerzo de los procedimientos de recogida de información que hay que utilizar en el desarrollo del trabajo (pretest, postest), he analizado con detenimiento el marco teórico de Schoenfeld, (1985) en su libro *Mathematical Problem Solving*.

Para el análisis de los datos en uno de sus apartados he utilizado el capítulo 2 del libro de M.^a Luz Callejo: *Un Club Matemático para la Diversidad*.

Para el diseño de la instrucción, el capítulo 6 del libro antes citado, me ayudó en la evaluación de los aprendizajes.

Para el análisis de los protocolos utilicé el modelo que presenta Miguel de Guzmán en el libro *Para pensar mejor*.

Diseño y desarrollo de una experiencia de resolución de problemas en el aula

Las diferentes propuestas didácticas que inicialmente se podrían utilizar para este trabajo se analizaron de acuerdo con diversos aspectos:

- Idoneidad de la intervención didáctica en consonancia con mi perfil docente.
- Modelo de enseñanza.
- Estrategias didácticas.
- Evaluación de los aprendizajes.
- Recursos.
- Planteamiento de situaciones que favorecen el tránsito de un lenguaje matemático a otro (algebraico, numérico, gráfico, figurativo).

- Presentación de las actividades de acuerdo al desarrollo evolutivo de los alumnos.

Fue la propuesta del libro *Problemas con pautas y números*, la que obtuvo una baremación más acorde con las pretensiones deseadas.

Para la explicitación de esta propuesta didáctica elegida, era conveniente disponer semanalmente de no menos de tres clases de cincuenta y cinco minutos. El Taller de Matemáticas al estar integrado por alumnos de cuarto de Secundaria de entre 15 y 16 años y ser una asignatura optativa era el ámbito idóneo para desarrollar este proyecto.

Las Orientaciones Didácticas de esta asignatura están establecidas por el MEC así como las directrices sobre el papel del profesor para fomentar el trabajo cooperativo de los alumnos, la motivación y el tratamiento diversificado a éstos.

La programación del curso se realizó en tres fases en las que se graduaron las orientaciones por parte de la profesora. En una primera fase se mostró a los alumnos actividades matemáticas en las que era necesario aplicar una serie de destrezas y estrategias. Posteriormente, en una segunda fase, se les estimuló a que aplicasen las estrategias aprendidas a problemas y actividades de mayor dificultad en las que se les daban menos indicaciones por parte de la profesora; siempre que los alumnos se encontraron en situaciones de bloqueo tuvieron alguna ayuda para poder continuar el proceso de resolución. Por último en la tercera fase, la ayuda fue meramente de apoyo, pues no se pretendió darles indicaciones con respecto a la forma de abordar estos problemas. Como los alumnos trabajaron en grupo hicieron al final de cada problema una puesta en común, ello les facilitó la comprensión del problema y les sirvió para resolver otro posterior.

Las actividades propuestas se pueden agrupar en tres bloques, relacionados con las fases anteriores. En el primer bloque se acompañaron de indicacio-

*Fue la propuesta
del libro
Problemas con
pautas y números,
la que obtuvo
una baremación
más acorde
con las
pretensiones
deseadas.*

nes, hojas de trabajo y estrategias completas para la resolución de los problemas propuestos. En el segundo bloque no hubo hojas de trabajo aunque sí indicaciones estratégicas orales y los alumnos tuvieron que desarrollar por ellos mismos alguna particular. Además se plantearon problemas que no podían resolverse completamente con las destrezas y estrategias vistas, lo que obligó a los alumnos a combinarlas o a desarrollar por ellos mismos alguna particular. El tercer bloque contenía problemas más abiertos e intervino bastante la creatividad de los alumnos y su capacidad para hacerse preguntas.

En todos los casos se les pidió que expresasen por escrito todas sus ideas y explicaran sus soluciones. Estos problemas se han acompañado de:

1. Hojas de trabajo.
2. Normas para la elaboración del protocolo. Adaptado del libro de M. de Guzmán (1991), *Para pensar mejor*.
3. Pasos a seguir en la resolución de un problema tomados también del libro de M. de Guzmán (1991), *Para pensar mejor*.
4. Criterios de evaluación de problemas.
5. Pautas para el trabajo en grupo.

Con todo este bagaje documental el alumno conocía *qué* problema debía resolver, *cuáles* eran las ofertas de estrategias válidas para el mismo, *cómo* debía trabajar en grupo, *cuántas* fases debía considerar en la resolución, *de qué* manera habría de reflejar los movimientos subconscientes de su proceso de resolución y *con qué* criterios serían evaluados.

Los alumnos han trabajado individualmente y en grupo. Cuando han trabajado juntos han tenido una primera fase individual de lectura y comprensión del problema, una segunda fase de trabajo en grupo, con «lluvia de ideas», selección de estrategias, abordaje del problema y comprobación de los resultados, para posteriormente hacer una puesta en común.

El modo de intervención de la profesora estaba relacionado con los diferentes roles del profesor en las clases cuando éstas están orientadas hacia la resolución de problemas: *explicación, dirección, marcar la tarea, orientación y actuar como recurso*.

El objetivo de la intervención era mejorar el balance de las actividades de aprendizaje en el aula estimulando la resolución de problemas e investigaciones abiertas. Los materiales para clase ayudaban a esto.

La instrucción se realizó durante el primer y el segundo trimestre del curso 1995/96. Tuvieron tres sesiones semanales de cincuenta minutos. La distribución de problemas y número de sesiones por fase fue la siguiente:

1. ^a fase	9 problemas	14 clases
2. ^a fase	10 problemas	20 clases
3. ^a fase	10 problemas	20 clases

La evaluación se realizó al final de las tres fases.

Para la elección de los problemas para las pruebas fue necesario armonizar una pluralidad de factores, como los siguientes:

1. La adecuación del objetivo con los contenidos y los criterios de evaluación.
2. La atención a la diversidad.
3. La experiencia personal de la profesora desde una perspectiva holística con el problema

Para los alumnos el trabajo en grupo como norma ha supuesto una experiencia enriquecedora, si bien fue necesario pulir algunas divergencias.

Los protocolos, por su novedad, las peculiaridades de su elaboración, las singularidades de su estilo narrativo, el contenido de los movimientos del subconsciente y los hitos temporales tan profusamente recordados, han ocupado en los alumnos un lugar especial en sus inquietudes.

La interrelación profesora-alumnos, debe ser observada desde una pluralidad de perspectivas atendiendo al papel metodológico desempeñado.

En la primera fase, las explicaciones, han constituido un factor, cualitativa y cuantitativamente, no desdeñable de la intervención de la profesora. Una vez hecha la transferencia de información la mayor parte de esta intervención *—dirigiendo—* la ocupó las sugerencias a los alumnos de la elaboración del protocolo. La función orientativa ha intervenido como hilo conductor de las vicisitudes de los alumnos.

En la segunda fase la interrelación profesora-alumnos, observada desde diferentes perspectivas, cubre el mismo espectro anterior, *—explicación, dirección, marcar la tarea, orientación y actuar como un recurso—* aunque su incidencia cuantitativa es diferente.

En la tercera fase se mantuvo la tendencia ya iniciada en la fase anterior. Mientras que algunos aspectos de la intervención han decrecido (explicación, dirección y orientación), otros han incrementado porcentualmente su incidencia como ha sido: *Actuar como un recurso*.

	Clases	Explica	Dirige	Tarea	Orient	Recurso
1. ^a Fase	14	8	6	10	10	11
		57%	43%	71%	71%	79%
2. ^a Fase	20	6	3	10	10	17
		30%	15%	50%	50%	85%
3. ^a Fase	20	2	0	9	2	19
		11%	0%	45%	11%	95%

Tabla 1. Resumen de la intervención de la profesora en las tres fases

*Se prima más
el proceso
de resolución
que el resultado
y por ello
se les enseña
a reflexionar
sobre sus propias
producciones.*

Diseño y desarrollo de la investigación

El objetivo específico es constatar la evolución de un grupo de alumnos con los que se ha trabajado en la resolución de problemas con la propuesta didáctica sugerida en el libro *Problemas con pautas y números* (Shell Centre for Mathematical Education, 1993).

Los aspectos o variables que se van a considerar para constatar la evolución de los alumnos son los siguientes:

- a) Los procedimientos plausibles aplicados a la resolución de problemas.
- b) Las valoraciones cualitativas de los alumnos de su resolución de problemas.
- c) La fluidez y transferencia de heurísticas cuando se les pide a los alumnos que comenten cómo abordarían un problema sin resolverlo.
- d) La autorregulación del proceso.

Esta investigación se enmarca en el paradigma *interpretativo*, en el que el máximo interés se sitúa en el proceso de comprensión e interpretación de cómo los alumnos resuelven problemas. Se prima más el proceso de resolución que el resultado y por ello se les enseña a reflexionar sobre sus propias producciones.

Es «un estudio de evolución». Las características de esta investigación educativa son:

1. Es una *investigación aplicada*.
2. Es una *investigación longitudinal (diacrónica)* y *de panel* por haber sido el mismo grupo de alumnos el observado a lo largo de toda la investigación.
3. Por la profundidad u objetivo hay que considerarla como una *investigación descriptiva* puesto que su objetivo central es la descripción de los fenómenos
4. Utiliza los dos tipos de caracteres de la medida: *cuantitativo y cualitativo*.
5. Según el marco en que tiene lugar es *de campo o sobre el terreno*.

6. Como enfatiza lo particular e individual es una *investigación idio-gráfica* y no pretende llegar a leyes generales como objetivo fundamental.
7. Considerando la dimensión temporal de la investigación es ésta *descriptiva*.
8. Es una *investigación orientada a la aplicación y a la adquisición de conocimientos* con el propósito de dar respuesta a problemas concretos.

Partiendo de la teoría constructivista en la que se propone que el aprendizaje matemático en algún sentido es producto de la actividad interpretativa y en oposición a ella la posición filosófica que argumenta que el conocimiento es la representación acertada de lo que está fuera de la mente, puede existir una posición intermedia en la que el propio alumno adapte los contenidos necesarios para entender y favorecer el proceso de resolución de un problema.

Como el aprendizaje matemático desde el punto de vista antropológico es un proceso de construcción cognitiva y de aculturación, para favorecer este aprendizaje se utilizan las siguientes estrategias: por un lado el papel de la profesora puede ser visto como guía de este aprendizaje y por otro el trabajo en grupo podrá favorecer el proceso de aculturación.

*Los alumnos
dispusieron
de la máxima
información
posible en
el desarrollo de
la investigación
con el fin de que
se sintieran
partícipe
y colaboradores
entusiastas.*

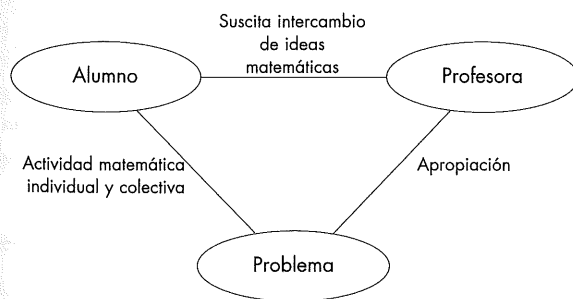


Figura 1. Estrategias para el aprendizaje

Existe una interrelación sujeto-objeto que está influida por factores subjetivos tales como mis propias concepciones de cómo se resuelve un problema, las

creencias sobre los diferentes tipos de aproximación para la resolución (gráfica, numérica, algebraica...).

Esta investigación parte de una hipótesis de trabajo: *¿A una mayor disponibilidad de estrategias heurísticas por parte de los alumnos seguirá un porcentaje mayor de problemas resueltos?*

Los alumnos dispusieron de la máxima información posible en el desarrollo de la investigación con el fin de que se sintieran partícipes y colaboradores entusiastas.

La elección de la población para esta investigación ha sido escogida de acuerdo a un perfil académico determinado: su elección de la asignatura optativa Taller de Matemáticas.

Existió un marco ambiental o condiciones extrínsecas, que influyeron positivamente en el grupo de alumnos que colaboró con la profesora en el desarrollo temporal de la investigación: las peculiaridades del Taller con trabajo en grupo, mayor libertad de programación de la asignatura y propuesta didáctica específica.

Estuvo formada por diecisiete alumnos de cuarto de Secundaria con edades comprendidas entre 15 y 16 años, del los cuales hay nueve chicas y ocho chicos, de un grupo de Taller de Matemáticas del IES Siete Colinas de Ceuta. Este grupo pertenece a la opción B de Matemáticas de 4.º curso. Son alumnos que en principio elegirán el bachillerato de Ciencias de la Naturaleza.

Recogida de datos

Para valorar los procedimientos plausibles de análisis de problemas completamente resueltos, se propuso a los alumnos que resolvieran cinco problemas que se les pasaron al inicio de la instrucción en el transcurso de cuatro clases y otros semejantes que se pasaron al final de la misma. El objetivo era analizar la capacidad de los alumnos para generar, seleccionar y abordar caminos plausibles para la resolución de problemas. No se les hizo ninguna sugerencia estratégica para su resolución. En esta primera parte su trabajo fue individual.

Estos problemas estaban directamente relacionados con los que se plantearían en la instrucción. Cada estrategia heurística empleada para la resolución de ellos sería estudiada a lo largo del curso. En la primera parte de la instrucción se les facilitó a los alumnos diferentes problemas, similares a los que habían resuelto en el pretest, y que resolverían en el postest, pero abordados desde diversas estrategias.

Para conocer las valoraciones cualitativas de los alumnos de su resolución de problemas, se utilizó un cuestionario de valoración, que se pasó al inicio de la instrucción (después de la resolución de los cinco problemas) y otro igual que se pasó al final de la instrucción. Los alumnos lo rellenaban a medida que terminaban cada problema.

Para apreciar la fluidez y transferencias de heurísticas se les pidió a los alumnos que comentasen cómo abordarían un problema sin resolverlo tanto al comienzo de la instrucción (pero después de las anteriores) como al final de la misma.

Se les propuso seis problemas que estaban agrupados de dos en dos, según los grados de relación con los habituales de la instrucción. No se les pidió que los resolvieran pero sí que buscasen alguna pauta o forma de abordarlos, qué procedimientos utilizarían, cómo empezarían a resolverlos y cómo lo justificarían.

Se les expuso en la pizarra una serie de indicaciones de cómo abordar este trabajo. Fueron éstas:

Por favor lee el problema, piensa unos minutos en cómo lo resolverías y dame el plan de la solución.

Dime que harías si tuvieras tiempo para trabajar el problema, las pautas que sacarías, los procedimientos que emplearías, cómo comenzarías a resolverlo y cómo lo justificarías.

Al final de cada fase, coincidiendo con los exámenes se recogieron los protocolos que realizaron los alumnos de los problemas propuestos.

Para el primer problema el trabajo sería individual. En el segundo problema el trabajo se llevó a cabo en grupo, los mismos grupos que habían estado formados a lo largo de la segunda fase. El tercer problema había que resolverlo de manera individual.

Se llevó un diario semiestructurado de clase donde se registró observaciones de las sesiones de trabajo con los alumnos y también se llevó un registro de observaciones sobre actitudes y modos de abordar los problemas. Consta de 18 cuestiones en la que se pretende sistematizar por parte de la profesora la actitud del alumno en relación con la resolución de problemas. Está basado fundamentalmente en la «Lista de registro de observaciones» de *Un club Matemático para la diversidad* (Callejo, 1994) y ampliado con otros aspectos que se consideran adecuados.

Análisis de datos

Para analizar los cinco problemas que los alumnos han resuelto se han utilizado los procedimientos de *Puntuación múltiple y Puntuación del mejor procedimiento* de Alan H. Schoenfeld (1985).

El procedimiento *puntuación múltiple* consiste en hacer al comienzo una lista de todos los procedimientos plausibles para resolver el problema esbozados al menos por un alumno. Después para cada solución intentada por cada alumno, para cada problema y para cada procedimiento plausible se hacen las siguientes preguntas:

- 1.^a ¿Muestra el alumno evidencia de conocer este procedimiento concreto? (Evidencia).

*Para apreciar
la fluidez
y transferencias
de heurísticas
se les pidió
a los alumnos que
comentasen cómo
abordarían
un problema
sin resolverlo
tanto al comienzo
de la instrucción
(pero después de
las anteriores)
como al final
de la misma.*

- 2.^a ¿Busca el alumno el camino? (Búsqueda).
- 3.^a Si busca el camino, ¿qué progreso hace hacia la solución? (Progreso).
 - a) Poco o ninguno. (Poco).
 - b) Dispone de cantidad razonable pero no suficiente de información. (Algo).
 - c) Una solución errónea por un cálculo incorrecto. (Casi).
 - d) Solución correcta. (Resuelto).

La puntuación para cada ítem será de 0 o 1; y en el tercero se dará un 1 al más alto de los apartados correspondientes.

Este esquema proporciona una forma rápida para conocer la capacidad global de la clase para generar y aplicar procedimientos plausibles de resolución de problemas. Pero para puntuar el esfuerzo del alumno en cada problema se utiliza puntuación del mejor procedimiento que consiste en puntuar por separado cada procedimiento que emplea el alumno del siguiente modo: si el procedimiento no es perseguido 0 puntos, si se considera poco progreso se les da de 1 a 5 puntos, si hacen algún progreso recibirán de 6 a 10 puntos, los problemas casi resueltos obtendrán de 11 a 15 puntos y los resueltos de 16 a 20 puntos.

Por cada problema se le asigna al alumno la puntuación máxima conseguida en todos los procedimientos que empleó en ese problema. Por tanto la puntuación global para los cinco problemas será como máximo de 100 puntos.

Los protocolos y la evaluación de los procesos correspondientes a los problemas se han analizado según las indicaciones de Guzmán (1991).

La detenida relectura propició la estructuración del proceso de análisis en tres apartados: A, B y C.

Parte A. ¿A qué fase del proceso corresponde?

Parte B. Relación entre las acciones contempladas y el resto de sus actuaciones.

parte C. Momentos decisivos en la resolución del problema.

Fue necesario disponer de un elemento auxiliar de trabajo que armonizando funcionalidad/totalidad de información/visualización global e inmediata, permitiera la recogida informatizada de datos y el balance gráfico temporal de las etapas. Con tales pretensiones se diseñó el «Análisis del protocolo».

El análisis correlativo de cada una de las divisiones se hizo en función de su contenido, bien de actividad o bien afectivo. Se analizaron también los cambios de actividad y los orígenes de estos cambios, a qué podrían ser debidos y cómo afectaban a la marcha del proceso.

Se contabilizó el tiempo que el alumno había permanecido en cada una de las cuatro fases: familiarización, búsqueda, desarrollo y revisión, así como los *retornos* (regresos momentáneos a fases anteriores) entre las mismas.

Con esta información se elaboró el diagrama temporal por etapas que se incluye en el impreso de análisis.

La evaluación del proceso ha consistido en expresar en breve síntesis, las consideraciones que a la profesora le ha sugerido el balance total de las actuaciones realizadas por el alumno en su protocolo.

Esta investigación está focalizada en torno a dos cuestiones vinculadas por un principio de causalidad: estrategias y solución correcta del problema. ¿A una mayor disponibilidad de estrategias heurísticas por parte de los alumnos seguirá un porcentaje mayor de problemas resueltos.

¿Qué ha ocurrido en el pretest?

Los alumnos han utilizado once estrategias diferentes para los cinco problemas, pero una vez hecha la media evidencias por alumno, se obtiene un resultado de 4,94. La ratio estrategia / problema es de 0,99, es decir, que a cada problema le corresponde una estrategia por alumno.

*Esta investigación
está focalizada
en torno
a dos cuestiones
vinculadas
por un principio
de causalidad:
estrategias y
solución correcta
del problema.*

El balance final de problemas resueltos es exiguo, seis problemas en total, lo que distribuido por alumno arroja un resultado de 0,35 para los cinco problemas propuestos. Disponiendo cada alumno de casi una «evidencia» por problema, consigue un 0,06, es decir 6 % de éxito en la resolución de cada problema.

A un leve incremento de «evidencias» le corresponde un leve incremento de resultados correctos del problema.

En la Planificación de la resolución de problemas los alumnos han utilizado 14 estrategias, de las cuales ocho son diferentes entre sí, puesto que algunas de ellas se repiten en los seis problemas de esta fase. En las tablas están representadas en los correspondientes diagramas de barras aquellas que son coincidentes con las de la Resolución de problemas y también las que suponen una innovación heurística.

La asignación *evidencia/alumno* es de 2,82 La ratio *estrategia/problema* es de 0,47.

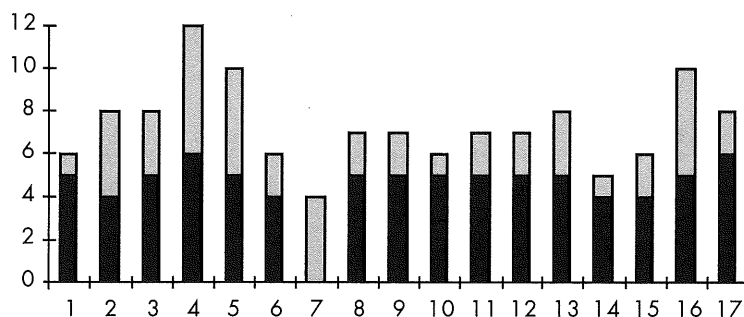


Figura 2. Número total de heurísticas por alumno en el pretest.

¿Qué ha ocurrido en el Postest?

En la Resolución de problemas, los alumnos han utilizado dieciséis estrategias, de las cuales catorce son diferentes, pero una vez hecha la media de *evidencia/alumno* se obtiene un resultado de 7,88. La ratio *estrategia/problema* es de 1,57, es decir, que a cada problema le corresponde más de una estrategia y media por alumno.

El balance final de problemas resueltos es de 43, lo que distribuido por alumno arroja un resultado de 2,5 resueltos para los cinco problemas propuestos.

Disponiendo cada alumno de 1,57 evidencia por problema, consigue un 50 % de éxito en la resolución de cada problema.

No se ha detectado que a un incremento de evidencias le corresponda un incremento de resultados correctos aunque sí, que existe una gran correlación entre el número de evidencias y el grado de *progreso* («casi» y «resuelve») que los alumnos alcanzan en la resolución de problemas, siendo $r = 0,96$.

Interesa destacar cuál ha sido el aporte de heurísticas realizado globalmente por los alumnos en el pretest. Con esa finalidad se ha elaborado la tabla que en un diagrama de barras que refleja cuantitativamente estos datos.

En la Planificación de la resolución de problemas los alumnos han utilizado 14 estrategias, de las cuales ocho son diferentes entre sí, puesto que algunas de ellas se repiten en los seis problemas de esta fase. En las tablas están representadas en los correspondientes diagramas de barras aquellas que son coincidentes con las de la Resolución de problemas y también las que suponen una innovación heurística.

La asignación evidencia/alumno es de 2,82 La ratio estrategia/problema es de 0,47.

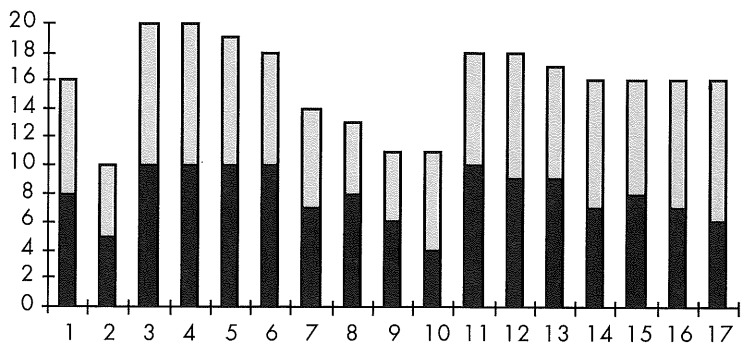


Figura 3. Número total de evidencias en el postest.

Intermedios (Primera fase-Segunda fase-Tercera fase)

Después de ser observados y analizados los protocolos de los alumnos de las tres fase se hizo un detenido estudio de la distribución que cada uno de los alumnos realizó de los minutos de que dispuso para el problema. Se contabi-

lizó la parte de este tiempo que cada fase –familiarización, búsqueda, desarrollo y revisión– acaparó. Los retornos, entendiendo por tales una vuelta a una fase anterior, también fueron computados. La porción útil de tiempo y la desechada fue objeto de valoración.

La estadía del alumno en cada fase ha sido gráficamente representada como puede verse en la figura 4.

Se observa que existe una relación directa entre el tiempo utilizado en la resolución del problema, el número de retornos y el tiempo dedicado a los mismos (tabla 2)

Máximas notas				
Alumno	T. revisión	N.º retornos	T. utilizado	Nota
E 4	35	2	100	7
E 5	20	3	100	7,3
11	15	5	100	7,8
E 16	10	2	100	8

Mínimas notas				
Alumno	T. revisión	N.º retornos	T. utilizado	Nota
E 3	0	0	83	4
E 9	0	3	76	4
E 10	5	3	59	4
E 17	0	0	75	4,8

Tabla 2

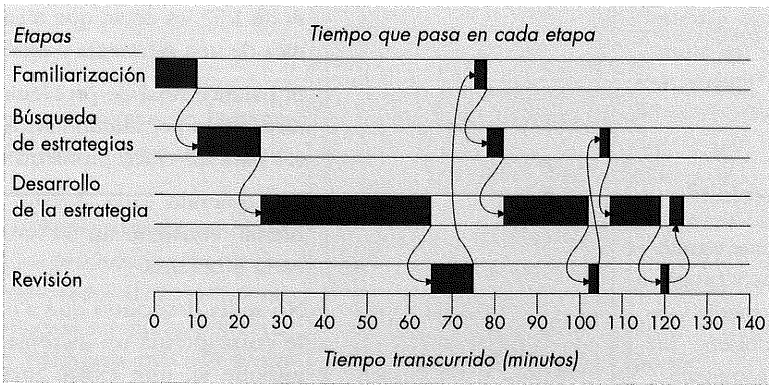


Figura 4. Reparto del tiempo dedicado a un problema entre las etapas y número de retornos.

Resultados y conclusiones

¿Cómo han evolucionado los alumnos?

El progreso ha sido notable en prácticamente todos los alumnos atendiendo a los parámetros más significativos como evidencias y número de problemas resueltos (figuras 5 y 6).

Como el objetivo de este trabajo es observar cómo ha evolucionado un grupo de alumnos, el análisis final se ha centrado en la constatación de los resultados obtenidos por el grupo en la utilización de estrategias, en el *progreso* en la resolución y en la culminación con éxito de la misma, distinguiendo en su caso cuándo un problema se ha resuelto por más de un procedimiento plausible.

¿Qué ocurrió en el pretest y qué ha ocurrido en el postest atendiendo a la Resolución de los problemas, a la Valoración y a la Planificación de la resolución de problemas?

Resolución de problemas. Se ha elaborado una tabla en la que se representan los valores medios que el grupo obtuvo en el pretest y en el postest. (Tabla 3)

En el número de problemas resueltos en el postest las cifras arrojan un incremento del 502% sobre el valor obtenido en el pretest (0,35/1,76).

Las estrategias evidenciadas por el grupo en ambos momentos 4,88/7,88 experimentan un incremento del 161%.

Es conveniente reseñar en este balance, el *descenso* que se ha producido en poco 1,53/0,7 es decir, que se ha reducido a más de la mitad. Tiene una lógica argumentación: al aumentar notoriamente *casi* (0,94/2,53) y *resuelve* (0,58/2,59) la vinculación inversa que los relaciona hace que se produzca el descenso apuntado.

La lectura medida de los datos contenidos en la tabla de valoración elaborada proporciona consecuencias muy interesantes sobre el posicionamiento de los alumnos (tabla 4 y figura 7).

El 65% de los alumnos en el postest recuerda haber visto problemas relacionados con los que ahora resuelven,

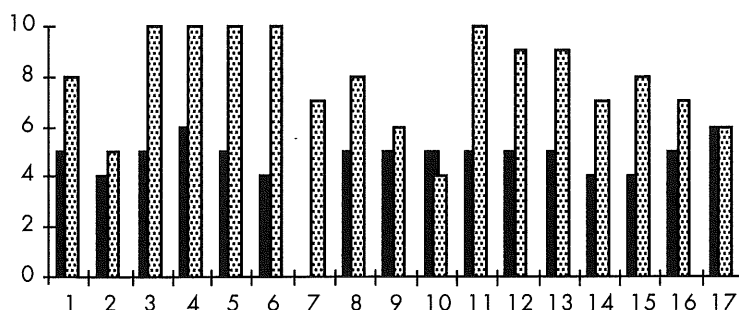


Figura 5. Evidencias por alumno. Pretest/Postest.

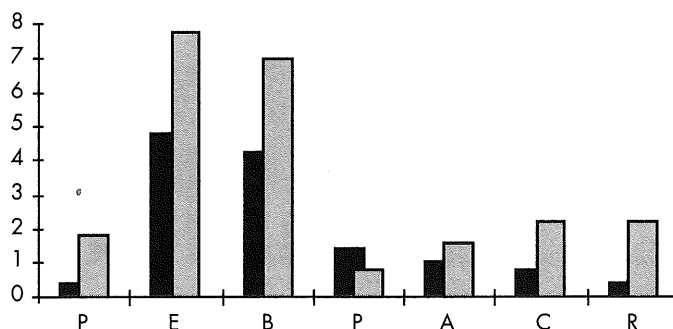


Figura 6. Puntuación múltiple de la resolución de problemas. Pretest/Postest.

N = 17	N.º de problemas diferentes resueltos	Procedimientos plausibles					
		Progreso					
		E	B	P	A	C	R
Pretest	0,35	4,88	4,58	1,53	1,18	0,94	0,58
Postest	1,76	7,88	7,41	0,7	1,76	2,53	2,59

Tabla 3. Comparación del número total de problemas resueltos en el pretest y postest

N = 17	¿Viste este problema antes?		¿Viste uno relacionado?		¿Tuviste idea de cómo empezar?	
	Sí	No	Sí	No	Sí	No
	Pretest %	Postest %	Pretest %	Postest %	Pretest %	Postest %
	0	5	19	65	46	68
	100	95	81	35	54	32

Tabla 4. Cuadro comparativo de valoración. Pretest/Postest

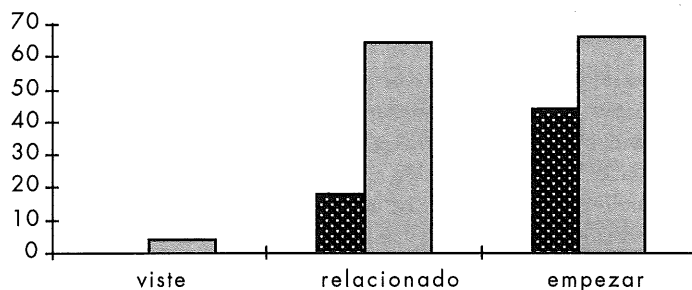


Figura 7. Valoración de la resolución de problemas. Pretest/Postest

mientras que en el pretest se manifestaba así el 19 % de ellos. El 68% tuvo idea de cómo empezar en tanto que en el pretest era el 47% el que así se manifestaba (tabla 5 y figura 8).

	N.º de problemas diferentes resueltos	Procedimientos plausibles					
		Progreso					
		E	B	P	A	C	R
Pretest	0	2,76	1,82	0,76	0,29	0,18	0
Posttest	0,35	7,94	6,94	1,35	2,76	1,88	0,41

Tabla 5. Planificación de la resolución de problemas. Pretest/Posttest

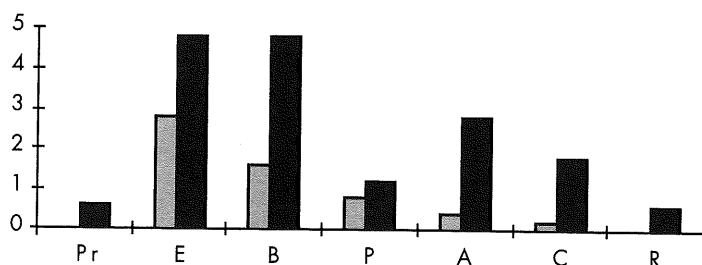


Figura 8. Puntuación múltiple de la Planificación de la resolución de los problemas. Pretest/Posttest

Ha sido en la Planificación de la resolución de los problemas donde el avance experimentado por el grupo se manifiesta con perfiles más sobresalientes. En la consideración de las evidencias apuntadas, 2,76/7,94, el aumento del 288% es indicativo de la mejora cualitativa.

A pesar de que en esta prueba sólo se les pedía a los alumnos que adelantarán procedimientos plausibles de resolución y de estar constreñidos por el tiempo, ocho minutos por problema, cuatro alumnos en el posttest resolvieron siete problemas, frente a ningún problema resuelto en el pretest.

Interpretación de los resultados

Este trabajo tenía como hilo conductor de la investigación el constatar la eficacia de una propuesta didáctica en la resolución de problemas y observar diacrónicamente cómo evolucionaban un grupo de alumnos de 4.º de ESO.

Desde el comienzo del curso (octubre) en que los alumnos desconocían totalmente expresiones tales como heurística, procedimiento plausible, estrategia, abordaje, etc. y su primer contacto con un bloque de cinco problemas diferentes en el pretest, hasta ahora, final de curso, los alumnos a la par que maduraban cronológicamente, lo hacían matemáticamente con intensidad y su confianza en el uso correcto de aquellos términos e incluso el aporte original de heurísticas innovadoras, se ha incrementado considerablemente.

Es infrecuente que los alumnos en general mediten, de forma ordenada y metódica, sobre su propio proceso de trabajo en el aula de matemáticas.

Después de realizado el pretest, trabajado durante tres fases de instrucción y concluido el posttest, la evolución progresiva de los alumnos adquiere perfiles y rasgos destacables en las siguientes variables observables.

Procedimiento plausible/resultado

Existe un incremento progresivo de la correlación evidencia/problema resuelto atendiendo a las distintas perspectivas desde la que ésta se observe.

Si se considera *número de evidencias por alumno/problemas resueltos el resultado* es 0,44.

Si la estudiamos tomando como observables *número de evidencias por alumno/casi + resuelto* la correlación existente es de 0,64

Pero donde esta correlación está más próxima a una relación lineal $r = 0,96$ es cuando se comparan *número de evidencias por problema/casi + resuelto*.

Del contacto directo con los alumnos a lo largo de un curso escolar en Taller de Matemáticas es posible colegir que aún para alguno de ellos la fase de formalización no se ha fraguado definitivamente y el peso específico de la misma en el aporte cuantitativo de la investigación se hace sentir en la importancia que «casi» adquiere como dato decisivo para la eficaz interpretación de los resultados.

Existe una relación directa fuerte entre el número de procedimientos plausibles utilizados en la resolución de un problema y la culminación con éxito de la misma, siempre que se incluya la fase «casi» en el estudio.

Revisión/valoración

Es infrecuente que los alumnos en general mediten, de forma ordenada y metódica, sobre su propio proceso de trabajo en el aula de matemáticas. Ha de ser ésta una labor enseñada a través de unas secuencias específicas de aprendizaje. Esta parcela del mismo ha tenido su cuota temporal y organizada a lo largo de la investigación por parte de la profesora. La insistencia a los alumnos en la necesidad de dejar constancia escrita de sus

procesos de resolución y la elaboración de informes retrospectivos en los que narran con frases adverbiales la estructuración racional de su trabajo, les ha ejercitado en sus análisis introspectivos y en la ágil y fiable contestación de los apartados de los cuestionarios *ad hoc*.

De la organización sistemática de los datos contenidos en los cuestionarios se infiere que los alumnos han adquirido una mayor consciencia de sus propios procesos de resolución que podrían concretarse en el siguiente aforismo:

Planificación y dificultad mantienen entre sí una relación inversa.

Los alumnos han aprendido a archivar en su memoria problemas conocidos en los que, aunque los textos de los mismos sean diferentes en su presentación literaria, les sugieren vías de aproximación hacia la resolución de los nuevos problemas e inducen procesos de *feed-back* todavía sin demasiado realce pero interesante para seguir trabajando en esa dirección.

Procedimiento plausible/planificación de los problemas resueltos

Ya se hizo constar con anterioridad que ha sido en la Planificación de la resolución de problemas donde más se ha notado el aporte de evidencias de estrategias.

Los alumnos han sido capaces de adquirir a lo largo de la instrucción un fondo de heurísticas que les ha permitido acudir, transfiriéndolas, a aquellos problemas más o menos relacionados con los ya conocidos para que, incluso en el caso más alejado de su familiaridad como es el de los no relacionados, les haya permitido disponer de 36 evidencias de estrategias para sólo dos problemas. Lo que induce a considerar que la adquisición, conservación e idónea distribución de las mismas ha sido provechosa.

Un alumno incluso ha resuelto uno de los problemas no relacionados.

A un mayor número de procedimientos plausibles mayor transferencia de heurísticas a nuevos problemas.

*Los alumnos
han sido capaces
de adquirir
a lo largo
de la instrucción
un fondo
de heurísticas que
les ha permitido
acudir,
transfiriéndolas,
a aquellos
problemas
más o menos
relacionados con
los ya conocidos...*

Protocolos/estrategias

En las tres fases de instrucción los alumnos han trabajado 29 problemas abordándolos desde diferentes estrategias. De todos ellos han realizado protocolos y casi todos han sido analizados por la profesora.

Considerando el tiempo de permanencia de los alumnos en cada una de las fases –familiarización, búsqueda, desarrollo y revisión– el número de retornos efectuados (entendiendo por tales los regresos a una fase anterior en busca de estrategias nuevas o ya apuntadas) y revisión de su proceso de resolución, como variables a relacionar para la elucidación de conclusiones, pueden esbozarse ya algunas de ellas:

A mayor tiempo en la fase de búsqueda de estrategias, mayor éxito en la resolución.
A mayor número de retornos, mayor éxito en la resolución.
A mayor tiempo en la fase de revisión, mayor éxito en la resolución.

Los alumnos que iniciaron el curso con un total desconocimiento de la «Resolución de problemas», en un ambiente diferente como ha sido el Taller de matemáticas, trabajando en grupos y sin la presión de una clase convencional, con una cierta resistencia inicial a la elaboración de los protocolos, han asimilado con agrado y eficacia, ahora al final del curso, los nuevos procedimientos transfiriendo no sólo sus heurísticas a los nuevos problemas sino que han evolucionado también en su relación con las Matemáticas.

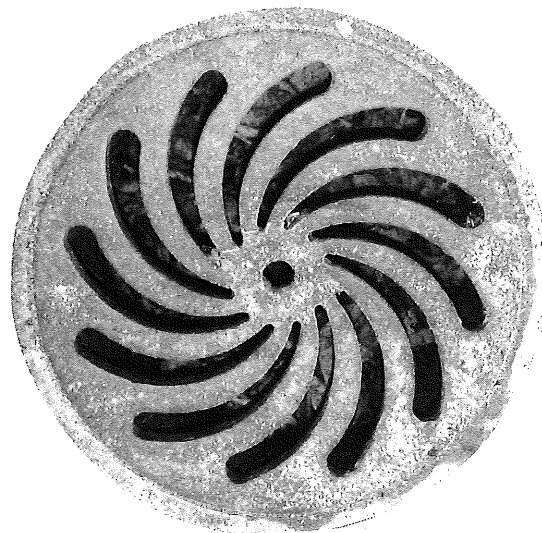
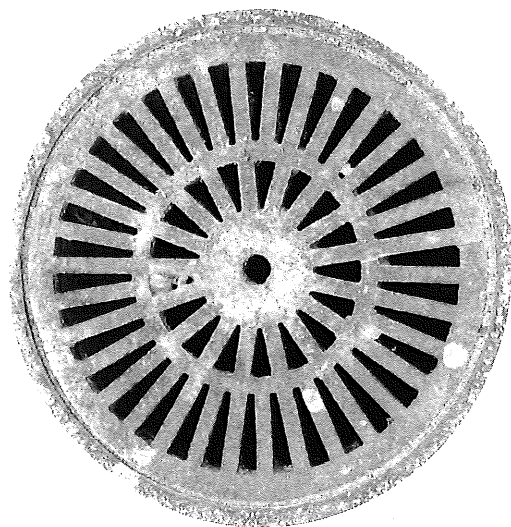
Al comienzo de la instrucción y durante el desarrollo de la misma, se ha insistido a los alumnos por parte de la profesora en la necesidad de reflexionar sobre el propio proceso de resolución, bien por medio de la elaboración individual de los protocolos como por la puesta en común de los procesos seguidos y resultados obtenidos. ¿Los diferentes bloques de contenido del currículo estarían mejor introducidos y el aprovechamiento de sus potencialidades sería mayor si se desarrollasen a través de la resolución de problemas con alumnos que como éstos disponen ya de un bagaje de heurísticas que no poseen aquellos que no han trabajado la resolución de problemas? Es una línea de investigación que podría desarrollarse.

Referencias bibliográficas

- ARNAL, J., D. DEL RINCÓN y A. LATORRE (1992): *Fundamentos y metodología*, Labor, Barcelona.
- BOLT, B. (1988): *Más actividades matemáticas*, Labor, Barcelona.
- BOLT, B. y D. HOBBS (1991): *101 proyectos matemáticos*, Labor, Barcelona.
- CALLEJO, M. L. (1992): *Orientaciones para la Elaboración de Unidades Didácticas. Área de Matemáticas*, Monografía, 13. Documentos I.E.P.S, Madrid.
- CALLEJO, M. L. (1994): *Un club matemático para la diversidad*, Narcea, Madrid.

- CALLEJO, M. L. (1995): «Evaluación de los alumnos en resolución de problemas: Tres estudios de casos», en F. HERNAN y otros: *Aspectos didácticos de matemáticas*. col. Educación Abierta, 115, 49-88, ICE de la Universidad de Zaragoza.
- CÁMARA, M. T., M. F. MONTEAGUDO y J. PAZ (1996): *Materiales Didácticos. Taller de Matemáticas*, MEC, Madrid.
- CAÑÓN, C. (1993): *La matemática. Creación y descubrimiento*, U.P.C.O., Madrid.
- CHI, M. y T. GLASER (1986): «Capacidad de resolución de problemas», en R. J. STENBERG (Ed): *Las capacidades humanas: Un enfoque desde el procesamiento de la información*, 293-324, Labor, Barcelona.
- COCKCROFT, W. H. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan: Informe Cockcroft*, MEC, Madrid.
- CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1996): *Cuadernos de la ESO, 3: Área de matemáticas*, Junta de Andalucía, Sevilla.
- DREYFUS, T. (1991): «Advanced Mathematical Thinking Processes», en TALL, D. *Advanced Mathematical Thinking*, 25-41, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands.
- EL QUINZET (El Centro de Recursos Matemáticos) (1996): *The new party city. European week for scientific and technological culture*, Museu de la Ciència, Barcelona (noviembre).
- GÓMEZ, I. M. (1992): *Los juegos de estrategia en el currículo de matemáticas*, Apuntes I.E.P.S., 55, Narcea, Madrid.
- GUZMÁN, M. (1991): *Para pensar mejor*, Labor, Barcelona.
- GUZMÁN, M. (1995): *Aventuras matemáticas*, Pirámide, Madrid.
- ICME 8 (1996): *8º Congreso Internacional de Educación Matemática*, Sevilla
- MARTIN, J. C. (1984): «Una renovación necesaria de la educación Matemática», en *Matemáticas para todos*, 15-20, División de Educación Científica, Técnica y Ambiental, UNESCO.
- MASON, J., L. BURTON, y K. STACEY (1992): *Pensar matemáticamente*, Labor, Barcelona.
- MATHEMATICAL ASSOCIATION OF AMÉRICA (1996): *Concursos de matemáticas*, Tortuga de Aquiles, 8, Euler Editores, Madrid
- MEC (1992): *Secundaria obligatoria. Matemáticas*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.
- MEC (1992): *Secundaria Obligatoria. Optativas*, Taller de Matemáticas, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.
- MINISTERE de L'EDUCATION (1993): *Guide Pédagogique, Secondaire Mathématique*; Direction Générale du Développement Pédagogique, Québec.
- N.C.S. (1992): *General Certificate of Secondary Education*, Mathematics, SEG. London.
- N.C.T.M (1991): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática*, S.A.E.M. Thales, Sevilla.
- PÉREZ, M. G. (1990): *Investigación-Acción. Aplicaciones al campo social y educativo*, Dykinson, Madrid.
- PÉREZ, M. G. (1994): *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*, Muralla, Madrid.
- POINCARÉ, H. (1995): «La creación matemática. Conferencia pronunciada en la Sociedad Psicológica de París», en *Temas I. Revista de Investigación y Ciencia*, 2-4, Prensa Científica, Barcelona.
- POLYA, G. (1990): *How to solve it*, Penguin Books, London (or. 1945).
- POLYA, G. (1966): *Matemática y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid. (or. 1954)
- SCHOENFELD, A. H. (1985): *Mathematical problem solving*, Academic Press Inc, Orlando.
- SHELL CENTRE FOR MATHEMATICS EDUCATION (1994): *Problemas con pauta y números*, Universidad del País Vasco.
- STEVENSON, F. W. (1992): *Exploratory problems in mathematics*, N.C.T.M, USA.
- TALL, D. (1991): *Advanced Mathematics Thinking*, Dordrecht, Kluwer.
- UNESCO (1984): *Matemáticas para todos del ICME 5*, Serie de documentos, 20, División de Educación Científica, Técnica y Ambiental, París.

M.ª del Carmen Pinilla
IES Siete Colinas. Ceuta
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»



París (Foto: Luis Balbuena)