# SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

n.º 30

FEBRERO

1999

SUMA 30

febrero 1999

# Índice



**Directores**
Emilio Palacián Gil
Julio Sancho Rocher

**Consejo de redacción**
Jesús Antolín Sancho
Eva Cid Castro
Bienvenido Cuartero Ruiz
Faustino Navarro Cirugeda
Rosa Pérez García

**Consejo Editorial**
José Luis Aguiar Benítez
Javier Brihuega Nieto
M.ª Dolores Eraso Erro
Ricardo Luengo González
Luis Puig Espinosa

**Edita**
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

**Diseño portada**
José Luis Cano
**Diseño interior**
Concha Relancio y M.ª José Lisa
**Maquetación**
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

**Revista SUMA**
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.000 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

SUMA 30
febrero 1999

# ¿La contrarreforma de las matemáticas?

EDITORIAL

*CUANDO ESTÁ finalizando la implantación de la reforma educativa en la ESO y bachillerato se empieza a hablar con insistencia de lo que se podría llamar la reforma de la reforma o, por qué no decirlo, de la «contrarreforma», con todas las connotaciones que esta palabra lleva consigo.*

*La LOGSE ha resuelto problemas importantes del sistema educativo, pero también ha creado otros que están en la mente de todos. Aunque estos problemas repercuten en la clase de matemáticas, no son atribuibles al currículo de nuestra área. De hecho, existe cierto consenso acerca de que la filosofía, los contenidos y metodología de las matemáticas son los correctos, aunque quizás se pudieran hacer algunos retoques.*

*El plan de mejora de la enseñanza de las humanidades proponía aumentar el horario de algunas áreas, entre las que estaba la nuestra. También limitaba el margen de optatividad y homogeneizaba los recorridos, al final de la ESO. No se comprende qué podían aportar estas decisiones a la solución de uno de los mayores problemas de la educación obligatoria: la atención a la diversidad. En nuestra área, el taller de matemáticas caía victima de esta reforma que, desde dos de sus posibles enfoques, podía dirigirse al refuerzo de alumnos con carencias o dar un espacio para la atención de los alumnos con mayor interés por las matemáticas.*

*Desde finales de año circula un borrador de currículo, sobre el que, por cierto, no se ha pedido la opinión de esta Federación. Su pretensión es establecer un programa flexible y adaptable a las necesidades y aptitudes de los diferentes alumnos, pero que no supone una simple corrección de detalle a los existentes, sino un cambio en profundidad. Al leerlos da la impresión de que se está frente, no a los programas de 1970 sino, a los de 1957.*

*En el borrador, se añaden contenidos a los ya existentes (sucesiones, progresiones, números irracionales, radicales, números complejos, polinomios, combinatoria, funciones exponencial y logarítmica...) y se hace gran hincapié en la aplicación de algoritmos y el dominio de técnicas de cálculo sobre todo tipo de objetos matemáticos, en especial los algebraicos. ¿Qué se suprime?, muy poco, sólo lo que había de más innovador: no hay referencias a números grandes y pequeños, a la estimación, la aproximación queda reducida a números decimales, y... la resolución de problemas. La mención a los problemas se reduce, tan sólo, a los de aplicación del álgebra. Da la sensación de que únicamente hay problemas de grifos, móviles, edades, etc. y que no existen de números, de geometría, de estadística, de funciones...*

*Si al final estos programas se aprueban se habrá perdido una gran oportunidad de que los ciudadanos, que no van a ser científicos profesionales, aprendan unas matemáticas más cercanas a sus intereses, más creativas, más entretenidas, más formativas..., aunque eso sí, aquellos que se dirijan hacia una carrera universitaria sabrán racionalizar denominadores mucho mejor, dividir polinomios, resolver ecuaciones irracionales y hasta es posible que conozcan la fórmula del área de un casquete esférico.*

*En definitiva, con este nuevo (¿o más bien deberíamos decir viejo?) enfoque de las matemáticas se acentuará su carácter endogámico: se estudian matemáticas en un nivel, para poder seguir estudiando matemáticas en el nivel siguiente... Y, naturalmente, seguirá siendo válido el cuento del cazador de dragones*.*

* Quien no lo conozca lo puede leer en la página 124 de este número de SUMA. Aquí no cabe.

SUMA 30
febrero 1999, pp. 5-25

# *El* Cours d'Analyse *de Cauchy*

F. Javier Pérez-Fernández
Antonio Aizpuru

ARTÍCULOS

En este artículo presentamos un estudio contextualizado del *Cours d'Analyse* de Cauchy, analizando su significado e importancia. Prestamos especial atención al grado de elaboración teórica de límites, continuidad, series, números reales y funciones y series complejas, relacionando las aportaciones de Cauchy con el nivel conceptual anterior a esta obra.

* Nuestro agradecimiento al Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, por las facilidades proporcionadas para la consulta de los originales señalados en las referencias con (ROA).

EN JUNIO DE 1821 se publicaba el libro *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. 1er Partie. Analyse Algebrique* de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), una obra de fundamental trascendencia en la construcción del análisis moderno. Cauchy usa el concepto de límite como la base sobre la que construirá todo el análisis: continuidad de funciones, convergencia de series, derivada e integral; creando un sistema lógicamente fundamentado, fuertemente interconectado, dirigido por el rigor.

Ya que nuestro propósito es analizar el *Cours d'Analyse*, nos centraremos en los aspectos estrictamente necesarios para entender las aportaciones, la originalidad, la importancia y la influencia en el desarrollo posterior del análisis, de esta obra.

En la sección que sigue a esta introducción presentamos una vista panorámica del *Cours* indicando someramente los temas principales que aparecen en cada Capítulo y Apéndice (titulado por él como Notas), con la intención de proporcionar, aunque sólo sea muy por encima, una imagen de conjunto de la obra.

Las cinco secciones siguientes constituyen la parte principal de este trabajo, en ellas abordaremos lo que a nuestro juicio, en uno u otro sentido, son las contribuciones más importantes de la misma. Dedicaremos una sección a cada uno de los siguientes temas: límite, continuidad, la teoría de series, los números reales y, finalmente, las funciones y series complejas. En cada una de ellas desbrozaremos, dentro de los límites que tenemos respecto del número de páginas de este trabajo, las aportaciones de Cauchy.

Finalizaremos con una sección de conclusiones.

En el tratamiento de los diversos temas seremos escrupulosamente fieles a los argumentos de Cauchy, aunque en algún caso usemos, en aras de la simplicidad, la notación actual. No obstante, las reproducciones textuales del original las distinguiremos entrecomillándolas o bien en cuerpo de letra más pequeño. Cuando en alguna de estas citas sea necesaria alguna aclaración, a algún término de la misma, aparecerá ésta entre corchetes.

Cuando una cita no haga referencia directa a un determinado autor y obra, se entenderá que se refiere al *Cours* de Cauchy, por lo que para su exacta determinación nos basta indicar, entre paréntesis, el número de la página del original, que siempre estará referida a la primera edición.

Hechas estas aclaraciones, seguidamente vamos a efectuar algunas precisiones de tipo preliminar, sobre el trabajo que nos ocupa.

En la introducción (págs. ij a v) dice

> En cuanto a los métodos, he buscado darles todo el rigor que se exige en geometría, sin recurrir para nada a las razones provenientes de la generalización del álgebra. Las razones de esta índole, aunque bastante comúnmente admitidas, sobre todo en el paso de las series convergentes a las divergentes, y de las cantidades reales a las expresiones imaginarias, no pueden ser consideradas, eso me parece, más que como inducciones propias para hacer presentir algunas veces la verdad, pero que están poco de acuerdo con la exactitud tan alabada de las ciencias matemáticas. Se debe así mismo observar que ellas tienden a hacer atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión indefinida, mientras que, en la realidad, la mayor parte de estas fórmulas subsisten únicamente bajo ciertas condiciones, y para ciertos valores de las cantidades que ellas comprenden. [...] Es verdad que, para permanecer constantemente fiel a estos principios, me he visto forzado a admitir proposiciones que puede ser que parezcan un poco duras a primera vista. Por ejemplo, he enunciado en el capítulo VI, que *una serie divergente no tiene suma*; [...] Pero aquellos que leyeran mi obra reconocerán, eso espero, que las proposiciones de esta naturaleza, entrañan la acertada necesidad de poner más precisión en las teorías, y de aportar restricciones útiles a asertos demasiados amplios, volviendo en beneficio del análisis, y proporcionando varios sujetos de investigación que no son sin importancia. Así, antes de efectuar la suma de cualquier serie, he debido examinar en qué casos las series pueden ser sumadas, o, en otros términos, cuáles son las condiciones de su convergencia; y yo he, en este tema, establecido reglas generales que me parecen merecer alguna atención.

Este breve extracto de la Introducción del *Cour d'Analyse* nos indica claramente el deseo de Cauchy de cimentar sólidamente el análisis de principios del siglo XIX.

Se han considerado diversas razones por las cuales surge la necesidad de rigorizar el cálculo infinitesimal (cf. Grabiner, 1981), algunas internas o estrictamente matemáticas y otras vinculadas a consideraciones sobre el desarrollo social. De la mano de la Revolución Industrial se van creando paulatinamente, en los distintos países europeos, escuelas técnicas para la formación de ingenieros; se extiende la enseñanza y aumenta el interés social por las ciencias.

*Se han considerado diversas razones por las cuales surge la necesidad de rigorizar el cálculo infinitesimal, algunas internas o estrictamente matemáticas y otras vinculadas a consideraciones sobre el desarrollo social.*

Algunos autores han visto precisamente en las necesidades de la enseñanza una de las razones del proceso de rigorización; según esta opinión, la necesidad de explicar a un público creciente los métodos y técnicas del análisis habría llevado a un proceso de clarificación de los conceptos y principios y consecuentemente de rigorización. En palabras de J. V. Grabiner (1981, pág. 25) «Los fundamentos del cálculo parecen así ser vistos más como una tarea filosófica o pedagógica que matemática».

En nuestra opinión ésta no sería una de las razones, desde luego no en el caso de Cauchy. Precisamente su deseo de presentar desde una óptica rigurosa el análisis que explicaba en la *École Polytechnique* le produjo serios enfrentamientos y más de un disgusto con alumnos, colegas y dirección del centro, como a continuación brevemente comentaremos.

La Introducción del *Cours* empieza con estas palabras

> Algunas personas, que han querido guiar bien mis primeros pasos en la carrera de las ciencias, y entre las que citaré con reconocimiento a los señores *Laplace* y *Poisson*, habiéndome testimoniado el deseo de verme publicar el Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, me he decidido a poner este Cours por escrito para mayor utilidad de los alumnos. De él he ofrecido aquí la primera parte conocida bajo el nombre de *Analyse algébrique*, y en la que trato sucesivamente diversas especies de funciones reales o imaginarias, de series convergentes o divergentes, de la resolución de ecuaciones, y de la descomposición de fracciones racionales.

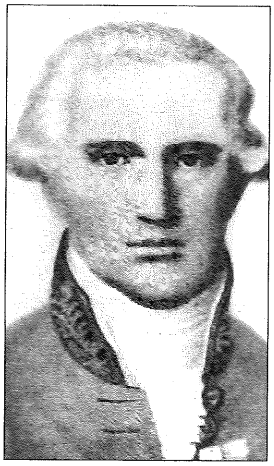
Efectivamente el libro nace como un texto dirigido a los alumnos de la *École Polytechnique*. Pero la obra tiene un origen mucho más controvertido de lo que ha simple vista pudiera deducirse de las palabras de Cauchy.

La *École Polytechnique* nacía en 1794, de la mano de la Revolución y con la decidida intervención de Gaspar Monge (1746-1818), para dar respuesta a las necesidades de formación de ingenieros que el desarrollo científico y tecnológico requerían. Pronto se convirtió en un punto de referencia y en modelo de todas las escuelas técnicas superiores que se instauraron por toda Europa a medida que la Revolución Industrial se hacía presente, de una u otra forma, en los distintos países, llegando a ser el centro científico más importante del mundo. Nombres ilustres como Monge, Lagrange, Laplace, Ampère, Poncelet, Cauchy,... trabajaron allí.

El monárquico Cauchy que se había formado como ingeniero en la *École Polytechnique*, después de un breve ejercicio de esta profesión en Cherburgo, y tras la caída de Napoleón, una vez que las condiciones políticas le eran más favorables[1], llegó a ser profesor de aquella prestigiosa institución en 1816.

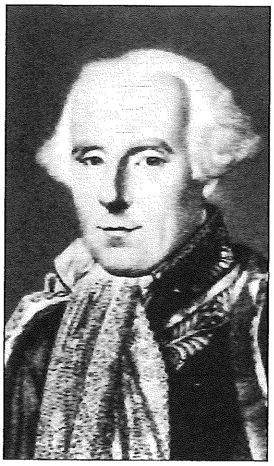
Su preocupación por presentar la disciplina lógica y rigurosamente estructurada le lleva a la modificación de los programas oficiales. El tiempo disponible para desarrollar su propio programa le conduce al cambio de la dinámica de las clases (caracterizadas hasta entonces por la abundancia de ejercicios prácticos) y al de orientación (hasta ese momento, fundamentalmente práctica). Por otra parte, en aquellos años el *Conseil d'Instruction de la École* consideraba que el enfoque adecuado para la enseñanza del cálculo descansaba sobre los infinitesimales y no sobre el concepto de límite cuya aplicabilidad estimaba difícil y que Cauchy había tomado como pieza angular de la construcción del cálculo. Todo ello provocó una reacción desfavorable a sus innovaciones tanto entre los profesores como entre los alumnos.

Algunos colegas, en particular Arago profesor de análisis aplicado, le censuraban por la distorsionada preparación que los alumnos recibían, lo que provocaba que éstos tuvieran lagunas en cuestiones primordiales. En la polémica interviene la dirección de la *École* y el *Conseil* posicionándose en contra de Cauchy. Él anuncia, en 1820, al *Conseil* la próxima aparición de la primera parte de su curso de análisis, como respuesta a las intenciones de aquél por controlar el contenido de su programa.



Monge

Lagrange



Laplace

1 La biografía de Cauchy puede consultarse en Belhoste (1991), en Valson (1868) y en Wussing y Arnold (1989).

Augustin-Louis Cauchy

En 1821 Cauchy es víctima de un abucheo en clase por algunos estudiantes. Desde la dirección del centro se consideró que también Cauchy era responsable de lo ocurrido por su inadecuada adaptación a las necesidades de la mayoría de sus alumnos. El tema tuvo singular trascendencia llegando hasta el Ministerio del Interior, pero sobre todo tuvo una fundamental repercusión interna. Tras reiteradas peticiones del *Conseil*, Cauchy inicia la redacción de resúmenes de sus lecciones, abandonando definitivamente el *Cours d'Analyse* del que sólo se publicaría la primera parte mencionada. En 1823 aparece su *Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*; en el prólogo Cauchy (1899*a*) dice: «Esta obra, emprendida bajo la demanda del *Conseil d'instruction* de la *École royale polytechnique*, ofrece el resumen de las Lecciones que he dado en esta *École* sobre cálculo infinitesimal.»

No obstante, advierte de la singularidad de su trabajo respecto de otras obras del mismo género, añadiendo: «Mi objetivo principal ha sido conciliar el rigor, del que he hecho una ley para mí en mi *Cours d'Analyse*, con la simplicidad que resulta de la consideración directa de cantidades infinitamente pequeñas.»

Estos datos nos revelan que Cauchy entendía que era necesario establecer sobre principios firmes el análisis y no motivado por necesidades pedagógicas, sino precisamente a pesar de ellas. Por otra parte, a ningún profesor se le escapa que es más difícil, con los principiantes, hilar fino, entrar en la sutileza de los conceptos y métodos, que pasar por ellos por encima enfatizando los buenos resultados que las técnicas en cuestión proporcionan en ejercicios prácticos.

Son pues, a nuestro juicio, otras las razones que impulsan la fundamentación del cálculo, muchas de ellas tratadas en la obra señalada (Grabiner, 1981).

Desde sus inicios, en la segunda mitad del siglo XVII, hasta principios del siglo XIX tuvo lugar un desarrollo vertiginoso del cálculo infinitesimal y de sus métodos, con una enorme producción matemática que daba respuesta a variados problemas de tipo físico. La validez de los métodos y de las soluciones estaban refrendados por la propia naturaleza del problema resuelto, ordinariamente de lo que hoy denominaríamos de carácter aplicado.

Leibniz

Sin embargo, desde el mismo origen del cálculo se conocía la debilidad lógica de sus fundamentos. El uso de infinitésimos, en la base de la obra de Leibniz (1646-1716), conducía a que dos cantidades que se diferenciasen en un infinitésimo debían considerarse iguales, produciéndose una situación lógica insostenible, dado que dos cantidades distintas a la vez eran iguales. El cálculo de fluxiones de Newton (1643-1727) se fundamentaba en las razones de cantidades evanescentes, que no eran ni finitas, ni infinitamente pequeñas y cuya oscuridad planteaba así mismo dudas sobre el rigor de la teoría.

Newton

Paralelamente la teoría de series se desarrollaba como una herramienta básica para abordar los problemas de cuadratura. Pronto ésta conduciría a situaciones paradójicas, que evidenciaban la debilidad científica de los métodos, aunque bien es cierto que los resultados, globalmente, parecían incuestionables.

No obstante, puesto que, en uno y otro caso, se obtenían soluciones que de alguna forma se evidenciaban como correctas, aun cuando no se podían justificar los conceptos usados, los razonamientos se admitían, pues, en algún sentido, habrían de ser correctos.

Esta confusa situación provocó un paulatino y lento proceso tendente a aclarar los fundamentos. Producto del mismo es el concepto de límite, sobre el que descansa todo el análisis moderno. Puede verse una evolución de este concepto en Durán (1996) y en Pérez (1998).

Sin entrar en los antecedentes de la matemática griega, el concepto de límite aparece, en 1687, de forma inequívoca, de la mano de Newton en la obra *Philosophia naturalis principia mathematica* (Los principios matemáticos de la filosofía natural). En particular en el Lema I de la sección I del Libro I (Newton, 1760, pág. 62) aparece lo que podríamos reinterpretar en terminología actual como: dadas dos sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$, si tomado un $\varepsilon > 0$ para un $n$ suficientemente grande cuya existencia depende de $\varepsilon$, se tiene que $|a_n - b_n| < \varepsilon$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

D'Alembert (1717-1783) establece una definición bastante precisa (D'Alembert, 1767, pág. 437): «Se dice que una magnitud es el *límite* de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más cerca que una magnitud dada, por pequeña que se la pueda suponer, no obstante sin que la magnitud que se aproxime, pueda jamás sobrepasar a la magnitud a la que ella se aproxima; de manera que la diferencia de semejante cantidad a su *límite* es absolutamente inasignable.»

Aparece aquí el concepto de límite como supremo o ínfimo de sucesiones monótonas.

L'Huilier (1750-1840) añade a la idea de D'Alembert la no necesidad de la monotonía para el límite y la introducción de la notación lim (cf., por ejemplo, Bottazzini, 1986; Grattan-Guinnes, 1984; Montucla, 1799-1802). Posteriormente Lacroix (1765-1843) avanza en la misma idea, estableciendo que el límite se puede alcanzar y una primera aproximación al concepto de límite lateral de una función en un punto (cf. Lacroix, 1810, Tomo I, págs. 13 y 14).

Bolzano (1781-1848) hace contribuciones especialmente importantes sobre variados aspectos y, particularmente, sobre los conceptos de convergencia y continuidad en 1817. Pero su obra, pasó prácticamente inadvertida para la mayoría de los matemáticos contemporáneos, por lo que no tuvo repercusión sensible en la evolución de los conceptos matemáticos durante la primera mitad del siglo XIX. Sobre las aportaciones de Bolzano y su comparación con las análogas de Cauchy se ha escrito mucho, siendo de particular interés el artículo de Grattan-Guinnes (1970) y la contestación de Freudenthal (1970-71).

Sin entrar en la polémica Bolzano *versus* Cauchy, lo que no cabe duda es que la obra de Cauchy tiene una enorme influencia (como consecuencia de su posición científica y del papel hegemónico de las matemáticas francesas en aquella época), que se traduce en la aparición de otros libros de texto fuertemente inspirados en su obra y, también, en la apreciación del rigor y en la forma de hacer matemáticas de un buen número de importantes matemáticos del siglo XIX.

## Descripción general de la obra

El libro consta de 576 páginas y se compone de unos preliminares, doce capítulos y nueve apéndices titulados como notas.

En los preliminares establece el punto de partida del trabajo. Indica qué ha de entenderse por número, cantidad, variable, límite e infinitésimo. Aporta algunas consideraciones sobre el campo numérico y establece implícitamente el concepto de límite de oscilación.

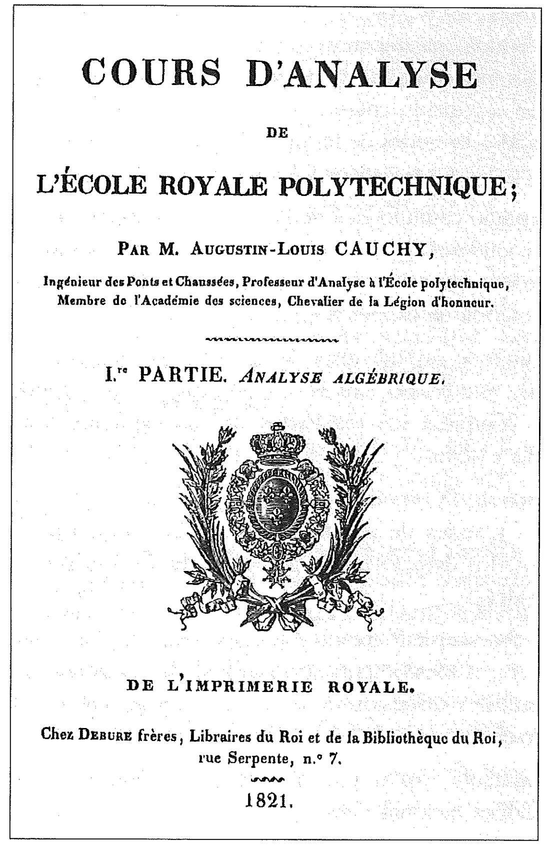
El capítulo I está dedicado al concepto de función y a la clasificación de funciones.

El segundo capítulo está dedicado a límites y continuidad. Trata sobre infinitésimos y sus órdenes y propiedades. Define función continua, establece la continuidad de las funciones elementales y el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas, también trata sobre la continuidad de funciones reales de varias variables y finalmente dedica un epígrafe entero a la indeterminación de límites.

El capítulo III trata sobre las funciones simétricas, alternadas y homogéneas.

El capítulo cuarto está dedicado a la interpolación, obteniendo la fórmula del polinomio interpolador de Lagrange. Efectúa algunas aplicaciones con un fuerte significado combinatorio.

*El libro consta de 576 páginas y se compone de unos preliminares, doce capítulos y nueve apéndices titulados como notas.*


COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

El quinto capítulo trata sobre la determinación de funciones continuas de una variable que verifican ciertas condiciones, estudiando cuatro tipo de ecuaciones funcionales: $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$, $\Phi(x+y)=\Phi(x)\cdot\Phi(y)$, $\Phi(xy)=\Phi(x)+\Phi(y)$, $\Phi(xy)=\Phi(x)\cdot\Phi(y)$; obteniendo, respectivamente, como soluciones: $\Phi(x)=ax$, $\Phi(x)=A^x$, $\Phi(x)=a\log_A x$ y $\Phi(x)=x^a$, donde $a$ es una constante arbitraria y $A$ una constante positiva arbitraria. Tras la resolución, dice Cauchy (pág. 113): «Se debe de ello [de las cuatro soluciones señaladas] concluir que hay una gran diferencia entre las cuestiones en que se trata de calcular los valores desconocidos de ciertas cantidades, y las cuestiones en las que se propone descubrir la naturaleza desconocida de ciertas funciones según propiedades dadas. En efecto, en el primer caso, los valores de las cantidades desconocidas se encuentran finalmente expresados por medio de otras cantidades conocidas y determinadas, mientras que en el segundo caso las funciones desconocidas pueden, como se ve aquí, admitir en su expresión constantes arbitrarias». La segunda de estas ecuaciones será usada en el capítulo siguiente para estudiar la serie binomial.

El capítulo VI es uno de los de mayor importancia, con él nace una teoría rigurosa de series, y está dedicado al estudio de éstas y de las series de potencias, en el caso real. Es sin duda una auténtica joya dentro de la construcción del análisis moderno. Tras la definición de convergencia y establecer el llamado criterio de Cauchy, estudia en epígrafes separados las series de términos no negativos, las de términos positivos y negativos y las series de potencias.

El séptimo capítulo está dedicado al estudio de los números complejos y sus operaciones, proporcionando una novedosa exposición estructurada, sistemática y rigurosa de la teoría de números complejos.

El siguiente capítulo está dedicado a las funciones complejas, estudiando límites, continuidad y extendiendo al caso complejo los resultados de los capítulos tercero, cuarto y quinto.

El capítulo IX está dedicado a las series de términos complejos y series de potencias de variable compleja, obteniendo los desarrollos de potencias de las funciones elementales.

El décimo capítulo trata sobre el teorema Fundamental del Álgebra, la descomposición factorial de un polinomio, y el estudio y discusión de las ecuaciones de tercer y cuarto grado.

El siguiente capítulo trata sobre la descomposición de fracciones racionales en suma de fracciones con numerador constante (un tema de especial importancia para la integración), para lo que necesitaba de los resultados del capítulo precedente.

El último capítulo versa sobre las series recurrentes de términos reales o complejos y su relación con las fracciones racionales.

De las nueve notas, la primera y la segunda están dedicadas al estudio del campo numérico, la relación de orden y el tratamiento de las desigualdades mediante un singular y hábil uso de una teoría de medias entre números.

La nota tercera estudia la resolución numérica de ecuaciones. Estableciendo algunos resultados sobre raíces de ecuaciones f(x)=0, con f(x) continua. Para el caso de ecuaciones polinómicas, estudia la determinación del número de raíces reales y el cálculo aproximado de sus valores, mediante el proceso de: 1) eliminación de las raíces múltiples, 2) acotación de las raíces reales, 3) separación de las raíces, mediante el estudio del signo y 4) obtención de los valores aproximados de las raíces. Trata el método de Newton y finaliza con un teorema que generaliza la *regla de Descartes* relativa a la determinación del número de raíces positivas o negativas que aparecen en una ecuación polinómica de grado arbitrario.

La nota IV está dedicada al desarrollo de una función alternada. La quinta la dedica a la fórmula del polinomio interpolador de Lagrange, que resulta un caso particular de la interpolación mediante una función racional.

*De las nueve notas, la primera y la segunda están dedicadas al estudio del campo numérico, la relación de orden y el tratamiento de las desigualdades mediante un singular y hábil uso de una teoría de medias entre números.*

La nota VI, con el título «De los números figurados» trata sobre los coeficientes de los desarrollos de los binomios de la forma $(1+x)^m$, con $m \in \mathbb{Z}^-$ y su relación con los números combinatorios.

La siguiente nota está dedicada al estudio de series dobles. La nota VIII a desarrollos de expresiones trigonométricas y la última a productos infinitos.

## El concepto de límite

Es conveniente antes que nada aclarar la terminología de Cauchy en algunos puntos relativos, en primer lugar, al uso de las palabras *número* y *cantidad*, en segundo lugar, al uso de la expresión *valor numérico*, y finalmente al significado de la palabra *variable*.

En las páginas 1 y 2 del *Cours* dice: «Nosotros tomaremos siempre la denominación de *números* en el sentido con el que se la emplea en aritmética, haciendo nacer los números de la medida absoluta de las magnitudes; y aplicaremos únicamente la denominación *cantidades* para las cantidades *reales positivas* o *negativas*, es decir, para los números precedidos de los signos + o –. [...] Llamaremos *valor numérico de una cantidad* al número que tiene por base». Es decir, un *número* es un número positivo, una *cantidad* un número real cualquiera y el *valor numérico de una cantidad* el valor absoluto del número real en cuestión. Más adelante volveremos sobre este punto, para estudiar la concepción subyacente del campo numérico real en el *Cours*.

En la página 4 dice: «Se llama cantidad *variable* aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes unos de otros».

Hechas estas precisiones pasamos a detallar el concepto de límite en la obra de Cauchy.

En los *Preliminares*, página 4, Cauchy da la siguiente definición de límite

> Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una variable dada se aproximan indefinidamente a un

> valor fijo, de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como se quiera, este último se llama el *límite* de todos los otros.

A partir de aquí define el concepto de infinitésimo, que aparece por primera vez en el libro en la página 4 y luego retoma en la página 26 en estos términos

> Se dice que una cantidad variable llega a ser *infinitamente pequeña*, cuando su valor numérico [valor absoluto] decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero.

Que podemos interpretar para una sucesión $(a_n)_n$ de números reales (los diversos valores de la «cantidad variable») como aquella que tiene límite cero, tal como hoy decimos. Y hemos de observar que lo que Cauchy entiende por límite cero se corresponde con nuestra definición actual.

El concepto de límite infinito aparece (pág. 5) de la siguiente manera

> Cuando los valores numéricos [valores absolutos] sucesivos de una misma variable crecen cada vez más, de manera que sobrepasan todo número dado, se dice que esta variable tiene por límite el *infinito positivo*, indicado por el signo $\infty$, si se trata de una variable positiva, y el *infinito negativo*, indicado por la notación $-\infty$, si se trata de una variable negativa. Los infinitos positivos y negativos son designados conjuntamente bajo el nombre de *cantidades infinitas*.

Definición que podemos interpretar para una sucesión $(a_n)_n$ exactamente en los términos actuales. Cualquiera que sea el número $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|a_n| > M$.

En la página 27 añade «Se dice que una cantidad variable llega a ser *infinitamente grande*, cuando su valor numérico [valor absoluto] crece indefinidamente de manera que converge al límite $\infty$».

Al efectuar, en la página 26, la distinción entre «decrecimiento constante» (en términos de una sucesión, cuando decrece monótonamente, aunque pueda haber límite no nulo) y «decrecimiento indefinido» (cuando el límite es cero, aunque pueda no ser monótona) pone como uno de los ejemplos la sucesión

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots$$

indicando que no decrece constantemente pues

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{6} > 0$$

pero la sucesión decrece indefinidamente pues tiene límite cero; con ello encontramos, como ya lo hizo Lacroix (Lacroix, 1810, Tomo I, pág. 14), la separación entre la monotonía y la convergencia.

Introduce, en la página 13, la notación *lim.* para el límite, como ya lo había hecho L'Huilier, cuando «converge hacia un límite fijo». Y añade

> Algunas veces, mientras que una o varias variables convergen hacia límites fijos, una expresión compuesta por estas variables converge a la vez hacia varios límites diferentes unos de otros[2]. Indicaremos entonces uno cualquiera de estos límites, con la ayuda de dobles paréntesis colocados a continuación de la abreviación *lim.*, de forma que rodee a la expresión que se considere.

Esta aparentemente chocante frase, es aclarada inmediatamente con unos ejemplos. Dice que, cuando $x \to 0$,

> lim.(sin.x) = 0; mientras que la expresión lim.((1/x)) admite dos valores, a saber, $+\infty$, $-\infty$, y lim.((sin.1/x)) una infinidad de valores comprendidos entre los límites $-1$ y $+1$.

El tercero de los ejemplos nos indica que Cauchy está considerando aquí lo que hoy llamamos límites de oscilación. La introducción de este concepto, no definido explícitamente pero sí identificado, resulta absolutamente novedosa, pues si bien Gauss (1777-1855) anteriormente había llegado a la noción de límite inferior y superior de una sucesión (cf., por ejemplo, Dieudonné, 1978, Tomo I, pág. 337), su trabajo no se había publicado.

*El tercero de los ejemplos nos indica que Cauchy está considerando aquí lo que hoy llamamos límites de oscilación. La introducción de este concepto, no definido explícitamente pero sí identificado, resulta absolutamente novedosa, pues si bien Gauss anteriormente había llegado a la noción de límite inferior y superior de una sucesión, su trabajo no se había publicado.*

En el segundo de los ejemplos está considerando los límites laterales

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

que también habían sido ya considerados por Lacroix (Lacroix 1810, Tomo I, pág. 14).

El capítulo II del *Cours* termina con el estudio, entre las páginas 48 a la 69, de límites indeterminados y, en particular, estableciendo los siguientes criterios:

1) Si existe

$$\lim_{x \to \infty} (f(x+1) - f(x)) = k$$

entonces existe y vale *k*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

2 El subrayado es nuestro.

2) Si f(x) > 0, para valores muy grandes de $x$, y existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = k$$

entonces existe y vale $k$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{1/x}$$

Cuando la variable $x$ es entera obtiene:

3) Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right) = k$$

entonces existe y vale $k$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

4) Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

entonces existe y vale $k$

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n\right)^{1/n}$$

Utiliza los límites para el estudio del crecimiento de funciones; así aplicando el primer criterio, concluye que la función $\log_A x$, para A > 1, crece más lentamente que $x$, mientras que $A^x$ crece mucho más rápidamente.

En la demostración de 1) podemos observar cómo la idea de límite, aunque la definición no sea de *tipo aritmético* como la actual, es inequívocamente clara y precisa. Suponiendo que $k$ tiene un valor finito, dice (págs. 48 y 49)

> designemos por ε un número tan pequeño como se quiera. Puesto que valores crecientes de $x$ hacen converger la diferencia f(x+1) – f(x) hacia el límite $k$, se podrá dar al número $h$ un valor bastante considerable para que, siendo $x$ igual o superior a $h$, la diferencia en cuestión esté constantemente comprendida entre los límites k–ε, k+ε.

Esto no es sino la exacta aplicación de la definición *aritmética* de límite finito en el infinito. En la misma demostración, más adelante (pág. 50), dice

> Por consiguiente, la razón f(x)/x tendrá por límite una cantidad comprendida entre k–ε y k+ε. Debiendo subsistir esta conclusión, cualquiera que sea la pequeñez del número ε, resultando de ello que el límite en cuestión será precisamente la cantidad $k$. En otros términos, se tendrá lim.f(x)/x = k.

que no es sino reconocer, en la expresión de tipo aritmética «para todo ε > 0 se tiene que

$$\left|\frac{f(x)}{x} - k\right| < \varepsilon$$

para $x$ suficientemente grande», el concepto de límite finito en el infinito.

*Éstas y otras aplicaciones aritméticas de la definición de límite presentes en los trabajos de Cauchy, como por ejemplo en la demostración del Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, nos permite decir sin exageración alguna, que Cauchy es el primero que utiliza una definición de límite del tipo ε, δ; es decir, la actual.*

Para el caso de k = ∞, en las páginas 50 y 51, dice

> Designando entonces por $H$ un número tan grande como se quiera, se podrá siempre atribuir al número $h$ un valor bastante considerable, para que $x$ siendo igual o superior a $h$, la diferencia f(x+1) – f(x), que converge hacia el límite ∞, llega a ser constantemente superior a $H$;

más adelante (pág. 51) añade

> El límite de la razón f(x)/x será pues superior al número $H$, por grande que sea. Este límite superior a todo número asignable no puede ser más que el infinito positivo.

que es nuevamente la correcta interpretación *aritmética* del concepto de límite infinito.

Argumentaciones de la misma índole usa para la demostración del criterio 2) (páginas 54 a 56). Éstas y otras aplicaciones aritméticas de la definición de límite presentes en los trabajos de Cauchy, como por ejemplo en la demostración del Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial (Cauchy, 1899*a*, pág. 44), nos permite decir sin exageración alguna, que Cauchy es el primero que utiliza una definición de límite del tipo ε, δ; es decir, la actual.

Tratando sobre las diversas indeterminaciones considera

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$

obteniendo que

$$\cos\alpha < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < 1$$

tomando límites concluye que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

haciendo uso implícito como algo evidente de un resultado que no ha sido probado, pero cuya demostración sólo requiere usar la definición ε, δ de límite.

## El concepto de función continua

Durante el siglo XVIII el concepto de función estuvo sometido a más de una disputa. La idea de una función como aquella que viene expresada por una sola expresión analítica se vio insuficiente al estudiar las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Las fronteras entre continuidad, propiedad del valor intermedio, expresión mediante una sola fórmula, continuidad uniforme y diferenciabilidad estaban lejos de ser claras. Cauchy[3] identifica el aspecto esencial de la continuidad, y además formula una definición en términos de continuidad mediante sucesiones que resultará tremendamente operativa en la demostración de teoremas.

Cauchy define la continuidad, en la página 34, partiendo del concepto de límite, de la siguiente forma

> Sea f(x) una función de la variable $x$, y supongamos que, para cada valor de $x$ intermedio entre dos límites dados [perteneciente a un intervalo], esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor de x comprendido entre estos límites, se atribuye a la variable $x$ un crecimiento infinitamente pequeño $\alpha$, la función recibirá como crecimiento la diferencia $f(x+\alpha) - f(x)$, que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable $\alpha$ y del valor de $x$. En este supuesto, la función f(x) será, entre los dos límites asignados a la variable $x$, función *continua* de esta variable, si, para cada valor de $x$ intermedio[4] entre estos límites, el valor numérico [valor absoluto] de la diferencia $f(x+\alpha) - f(x)$ decrece indefinidamente con el de $\alpha$. En otros términos, *la función f(x) permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre estos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la propia función.*

Aunque la redacción resulta confusa, pues habla de continuidad en un intervalo a la vez que de continuidad en un punto, el subrayado nos permite interpretar que está considerando $x$ fijo y que si para cada $x$ fijo se verifica la condición enunciada (continuidad en un punto), entonces la función es continua en el intervalo. Así, f(x) es continua en (a, b) si, para cada valor considerado fijo $x \in (a, b)$, para $\alpha \to 0$ se sigue que $|f(x+\alpha) - f(x)| \to 0$; o en otros términos:

Sea dado $x \in (a, b)$. Si fijado $\varepsilon > 0$, para cada sucesión $(a_n)_n$, con $a_n \to 0$ (y, por tanto, $x + a_n \to x$), se sigue que $|f(x+a_n) - f(x)| \to 0$, y ello ocurre con los distintos $x \in (a, b)$, entonces f(x) se dice continua en (a, b).

Así tendríamos nuestra definición actual de continuidad mediante sucesiones. Cauchy deja clara y abundante constancia de que esta interpretación nuestra es acertada. Veamos algunos ejemplos de lo que decimos:

1) Tras la definición (pág. 35) pone como ejemplo la continuidad de la función *senx* indicando que «el valor numérico [valor absoluto] de $\text{sen}(\alpha/2)$, y por consiguiente el de la diferencia $\text{sen}(x+\alpha) - \text{sen}x = 2\text{sen}(\alpha/2)\cos(x+\alpha/2)$, decrece indefinidamente con el de $\alpha$, cualquiera que sea por otra parte el valor finito que se le atribuya a *x*»; es decir, cuando $\alpha \to 0$ se tiene que $|\text{sen}(x+\alpha) - \text{sen}x| \to 0$, ocurriendo esto para cada $x$ real, por lo que *sen x* es continua en todo $\mathbb{R}$.

2) En el Capítulo V aborda la determinación de las funciones $\Phi$ continuas, tales que $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$, obteniendo que necesariamente la función es de la forma $\Phi(x) = ax$, con $a$ un número real fijo cualquiera. En el proceso de demostración prueba que

$$\Phi\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = \frac{m}{n}\Phi(\alpha)$$

para m/n racional y $\alpha$ una constante positiva; a continuación considera un número real cualquiera $\mu$ y una sucesión de racionales convergente a $\mu$ y dice (pág. 107) «y pasando a los límites, se encontrará $\Phi(\mu\alpha) = \mu\Phi(\alpha)$».

Análogo razonamiento utiliza para la ecuación funcional $\Phi(x + y) = \Phi(x)\Phi(y)$, con $\Phi(x)$ continua. Del mismo modo al considerar el problema análogo en el caso de una función continua $\varpi(x) = \Phi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$ con valores complejos (pág. 267), aplica la definición de continuidad por sucesiones a las funciones $\Phi(x)$, $\chi(x)$, sen x y cos x.

3) En la segunda demostración que hace del Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas[5] en la Nota III (pág. 462), construye dos sucesiones

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \quad \text{y} \quad X, X', X'', \ldots$$

creciente y decreciente, respectivamente, con límite común $a$ y dice: «Puesto que la función f(x) es continua desde $x=x_0$ hasta $x=X$, los términos generales de las sucesiones siguientes,

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \&c\ldots, f(X), f(X'), f(X''), \&c$$

convergerán igualmente hacia el límite común f(a)».

*Cauchy identifica el aspecto esencial de la continuidad, y además formula una definición en términos de continuidad mediante sucesiones que resultará tremendamente operativa en la demostración de teoremas.*

3 Así como también Bolzano.

4 Los subrayados son nuestros.

5 Da una primera demostración, en la página 44, de carácter geométrico, apoyándose en la imagen intuitiva de gráfica de una función continua.

4) También en la Nota III, enuncia dos bellísimos teoremas (págs. 464 a la 469) sobre la determinación de la menor y de la mayor de las raíces, en un intervalo dado $[x_0, X]$, de una ecuación $f(x) = 0$, con $f(x)$ continua. En el transcurso de la demostración hace uso (pág. 467) de la definición de continuidad por sucesiones.

5) En la Nota IX, al definir la convergencia del producto infinito

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$$

con $u_n > -1$ (pág. 561), parte de que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\log(1+u_n)$$

sea convergente, de suma *s*, de donde tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\prod_{i=0}^{n}(1+u_i)\right)=s$$

concluyendo [de la continuidad de log x] que

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}(1+u_i)=e^s$$

Al generalizar la continuidad para funciones de varias variables (pág. 37) dice

> Sea ahora f(x, y, z,...) una función de varias variables x, y, z,...; y supongamos que, en el entorno de valores particulares X, Y, Z,... atribuidos a estas variables, f(x, y, z,...) sea a la vez función continua de *x*, función continua de *y*, función continua de *z*, &c. Se probará fácilmente que, si se designa por $\alpha$, $\varsigma$, $\gamma$, ... cantidades infinitamente pequeñas, y si se atribuye a x, y, z,... los valores X, Y, Z,..., o valores muy próximos, la diferencia
>
> $$f(x+\alpha, y+\varsigma, z+\gamma,\ldots) - f(x, y, z,\ldots)$$
>
> será también infinitamente pequeña.

Para lo que razona sustancialmente de la siguiente forma: si

$$\lim_{\alpha\to 0} f(x+\alpha, y, z,\ldots) = f(x, y, z,\ldots)$$

$$\lim_{\varsigma\to 0} f(x+\alpha, y+\varsigma, z,\ldots) = f(x+\alpha, y, z,\ldots)$$

$$\lim_{\gamma\to 0} f(x+\alpha, y+\varsigma, z+\gamma,\ldots) = f(x+\alpha, y+\varsigma, z,\ldots)$$

entonces

$$\lim_{(\alpha,\varsigma,\gamma,\ldots)\to(0,0,0,\ldots)} f(x+\alpha, y+\varsigma, z+\gamma,\ldots) = f(x, y, z,\ldots)$$

Es decir, afirma erróneamente que si la función f(x, y, z,...) es continua respecto de cada una de las variables, separadamente, entonces la función es continua globalmente respecto de todas las variables, sosteniendo la falacia sobre el falso argumento de que la existencia de los límites reiterados garantiza la existencia del límite de la función.

Aquí se evidencia como aún no se ha afinado suficientemente el concepto de continuidad. La validez del resultado para funciones uniformemente continuas respecto de cada variable pone de relieve la falta de precisión en el concepto de continuidad, que sólo se producirá mucho después con la aparición del concepto de continuidad uniforme, en 1870, de la mano de Heine (1821-1881) y una vez que la *aritmetización* del análisis es una realidad.

*...es a Cauchy a quien hay que considerar el fundador de la teoría de convergencia de series, por ser el que realiza el primer planteamiento sistemático, extensivo y en profundidad del tema, incluyendo la enunciación y demostración de numerosos criterios de convergencia.*

## La teoría de series

También sobre el concepto de límite construye la teoría de series, siendo el primero en apreciar que el tratamiento de las series debía basarse en el estudio de la convergencia de la sucesión de sumas parciales. Su tratamiento constituye toda una teoría de la convergencia. A este respecto el *Cours* es el primer estudio general de la convergencia de series.

Ciertamente tanto Gauss, como Lacroix (1810), como Fourier (1768-1843) (Fourier, 1878) se habían preocupado por el análisis previo de la convergencia de las series. Gauss en 1813 (ver, por ejemplo, Dieudonné, 1978) publicó una memoria sobre la serie hipergeométrica en la que por primera vez se efectúa un estudio riguroso de la convergencia de una serie, pero en un caso concreto. No obstante es a Cauchy a quien hay que considerar el fundador de la teoría de convergencia de series, por ser el que realiza el primer planteamiento sistemático, extensivo y en profundidad del tema, incluyendo la enunciación y demostración de numerosos criterios de convergencia. Este último hecho significa un profundo cambio respecto al tratamiento dado con anterioridad a la cuestión. En efecto, lo que Cauchy hace con sus criterios es establecer condiciones suficientes de convergencia, bajo ciertas hipótesis, independientemente de la expresión concreta del término general de la serie y sin conocer el valor de la suma de ésta.

Inicia el capítulo VI definiendo una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

y que ésta es convergente si existe el límite de sus sumas parciales y es finito

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

donde

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

también define la divergencia: «si, mientras que *n* crece indefinidamente, la suma $s_n$ no se aproxima a ningún límite fijo, la serie será *divergente*, y no tendrá suma».

Enuncia (págs. 125 y 126), en los términos siguientes, el conocido criterio de Cauchy:

> es necesario y suficiente que, para valores infinitamente grandes del número *n*, las sumas $s_n$, $s_{n+1}$, $s_{n+2}$, &c... difieran del límite *s*, y por consiguiente entre ellas, cantidades infinitamente pequeñas. [...] por lo que para que la serie sea convergente, es necesario que el término general decrezca indefinidamente, mientras que *n* aumenta; pero esta condición no es suficiente, es preciso aún que [...] las sumas de cantidades $u_n$, $u_{n+1}$, $u_{n+2}$, &c... tomadas, a partir de la primera, en tal número que se quiera, terminen por obtener constantemente valores numéricos [en valor absoluto] inferiores a todo límite asignable. Recíprocamente, cuando estas diversas condiciones son verificadas, la convergencia de la serie está asegurada.

Hoy enunciamos este criterio *aritméticamente*: la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

es convergente si y sólo si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un entero $n_0$, tal que para cada $n \geq n_0$ se tiene que $|s_{n+r} - s_n| < \varepsilon$, cualquiera que sea el entero $r \geq 1$.

*Cauchy hace uso implícitamente de la convergencia uniforme, concepto que por cierto no existía entonces y que tardaría aún varias décadas en fraguarse. Cauchy, al enunciar el teorema, tenía en la cabeza funciones desarrollables en series de potencias.*

Cauchy probó la condición necesaria, pero no la suficiente (sobre este tema volveremos más tarde al estudiar su concepción del campo numérico). Utilizó el criterio para probar la divergencia de la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

y la determinación de la convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Seguidamente inicia un razonamiento erróneo en la página 130 que le lleva a concluir, entre las páginas 131 y 132, el famoso teorema sobre la continuidad de la suma de una serie de funciones continuas puntualmente convergente. Textualmente dice:

> 1.er TEOREMA. Cuando los diferentes términos de la serie (1) [la serie en cuestión] son funciones de una misma variable *x*, continuas con respecto a esta variable en el entorno de un valor particular para el que la serie es convergente, la suma *s* de la serie es también, en el entorno de este valor particular, función continua de *x*.

Cauchy hace uso implícitamente de la convergencia uniforme, concepto que por cierto no existía entonces y que tardaría aún varias décadas en fraguarse. Cauchy, al enunciar el teorema, tenía en la cabeza funciones desarrollables en series de potencias. El propio ejemplo que pone tras el teorema así lo corrobora, éste es la función 1/(1–x) suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que es continua en el intervalo (-1, 1) de convergencia de la serie. Claro, que hoy sabemos que la convergencia puntual y la convergencia uniforme, de una serie de potencias, coinciden para valores de la variable pertenecientes a cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en el intervalo de convergencia de la serie.

Cauchy reconoció su error en un trabajo publicado en *Comptes Rendus, T. XXXVI*, pág. 454 el 14 de marzo de 1853, y titulado *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites donnés.* Dice (Cauchy 1900, págs. 30 y 31):

> Estableciendo, en mi *Analyse algébrique*, las reglas generales relativas a la convergencia de series, yo he, además, enunciado el teorema siguiente:

[reproduce el texto del teorema].

Como lo han hecho notar los señores Bouquet y Briot[6], el teorema se verifica para las series ordenadas según las potencias ascendentes de una variable. Pero, para otras series, no puede admitirse sin restricciones. Así, por ejemplo, es verdaderamente cierto que la serie

(2) $$\sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \frac{\sin 3x}{3}, \ldots$$

siempre convergente para valores reales de *x*, tiene por suma una función de *x* que es continua, mientras que *x*, supuesta real, varía, en el entorno de un valor distinto de un múltiplo $\pm 2n\pi$ de la circunferencia $2\pi$, y que se reduce, en particular, a $(\pi-x)/2$, entre los límites $x=0$, $x=2\pi$. Pero, en estos mismos límites, la suma *s* de la serie (2) llega a ser discontinua, y esta suma, considerada como función de la variable real *x*, adquiere, en lugar del valor $+\pi/2$ o $-\pi/2$, dado por la fórmula $s=(\pi-x)/2$, el valor *singular* $s=0$, que vuelve a ocurrir cuando se supone $x=\pm 2n\pi$, siendo *n* un número entero cualquiera.

Añade (Cauchy, 1900, págs. 31 y 32): «es fácil ver como se debe modificar el enunciado del teorema, para que no tenga lugar ninguna excepción»; introduciendo en el referido enunciado las condiciones de la convergencia uniforme de la serie, aunque no identifica el concepto como tal.

El concepto de convergencia uniforme no sería definitivamente aclarado hasta Weierstrass (1815-1897) (cf. Dugac, 1973).

Pero volvamos al *Cours* de Cauchy. Uno de los elementos más novedosos, como ya se ha dicho, lo constituye el establecimiento de diversos criterios de convergencia. En la página 132 inicia la exposición de éstos para series de términos positivos

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

con $u_n > 0$.

El primero de ellos es el criterio de la raíz, pero en su formulación vuelve a aparecer una interesante expresión:

Investigad el límite o los límites hacia los que converge, mientras que *n* crece indefinidamente, la expresión $(u_n)^{1/n}$; y designad por *k* el más grande de estos límites[7], o, en otros términos, el límite de los valores más grandes de la expresión en cuestión. La serie (1) será convergente, si se tiene que $k < 1$, y divergente, si se tiene que $k > 1$.

Cuando habla de «los límites» se está refiriendo a límites de oscilación y «el más grande de estos límites» podemos interpretarlo como el límite superior de $(u_n)^{1/n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup (u_n)^{1/n}$$

Con lo cual introduce, aunque él no le dé ninguna denominación específica ni lo resalte, el concepto de límite superior de una sucesión.

*...introduce, aunque él no le dé ninguna denominación específica ni lo resalte, el concepto de límite superior de una sucesión.*

6 Resulta curioso que no mencione a Abel (1802-1829) quien en un artículo titulado *Recherches sur la série...* (Abel, 1900, págs. 219-250), indicaba mediante un contraejemplo la invalidez del teorema.

7 Los subrayados son nuestros.

Otros criterios, expresados en lenguaje actual, son:

1) El del cociente: si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$$

se tiene que si $k < 1$ la serie converge y si $k > 1$ la serie diverge.

2) El de condensación: dadas las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2^n-1}$$

siendo $(u_n)_n$ decreciente y convergente a 0, entonces ambas series convergen o divergen simultáneamente.

3) Para series armónicas generalizadas: como corolario del teorema anterior determina que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}}$$

será convergente si $\mu > 1$ y divergente si $\mu \leq 1$.

4) De los logaritmos: si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a u_n}{\log_a (1/n)} = h$$

se tiene que si $h > 1$ la serie converge y si $h < 1$ la serie diverge.

A continuación establece que si

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n = s'$$

son series de términos positivos, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = s + s'$$

Y prueba, por vez primera, (pág. 141) que el llamado *producto de Cauchy* de dos series de términos positivos convergentes es una serie convergente con suma el producto de las sumas de las series *factores*. La serie producto es la que tiene por término general

$$u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0.$$

En el siguiente epígrafe del mismo capítulo, titulado *De las series que comprenden términos positivos y términos negativos*, introduce (pág. 142) el concepto de *convergencia absoluta*, probando que la convergencia absoluta implica la convergencia; y ello le permitirá efectuar, por primera vez, un tratamiento riguroso de las series de términos arbitrarios.

Enuncia los criterios de la raíz y del cociente para las series de valores absolutos, obteniendo el criterio de Leibniz para series alternadas, que lo utiliza para proporcionar ejemplos de series que son convergentes, pero no absolutamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\mu}}$$

tal que $0 < \mu \leq 1$, con lo que separa ambos conceptos de convergencia.

Mientras que extiende el resultado anterior para la suma de series de términos positivos, para el producto de Cauchy de dos series demuestra la convergencia del mismo al producto de las sumas de las dos series, cuando las dos[8] series son absolutamente convergentes (Teorema 6, epígrafe 3, capítulo VI, págs. 147 a 149). Y no sólo esto, sino que proporciona el primer ejemplo de series convergentes (pero no absolutamente) cuyo producto es una serie divergente; en efecto, considera las dos series factores iguales a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

que es convergente, pero el producto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left( \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-j}\sqrt{j+1}} \right)$$

no converge, como puede verse sin más que tener en cuenta el criterio de Cauchy y que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-j}\sqrt{j+1}} \geq \frac{2n+2}{n+2}$$

Cuando aborda las series de potencias establece el siguiente teorema (pág. 151):

> 1.$^{er}$ TEOREMA. Sea *A* el límite hacia el cual converge, para valores crecientes de *n*, la raíz n-ésima de los valores numéricos [valores absolutos] más grandes de $a_n$. La serie (1)
>
> $$\left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]$$
>
> será convergente para todos los valores de *x* comprendidos entre los límites $x=-1/A$, $x=+1/A$, y divergente para todos los valores de *x* situados fuera de estos límites.

lo que nos da como radio de convergencia $R = 1/A$, pudiendo deducirse de los resultados de Cauchy que

$$A = \lim_{n \to \infty} \sup \left( |a_n| \right)^{1/n}$$

conocido hoy como fórmula de Hadamard (1865-1963). Esta fórmula será expresada explícitamente más adelante al considerar las series complejas.

Considera la suma y el producto de series de potencias, probando que si para un mismo valor de *x* las series son absolutamente convergentes, entonces el producto será convergente y tendrá por suma el producto de las sumas de las series factores.

Prueba (págs. 162 a 164), aunque apelando al «teorema» erróneo relativo a la suma de una serie de funciones continuas, que la función que expresa el desarrollo en serie de potencias (dentro del intervalo de convergencia) es una función continua y que el desarrollo en serie de potencias de una función continua es único.

En la página 164 inicia el estudio del desarrollo en serie de potencias de la serie binomial $(1 + x)^{\mu}$, para $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrario, obteniendo su desarrollo, pero con un argumento no estrictamente correcto[9] (haciendo uso de los resultados sobre ecuaciones funcionales del capítulo V y del famoso «teorema» sobre la suma de una serie de funciones continuas). Partiendo de este resultado obtiene el número e como límite, los desarrollos en serie de $e^x$, $\ln(1 + x)$, $A^x$ y $\log_A(1 + x)$, para $A > 0$.

En la Nota VII, como ya se ha indicado, vuelve al estudio de series, en este caso de series dobles, siendo ésta una doble sucesión indefinida, escrita como matriz infinita

$$\begin{array}{cccc} u_0, & u_1, & u_2, & \dots \\ u'_0, & u'_1, & u'_2, & \dots \\ u''_0, & u''_1, & u''_2, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

con término general $u_n^{(m)}$ y cuya suma parcial genérica $s_n^{(m)}$ es la suma del cuadro

$$\begin{array}{ccccc} u_0, & u_1, & u_2, & \dots & u_{n-1} \\ u'_0, & u'_1, & u'_2, & \dots & u'_{n-1} \\ u''_0, & u''_1, & u''_2, & \dots & u''_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0^{(m-1)} & u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \dots & u_{n-1}^{(m-1)} \end{array}$$

que denota por (2).

*Enuncia los criterios de la raíz y del cociente para las series de valores absolutos, obteniendo el criterio de Leibniz para series alternadas, que lo utiliza para proporcionar ejemplos de series que son convergentes, pero no absolutamente...*

8 En 1875 F. Mertens (1840-1927) probó que sólo es necesario exigir la convergencia absoluta de una de las dos series, permaneciendo la otra convergente.

9 La primera verificación completa de la serie binomial fue dada por Abel en 1826.

Define la convergencia del siguiente modo (pág. 538):

> Si la suma de los términos restantes tomados en tal orden y en tal número como se quiera llega a ser infinitamente pequeña para valores infinitamente grandes de *m* y de *n*, es claro que la suma $s_n^{(m)}$, y todas aquellas que se podrían deducir de ella añadiéndole a $s_n^{(m)}$ algunos de los términos excluidos del cuadro número (2), convergerán, para valores crecientes de *m* y de *n*, hacia un límite fijo *s*. En este caso, se dirá que la serie (1) [la serie doble] es *convergente*, y que ella tiene por *suma* el límite *s*. En caso contrario, la serie (1) será *divergente*, y no tendrá suma.

En la misma página añade erróneamente que si la serie doble es convergente entonces las series de cada fila y de cada columna son convergentes. Comete el error de confundir el paso al límite haciendo tender simultáneamente (m, n) a infinito, con hacer crecer indefinidamente primero un índice (m) y luego el otro (n). Sobre este falso resultado, suma cada fila y cada columna obteniendo dos nuevas series: la serie cuyos términos son las sumas por filas

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \ \sum_{n=0}^{\infty} u'_n, \ \sum_{n=0}^{\infty} u''_n, \ldots$$

que denota por (3), y la serie cuyos términos son las sumas por columnas

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_0^{(m)}, \ \sum_{m=0}^{\infty} u_1^{(m)}, \ \sum_{m=0}^{\infty} u_2^{(m)}, \ldots$$

que denota por (4). De aquí infiere (pág. 539) que si la serie doble es convergente con suma *s*, entonces las series (3) y (4) serán también convergentes y ambas con suma *s*; teorema que es falso. Basta considerar la serie doble

$$\begin{array}{cccccc}
2 & -1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 & \ldots \\
0 & -3/2 & -1/3 & -1/4 & -1/5 & \ldots \\
1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
1/6 & -1/6 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

donde las dos primeras columnas son convergentes por serlo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

y las dos primeras filas son divergentes, por serlo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

y, sin embargo, la serie doble converge pues $s_n^{(m)} = 0$ para $n \geq 2$ y $m \geq 2$. No obstante, el resultando es correcto si la serie doble es de términos no negativos.

Luego establece (Teorema 2, pág. 541) que si las series de cada fila son absolutamente convergentes y la serie (3) de sumas de filas es absolutamente convergente, entonces: 1) todas las series verticales (columnas) son convergentes y 2) la serie (4) de sumas de columnas es también convergente y su suma es la misma que la suma de la serie (3). Resultado que es cierto, aunque él parte de uno primero, ya comentado, que es falso.

Como aplicación, obtiene el teorema del producto de series (simples) absolutamente convergentes (Teorema 6, epígrafe 3, capítulo VI) ya mencionado, mediante una demostración considerablemente más simplificada, partiendo de la distribución

$$\begin{array}{ccccc}
u_0v_0 & u_1v_0 & u_2v_0 & u_3v_0 & \ldots \\
 & u_0v_1 & u_1v_1 & u_2v_1 & \ldots \\
 & & u_0v_2 & u_1v_2 & \ldots \\
 & & & u_0v_3 & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

del hecho de que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad y \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

son absolutamente convergentes y del Teorema 2 de la página 541, arriba comentado.

Otro uso que hace de los resultados anteriores es obtener el desarrollo en serie de arc sen x y ln (1 + x).

Los resultados sobre series complejas y series recurrentes los comentaremos más adelante.

## Concepción de los números reales

En la obra de Cauchy no hay una construcción de los sucesivos campos numéricos, ni una explícita formulación de las propiedades definitorias del conjunto de los números reales. No obstante, sí aparece en el *Cours* una primera aproximación, por cierto considerablemente buena, a este tema, al que Cauchy dedica gran parte de los Preliminares, las Notas I y II y, como veremos, la completitud de $\mathbb{R}$ aparecerá subyacente en diversos lugares.

*En la obra de Cauchy no hay una construcción de los sucesivos campos numéricos, ni una explícita formulación de las propiedades definitorias del conjunto de los números reales. No obstante, sí aparece en el Cours una primera aproximación, por cierto considerablemente buena…*

Como ya hemos indicado, Cauchy entiende un número como la medida absoluta de una magnitud y una cantidad como un número precedido del signo + o del signo –. Tras enunciar la regla de los signos realiza una serie de definiciones defectuosas para la suma, la diferencia, el producto y el cociente, primero para números y a partir de ahí, y haciendo uso de la regla de los signos, para cantidades.

Una vez «definida» la suma de dos números formula (págs. 406 y 407), como axioma, una propiedad que engloba conjuntamente a las propiedades conmutativa y asociativa de la suma

> No se demuestra, pero se admite como evidente, que *la suma de varios números es la misma en cualquier orden que se las añada.* Esto es un axioma fundamental sobre el que reposan la aritmética, el álgebra, y todas las ciencias de cálculo.

Luego hará observar que esta propiedad la verifican la suma y el producto de cantidades cualesquiera.

Las definiciones de las operaciones descansan sobre el sentido de éstas en el caso de los números naturales, lo que le lleva a efectuar distinciones acerca de la naturaleza de los números para entender el significado, en cada caso, de la operación. Y es aquí donde encontramos una primera aproximación muy interesante a la construcción de $\mathbb{R}$ a partir del conjunto de las sucesiones de números racionales que son de Cauchy. Así, define el producto de dos números A y B, cuando B es irracional como

$$\lim_{n\to\infty} A\,b_n = A \cdot B$$

siendo $(b_n)_n$ una sucesión de números racionales convergente a *B*. Observemos que básicamente aquí está presente la definición actual del producto de números reales; pero hay algunos inconvenientes: en primer lugar parte de la existencia del número irracional sin haberlo definido (aunque esta existencia era dada por conocida), en segundo lugar da como obvio que cualquiera que sea la sucesión de aproximaciones racionales $(b_n)_n$ de B, la sucesión $(Ab_n)_n$ convergerá siempre al mismo límite. Enuncia la propiedad distributiva.

*Las definiciones de las operaciones descansan sobre el sentido de éstas en el caso de los números naturales, lo que le lleva a efectuar distinciones acerca de la naturaleza de los números para entender el significado, en cada caso, de la operación.*

Define después la potenciación y la radicación, como antes, primero para números y, a partir de ahí, luego para cantidades. Así (págs. 414 y 415) para dos números *A* y *B*, viene dada de la forma siguiente: 1) si $B \in \mathbb{N}$, $A^B = A \cdot A \cdots A$, B veces; 2) si $B = m/n \in \mathbb{Q}$, se trata de buscar un número *X* tal que i) $A = X \cdots X$ *n* veces y ii) $X \cdots X$ *m* veces nos dará $A^B$ (la cuestión es ¿existe un tal número X?); 3) si B es irracional, toma una sucesión de aproximaciones racionales $(b_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B$$

y entonces

$$A^B = \lim_{n\to\infty} A^{b_n}$$

Hoy podemos seguir exactamente el mismo procedimiento, pero completando ciertas lagunas: tendríamos que definir 1) por recurrencia, luego demostrar la existencia de un único número real X tal que $X^n = A$ en 2) y, finalmente, probar la unicidad en 3), independientemente de la sucesión elegida, y lo que es más importante haber resuelto previamente la existencia del irracional *B* que Cauchy no ha definido.

En la página 422 inicia el estudio de exponenciales y logaritmos. Sobre la base de la definición y las propiedades de las potencias, obtiene diversas propiedades de los logaritmos.

Para dos cantidades *a* y *b* define $a > b$ cuando $a-b$ es positivo (pág. 438). A partir de aquí obtiene diversas propiedades relativas a la estructura de orden de $\mathbb{R}$, entre las que no figuran, tal vez por ser evidentes para Cauchy, las propiedades de tricotomía y triangular. Es interesante notar que ya en los Preliminares y luego en la Nota II Cauchy trata extensamente el concepto de media de varias cantidades, respecto del que obtiene numerosos resultados y que le servirán para probar un buen número de teoremas, como, por ejemplo, aquellos ya señalados sobre indeterminación de límites (págs. 49 y 54), evitando acudir al uso de desigualdades. Podemos leer (pág. 14) «Se llama *media* de varias cantidades dadas una nueva cantidad comprendida entre la más pequeña y la más grande de las que se consideran. Después de esta definición, es claro que existe una infinidad de medias entre varias cantidades desiguales» y denota una media entre varias cantidades a, a', a'',... mediante M(a, a', a'',...). Hoy estableceríamos con más precisión que $\inf\{a, a', a'',\ldots\} \le M(a, a', a'',\ldots) \le \sup\{a, a', a'', \ldots\}$.

Al considerar el valor numérico [valor absoluto] de una media entre varias cantidades dadas, apoyándose en los resultados obtenidos anteriormente sobre medias, concluye que

$$M(|a|, |a'|, |a''|, \ldots) = \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}}{\sqrt{n}}$$

y señala que las expresiones de la forma

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}$$

«sirven para determinar longitudes medidas en línea recta y áreas de superficies planas, por medio de sus proyecciones ortogonales». Y obtiene (pág. 455) como «importante teorema» relativo a este tipo de expresión el siguiente:

> 16.º TEOREMA. Sean $a, a', a'', \ldots, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ dos sucesiones de cantidades, y supongamos que cada una de estas sucesiones comprende un número de $n$ términos. Si las razones $a/\alpha$, $a'/\alpha'$, $a''/\alpha'$, &c... no son todas iguales entre ellas, la suma $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots$ será inferior al producto
>
> $$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots}$$
>
> de suerte que se tendrá
>
> val. num. $(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots) <$
>
> $$< \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots}$$

Obsérvese que $\bar{a} = (a, a', a'', \ldots)$, $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots) \in \mathbb{R}^n$ y que la condición de que las fracciones $a/\alpha$, $a'/\alpha'$, $a''/\alpha''$, etc. no son todas iguales entre ellas nos dice que $\bar{a}$ y $\bar{\alpha}$ no son linealmente dependientes. Finalmente

$$|(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots)| < \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots} \cdot \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \ldots}$$

se puede expresar como $|\bar{a} \cdot \bar{\alpha}| < \|\bar{a}\| \|\bar{\alpha}\|$. Es decir, estamos ante la conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz[10] que se convierte en igualdad si y sólo si $\bar{a}$ y $\bar{\alpha}$ son linealmente dependientes, como Cauchy indica en un Escolio que sigue (págs. 456 y 457).

Los resultados referidos configuran una aproximación, ciertamente incompleta, a la estructura del cuerpo ordenado de los números reales. Una propiedad básica nos falta para que la concepción de Cauchy de los reales sea parecida a la actual. Nos referimos a la completitud.

Es cierto, que en ninguna parte aparece una formulación de tal principio, pero es también verdad que la completitud de los reales aparece de forma implícita en numerosas ocasiones. Así, por ejemplo:

1) Cuando considera sin demostrar (pág. 126) que siendo la sucesión de sumas parciales de una serie «de Cauchy», entonces la serie es convergente.

2) Cuando considera, como algo evidente, que una sucesión monótona acotada es convergente. Como sabemos la existencia de un tal límite garantiza la completitud de $\mathbb{R}$.

Ello ocurre, por ejemplo:

*Los números complejos tienen una historia de antigua presencia tolerada, no sin recelos, vinculada inicialmente al estudio de ecuaciones algebraicas. Su incomprensión fue una constante, lo que no era óbice para su manipulación cuando resultaba imprescindible, siempre sobre la base de la extensión de las operaciones con los reales.*

i) En la demostración del Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (pág. 462), al afirmar que las sucesiones monótonas $x_0, x_1, x_2, \ldots$ y $X, X', X'', \ldots$, respectivamente creciente y decreciente, y acotadas tienen límite.

ii) En la demostración del teorema anteriormente aludido sobre la determinación de la menor de las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[x_0, X]$, con $f(x)$ continua, cuando dice (pág. 467): «$x_0, x_1, x_2, \ldots$ formarán una serie [sucesión] donde el término general $x_n$, creciendo constantemente con $n$, sin poder jamás sobrepasar la raíz $a$, convergerá necesariamente[11] hacia un límite igual o inferior a esta raíz.»

iii) Cada vez que aplica el criterio de comparación para series de términos positivos, como algo obvio. Así, por ejemplo, en el criterio de la raíz (pág. 133), o en el criterio de los logaritmos (pág. 137).

3) Al considerar que las sucesiones acotadas de números reales tienen límite superior de oscilación; que como sabemos implica la completitud de $\mathbb{R}$. Este es el caso del criterio de la raíz para series de términos positivos. Obviamente Cauchy está considerando implícitamente este hecho cuando en el enunciado (pág. 132) dice: «Buscad el límite o los límites hacia los que converge, mientras que $n$ crece indefinidamente, la expresión $(u_n^{1/n})_n$; y designad por $k$ el más grande de estos límites».

## Funciones y series complejas

Los números complejos tienen una historia de antigua presencia tolerada, no sin recelos, vinculada inicialmente al estudio de ecuaciones algebraicas. Su incomprensión fue una constante, lo que no era óbice para su manipulación cuando resultaba imprescindible, siempre sobre la base de la extensión de las operaciones con los reales. De la mano de Euler (1707-1783) y D'Alembert las operaciones algebraicas y trascendentes con números complejos proporciona-

10 Schwarz (1843-1921).

11 El subrayado es nuestro.

ban al conjunto de los complejos el carácter de un sistema cerrado. Ellos y otros destacados matemáticos como Laplace (1749-1827), entre otros, efectúan diversas e importantes contribuciones en los inicios de lo que llegará a ser la construcción de la teoría de funciones de variable compleja. No menos importante son las contribuciones de Gauss, entre ellas la primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra en 1799. Pero se puede considerar a Cauchy como el auténtico fundador de la teoría de funciones de variable compleja, dándole unidad, sistematización, rigor conceptual y proporcionando muchas e importantes contribuciones. Su trabajo de 1814 (no publicado hasta 1827) *Memoire sur la théorie des intégrales definies* es el primero significativo en la línea apuntada, luego vendrá el *Cours*, pero serán trabajos posteriores los auténticamente importantes en este tema (ver a este respecto, por ejemplo, Dieudonné, 1978).

En el *Cours* Cauchy presenta de forma sistemática las operaciones con números complejos y sobre todo efectúa un estudio muy importante y novedoso sobre la convergencia de series de potencias complejas. En lo que sigue nos referiremos exclusivamente al objeto de este trabajo, es decir al contenido del *Cours*.

Cauchy entiende los números complejos (a los que se refiere como números imaginarios) como una extensión simbólica de carácter algebraico, carente de significado. Así al multiplicar $\cos a + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} a$ por $\cos b + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} b$ como si de dos expresiones algebraicas se tratase obtiene $\cos(a+b) + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen}(a+b)$ y dice (pág. 175) «Las tres expresiones que encierra la ecuación precedente, a saber, [...] [las anteriores] son tres expresiones simbólicas que no se pueden interpretar según las convenciones generalmente establecidas, y no representan nada real. Se las ha denominado por esta razón expresiones imaginarias». De este modo Cauchy usará «imaginario» al referirse a «complejo» y $\sqrt{-1}$ en lugar de *i*.

*...se puede considerar a Cauchy como el auténtico fundador de la teoría de funciones de variable compleja, dándole unidad, sistematización, rigor conceptual y proporcionando muchas e importantes contribuciones.*

Define qué es un número complejo, la igualdad de dos de ellos, las operaciones suma, diferencia, producto, potencia y radicación, en forma binómica y, tras obtener la expresión módulo-argumental, nuevamente el producto, el cociente, la potencia y la radicación. Usa los resultados anteriores para obtener diversas fórmulas trigonométricas.

Al inicio del capítulo VIII (pág. 240) define una variable compleja como la compuesta por dos variables reales en la forma $u + v\sqrt{-1}$. Si $u$ y $v$ convergen, respectivamente, hacia $U$ y $V$, entonces $u + v\sqrt{-1}$ convergerá a $U + V\sqrt{-1}$.

Define (pág. 247) «función imaginaria» [función compleja] como aquella que puede expresarse en la forma $\Phi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$, siendo $\Phi(x)$ y $\chi(x)$ funciones reales de variable real. Análogamente, para varias variables considera $\Phi(x, y, z,...) + \chi(x, y, z, ...)\sqrt{-1}$, siendo las funciones componentes funciones reales de varias variables reales. De este modo realmente está considerando funciones reales de valores complejos; ciertamente ello le permitiría tener las funciones de variable compleja en la forma $\Phi(x, y) + \chi(x, y)\sqrt{-1}$, considerando un complejo $z$ como un par de reales (x, y).

Después hace un desarrollo paralelo al realizado para el caso real. Efectúa una clasificación de las funciones complejas en explícitas e implícitas, etc.; define un infinitésimo complejo $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$ como la «variable» que converge a cero «lo que supone que en la expresión dada la parte real y el coeficiente de $\sqrt{-1}$ converjan al mismo tiempo hacia este límite». Establece que la condición necesaria y suficiente para ello es que el módulo $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \zeta^2}$ sea un infinitésimo. Define la continuidad a partir de la continuidad de $\Phi(x)$ y de $\chi(x)$. Su camino de extensión de los resultados del caso real le llevan a generalizar (pág. 251) el «teorema» erróneo de la continuidad de funciones de varias variables a partir de la continuidad respecto de cada una de las variables separadamente. También extiende los resultados del capítulo III sobre funciones simétricas, alternadas y homogéneas al caso complejo, mediante la consideración de que las funciones reales $\Phi$ y $\chi$ lo son ambas. Entre las páginas 254 a 273 extiende al caso complejo los resultados sobre polinomios obtenidos en el capítulo IV y los relativos a la determinación de funciones continuas que verifican determinadas propiedades del capítulo V.

Cauchy define (pág. 274) una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n + q_n\sqrt{-1}\right)$$

compleja [«serie imaginaria»] a partir de las dos series reales

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n$$

y la convergencia, en el camino usual, a partir del límite de la sucesión de sumas parciales

$$\sum_{n=0}^{k}\left(p_n + q_n\sqrt{-1}\right)$$

resultando que la serie compleja es convergente si y sólo si lo son las dos series reales componentes. Considera como ejemplo el caso de una serie de potencias compleja y a partir de aquí, remitiendo a las series reales componentes y usando para ellas el famoso «teorema» incorrecto sobre la continuidad de la suma de una serie de funciones reales continuas, nuevamente se equivoca y afirma (pág. 279) que la suma de una serie convergente de funciones continuas complejas es también una función continua; teorema, que como sabemos hoy, es incorrecto si no se exige la convergencia uniforme de la serie.

A continuación considera

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\left(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\theta_n\right)$$

siendo $\rho_n$ y $\theta_n$ el módulo y el argumento del enésimo término de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n + q_n\sqrt{-1}\right)$$

Demuestra entonces (pág. 280) que esta serie es convergente si

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(\rho_n\right)^{1/n} < 1$$

y divergente si el límite superior es mayor que 1. Luego (pág. 282) establece que si existe

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = k$$

entonces existe y vale $k$ el

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(\rho_n\right)^{1/n}$$

Establece la convergencia de la suma de series complejas, y la del producto cuando las series de los módulos son convergentes.

En la página 285 inicia el estudio de series de potencias complejas, con coeficientes reales

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

Si $x = z(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,\theta)$, con z y $\theta$ reales, la serie anterior puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\left(\cos n\theta + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,n\theta\right)$$

que denota mediante (3). Siendo

$$A = \lim_{n\to\infty}\sup\left(|a_n|\right)^{1/n}$$

concluye que

*...nuevamente se equivoca y afirma que la suma de una serie convergente de funciones continuas complejas es también una función continua; teorema, que como sabemos hoy, es incorrecto si no se exige la convergencia uniforme de la serie.*

1.er TEOREMA. La serie (3) es convergente para todos los valores de $z$ comprendidos entre los límites $z=-1/A$ y $z=1/A$, y divergente para todos los valores de $z$ situados fuera de los mismos límites. En otros términos, la serie (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

es convergente o divergente según que el módulo de la expresión imaginaria $x$ es inferior o superior a $1/A$.

Apareciendo de este modo explícitamente la conocida fórmula llamada de Hadamard. Después establece que si existe

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(|a_n|\right)^{1/n}$$

existe y coincide con aquél.

Concluye como corolario (pág. 287) que «si la serie (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

es convergente para un cierto valor real de la variable $x$, ella permanecerá convergente para todo valor imaginario donde este valor real sería, excepto el signo, el módulo. Por consiguiente, si la serie (1) es convergente para todos los valores reales de la variable $x$, ella permanecerá convergente, cualquiera que sea el valor imaginario [complejo] que se le atribuya a esta variable».

Por extensión de los resultados del caso real concluye que la suma de las series de potencias convergentes es convergente y su suma es el resultado de sumar la suma de ambas series. Del mismo modo si las series de los módulos son convergentes, entonces la serie producto es convergente.

Estudia luego la serie binómica. A partir del estudio de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(\cos n\theta + \sqrt{-1}\,\text{sen}\,n\theta\right)$$

con $z$ y $\theta$ reales (págs. 298 a 301) obtiene, separando las partes real e imaginaria, que las funciones *cos z* y *sen z* son desarrollables en series de potencias para cualquier valor de $z$. Extiende y define, sobre la base del referido corolario de la página 287, el desarrollo en serie de potencias de $e^x$, con $x \in \mathbb{C}$, y que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ (pág. 302). Del estudio de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}\left(\cos n\theta + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}\ n\theta\right)$$

obtiene el desarrollo en serie de *arc tg z* para $|z| \leq 1$. Y de este último desarrollo obtiene $\pi/4$ como la suma de una serie.

Por extensión del caso real obtiene los desarrollos de $A^x$, *sen x* y *cos x*, con $x$ complejo. Usando ahora que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ (págs. 310 y 311) deduce que para $x = \alpha + \varsigma\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned} A^x &= A^{\alpha}\left(\cos(\varsigma \ln A) + \sqrt{-1}\ \mathrm{sen}(\varsigma \ln A)\right) \\ \mathrm{sen}\ x &= \frac{e^{\varsigma}+e^{-\varsigma}}{2}\mathrm{sen}\ \alpha + \frac{e^{\varsigma}-e^{-\varsigma}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1} \\ \cos x &= \frac{e^{\varsigma}+e^{-\varsigma}}{2}\cos\alpha - \frac{e^{\varsigma}-e^{-\varsigma}}{2}\mathrm{sen}\ \alpha\sqrt{-1} \end{aligned}$$

A continuación define el logaritmo complejo y obtiene la expresión de $\log_A x$, con $x \in \mathbb{C}$. Para finalizar el capítulo IX obtiene los valores de los arcosenos y arcocosenos para valores complejos.

En la página 389, primera del capítulo XII, define las series recurrentes en los términos siguientes «Una serie $a_0$, $a_1x$, $a_2x^2$, ..., $a_nx^n$, &c..., ordenada siguiendo las potencias ascendentes y enteras de la variable $x$, es llamada *recurrente*, cuando en esta serie, considerada a partir de un término dado, el coeficiente de una potencia cualquiera de la variable se expresa como función lineal de los coeficientes de las potencias inferiores tomada en número fijo; de suerte que es suficiente *recurrir* a los valores de estos últimos coeficientes para deducir de ellos aquél que se busca». Pudiendo ser los valores de los $a_n$ y de $x$ reales o complejos.

A partir de los resultados, de los capítulos VI y IX, sobre series concluye que la serie recurrente será convergente si

$$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{\left(|a_n|\right)^{1/n}} < 1$$

y divergente si es mayor que 1. Es interesante resaltar que aparece aquí, aunque no se defina explícitamente, el concepto de límite inferior, bajo la forma del «el más pequeño de los límites».

*Comprueba que los desarrollos en series de potencias de las fracciones racionales resultan ser series recurrentes.*

Comprueba que los desarrollos en series de potencias de las fracciones racionales resultan ser series recurrentes. Luego prueba que si una serie de potencias es convergente y recurrente, entonces su suma es una fracción racional.

Finalmente nos referiremos a la demostración que da (págs. 331 a 339) del Teorema Fundamental del Álgebra y que enuncia así:

> 1.^er^ TEOREMA. Cualesquiera que sean los valores reales o valores imaginarios de las constantes $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$, la ecuación (1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, en la cual $n$ designa un número entero igual o superior a la unidad, tiene siempre raíces reales o imaginarias.

Recordemos que este teorema había sido demostrado por primera vez en 1799 por Gauss, que llegó a dar hasta cuatro demostraciones del mismo. Su historia se remonta a Girard (1595-1632), y juegan un papel destacado Euler, D'Alembert[12], Lagrange (1736-1813) y Laplace. Una información pormenorizada del tema puede consultarse en Petrova (1974), Gilain (1991) y Pla (1992).

Aunque la demostración de Cauchy está en la línea de las ideas principales de D'Alembert y del artículo «Réflexions sur la nouvelle theorie d'analyse», de 1814, de Argand (1768-1822), y que como él dice «la demostración precedente del teorema 1.°, aunque diferente en varios puntos de la que ha dado el Sr. Legendre [*Theorie des Nombres*, I.^er^ Part. $ XIV], está basada sobre los mismos principios», tiene sobre todo el interés de aparecer en un libro de texto que tuvo una importantísisima influencia en el desarrollo del análisis en el siglo XIX.

La línea de la demostración es como sigue. Designando el polinomio por f(x) y llamando $x = u + v\sqrt{-1}$ puede escribir la ecuación en la forma $\Phi(u, v) + \sqrt{-1}\chi(u, v) = 0$. Considera la función que podríamos llamar módulo al cuadrado $F(u,v) = [\Phi(u, v)]^2 + [\chi(u, v)]^2$. Se trata ahora de probar que existe un mínimo de F(u,v), sea éste $A$, que se alcanza para $u=u_0$ y $v=v_0$. Después considera $u = u_0+\alpha h$ y $v=v_0+\alpha k$, designando $\alpha$ una cantidad infinitamente pequeña y $h$ y $k$ dos cantidades finitas; entonces f(u,v) es una función compleja de $\alpha(h + k\sqrt{-1})$ y desarrollando $f$ en serie de potencias de $\alpha(h + k\sqrt{-1})$ obtiene los desarrollos de $\Phi(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k)$ y de $\chi(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k)$ y, por consiguiente, de $F(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k)$. Puesto que $F(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k) - F(u_0,v_0) \geq 0$, y su signo es el de la potencia de $\alpha$ de menor

12 Se considera que D'Alembert es el primero que proporcionó una tentativa seria de demostración del teorema, válida salvo por algunas lagunas.

grado en el desarrollo, concluye que debe ser A = 0, siendo así que para $(u_0, v_0)$ se tiene que $f(u_0, v_0) = 0$ y consecuentemente $f(x_0) = 0$, siendo $x_0 = u_0 + v_0\sqrt{-1}$.

La demostración tiene un fallo o una laguna desde la perspectiva del rigor y es cuando «prueba» que F(u,v) tiene al menos un mínimo. Él parte de que

$$\lim_{(u,v)\to\infty} F(u,v) = \infty$$

siendo F(u,v) una función entera, y por tanto continua, y no negativa; de ello entonces se deduce que existe $(u_0, v_0)$ tal que $F(u_0, v_0) = A$ es un mínimo. Textualmente dice: «Además, como la ecuación (4) $[F(u,v) = [\Phi(u,v)]^2 + [\chi(u,v)]^2]$ da para F(u,v) una función entera y por consiguiente una función continua de las variables *u* y *v*, es claro que F(u,v), variando con ellas por grados insensibles, y no pudiendo bajar por debajo de cero, alcanzará una o varias veces un cierto límite inferior que no rebasará jamás». Pero este argumento, que para Cauchy resulta evidente, necesita rigurosamente acudir a un razonamiento de continuidad de la función F(u,v) sobre un compacto, lo que desde luego estaba fuera del alcance de Cauchy.

## Conclusiones

El *Cours d'Analyse* es la primera obra en la construcción rigurosa del análisis tal y como hoy lo entendemos, escrita en un estilo claro y ameno. Sin duda Cauchy parte de múltiples contribuciones anteriores a esta obra, pero él supo no sólo ver sino, lo que es más importante, construir todo el edificio del análisis desde el concepto de límite, produciendo un sistema coherente y cohesionado donde las distintas técnicas y conceptos cobraron un nuevo significado.

Identifica las propiedades esenciales de los distintos conceptos, los incorpora a las definiciones y los convierte en instrumentos útiles para refinadas demostraciones.

Junto a todo ello, lo que de por sí ya justificaría la presencia de esta obra entre las más distinguidas de todas las matemáticas, Cauchy introduce numerosos avances respecto de las matemáticas de sus antecesores y contemporáneos. Así, entre otros, volvemos a resaltar:

1) No sólo entiende el significado crucial del concepto de límite, sino que además lo usa, por primera vez, en forma aritmética en diversas demostraciones, obteniendo así una potente herramienta. Define en términos de límite los infinitésimos, cuestión esencial en el proceso de rigorización. Identifica y usa con acierto los conceptos de límites de oscilación, límite superior e inferior.

2) Introduce el concepto de continuidad a través de sucesiones, lo que se convierte en un poderoso instrumento del análisis.

*El Cours d'Analyse es la primera obra en la construcción rigurosa del análisis tal y como hoy lo entendemos, escrita en un estilo claro y ameno. Sin duda Cauchy parte de múltiples contribuciones anteriores a esta obra, pero él supo no sólo ver sino, lo que es más importante, construir todo el edificio del análisis desde el concepto de límite, produciendo un sistema coherente y cohesionado donde las distintas técnicas y conceptos cobraron un nuevo significado.*

3) Proporciona la primera exposición rigurosa de la teoría de series. Generaliza algunos criterios sólo conocidos para casos particulares (como el del cociente) e introduce otros nuevos; pero sobre todos les da a estos tal generalidad que los convierte en una pieza esencial para el estudio de series. Identifica el concepto de convergencia absoluta y lo separa del de convergencia, siendo el primero que observa la importancia de la convergencia absoluta en el estudio de series de términos cualesquiera. Es el primero que proporciona teoremas rigurosamente probados sobre producto de series y el primero que obtiene la fórmula para la determinación del radio de convergencia de una serie de potencias.

4) En esta obra hay una aproximación muy buena a lo que es el actual tratamiento de los números reales; la existencia previa de los irracionales (obvia para Cauchy y sus contemporáneos) impedía la construcción de los mismos a partir de sucesiones de racionales, pero es justo reconocer que subyacen los elementos básicos para tal tarea, como por ejemplo la definición de operaciones con irracionales a partir de sucesiones de racionales que convergen a los mismos. La compatibilidad de la relación de orden con las operaciones aritméticas son observadas como necesarias por Cauchy. Finalmente, la completitud está presente en múltiples ocasiones y en situaciones diferentes; y si bien es cierto que no hay una identificación de su importancia y, tal vez precisamente por ello, la completitud de los números reales es observada, en sus distintas manifestaciones, como obvia.

5) Introduce sistemática y rigurosamente el tratamiento de la variable compleja. Extiende los resultados del campo real al estudio de series de términos complejos y de series de potencias complejas, efectuan-

do un estudio secuenciado de las funciones complejas elementales.

También aparecen algunas lagunas y algunos errores, producto del aún incipiente camino de clarificación conceptual que se desarrollaría a lo largo de todo el siglo XIX. Pero, incluso en estos errores está también el origen de esa necesaria clarificación y el avance de la profundización conceptual.

Por todo ello y por la notable influencia que ejerció, el *Cours d'Analyse* es sin ningún género de dudas una de las obras esenciales en la construcción del análisis moderno. Y junto con el *Résumé* y las *Leçons sur le calcul différentiel* de 1829 (Cauchy, 1899*b*), forma una trilogía de libros de texto que revolucionaron los fundamentos del análisis.

*Por todo ello y por la notable influencia que ejerció, el Cours d'Analyse es sin ningún género de dudas una de las obras esenciales en la construcción del análisis moderno.*

**F. Javier Pérez-Fernández**
**Antonio Aizpuru**
Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

## Referencias

ABEL, N. H. (1881): *Oeuvres complètes*, Christiania. (ROA).

BELHOSTE, B. (1991): *Augustin-Louis Cauchy, A Biography*, Spinger-Verlag, New York.

BOTTAZZINI, U. (1986): *The higher Calculus: A history of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Spinger-Verlag, New York.

CAUCHY, A. L. (1821): *Cours d'Analyse*, París. (ROA). Hay una edición facsimilar editada por la SAEM «Thales», Sevilla, 1996.

CAUCHY, A. L. (1899*a*): *Résumé des Leçons données a L'École Royale Polytechnique, sur Le Calcul Infinitesimal*, París, 1823; en *Oeuvres Complètes, II^E Série, Tome IV*, París. (ROA).

CAUCHY, A. L. (1899*b*): *Leçons sur le calcul différentiel*, París, 1829; en *Oeuvres Complètes, II^E Série, Tome IV*, París. (ROA).

CAUCHY, A. L. (1900): *Oeuvres Complètes, I^RE Série, Tome XII*, París. (ROA).

D'ALEMBERT, J. R. (1767): *Encyclopédie ou dictionnaire raissonné des sciences, des arts et des métiers*, Tome 9, segunda edición, París. (ROA).

DIEUDONNÉ, J. (ed.) (1978): *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, Hermann, París.

DUGAC, P. (1973): «Eléments d'analyse de Karl Weierstrass», *Archive for Histotry of Exact Sciences*, 10, 41-176.

DURÁN, A. J. (1996): *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Editorial, Madrid.

FOURIER, J. (1878): *The analytical theory of heat,* University Press, Cambridge. (ROA).

FREUDENTHAL, H. (1970-71): «Did Cauchy Plagiarize Bolzano?», *Archive for History of Exact Science*, 7, 375-392.

GILAIN, C. (1991): «Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul integral», *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (2), 91-136.

GRABINER, J. V. (1981): *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge (Massachusetts).

GRATTAN-GUINNES, I. (1984): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*, Alianza Editorial, Madrid.

GRATTAN-GUINNES, I. (1970): «Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of the Early Nineteenth Century», *Archive for History of Exact Sciences*, 6, 372-400.

LACROIX, S. F. (1810-1819): *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, París. (ROA).

MONTUCLA, J. E. (1799-1802): *Histoire des Mathématiques*, París. (ROA). (Se conserva también en el ROA la primera edición de 1758, que consta de dos volúmenes y abarca hasta el S. XVII. La edición reseñada es realmente un trabajo ampliado, en cuatro volúmenes, en el que se detallan más los contenidos anteriores y se incluye el S. XVIII. Tras la muerte de Montucla, la tarea fue terminada por el astrónomo J. J. de La Lande, quien será responsable del contenido de la obra desde la página 337 del tercer volumen, con la supervisión de Lacroix en los artículos estrictamente matemáticos).

NEWTON, I. (1760): *Philosophiae Naturalis principia mathematica*, Coloniae. (ROA).

PÉREZ, J. (1998): «Algunas reflexiones desde la historia de las matemáticas: el caso de la evolución del concepto de límite», Conferencia pronunciada en las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, Jaén. (Por aparecer).

PLA I CARRERA, J. (1992): «The Fundamental Theorem of Algebra before Carl Friedrich Gauss», *Publications Matemàtiques*, 36, 879-911.

PETROVA, S. S. (1974): «Sur l'Histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre», *Historia Mathematica*, 1, 255-261.

VALSON, C. A. (1868): *La Vie et les Travaux du Baron Cauchy*, Gauthier-Villars, París. (Reimpresión de 1.970 en Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. París).

WUSSING, H. y ARNOLD, W. (1989): *Biografías de grandes matemáticos*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

# FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

## Sociedades federadas

**Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya**
Presidente: Xavier Vilella Miró
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

**Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»**
Presidenta: Fidela Velázquez
Almagro, 28. 28010-MADRID

**Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»**
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

**Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»**
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

**Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»**
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

**Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»**
Presidente: Francisco Aguiar Clavijo
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

**Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas**
Presidente: Tomás Ortega
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

**Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)**
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

**Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»**
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

**Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»**
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

**Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria**
Presidenta: Ángela Núñez
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29. 39003-SANTANDER

**Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»**
**Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira**
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

**Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas**
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

**Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»**
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 30
febrero 1999, pp. 27-36

# Planteamiento y resolución de problemas: ¿Es relevante Polya para las matemáticas escolares del siglo XXI?*

M.A. (Ken) Clements

Se describen dos tareas matemáticas enriquecedoras, adecuadas para los últimos cursos de primaria y primeros de secundaria, dándose cinco características que deben tener las tareas «fértiles» de planteamiento y resolución de problemas. En la parte más teórica se discute la conveniencia de conseguir que los alumnos participen en un aprendizaje metacognitivo o reflexivo en matemáticas. Se da una breve perspectiva histórica de algunas de las corrientes a favor y en contra del planteamiento y resolución de problemas. Finalmente, se analizan hasta qué punto el planteamiento de problemas y el uso de «preguntas abiertas» tienen valores educativos especiales.

* Conferencia leída en la Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines, celebrada en Girona el 11 de febrero de 1998, con motivo del proyecto TIEM98 patrocinado por el Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans.

Traducción: Julio Sancho

ARTÍCULOS

ESTE ARTÍCULO se va haciendo más teórico a medida que va avanzando. Confío en que los profesores que lo lean intenten alguna de las actividades, descritas en la primera sección, en sus propias clases y reflexionen y discutan los principios esbozados en la sección dedicada al «diseño y selección de actividades y el papel del profesor». El resto de las secciones son más teóricas y pueden ser la base para la discusión entre profesores interesados en usar en sus clases una metodología basada en el planteamiento y la resolución de problemas.

## Dos actividades matemáticas «enriquecedoras»

En esta sección del artículo se describen dos actividades relevantes curricularmente así como matemática y eductivamente «enriquecedoras». Tienen una estructura similar a muchas otras de las que aparecen en dos volúmenes de actividades matemáticas «ricas» usados por muchos profesores australianos de matemáticas (Lovitt y Clark, 1991). Ninguna de las actividades descritas requiere un equipamiento caro y ambas son adecuadas para clases normales.

### *¿Qué longitud tiene este trozo de cuerda?*

Se reparte a los alumnos de una clase en grupos de cinco y a cada uno de los grupos se le da un trozo de cuerda de unos 10 metros y unas tijeras. Se le dice a cada grupo que tiene diez minutos para cortar un trozo de cuerda cuya longitud sea igual a la altura media del grupo. Además se les dice que, una vez pasados los diez minutos, deberán explicar al resto de la clase el método que han utilizado.

He usado esta actividad muchas veces (tanto con chicos como con adultos) y he observado que los grupos buscan la solución con entusiasmo, a menudo usando métodos bastante físicos y siempre con animadas discusiones. La sesión de «puesta en común» proporciona un foro en el que los grupos exponen lo que han hecho. También permite a todos escuchar las diversas estrategias usadas por los grupos y cada uno puede comparar la eficacia y elegancia de su estrategia con la de otros. El profesor tiene muchas oportunidades de observar las características de las diferentes estrategias sin quitar la autoría a los grupos.

La actividad está claramente relacionada con un concepto importante del currículo del fin de la primaria o el principio de la secundaria en todo el mundo, el «promedio» o media aritmética. El trabajo en grupo, que es un aspecto esencial de la estructura de esta actividad, permite a los alumnos verse envueltos en episodios que probablemente recordarán durante mucho tiempo. Invariablemente se genera una rica discusión matemática tanto durante el trabajo en los grupos como en la «puesta en común». Por ejemplo, alguno de los grupos toma la altura de uno de sus miembros como altura base y usa la cuerda para obtener la suma algebraica de las desviaciones respecto de esa altura base. La cuestión que se suscita entonces es si esa suma algebraica de desviaciones es necesario «dividirla» por 4 o por 5 antes de que la media de desviaciones se «sume» a la altura base. ¡He visto a profesores de matemáticas equivocarse en este punto!

Grupos de profesores que han llevado esta actividad a sus clases han informado de que sus alumnos aprendieron más sobre el concepto de media aritmética que lo que lo hubieran hecho mediante una metodología más tradicional. Los alumnos aprendieron también que, a menudo, hay varias formas de resolver un problema con algunos procedimientos que son más eficientes, o elegantes, que otros. Los profesores que han intentado la actividad en sus clases comentan que el tiempo que ocupa la actividad no es mayor que el que hubiera sido necesario para enseñar el concepto de «media aritmética» de forma más tradicional.

*Los alumnos aprendieron también que, a menudo, hay varias formas de resolver un problema con algunos procedimientos que son más eficientes, o elegantes, que otros.*

### Fracciones en la recta numérica

Esta actividad es adecuada para todos los niveles de primaria. Con alumnos de nueve años es recomendable usar las fracciones 1/3 y después 2/3. Con los alumnos de 10 y 11 años se recomienda usar las fracciones 1/3 y después 2/3. Con los alumnos de 11 a 13 años se recomienda el uso de las fracciones 3/8, 3/5 y 5/6. En la siguiente descripción se usa la fracción 3/8. También se supone que hay una pizarra en el aula y un trozo de cuerda cuya longitud es al menos la anchura de la pizarra. Se necesitarán, además, unas tijeras para cortar la cuerda.

La actividad empieza cuando el profesor escribe en la pizarra el enunciado «Fracciones en la recta numérica». A continuación el profesor dibuja una línea recta que cruce la pizarra y marca el extremo izquierdo con un 0 (cero) y el extremo derecho con un 1 (uno).

Entonces el profesor pide a la clase que imagine en qué lugar de la recta se debería colocar la fracción 3/8. El profesor pide a tres alumnos que salgan a la pizarra y pongan cruces, y las marquen con sus iniciales, en donde crean que está situada 3/8. Luego el profesor propone a los alumnos que voten por la cruz que crean que está más cerca de donde realmente se sitúa 3/8 en la recta numérica. Se recogen y contabilizan los votos cuidando de que cada alumno vote sólo una vez. El profesor puede votar también.

Una vez resumidas las frecuencias de votos, en la pizarra, el profesor pide a otros dos alumnos que salgan a la pizarra y, que trabajando conjuntamente, usen el trozo de cuerda, y las tijeras si es necesario, para averiguar dónde debe localizarse a 3/8 en la recta numérica. Cuando lo hayan hecho deberán explicar al resto de la clase qué es lo que han hecho y por qué. Debe ser posible decidir cuál de las tres estimaciones originales, de la posición de 3/8, es la más correcta.

A continuación, el profesor puede explicar diferentes estrategias para obtener 3/8 usando la cuerda (por ejemplo, estrategias correspondientes a 1/8+1/8+1/8 o 1/4+1/8). El profesor puede también plantear cuestiones tales como ¿dónde cabe esperar que esté 5/8 en la recta numérica? ¿y 3/7?

## Diseño y selección de actividades y el papel del profesor

Las anteriores actividades ilustran cinco principios importantes referidos al diseño y selección de actividades y al papel del profesor que trabaja en un entorno de planteamiento y resolución de problemas. Estos principios son:

1. *Una actividad debe ser interesante y adecuada al currículo.* Es evidente que las actividades de planteamiento y resolución de problemas deben ser adecuadas al currículo. Además, y en la medida de lo posible, deben estar directamente relacionadas con los mundos personales de los alumnos y ser interesantes para ellos. Una actividad debe diseñarse de forma que anime a los alumnos a participar en las discusiones que se generen. También deben considerarse los problemas abiertos y libres de metas.
2. *Una actividad debe usar el tiempo eficientemente.* El tiempo necesario para que los alumnos obtengan los resultados apetecidos para una actividad no debe ser significativamente superior del que sería necesario para obtener los mismos resultados usando otras metodologías.
3. *Los alumnos deben desarrollar sus propias estrategias en las respuestas a las actividades.* Transferir la responsabilidad (del profesor/libro de texto al alumno) de una tarea es un ingrediente de vital importancia para toda actividad rica de planteamiento y resolución de problemas. Los alumnos deben aprender que tienen «permiso» e incluso se les anima a generar y expresar a su manera las estrategias que han desarrollado y las respuestas que dan.
4. *Los profesores deben esperar estar ocupados en sus clases.* Los profesores deben tener un papel activo en las clases de planteamiento y resolución de problemas. En particular, deben estar constantemente comprobando que los métodos que adoptan los alumnos no están seriamente desenfocados. Si un grupo no usa una estrategia apropiada el profesor debe guiarles hacia formas más aceptables de pensamiento.
5. *La evaluación debe ser auténtica.* La calidad y extensión del aprendizaje de los alumnos debe ser evaluado mediante actividades auténticamente representativas.

*El tiempo necesario para que los alumnos obtengan los resultados apetecidos para una actividad no debe ser significativamente superior del que sería necesario para obtener los mismos resultados usando otras metodologías.*

## Breve comentario a estos principios

Los dos primeros principios tienen que ver con la necesidad de diseñar y elegir actividades que sean relevantes e interesantes para los alumnos. La elección de actividades de planteamiento y resolución de problemas se suele dejar a los encargados de desarrollar el currículo y a los profesores. Uno de los principales criterios para la selección de actividades debe ser que deben ayudar a los alumnos a alcanzar los objetivos curriculares en el menor tiempo posible.

El tiempo de la clase de matemáticas está estrictamente limitado y, en consecuencia, los profesores deben limitar la inclusión de «actividades interesantes de resolución de problemas» que sólo permiten asegurar que sus alumnos «hacen» resolución de problemas. Cada actividad de planteamiento y resolución de problemas debe estar relacionada con un *contenido u objetivo curricular* específico. En efecto, cuando un profesor decide proponer una actividad determinada debe valorar si es una forma eficiente de usar el tiempo para que los alumnos alcancen un determinado objetivo curricular.

En otras palabras, el profesor de matemáticas siempre debe tener presente que está enseñando *matemáticas* y que tiene como primera responsabilidad ayudar a sus alumnos a que aprendan los contenidos y a alcanzar los objetivos específicos del currículo. Debe esperarse que los alumnos participen *activamente* en las actividades. En este contexto, la palabra activamente se entiende como actividad *mental* y no necesariamente como acción *física*. Por otra parte, hay muchas situaciones en las que es más difícil olvidar lo que el cuerpo hace. Además, es también cierto que las respuestas expresivas y plurales es más probable que unan la estructura mental de una persona con el «mundo real».

En relación al tercer principio, la *transferencia de autoría*, una característica de una buena actividad es que poco después de que un grupo la haya iniciado, sus miembros estén intrínsecamente interesados en lo que están haciendo. Se involucran en la actividad y están ansiosos de obtener una solución que pueda ser identificada como propia. En la definición de las actividades debe quedar claro que los alumnos tienen «permiso» para generar y expresar las soluciones a su manera. Una buena estrategia es que el profesor asigne a cada miembro del grupo un papel particular (p. e. líder, secretario, portavoz, cronometrador). Cada grupo debe desarrollar su propia estrategia, preparar un informe de lo que ha pasado y acordar cómo la explicará, el portavoz del grupo, a toda la clase. El profesor tiene la difícil tarea de aceptar cada estrategia como meritoria, pero, de algún modo, ser particularmente entusiasta con las estrategias y/o soluciones muy eficientes o elegantes.

El cuarto principio se refiere a la *necesidad de que el profesor esté ocupado.* Es necesario que el profesor esté disponible para responder a las preguntas hechas por los grupos, pero debe ir siempre con cuidado para no indicarles que una estrategia es preferible a otra. Además, debe estar siempre alerta con los grupos que no desarrollan una estrategia o que desarrollan estrategias totalmente inadecuadas. Este principio proporciona una respuesta a los que piensan que los profesores en las clases de planteamiento y resolución de problemas simplemente se sientan y animan a los alumnos a «construir matemáticas». Lo cierto es que los profesores tienen la difícil tarea de animar a los grupos a que desarrollen sus propios conocimientos, métodos y conexiones mientras que a la vez se aseguran de que no apliquen estrategias erróneas. En el transcurso de una actividad el profesor debe comprobar que las estrategias y métodos desarrollados en los grupos no están seriamente equivocados. Si, en efecto, detecta estrategias defectuosas es su responsabilidad guiar a los alumnos hacia una dirección más adecuada.

Además, para mantener un control sobre la calidad de las estrategias de los grupos, el profesor debe (a) introducir y clarificar las actividades; (b) registrar los nombres de los alumnos de cada grupo y moverse entre los grupos, anotando contribuciones significativas individuales (en una lista de control); (c) dar a cada grupo tiempo para desarrollar su estrategia y preparar el informe sobre sus actividades que deberá comunicar a toda la clase; (d) conducir las sesiones de puesta en común con toda la clase, para sintetizar las diferentes ideas de los grupos e individuos, subrayando los aspectos importantes y sugiriendo extensiones; y (e) asegurarse de que tras la actividad hay oportunidades para revisar los conceptos clave, las destrezas y aplicaciones.

El quinto principio reconoce que el aprendizaje a través del planteamiento y resolución de problemas debe ser valorado mediante actividades de evaluación que admiten valoración. Es difícil discutir el tópico de que, en las matemáticas escolares, los alumnos valoran lo que es evaluado y que los profesores evalúan lo que valoran. La evaluación del aprendizaje individual debe basarse en su rendimiento efectivo en la actividad y debe relacionarse directamente con contenidos y objetivos específicos.

Por consiguiente, así como las actividades deben admitir respuestas expresivas diversas, también lo deben hacer los medios con los que son evaluados los aprendizajes de los alumnos. Además, como las actividades efectivas de planteamiento y resolución de problemas hacen que los alumnos reflexionen sobre sus estrategias («metaconocimiento») y consideren la calidad de las mismas desde una perspectiva global, cualquier evaluación basada tan sólo en exámenes escritos cuyo contenido sean, sobre todo, preguntas de respuesta corta (incluyendo las de elección múltiple) es improbable que sea genuinamente auténtica. Esto es debido a que estas cuestiones tienden a ser muy concretas y raramente generan reflexión sobre aspectos como la eficacia o elegancia de las estrategias.

*[El profesor] debe estar siempre alerta con los grupos que no desarrollan una estrategia o que desarrollan estrategias totalmente inadecuadas. Este principio proporciona una respuesta a los que piensan que los profesores en las clases de planteamiento y resolución de problemas simplemente se sientan y animan a los alumnos a «construir matemáticas».*

El resto de este artículo trata cuestiones teóricas que se deben considerar por todos aquellos que estén interesados en impulsar enfoques basados en el planteamiento y resolución de problemas en la educación matemática.

## Metacognición y aprendizaje reflexivo

El reconocimiento progresivo entre los educadores matemáticos de la importancia que tiene la habilidad para revisar los propios procesos de pensamiento en el planteamiento y resolución de problemas les obligó a hacerse preguntas sobre lo que ocurre en la mente de los chicos cuando tratan de resolver problemas. Flavell (1987) sugiere que el desarrollo de la metacognición es más fecundo cuando los alumnos desarrollan un sentido de sí mismos como agentes cognitivos y se dan cuenta de que ellos son el centro y la causa de la actividad cognitiva.

De acuerdo con Flavell (1987) el desarrollo metacognitivo puede estimularse con ciertas experiencias, una de las cuales es la práctica. En otras palabras, cuando los alumnos están inmersos en situaciones en las que se usa o estimula el uso de estrategias metacognitivas es más probable que sean capaces de reflexionar sobre la calidad de su propio aprendizaje, sobre lo que saben y lo que podrían llegar a saber. Flavell defiende que involucrar a los alumnos en actividades de planteamiento y resolución de problemas en los que conscientemente reflexionen sobre la estructura de problemas que están creando o tratando de resolver y en los que conscientemente intenten analizar sus propios procesos de resolución es probable que mejore su capacidad para crear y resolver problemas en el futuro. Cuando están implicados cognitivamente en ese tipo de actividades, deciden qué información deben recordar de su memoria y qué posibles relaciones cognitivas pueden ayudarles. También reflexionan sobre la necesidad de nueva información y cómo debe obtenerse. Se formulan y comprueban conjeturas y se exploran vías de resolución de problemas.

Se están empezando a elaborar explicaciones más globales sobre los procesos de planteamiento y resolución de problemas. Por ejemplo, ahora se reconoce que los procesos metacognitivos están influenciados y complementados por factores del lenguaje, del medio social y cultural del aprendizaje y por el uso de imágenes. En los últimos años muchos profesores han animado a sus alumnos a llevar un control de sus procesos de planteamiento y resolución de problemas mediante la anotación regular en diarios. Se basan en que la práctica de hacer anotaciones regulares en el diario exige una reflexión general que puede tener profundos efectos no sólo sobre la comprensión de los alumnos de importantes conceptos matemáticos sino también en su visión de la naturaleza de las matemáticas (ver Mildren, Ellerton y Stephen, 1990; Waywood, 1993). En efecto, durante la segunda mitad de los años ochenta en algunas partes del mundo se ha hecho célebre en la educación matemática el movimiento «escribir en matemáticas» (ver capítulo 5 de Ellerton y Clemens, 1991).

No es fácil, sin embargo, enseñar a los alumnos a expresar por escrito sus reflexiones sobre cómo y por qué han empleado ciertos métodos y estrategias. Se ha intentado implementar programas a gran escala de metacognición en la escuela (uno de los más famosos es el Peel Project que ahora se está aplicando en muchas escuelas de Australia (ver Mitchel y Northfield, 1995). Por lo que se desprende de estos proyectos, se puede asegurar que, sin duda, se puede enseñar a los chicos a reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento y que, si se hace, esto puede ayudar al aprendizaje de formas educativamente importantes.

*...la riqueza de los procesos de resolución de problemas en el pensamiento de los chicos levantaba dudas sobre si la inferencia estadística estándar y los paradigmas de la investigación en desarrollo psicológico podrían ser de alguna utilidad en la investigación sobre resolución de problemas.*

## Génesis de un pensamiento matemático propio en los alumnos en las clases de matemáticas: perspectivas históricas

El fracaso tanto de las matemáticas modernas en los años sesenta (Moon, 1986) como de la vuelta a los fundamentos en los setenta (Clemens y Ellerton, 1996), para generar entornos de calidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, provocó que educadores de todo el mundo considerasen qué debía hacerse. ¿Cómo podría cambiarse el currículo de matemáticas para que estuviera más conectado con la vida diaria y proporcionase mejor preparación a los que desearan continuar posteriores estudios matemáticos? En 1980, en los Estados Unidos, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) afirmó categoricamente en la *An Agenda For Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s* que el mayor cambio al que debían hacer frente las matemáticas escolares era hacer de la resolución de problemas el foco principal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 1980). En el Reino Unido el *Informe Cockcroft* seguía líneas similares (Cockcroft, 1982).

Tales son las fuerzas del colonialismo que *An Agenda For Action* y el Informe Cockcroft precipitaron en todo el mundo una gran oleada de interés por la resolución de problemas en las matemáticas escolares (Clemens y Ellerton, 1996). Sin embargo, enseguida se hizo evidente que era difícil para los responsables del currículo, profesores e investigadores definir con exactitud en qué constiste un problema matemático o precisar cómo podría diseñarse, implementarse y evaluarse un currículo de matemáticas basado en la resolución de problemas.

Se han hecho numerosas referencias, por los entusiastas de la resolución de problemas, a la heurística genérica, tal como la expuso el matemático George Polya (1973). Sin embargo, los investigadores educativos y profesores encontraron difícil decidir hasta qué punto era factible enseñar las destrezas generales de resolución de problemas en las clases de matemáticas. Además, la riqueza de los procesos de resolución de problemas en el pensamiento de los chicos levantaba dudas sobre si la inferencia estadística estándar y los paradigmas de la investigación en desarrollo psicológico podrían ser de alguna utilidad en la investigación sobre resolución de problemas.

## Cuestionamiento de las virtudes de la metodología basada en el planteamiento y resolución de problemas

En los años ochenta y noventa los científicos cognitivos pusieron en duda la confianza de algunos educadores en sus intentos de que los alumnos aprendieran y aplicaran un conjunto de heurísticos generales. Cuando los educadores discuten sobre la importancia de intentar enseñar matemáticas a partir del planteamiento y resolución de problemas es normal oir afirmaciones como «se aprende a resolver problemas resolviendo problemas». Sin embargo, John Sweller (1992) sostiene enérgicamente que los resultados de la investigación no dan soporte a este punto de vista. De acuerdo con Sweller (1992) tan sólo con la práctica del planteamiento y resolución de problemas uno no se hace mejor planteador y resolutor de problemas. Sweller no encontró, ni en la literatura ni en su propia investigación, apoyo para la afirmación de que la enseñanza de heurísticos generales puede ayudar a los chicos a resolver problemas desconocidos.

Sweller (1992) aconsejó a los profesores de matemáticas que no animasen a sus alumnos a seguir los cuatro pasos de Polya (1973) para resolver problemas: (a) entender el problema; (b) elaborar un plan; (c) ejecutar el plan; y (d) examinar la solución obtenidas. Defiende que el rendimiento de los alumnos en resolución de problemas tienemás posibilidades de mejorar si adquieren un gran número de pequeñas y muy específicas estrategias de resolución de problemas asociadas con dominios determinados del conocimiento. Así, por ejemplo, si se enfrenta a un alumno con la actividad «resolver la siguiente ecuación respecto de *x*», los expertos inmediatamente reconocen que lo primero que deben hacer es que denominador del lado izquierdo pase a multiplicar al otro lado. Por el contrario, los novatos necesitan usar una estrategia de significado final para buscar la solución (Larkin, McDermott, Simon y Simon, 1980).

La persona que reconoce inmediatamente el esquema algebraico que hay detrás sabe que la primera cosa que se debe hacer es «multiplicar ambos miembros por *c*». No necesita derrochar tiempo ni esfuerzo cognitivo. Si esta ecuación, u otra parecida, aparece al tratar de resolver un problema cualquiera, entonces no aparecerá ninguna tensión cognitiva en esa persona ya que sabrá qué hacer y podrá dirigir su atención a otros aspectos del problema. Por tanto, si los alumnos no saben cómo transformar ecuaciones, como la del ejemplo anterior, se les debe enseñar a hacerlo. Y según Sweller (1992) una de las formas más eficaces de hacerlo es por el profesor o el autor del libro de texto, presentando ejemplos detallados. Este punto de vista tiene cierto soporte en la literatura sobre la práctica de la enseñanza (Grows, Cooney y Jones, 1988).

*...Sweller (1992) argumenta que la literatura de ciencia cognitiva no apoya la afirmación de que la metodología basada en el planteamiento y resolución de problemas deba usarse en las matemáticas escolares.*

### Los seis mitos de Sweller

Como se ha dicho más arriba, Sweller (1992) argumenta que la literatura de ciencia cognitiva no apoya la afirmación de que la metodología basada en el planteamiento y resolución de problemas deba usarse en las matemáticas escolares. En otro artículo Sweller (1991) mantiene que hay al menos seis «mitos modernos sobre cognición e instrucción». Presentamos estos «mitos», con las palabras de Sweller, sin más comentarios:

1. La explosión del conocimiento es tal que es imposible enseñar a los alumnos todo lo que necesitan saber ya que la capacidad cognitiva humana es bastante limitada (p. 72).
2. Dado que la cantidad de conocimientos que somos capaces de asimilar está bastante limitada (ver Mito 1) nuestro sistema educativo debe enfatizar no el conocimiento sino más bien el pensamiento y la resolución de problemas. Desde este punto de vista, no debemos agobiar a nuestros alumnos con conocimientos que acabarán pasando de moda o siendo irrelevantes (p. 73).
3. Muchos de los problemas que presentamos a los alumnos son, en realidad, ejercicios rutinarios. Debemos enseñarles cómo resolver problemas reales (p. 75).
4. Debemos enseñar heurística (p. 75).
5. La práctica en la resolución de muchos problemas convencionales es una forma eficaz de ganar destreza en resolución de problemas (p. 76).
6. Los alumnos fracasan al transferir la experiencia adquirida en una actividad de resolución de problemas a otra, ya que carecen de estrategias generales en resolución de problemas (p. 79).

### Argumentos contra el punto de vista de Sweller

Muchos educadores matemáticos no están de acuerdo con todo lo que Sweller afirma sobre las implicaciones de la investigación en ciencia cognitiva para las matemáticas escolares. Aunque Schoenfeld (1992) no se refiere directamente a los escritos de Sweller deja claro que no acepta totalmente el punto de vista de la ciencia cognitiva. Argumenta que cuando un gran maestro de ajedrez se enfrenta a oponentes de habilidad comparable no sólo cuenta con su compendio de posiciones estándar del ajedrez y las mejores estrategias asociadas, sino que también pone en juego otras estrategias significativas. De forma similar cuando los matemáticos se enfrentan con problemas no rutinarios no sólo usan los posibles conocimientos relacionados sino que también emplean conscientemente un amplia variedad de estrategias. De acuerdo con Schoenfeld (1992):

*La sugerencia directa de que la enseñanza matemática debe focalizarse en los esquemas de problemas no acaba de ser bien recibida en la comunidad de educación matemática por una buena razón... Los trabajos sobre procesamiento de la información tienden a centrarse sobre la ejecución y no necesariamente en la comprensión básica que le da soporte. Por lo tanto una confianza en los esquemas en su forma más cruda –«cuando veas estas características en un problema usa este procedimiento»– puede producir manifestaciones superficiales de comportamiento competente. Sin embargo, si la práctica no está asentada en la comprensión de los principios que conducen al procedimiento, puede ser propensa al error y al olvido rápido. Por ello deberían ir con precaución muchos educadores cuando apliquen los hallazgos de la investigación sobre la teoría de esquemas (p. 352).*

Este argumento merece atención. Así, por ejemplo, los alumnos de análisis matemático elemental que deben calcular las primitivas de varias funciones dadas tienen ventaja si, inmediatamente, saben que hay unas categorías básicas de funciones y que las primitivas de las funciones de la misma categoría puede abordarse de la misma forma y las de categorías diferentes de formas distintas. Si los estudiantes son capaces de asociar una función dada con una de las categorías conocidas y después recordar el método para buscar su primitiva, entonces probablemente la encontrarán sin demasiada dificultad. Pero esto no implica que sepan más acerca de la naturaleza de las primitivas y de cómo se relacionan la derivada y la integral a través del teorema fundamental del cálculo. Muchos educadores matemáticos se lamentan de que demasiados profesores se han conformado con enseñar a los alumnos «destrezas». Opinan que el siguiente paso es idear estrategias de enseñanza en las que los alumnos planteen y resuelvan problemas y reflexionen sobre lo que están haciendo y han hecho. Los educadores matemáticos tienden a asegurar que si realizan estas actividades más expresivas los alumnos serán capaces de situar las destrezas dentro de los contextos apropiados.

*...estoy de acuerdo con el punto de vista de los educadores matemáticos, resumido por Schoenfeld (1992), según el cual se puede aprender a plantear y resolver problemas planteando y resolviendo problemas, siempre que los problemas sean educativamente «enriquecedores». Podemos definir una actividad «enriquecedora» como la que ayuda a los alumnos a construir, sobre las estructuras cognitivas que ya tienen, mediante la unión de proposiciones, imágenes, destrezas, clasificaciones de tipos de problemas y episodios almacenados en su memoria...*

Sin embargo, el argumento del último párrafo resulta insuficiente para invalidar los argumentos a favor de los «esquemas» dados por los científicos cognitivos como Sweller. Una conclusión puede ser que las matemáticas escolares no sólo tienen que proporcionar a los alumnos abundante práctica en el reconocimiento de las similitudes y diferencias estructurales en las preguntas, sino también a aprender a enfrentarse con problemas más difíciles, en los que no son obvios los esquemas de ayuda que se deben seguir. Esto quiere decir que los profesores deben intentar ayudar a sus alumnos a plantear e investigar un rango de problemas aparentemente similares pero que, de hecho, tienen diferencias estructurales y requieren diferentes estrategias. Este punto de vista tiene un amplio soporte en la literatura de educación matemática (Clemens y Ellerton, 1991; Krutetskii, 1976).

A pesar de la advertencia de Sweller, estoy de acuerdo con el punto de vista de los educadores matemáticos, resumido por Schoenfeld (1992), según el cual se puede aprender a plantear y resolver problemas planteando y resolviendo problemas, siempre que los problemas sean educativamente «enriquecedores». Podemos definir una actividad «enriquecedora» como la que ayuda a los alumnos a construir, sobre las estructuras cognitivas que ya tienen, mediante la unión de proposiciones, imágenes, destrezas, clasificaciones de tipos de problemas y episodios almacenados en su memoria (Clemens y Del Campo, 1989; Gagne y White, 1978; Golden, 1987). Es importante que las actividades sean tales que los alumnos no sólo puedan generar sus propias estrategias de resolución sino que también sepan compararlas con otras estrategias que reconozcan como eficientes y elegantes.

Incluso Sweller (1992) acepta que la manera de presentar una actividad puede ayudar a los alumnos a resolverla. Defiende el uso de lo que llama «problemas libres de metas» y proporciona como ejemplo una actividad geométrica en la que se les pide a los alumnos que calculen los valores de tantos ángulos como puedan en vez de un único ángulo en particular (pp. 51-53). Pretende que la investigación en los dominios de la geometría, trigonometría y cinemática –mucha de la cual ha sido elaborada por él mismo y sus colegas–, ha mostrado que es posible «favorecer el aprendizaje con los problemas libres de metas» (p. 53).

Algo que la incipiente literatura de investigación, sobre patrones de discurso en clase de matemáticas, deja claro es que los efectos de la clase no sólo influyen en lo que aprenden los alumnos sino también en su visión de la naturaleza de las matemáticas. Así, por ejemplo, Bickmore-Brand (1997) en una reciente tesis doctoral, da cuenta de una investigación sobre los efectos de dos metodologías diferentes para enseñar matemáticas en la última etapa de primaria. Se estudió el caso de dos profesores con diferentes concepciones de la enseñanza de las matemáticas. Uno de ellos centraba su enseñanza en el aprendiz mientras que el otro lo hacía en los contenidos. Mediante observaciones muy detalladas de clases y entrevistas, realizadas durante un periodo de doce meses, se puso de manifiesto que los alumnos de las dos clases desarrollaron diferentes percepciones no sólo sobre las matemáticas que se les habían enseñado sino también del papel que puede jugar en sus vidas.

## Un comentario sobre plenteamiento de problemas y preguntas abiertas

Hace más de cincuenta años, Einstein e Insfield (1938) escribieron que «la formulación de un problema es a menudo más esencial que su solución, que puede ser simplemente una cuestión de destreza matemática o experimental» (p. 92). Sostenían que la actividad de producir nuevas cuestiones, nuevas posibilidades, o volver a ver viejas cuestiones desde un nuevo punto de vista «requiere imaginación creativa y marca un avance real en la ciencia» (p. 92) En la misma línea, el «último» Jerome Bruner (1996) ha mantenido que el arte de formular cuestiones sugerentes es sin duda tan difícil como el de dar respuestas correctas.

En el nivel escolar muchos profesores de matemáticas saben que con frecuencia es mucho más difícil para los alumnos proponer incluso cuestiones mundanas que resolverlas. De igual manera, es mucho más difícil para ellos responder de forma múltiple a preguntas abiertas que buscar soluciones para las cuestiones estándar de los libros de texto.

De acuerdo con Ellerton y Clarkson (1996), la dificultad que los adultos experimentan en el planteamiento de problemas y con las preguntas abiertas probablemente es un legado de su época escolar, en particular, de la educación matemática que recibieron en la escuela. Los profesores de matemáticas raramente piden a sus alumnos que propongan problemas y por ello no debe sorprendernos que el planteamiento de problemas que precisen matemáticas significativas (más allá de los simples contextos de compraventa) sea algo que la gente no haya aprendido en las matemáticas escolares (Sullivan, 1995). Respecto a las preguntas abiertas, Ellerton y Clements (1996) sostienen que no son familiares y, por lo tanto, asustan a muchos alumnos. Además, apuntan que cuando se quiere proponer una cuestión no trivial o enfrentarles a preguntas abiertas, los alumnos necesitan localizar la cuestión en sus estructuras cognitivas y reconocer su relación con otros aspectos de las matemáticas.

Por ejemplo, para la pregunta abierta «¿Si un rectángulo tiene un perímetro de 30 unidades cuál puede ser su área?» los alumnos que buscan soluciones múltiples probablemente necesiten responder a cuestiones como «¿qué longitudes pueden tener los lados del rectángulo?», «¿puede el área ser diferente si el perímetro es el mismo?», «¿qué ocurre con el área de un rectángulo largo y fino?», «¿cuál es el área máxima posible?», «¿vuál es el área más pequeña posible?», «¿un cuadrado es también un rectángulo?». Estas cuestiones se les ocurren casi automáticamente a los profesores de matemáticas experimentados, pero para muchos alumnos, que aún están afianzando los conceptos de perímetro y área y las relaciones entre ellos, no son algo natural. Es más, las respuestas múltiples no pueden obtenerse salvo que al menos se propongan algunas de las cuestiones anteriores (u otras semejantes). Y, es precisamente esta afirmación la que revela el nexo que hay entre estos dos tópicos importantes: «plantear problemas» y «preguntas abiertas».

*Se estudió el caso de dos profesores con diferentes concepciones de la enseñanza de las matemáticas. [...] se puso de manifiesto que los alumnos de las dos clases desarrollaron diferentes percepciones no sólo sobre las matemáticas que se les habían enseñado sino también del papel que puede jugar en sus vidas.*

Una de las razones por las que el planteamiento de problemas recibe bastante menos atención que la resolución de problemas, entre los profesores y los educadores matemáticos, es porque es un tema sobre el que no se ha pensado a fondo. Todo el mundo está de acuerdo en que «el planteamiento de problemas es importante». Pero la realidad es que la cultura tradicional asociada con las clases de matemáticas tiene, como componente integral, las cuestiones cerradas que pueden ser resueltas rápidamente y que los alumnos pueden tomar como modelos del tipo de preguntas que es posible que aparezcan en el próximo examen escrito. Stoyanova (1977), en una reciente y rompedora tesis doctoral sobre el planteamiento de problemas en las matemáticas escolares, ha investigado el potencial que tiene el planteamiento de problemas como medio para desarrollar en los alumnos la comprensión de las matemáticas y los procedimientos de resolución de problemas. Argumenta que la incorporación de aspectos relacionados con el planteamiento de problemas en el currículo de matemáticas ha sido obstruida por la ausencia de un marco que ligue la resolución de problemas, el planteamiento de problemas y los currículos de matemáticas. Elaboró un programa apropiado adaptando y extendiendo el contenido del programa nacional destinado a trabajar con alumnos con capacidad matemática.

Stonyanova propuso que toda situación de planteamiento de problemas puede clasificarse como libre, semiestructurada o estructurada (Stoyanova y Ellerton, 1996). Una situación de planteamiento de problemas es *libre* cuando se pide a los alumnos que generen un problema a partir de una situación dada, natural o inventada. Así, por ejemplo, Ellerton (1986) pidió a sus alumnos que escribieran una carta a un amigo, que ha estado fuera las últimas tres semanas, y desea saber qué ha pasado en las clases de matemáticas durante ese tiempo. Como parte de sus cartas, se les pide a los alumnos que pongan preguntas como las que se han formulado en clase así como las correspondientes soluciones elaboradas.

Una situación de planteamiento de problemas es *semiestructurada* cuando, una vez explicado un concepto matemático particular, se invita a los alumnos a formular un problema que requiera el uso de dicho concepto. Así por ejemplo, se les puede pedir a alumnos de 13 años: «formular un problema en el que los ángulos rectos sean importantes». Cuestiones tales como «formula tantos problemas como puedas en los que se deba hacer el siguiente cálculo: $3 \times 25 + 15 \div 5 - 4$», también pueden considerarse semiestructuradas (para alumnos de 10 a 12 años de edad).

Una situación de planteamiento de problemas es *estructurada* cuando las actividades de planteamiento de problemas están basadas en un problema particular. Así, por ejemplo, se puede pedir a alumnos de 11 años que calculen el valor de la resta 940 – 586 y, una vez hecho, trabajen en grupos para encontrar tantas restas como puedan que también tengan 354 como resultado. Stonyanova y Ellerton (1996) dan el ejemplo siguiente: «La última noche hubo una fiesta y el timbre del anfitrión sonó 10 veces. La primera vez que sonó el timbre sólo llegó un invitado. Cada vez que el timbre suena después, llegan tres invitados más de los que habían llegado en el anterior timbrazo». Se pide a los alumnos que formulen tantas preguntas como puedan, que usen esta historia como un marco básico. También se les pide que ordenen las preguntas en el orden adecuado.

*¿Cuál es el objeto de aprender conocimientos, conceptos y destrezas si uno no puede obtener sin dificultad la combinación necesaria para resolver un problema de la vida real? Es más, ¿cuál es el objeto de tener conocimientos, destrezas y conceptos almacenados en la memoria si uno no puede hacer preguntas en las que se haga uso creativo de lo que tiene almacenado en la memoria?*

## Un comentario final

Algunos educadores podrían, al leer la sección anterior, estar preocupados porque los estudiantes usen demasiado tiempo explorando la estructura de las cuestiones sin adquirir el conocimiento y destrezas matemáticas que deberían conocer para sobrevivir con dignidad en la vida diaria. Esta es una de las preocupaciones de personas como John Sweller, que mantienen que a no ser que los alumnos aprendan las destrezas y conceptos básicos, hasta el punto de que no ocupen una cantidad significativa de espacio cognitivo en su memoria, siempre tendrán que esforzarse para resolver problemas. Sin embargo, hay muchas investigaciones –a menudo llamadas investigaciones Newman, puesto que usan un protocolo de entrevista desarrollado por M. A. Newman– que han demostrado que, con frecuencia, alumnos que tienen las destrezas necesarias para pasar exámenes escritos de matemáticas, no pueden identificar qué secuencia de operaciones es necesaria para resolver problemas en contextos de la vida real (Clements y Ellerton, 1996; Ellerton y Clarkson, 1996).

¿Cuál es el objeto de aprender conocimientos, conceptos y destrezas si uno no puede obtener sin dificultad la combinación necesaria para resolver un problema de la vida real? Es más, ¿cuál es el objeto de tener conocimientos, destrezas y conceptos almacenados en la memoria si uno no puede hacer preguntas en las que se haga uso creativo de lo que tiene almacenado en la memoria?

Aspectos como los tratados en este artículo deben estimular a los profesores de matemáticas a continuar el desarrollo de sus destrezas para enseñar matemáticas con el enfoque del planteamiento y resolución de problemas.

## Bibliografía

BICKMORE-BRAND, J. (1997): *Teachers of mathematics teach mathematics differently: A case study of two teachers*, PhD thesis, Edith Cowan University, Pert (Australia).

BRUNER, J. (1996): *The culture of education*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

CLEMENTS, M. A. y G. DEL CAMPO (1989): «Linking verbal knowledge, visual images, and episodes for mathematical learning», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 25-34.

CLEMENTS, M. A. y N. F. ELLERTON (1991): *Polya, Krutetskii, and the restaurant problem*, Deakin University, Geelong, Victoria.

CLEMENTS, M. A. y N. F. ELLERTON (1996): *Mathematics education research: Past, present and future*, UNESCO, Bangkok.

COCKCROFT, W. H. (Chairman) (1982): *Mathematics counts*, HMSO, London.

EINSTEIN, A. y L. INFIELD (1938): *The evolution of physics*, Simon and Schuster, New York.

ELLERTON, N. F. (1986): «Children's made-up problems-A new perspective on talented mathematicians», *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261-271.

ELLERTON, N. F. y P. C. CLARKSON (1996): «Language factors in matllematics teaching and learning», en A. J. BISHOP, K. CLEMENTS, C. KEITEL, J. KILPATRICK, y C. LABORDE (Eds.), *International handbook of mathematics education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 987-1033.

ELLERTON, N. F. y M. A. CLEMENTS (1991): *Language in mathematics: A review of language factors in mathematics learning*, Deakin Univelsity, Geelong, Victoria.

ELLERTON, N. F. y M. A. CLEMENTS (1996): «Researching language factors in mathematics education: The Australasian contribution», en B. ATWEH, K. OWENS, y P. SULLIVAN (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 1992-1995*, Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney, 191-235.

FLAVELL, J. (1987): «Speculations about the nature and development of metacognition», en F. E. WEINERT y R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 21-29.

GAGNE, R. M. y R. T. WHITE (1978): «Memory structures and learning outcomes», *Review of Educational Research*, 48(2), 187-222.

GOLDIN, G. (1987): «Cognitive representational systems for mathematical problem solving», en C. JANVIER (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Erlbaum, Hillsdale, 125-145.

GROUWS, D. A., T. J. COONEY y D. JONES (Eds.) (1988): *Perspectives on research on effective mathematics teaching*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

KRUTETSKII, V. (1976): *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, (Translated by J. TELLER, edited by J. KILPATRICK), University of Chicago Press, Chicago.

LARKIN, J., J. MCDERMOTT, D. SIMON y H. SIMON (1988): «Models of competence in solving physics problems», *Cognitive Science*, 4, 317-348.

LOVITT, C., y D. Clarke (1991): *Mathematics Curriculum Teaching Program activity banks* (2 volumes), Curriculum Corporation, Carlton, Victoria.

MILDREN, J., N. F. ELLERTON y M. STEPHENS (1990): «Children's mathematical writing –A window into cognition, en M. A. CLEMENTS (Ed.), *Whither mathematics*, Mathematical Association of Victoria, Melbourne, 356-363.

MITCHELL, I. J., y J. R. NORTHFIELD (Eds.) (1995): «Dissemination of PEEL to other schools», en J. R. BAIRD y J. R. NORTHFIELD (Eds.), *Learning from the PEEL experience*, Monash University, Melboume, 138-147.

MOON, B. (1976): THE "NEW MATHS" CURRICULUM CONTROVERSY, Falmer Press, Barcombe, East Sussex.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1980): *An agenda for action: Recomendations for school mathematics of the 1980s*, NCTM, Reston, VA.

**Ken Clements**
Sultan Hassanal Bolkiah
Institute of Education
Universiti Brunei Darussalam
Bandar Seri Begawan, 2028
Negara Brunei Darussalam
e-mail: clements@ubd.edu.bn

POLYA, G. (1973): *How to solve it. A New aspect of mathematical method*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

SAXE, G. B. (1988): «Linking language with mathematics achievement: Problems and prospects», en R. COCKING y J. P. MESTRE (Eds.), *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 47-62.

SCHOENFELD, A. (1992): «Learning to think mathematically: Metacognition and sense making in mathematics», D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, Macmillan, New York, 334-370.

STOYANOVA, E. (1997): *Extending and exploring students' problem solving via prob/em posing: A study of Years 8 and 9 students involved in Mathematics Challenge and Enrichment Stages of Eluer Enrichment Program for Young Australians*, PhD thesis, Edith Cowall University, Perth (Australia).

STOYANOVA, E. y N. ELLERTON (1996): «A framework for research into students' problem posing in school mathematics», en P. C. CLARKSON (Ed.), *Technology in mathematics education*, Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne, 518-525.

SULLIVAN, P. (1995): «Context-specific, open-ended questions: A problem-solving approach to teaching and learning mathematics», en J. WAKEFIELD y L. VELARDI (Eds.), *Celebrating mathematics learning*, Mathematical Association of Victoria, Melbourne, 176-180.

SWELLER, J. (1991): «Some modern myths of cognition and instruction», en J. B. BRIGGS (Ed.), *Teaching for learning: The view from cognitive psychology*, Australian Council for Educational Research, Melbourne, 71-83.

SWELLER, J. (1992): «Cognitive theories and their implications for mathematics instruction», en G. LEDER (Ed.), *Assessment and learning of mathematics*, Australian Council for Educational Research, Hawthorn, Victoria, 46-62.

WAYWOOD. A. (1993): «A phenomenology of report writing: From "I am" to "I think" through writing», en M. STEPHENS, A. WAYWOOD, D. J. CLARKE, y J. IZARD (Eds.), *Communicating mathematics: Perspectives from classroom practice and current research*, Australian Council for Educational Research, Melbourne, 153-163.

SUMA 30
febrero 1999, pp. 37-45

# Evolución de las destrezas básicas para el cálculo y su influencia en el rendimiento escolar en matemáticas

Santiago Hidalgo Alonso
Ana Maroto Sáez
Andrés Palacios Picos

ARTÍCULOS

Los factores que determinan el rendimiento escolar en matemáticas son diversos. En el presente artículo se analiza la importancia que, a este respecto, tienen ciertas aptitudes básicas y se estudia su evolución en los últimos años en una muestra de escolares de tercer ciclo de Primaria. Nuestros datos confirman que los alumnos calculan ahora con mayor lentitud y mayores errores que antes pero han aumentado sus aptitudes espaciales. Todo esto afectaría al rendimiento en matemáticas de manera bien diferente.

SON de candente actualidad los informes negativos respecto del rendimiento de los escolares españoles en Matemáticas. Según un estudio reciente del Ministerio de Educación «los alumnos no dominan las Matemáticas» (MEC, 1997). Datos recogidos con una muestra de escolares de 12 años por investigadores del INCE permitirían afirmar que más de la mitad de los chicos y chicas de este país tienen problemas importantes de comprensión en dicha asignatura. Nada novedoso, por otra parte, puesto que este fenómeno es una constante en los últimos años.

Así, en 1981, J. Delval y otros (1981) elaboran un estudio: «La conexión de la enseñanza de la Matemática y la Física en la 2.ª etapa de EGB» en el que constatan un bajo nivel en esos escolares y una gran desconexión entre la realidad y la enseñanza en Matemáticas presentando un elevado confusionismo en los conceptos aprendidos.

Posteriormente, J. Arnal (1985), una vez puestos en funcionamiento los programas renovados para el Ciclo Medio de EGB, realiza un extenso trabajo sobre el rendimiento en Matemáticas en ese ciclo, en el que demuestra un bajo aprovechamiento matemático de esos escolares. En esta línea de trabajo se encuentra otro estudio: «Pruebas de diagnóstico cualitativo para el rendimiento aritmético en el 3.$^{er}$ curso de EGB» realizado por M. García y otros (1983) en los que se proponen una modificación en el tipo de pruebas matemáticas que deben realizar los escolares para aumentar el rendimiento en esta disciplina. Más recientemente, y con la entrada en vigor de la nueva ley orgánica de educación (LOGSE), surgen estudios comparativos respecto del nivel de conocimientos matemáticos de los escolares. L. Balbuena y otros (1994) efectúan un trabajo, «Prueba sondeo sobre conocimientos matemáticos», en el que tomando como punto de partida los resultados obtenidos en 1978 por una muestra de escolares de los primeros cursos de BUP y FP en una determinada prueba de conocimientos matemáticos los comparan con los obtenidos en 1994 constatando un acusado retroceso y una notable torpeza en el manejo de conceptos que deberían conocer con soltura.

Como han señalado correctamente algunos autores (Rico y otros, 1983), parece que estamos en presencia de un problema siempre vigente. Periódicamente cunde la voz de alarma de un descenso considerable en los rendimientos en Matemáticas; entonces, se intensifican las recomendaciones, aparecen nuevos materiales y se redactan listas de objetivos, destrezas y dificultades con las correspondientes estrategias. Pasado el susto, y con la recomposición del programa aritmético escolar enmendado en algún que otro punto, la inercia y estabilidad vuelven a adueñarse del trabajo en el aula, continuando con los mismos conocimientos salvo ligeras modificaciones, la mayor parte de ellas de vocabulario.

Buscar la causa de esta situación no es sencilla por una razón muy simple: estamos en presencia de un problema complejo. Esta complejidad del problema se pone de manifiesto al considerar el número de variables que intervienen. Se combinan factores de política educativa, de entre los que destacan los vaivenes ministeriales con respecto a qué tipo de matemáticas hay que enseñar, con qué método y con qué secuenciación, junto a otros de tipo epistemológicos (García y otros, 1984) o los más directamente relacionados con el propio alumno y la sociedad que le ha tocado vivir (Peralta, 1995; Hidalgo y otros, 1997*a*; Hidalgo y otros, 1997*b*), por citar sólo algunos.

*Periódicamente cunde la voz de alarma de un descenso considerable en los rendimientos en Matemáticas; entonces, se intensifican las recomendaciones, aparecen nuevos materiales y se redactan listas de objetivos, destrezas y dificultades con las correspondientes estrategias.*

## Planteamiento: las aptitudes humanas, el modo de vida y su influencia en el rendimiento escolar en Matemáticas

En el trabajo que presentamos a continuación ponemos el énfasis en estos últimos factores centrados en el alumno y su entorno social. Nuestro planteamiento puede ser resumido de la siguiente manera: *en lo que respecta a las Matemáticas, los alumnos trabajan peor ahora que antes porque los alumnos de ahora operan con mayor lentitud y con más errores que antes.*

No es nuestro objetivo analizar en estos momentos las causas de esta situación, pero no nos resistimos a señalar algunas ideas al respecto.

Según un estudio del Consejo de Europa citado por Ferrés (1994), los jóvenes europeos pasan una media de 25 horas semanales ante el televisor. La TV y, en general, los medios de comunicación de masas imponen al espectador sus propias reglas y lenguajes. El televidente se acomoda de forma pasiva al aluvión de cosas que se le vienen encima según el estilo y modo que el creador del programa haya pensado.

Como dice Mcluhan (1964), cualquier invención técnica puede ser considerada como una extensión o prolongación de alguna facultad humana. Pero los medios no modifican sólo una facultad. Al modificar esta facultad, a través del mensaje al que la someten, acaban modificando todo el complejo físico y psíquico de la persona.

Aunque puede resultar difícil demostrarlo, es fácil descubrir la dirección de este cambio: ausencia de pensamiento reflexivo, gusto por la hiperestimulación sensorial (sobre todo icónica), pasividad, poco gusto por la lectura (lectores perezosos), potenciación de los procesos de reconocimiento sobre los de conocimiento, parcelación de la realidad («cultura mosaico»)...

Pero la TV y los medios de comunicación no son los únicos que están produciendo cambios importantes. Las máquinas electrónicas, los ordenadores, los juegos electrónicos de bolsillos y las calculadoras están cambiando áreas, modos de trabajo y ocio que, en el caso que nos ocupa de las Matemáticas, puede tener una gran importancia. «Ya casi nadie sabe hacer raíces cuadradas», se dice con frecuencia. Pero tampoco operar con decimales o dividir por más de tres cifras.

Ahora se opera con lentitud y con errores. Nuestros escolares, por ejemplo, dependen en grado preocupante de las calculadoras. Basta poner unas pocas «cuentas» para comprobar lo acertado de lo que acabamos de decir.

Si las calculadoras han invadido el mundo del cálculo y de la operación, el juego electrónico de bolsillo ha conquistado el ocio de nuestros pequeños. Desde muy temprano, estos hermanos pobres de los juegos de ordenador se convierten en acompañantes de los ratos libres de una gran parte de nuestra juventud. Juegos tan populares como el «tetris» sirven de entretenimiento y diversión a amplias capas de la población que pasa muchas horas (quizá demasiadas) intentando colocar ese «ladrillo electrónico» sobre el muro de su visor portátil.

Sabemos que las aptitudes humanas no son estáticas. Aumentan o disminuyen en función del tipo de ejercicio mental que se realice. Si como hemos indicado anteriormente, nuestros alumnos no se ejercitan en destrezas de cálculo simple es lógico pronosticar un importante descenso de estas destrezas.

Del mismo modo, no es difícil imaginar que, si nuestros alumnos dedican parte de su ocio a jugar al «tetris», estén desarrollando, sin querer, ciertas aptitudes espaciales; al menos, las relacionadas con la capacidad de mover imaginariamente figuras geométricas en el espacio.

Podríamos decir, pues, que de ser ciertas nuestras previsiones, los nuevos tiempos y los nuevos hábitos estarían desarrollando ciertas aptitudes y atrofiando otras.

Este cambio en la estructura aptitudinal tendría un fiel reflejo en el rendimiento escolar. Más concretamente en el caso de las Matemáticas, podríamos suponer que se ha producido una disminución en las destrezas para el cálculo elemental por el uso abusivo de las máquinas de calcular y un desarrollo de las aptitudes espaciales como consecuencia de la frecuente utilización de máquinas de juego con importante presencia de lo «espacial».

Es un objetivo de nuestro trabajo presentar datos que demostrarían este cambio en el perfil aptitudinal de nuestros alumnos y alumnas. Dichos datos los exponemos en la primera parte del artículo. Dejamos para una segunda parte el análisis de la importancia que estos factores, que suponemos cambiantes, tienen en el rendimiento en Matemáticas.

## Parte primera: evolución de las aptitudes básicas para las Matemáticas

### Hipótesis

Como hemos indicado anteriormente, es nuestra intención poner a prueba la afirmación antes comentada de que algunas destrezas básicas para las Matemáticas se han desarrollado en los últimos años de manera diferente. Más concretamente, suponemos que nuestros alumnos cada vez operan peor en cálculos sencillos y trabajan mejor en lo relacionado con lo espacial.

*...podríamos suponer que se ha producido una disminución en las destrezas para el cálculo elemental por el uso abusivo de las máquinas de calcular y un desarrollo de las aptitudes espaciales como consecuencia de la frecuente utilización de máquinas de juego con importante presencia de lo «espacial».*

### Materiales y pruebas

Para poder contrastar estas hipótesis nos hemos servido de un test factorial con cinco subescalas de las que ahora comentamos los datos obtenidos con sólo dos. Este tipo de pruebas estandarizadas de uso frecuente en orientación escolar son una fuente de datos bastante peculiar para el tema que nos ocupa. Muchas de ellas se llevan utilizando desde hace bastantes años y se siguen aplicando los mismo baremos que se encontraron entonces con muestras de escolares.

Si suponemos que esos baremos eran representativos de la población escolar de aquel entonces, disponemos como de una fotografía de cuán rápidos y eficaces eran dichos escolares. Faltará hacer una nueva fotografía de los actuales y comprobar si son más veloces en la realización de cálculos elementales. Necesitamos, en resumen, una nueva muestra representativa de escolares y de ella un nuevo baremo que nos permita realizar inferencias estadísticas de diferencia entre ambas.

De las diferentes pruebas o test estandarizados nos hemos servido, en esta ocasión, del denominado test «AMPE-F» o test factorial de inteligencia (Secadas, 1986); más concretamente de las escalas «N» o de cálculo y «E» o espacial. Se trata de un test fiable y de alta validez y del que se poseen baremos de años pasados. Es, además, una forma paralela de otro muy conocido como es el PMA de Thurstone, lo que facilita la medición en varios momentos con pruebas diferentes aunque idénticas sin los efectos del aprendizaje y/o de la memoria.

La subescala numérica mencionada está compuesta por un conjunto de operaciones sencillas; todas ellas sumas de cuatro sumandos de no más de dos dígitos. La tarea consiste en revisar estas operaciones e indicar si el resultado es correcto. Hay un tiempo límite, por lo que se mide eficacia (se restan los errores) y rapidez (cuantas más sumas comprobadas, mejor puntuación). La subescala «E» o de aptitudes espaciales consta de 20 elementos, cada uno de los cuales presenta un modelo geométrico plano y seis figuras similares; el sujeto debe determinar, en un tiempo determinado, cuáles de estas últimas, presentadas en diferentes posiciones, coinciden con el modelo aunque hayan sufrido algún giro sobre el mismo plano.

### Muestra

La muestra que hemos utilizado en esta investigación está compuesta por un total de 440 alumnos de 6 colegios, públicos y privados (concertados), de Segovia capital del tercer ciclo de Primaria (5.° y 6.°). Su distribución por cursos y edades la mostramos en la tabla 1.

| *Edad* | *N.° alumnos* | *Curso* | *N.° alumnos* |
|---|---|---|---|
| 10 | 113 | 5.° | 237 |
| 11 | 197 | 6.° | 203 |
| 12 | 130 | total | 440 |

Tabla 1. Distribución de la muestra por edades y cursos

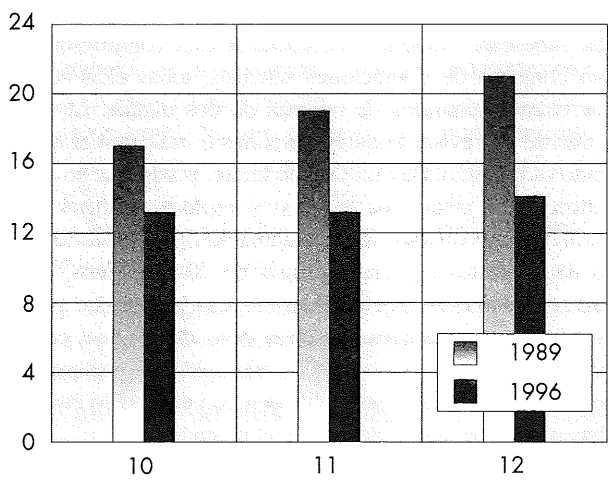
## *Resultados*

Los resultados de las pruebas de rapidez de cálculo los presentamos resumidos en la tabla adjunta. En él, además de los resultados obtenidos con nuestros escolares, hemos anotado los encontrados con la misma prueba en el año 1989.

| | *10 años* | | *11 años* | | *12 años* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1989* | *1996* | *1989* | *1996* | *1989* | *1996* |
| Media | 17,00 | 13,18 | 19,00 | 13,19 | 21,00 | 14,10 |
| D. típ. | 7,03 | 5,33 | 5,33 | 6,05 | 5,21 | 5,94 |
| Tamaño | 112 | 113 | 445 | 197 | 1.121 | 130 |

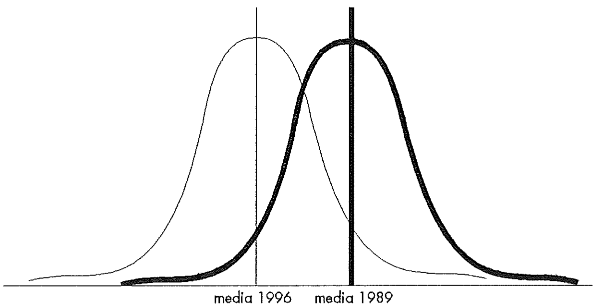
Tabla 2. Datos más relevantes del test de cálculo

La comparación entre unos y otros datos arroja resultados claros: *hay un retroceso en el rendimiento de las pruebas de rapidez de cálculos elementales, en los tres grupos de edad estudiados.*




Gráfica 1. Medias en el test de cálculo por años y edades (años 1989-1996)

Se observa, asimismo, una importante tendencia a decrecer los rendimientos comparados a medida que aumenta la edad de los alumnos: la diferencia entre una media y otra a la edad de 10 años es de algo menos de 4 unidades, esta misma diferencia es de algo menos de 6 unidades a los 11 años y aumenta a las 7 unidades a los 12 años. En otras palabras, asistimos a un retroceso en la rapidez de cálculo de nuestros alumnos comparados con otras generaciones más acusado a medida que aumenta la edad. En términos gráficos, se produce un desplazamiento a la izquierda de la distribución de las puntuaciones en la prueba de rapidez de cálculo correspondiente al año 1996.

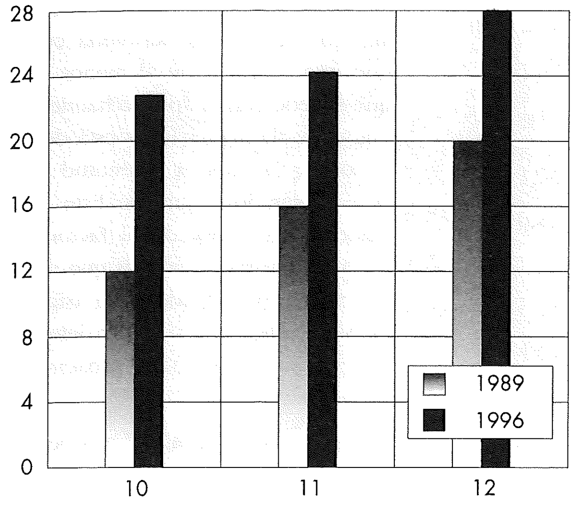



Gráfica 2. Distribución de los resultados del test de aptitudes numéricas (años 1986-1996)

Los resultados de la prueba espacial los presentamos resumidos por edades en el siguiente cuadro:

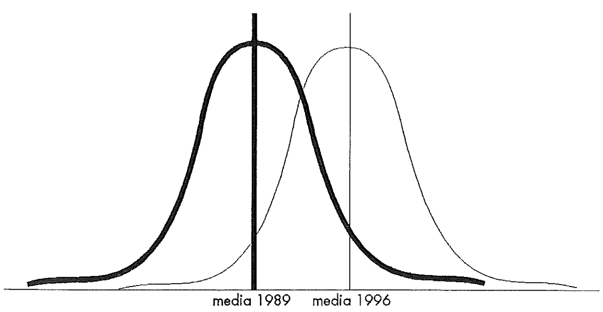
| | *10 años* | | *11 años* | | *12 años* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1989* | *1996* | *1989* | *1996* | *1989* | *1996* |
| Media | 12,00 | 22,81 | 16,00 | 24,22 | 20,00 | 28,18 |
| D. típ. | 11,02 | 10,65 | 10,13 | 13,00 | 7,28 | 15,44 |
| Tamaño | 112 | 113 | 445 | 197 | 1.121 | 130 |

Tabla 3. Datos más relevantes del test espacial




Gráfica 3. Medias en el test de aptitudes espaciales por años y edades (años 1989-1996)

Se constata en los tres grupos de edad una mejoría ostensible en los niveles aptitudinales espaciales que oscila entre los 8 y 10 puntos. Podemos representar de forma gráfica este resultado de la siguiente manera:




Gráfica 4. Distribución de los resultados del test de aptitudes espaciales (años 1986-1996)

### *Conclusiones*

Como habíamos supuesto, los datos obtenidos podrían apoyar la hipótesis de un importante cambio en los perfiles aptitudinales de los escolares actuales. La dirección del mismo dependería del factor considerado: aumento del valor promedio en los espaciales, disminución en la rapidez de cálculo. Lo que confirmaría nuestros planteamientos iniciales.

## Segunda parte: aptitudes básicas y rendimiento en Matemáticas

### *Hipótesis*

Como hemos sugerido en la primera parte, existen indicios razonables de la importancia de ciertas destrezas básicas para el rendimiento en matemáticas.

La relación entre la rapidez de cálculo y las Matemáticas ha sido asumida en los ambiente psicológicos desde hace tiempo (Yela, 1963). Desde los primeros estudios de los teóricos del análisis factorial (Thurstone, 1941) hasta nuestros días se ha dado gran importancia a la rapidez de cálculo como determinante de las aptitudes para las matemáticas. Tanto es así, que en la mayoría de los test empleados para medir dicha capacidad matemática general se utilizan ejercicios simples de sumas en los que, además de la eficacia, se mide la rapidez. En estos casos, la rapidez de cálculo se confunde con las aptitudes para las matemáticas y se habla indistintamente de «aptitudes matemáticas» o de «rapidez de cálculo».

A continuación ponemos a prueba una hipótesis tan simple como limitada en cuanto a la explicación de los bajos rendimientos en Matemáticas: *los alumnos rinden menos ahora que antes porque los alumnos de ahora operan con mayor lentitud y con más errores que antes y esto influye en el rendimiento final en Matemáticas.*

Recordamos que parte del enunciado ha sido analizado en la primera parte. Nos quedaría por demostrar que existe alguna relación entre estas destrezas y una prueba de conocimientos matemáticos. Establecida esta relación, estaremos en condiciones de concluir que, dado que hay una relación significativa entre aptitudes básicas y rendimiento en Matemáticas y que hay un claro retroceso en esas destrezas básicas en nuestros alumnos, este descenso aptitudinal podría explicar, al menos en parte, los bajos rendimientos en Matemáticas.

### *Material*

Además del test analizado en la primera parte, en esta segunda cada alumno ha realizado una prueba de conocimientos matemáticos. Estas pruebas, una para 5.° y otra para 6.° de Primaria, pretenden medir el número de contenidos del temario del curso anterior que domina un alumno al comienzo del curso siguiente. Los ejercicios propuestos en esta prueba de conocimientos han sido elaborados teniendo en cuenta la siguiente distribución:

a. Ejercicios de «cálculo directo»: Su resolución únicamente requiere la aplicación directa de operaciones aritméticas elementales.

b. Ejercicios de «comprensión lógica»: Su resolución requiere un proceso previo de comprensión y de deducción lógica para finalmente realizar el cálculo directo sobre los datos deducidos en el proceso de comprensión.

c. Ejercicios de «comprensión reglada»: Su resolución requiere un doble proceso previo antes de la ejecución: la comprensión y el conocimiento de los conceptos y reglas matemáticas marcados en este nivel educativo.

d. Ejercicios de tipo «geométrico»: Su resolución requiere únicamente aplicar nociones topológicas y geométricas.

### Muestra

La misma que en la parte primera

### Resultados

Los resultados de las correlaciones entre las subescalas «N» y «E» del test factorial y las pruebas de conocimientos matemáticos los resumimos en la tabla 4 en la que, además, hemos calculado y anotado el coeficiente de determinación.

| | *Aptitudes numéricas* | | | | *Aptitudes espaciales* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Edad | | | | Edad | | | |
| | 10 | 11 | 12 | todas | 10 | 11 | 12 | todas |
| Correlación | 0,25 | 0,46 | 0,52 | 0,43 | 0,30 | 0,24 | 0,34 | 0,37 |
| C. determin. | 0,06 | 0,21 | 0,27 | 0,18 | 0,09 | 0,06 | 0,11 | 0,14 |

Tabla 4. Correlaciones entre aptitudes numéricas y espaciales y una prueba de conocimientos matemáticos

Las cuantías de las correlaciones son en todos los casos significativas estadísticamente. Un análisis más pormenorizado evidencia una correlación menor en las aptitudes espaciales (exceptuando en el grupo de edad de 10 años). Además, no se aprecian diferencias destacables en cuanto a la edad. No sucede así con la rapidez de cálculo: la correlación aumenta a medida que lo hace la edad. Es decir, la covariación entre conocimientos y destrezas se hace más intensa en las edades mayores de las contempladas (concretamente pasa a ser 0,52 a los 12 años). Con este último dato y el coeficiente de determinación correspondiente en la mano, podemos decir que algo más del 25% de los resultados de la prueba de conocimientos están determinados por las puntuaciones obtenidas en una prueba de rapidez de cálculos elementales y sencillos. Aplicando este razonamiento al ámbito escolar nos permitiría concluir que una cuarta parte al menos de lo que sucede con el aprovechamiento en una clase de Matemáticas está determinado por la rapidez o lentitud con la que operan los alumnos. Este mismo razonamiento aplicado al factor espacial nos llevaría a concluir que un 15% del resultado obtenido en la asignatura de Matemáticas podría estar determinado por las capacidades espaciales de los alumnos.

*...una cuarta parte al menos de lo que sucede con el aprovechamiento en una clase de Matemáticas está determinado por la rapidez o lentitud con la que operan los alumnos.*

*... y un 15% del resultado podría estar determinado por las capacidades espaciales de los alumnos.*

Un análisis más detallado nos permitirá confirmar este dato y conocer otros nuevos. Para ello, hemos calculado las medias de las puntuaciones en el test de aptitudes numéricas agrupando a los alumnos por el número de aciertos en los diferentes tipos de ejercicios de la prueba de conocimientos (cálculo directo, comprensión lógica, comprensión reglada y geométricos). El objetivo de este análisis es cuantificar el peso que las destrezas básicas para el cálculo elemental tienen en cada uno de estos tipos de ejercicios. Comprobar si, por ejemplo, la rapidez de cálculo afecta por igual a la solución de problemas lógicos que a uno de tipo geométrico.

Los resultados los resumimos en la tabla 5. A la luz de los cuales podemos establecer como regla general que, la rapidez de cálculo se distribuye de forma tal que los mejores resultados en dichas pruebas se acompañan de los mejores resultados en la prueba de conocimientos independientemente del tipo de ejercicio. De modo contrario, los alumnos y alumnos con bajas puntuaciones en las pruebas de destrezas básicas tienden a obtener bajas puntuaciones en todos los ejercicios de la prueba de conocimientos. Dichas aptitudes numéricas actuarían como un factor general de aprovechamiento en matemáticas presente en todo tipo de ejercicios y problemas. Conclusión que podemos ratificar tomando en cuenta las correlaciones encontradas entre los resultados del test y las puntuaciones en las diferentes pruebas de conocimientos (tabla 6).

| N.º aciertos conocim. | Tipos de ejercicios de la prueba de conocimientos *C. reglada* curso 5.º | 6.º | *Geometría* curso 5.º | 6.º | *Cálculo* curso 5.º | 6.º | *C. lógico* curso 5.º | 6.º |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9,40 | 7,00 | 11,00 | 12,35 | 6,86 | 9,08 | 9,37 | 7,87 |
| 1 | 12,16 | 8,75 | 10,42 | 13,57 | 12,05 | 10,93 | 11,71 | 10,74 |
| 2 | 11,50 | 11,72 | 11,15 | 13,00 | 11,28 | 11,52 | 12,69 | 13,62 |
| 3 | 13,59 | 12,55 | 12,17 | 14,07 | 12,27 | 11,20 | 14,63 | 16,08 |
| 4 | 13,78 | 11,82 | 14,65 | 14,54 | 13,24 | 14,39 | | |
| 5 | 12,10 | 15,66 | 13,11 | 14,61 | 12,97 | 15,63 | | |
| 6 | 19,00 | 14,15 | 16,12 | 19,00 | 13,36 | 16,85 | | |
| 7 | | 17,73 | | | | | 16,95 | 19,08 |
| 8 | | 18,00 | | | | | 16,53 | 16,50 |
| 9 | | | | | | | | 23,00 |
| F | 2,10 | 5,07 | 3,51 | 0,61 | 4,96 | 8,35 | 4,49 | 14,78 |
| sg | 0,054 | 0,000 | 0,002 | 0,710 | 0,000 | 0,000 | 0,004 | 0,000 |

Tabla 5. Medias en el test de aptitudes numéricas según el resultado obtenido en las pruebas de conocimiento

Sin embargo, las diferencias entre las medias en el test y las pruebas de conocimiento no son en todos los tipos de ejercicios de igual magnitud encontrándose, incluso, diferencias no significativas.

Con respecto a los resultados en el test de aptitudes numéricas cruzados con los resultados en los ejercicios de «comprensión reglada» encontramos que las diferencias entre las medias en el 5.º curso no son significativas. La correlación entre los resultados de los problemas de cálculo con reglas y el test de aptitudes en este mismo curso es la más baja encontrada (no significativa estadísticamente). En otras palabras, los alumnos de 5.º que solucionan correctamente este tipo de problemas pueden tener una puntuación alta, media o baja indistintamente en el test de aptitudes numéricas. De igual modo, los alumnos que no resuelven correctamente ejercicios de «comprensión reglada» pueden alcanzar en el test cualquier puntuación.

Sin embargo, estos resultados no se obtienen en 6.º curso de Primaria. Ahora, la correlación entre una y otra variable es alta y la diferencia de medias es significativa.

| | *D* | *CR* | *G* | *C* | *CL* |
|---|---|---|---|---|---|
| *Destrezas* (D) | | | | | |
| 5.º Primaria | 1,00 | | | | |
| 6.º Primaria | 1,00 | | | | |
| *C. reglado* (CR) | | | | | |
| 5.º Primaria | 0,148 | 1,00 | | | |
| 6.º Primaria | 0,361 | 1,00 | | | |
| *Geometría* (G) | | | | | |
| 5.º Primaria | 0,249 | 0,266 | 1,00 | | |
| 6.º Primaria | 0,116 | 0,166 | 1,00 | | |
| *Cálculo* (C) | | | | | |
| 5.º Primaria | 0,338 | 0,278 | 0,431 | 1,00 | |
| 6.º Primaria | 0,501 | 0,470 | 0,236 | 1,00 | |
| *C. lógica* (CL) | | | | | |
| 5.º Primaria | 0,229 | 0,147 | 0,280 | 0,251 | 1,00 |
| 6.º Primaria | 0,417 | 0,277 | 0,111 | 0,397 | 1,00 |

Tabla 6. Correlaciones entre tipos de ejercicios y destrezas básicas

Esta discrepancia en los resultados pudiera deberse a las diferencias de las pruebas de conocimiento. Concretamente, nos referimos al diferente grado de dificultad de este tipo de ejercicios (consultar tabla 7). Si para la solución de un problema se requiere el conocimiento de una determinada regla matemática y se desconoce, poco puede importar si se calcula con lentitud o rapidez o si se tienen destrezas básicas mucho o nada desarrolladas. En este sentido, los ejercicios de 5.° son de mayor dificultad al estar implicados en su solución correcta reglas matemáticas sin las cuales nada o poco se puede hacer; cosa que no sucede con los ejercicios de 6.° curso, al menos en la misma medida.

| | C. reglado | | | Geometría | | | Cálculo | | | C. lógico | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | O | A | E | O | A | E | O | A | E | O | A | E |
| 5.° | 46 | 41 | 13 | 27 | 58 | 15 | 39 | 50 | 11 | 29 | 66 | 5 |
| 6.° | 43 | 50 | 7 | 37 | 48 | 15 | 29 | 41 | 30 | 26 | 72 | 2 |

Tabla 7. Dificultad de los ejercicios de las pruebas de conocimientos (O = omisión; A = acierto; E = error)

Igual disparidad de resultados se obtiene al analizar los ejercicios que hemos denominado «geométricos». Al considerar los resultados de 5.° de Primaria las diferencias de las medias en el test de aptitudes agrupando los alumnos por el número de ejercicios resueltos correctamente son significativos estadísticamente; dato que además queda ratificado por la correlación obtenida entre ambas variables ($r = 0{,}25$). Con lo cual podríamos concluir que en 5.° de Primaria los alumnos que obtienen buenos resultados en el test de destrezas básicas suelen acertar un número elevado de ejercicios de tipo geométrico y, por el contrario, los alumnos con bajas puntuaciones en aptitudes numéricas suelen tener problemas en la solución de cuestiones de geometría.

Resultado que, sin embargo, no se obtiene cuando analizamos los obtenidos en 6.° de Primaria. Ahora, ni la diferencia entre las medias ni la correlación son significativas estadísticamente hablando.

Como en el caso de los ejercicios de «cálculo con reglas», habría que buscar la posible explicación de esta disparidad en la propia naturaleza de las pruebas de conocimientos más que en factores aptitudinales o matemáticos. Concretamente, la dificultad de una y otra prueba podría ser, otra vez, un elemento importante para explicar dicha discrepancia. En 5.° de Primaria el porcentaje de acierto de los ejercicios de geometría se sitúa alrededor del 60%; en las pruebas de 6.°, ese mismo porcentaje baja hasta un 30% de aciertos. Con una tan diferente dificultad no es fácil realizar comparaciones. Por ello, dentro de lo arriesgado que es hacer una conjetura al respecto, podríamos establecer como explicación de esta discrepancia que, cuando los ejercicios de geometría son fáciles, el factor aptitudinal es importante (lo que discrimina realizar bien las pruebas no son los conocimientos en sí, sino las destrezas básicas). Por el contrario, cuando la dificultad de los ejercicios geométricos es alta, no intervienen como elementos de éxito la posesión de buenas destrezas de cálculo.

*Las correlaciones encontradas nos permiten afirmar que existe una significativa relación entre una prueba de conocimientos matemáticos y ciertas aptitudes básicas.*

Por último, los resultados obtenidos en los ejercicios de «cálculo directo» permiten afirmar que existe una importante relación entre dichos tipos de ejercicios de cálculo directo y las destrezas básicas para las Matemáticas. Las diferencias de medias en los dos cursos y las correlaciones entre ambos factores son significativas (a medida que aumentan las puntuaciones en el test, aumenta el rendimiento en ejercicios de «cálculo directo» y viceversa).

Encontramos, también, una correlación importante y significativa entre las destrezas básicas y los problemas que hemos denominado de «comprensión lógica» mucho más elevada en los alumnos mayores

## Conclusiones

Las correlaciones encontradas nos permiten afirmar que existe una significativa relación entre una prueba de conocimientos matemáticos y ciertas aptitudes básicas. Además, la mayor o menor importancia de las aptitudes para el cálculo elemental en el aprovechamiento en Matemáticas dependerá del peso que tengan en la asignatura aspectos tan diferentes como la Geometría, el dominio de reglas para la solución de problemas, el énfasis en el planteamiento y solución de problemas lógicos o la importancia del cálculo.

Aunque existen algunas diferencias por la edad, podemos establecer como regla general que los alumnos con bajas aptitudes para el cálculo elemental o con pocas destrezas por falta de ejercitación en dichas operaciones tendrán un menor aprovechamiento en Matemáticas, mucho más acusado si el programa escolar se sustenta en problemas con operaciones, algo menor si estos problemas se fundamentan en el conocimiento de reglas, acusado si existe una parte importante de problemas con solución lógica y casi inapreciable cuando se trate de un programa con contenidos geométricos.

En todo caso, la importancia de estas aptitudes para el cálculo como factor de rendimiento matemático crece significativamente con la edad.

## Discusión general

Los datos que hemos obtenido en el presente trabajo permitirían enunciar un principio general que venimos repitiendo desde el comienzo: nuestros alumnos operan ahora con mayor dificultad que hace unos años y esto, a su vez, pudiera estar influyendo negativamente en el aprovechamiento escolar en Matemáticas. La correlación obtenida en algún grupo de edad, los de 12 años concretamente, nos permitiría concluir, incluso, que una cuarta parte al menos de lo que sucede con el aprovechamiento en una clase de Matemáticas está determinado por la rapidez o la lentitud con la que operan los alumnos y alumnas. Los efectos de esta merma en las aptitudes básicas serán más o menos acusados en el trabajo de aula en la medida en que en las programaciones exista una mayor o menor presencia de ejercicios de cálculo.

*Su aumento [las aptitudes espaciales] con respecto a años atrás es tan espectacular como el descenso de las destrezas del cálculo.*

En situación bien distinta se encontrarían las aptitudes espaciales. Su aumento con respecto a años atrás es tan espectacular como el descenso de las destrezas del cálculo. Sin embargo, el peso que este factor tiene en el aprovechamiento escolar en Matemáticas es menor, debido, seguramente, a la menor presencia de todo lo espacial y geométrico en los programas de los cursos estudiados.

Ante estos dos hechos se nos ocurren dos direcciones en las que trabajar. En una, los currículos de Primaria deberían adaptarse a los cambios que parece se están produciendo en el perfil aptitudinal de los alumnos. Concretamente, sería necesario potenciar todo lo «espacial» de las Matemáticas. Y en la otra dirección, sería interesante incluir en la programación didáctica un tiempo y un espacio en el que el alumno, sin ningún instrumento de cálculo, pudiera ejercitarse en estas destrezas para el cálculo elemental de forma constante y continuada.

Hacia estas dos direcciones se encaminan actualmente nuestras investigaciones convencidos plenamente de que la ejercitación en estas operaciones matemáticas elementales junto a esa «geometrización de la aritmética» nos acercan a elementos determinantes de la comprensión y asimilación de las Matemáticas en Primaria.

**Santiago Hidalgo**
**Ana Maroto**
**Andrés Palacios**
Escuela de Magisterio
de Segovia.
Universidad de Valladolid

## Referencias bibliográficas

AMPE (1979): *Aptitudes mentales primarias: test PMA*, TEA, Madrid.

BALBUENA, L. , D. DE LA COBA y A. I. DE LIS (1994): «Prueba sondeo sobre conocimientos matemáticos», *Números*, n.° 24.

CASTRO, E., L. RICO y E. CASTRO (1987): *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*, Síntesis, Madrid.

CASTRO, E. (1994): *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Granada.

CHAMARRO, M. C. (1996): «El curriculum de medida en educación primaria y ESO y las capacidades de los escolares», *Uno*, n.° 10.

DELVAL, J. (1981): *La conexión de la enseñanza de las Matemáticas y la Física en la segunda etapa de EGB*, ICE- UAM, Madrid.

FERRÉS, J. (1984): *Educación y televisión*, Paidós, Buenos Aires.

GARCÍA, M., P. PINILLA y M. T. RAMÍREZ (1984): «Pruebas de diagnóstico cualitativo para el rendimiento aritmético en el tercer curso de EGB», *Actas IV JAEM*, Santa Cruz de Tenerife.

HIDALGO, S., A. MAROTO y A. PALACIOS (1997*a*): «Evolución de la rapidez de cálculo y su influencia en los curricula de Primaria», *Actas del II Congreso sobre el curriculum y la formación de profesores de Matemáticas*, León.

HIDALGO, S., A. MAROTO y A. PALACIOS (1997*b*): «Algunas hipótesis sugestivas sobre la influencia de los nuevos modos de vida en el rendimiento en Matemáticas», *Congreso Internacional Pedagogía 97*, La Habana (Cuba).

KAZUKO, C. (1994): *El niño reinventa la aritmética*, Aprendizaje-Visor, Madrid.

MCLUHAN, M. (1964): *Comprender los medios*, Paidós, Buenos Aires.

MEC (1997): *Lo que aprenden los niños de Primaria. Evaluación de la Educación Primaria*, MEC, Madrid.

NEUMAN, D. (1996): «¿Existen problemas específicos en los primeros cursos de la escuela», *Uno*, n.° 9.

PERALTA, J. (1995): *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de las Matemáticas*, Huerga y Fierro, Madrid.

SECADAS, F. (1986): *Test factorial de inteligencia AMPE-F*, TEA, Madrid.

THURSTONE, Th. G. (1941): «Primary mental abilities of children», *Educational and Psychology*, 1.

VV. AA. (1979): *Aptitudes mentales primarias: test PMA*, TEA, Madrid.

YELA, M. (1963): «Los factores de orden superior en la estructura de la inteligencia», *Revista de Psicología General y Aplicada*, XVIII.

## INFORMACIÓN SOBRE EDUMAT

EDUMAT es una lista de distribución dirigida a los profesionales de la enseñanza de las matemáticas de todos los niveles educativos (infantil, primaria, secundaria, universidad,...).

Algunos **objetivos** de la lista en relación con la educación matemática son:

a) Servir de foro de debate y colaboración de los enseñantes de las matemáticas en torno a las ideas y planteamientos sobre la educación matemática.

b) Ser un centro difusor de informaciones de carácter general y específico sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (congresos, conferencias, seminarios, jornadas, publicaciones en papel o electrónicas,...).

c) Lugar de discusión sobre trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas.

d) Ser un centro de intercambio de experiencias e innovaciones educativas en el campo de las matemáticas, prestando un especial interés a la introducción de la informática e Internet en el aula de matemáticas.

e) Ser, en resumidas cuentas, un espacio abierto de comunicación entre todas las personas interesadas en la continua mejora y progreso de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Cualquier tema relacionado con la educación matemática tiene cabida en esta lista. La matemática recreativa, la historia de las matemáticas y su uso en la enseñanza, la filosofía de las matemáticas y de la educación matemática, la popularización y divulgación de las matemáticas, la etnomatemática,... tienen también su sitio en la lista EDUMAT.

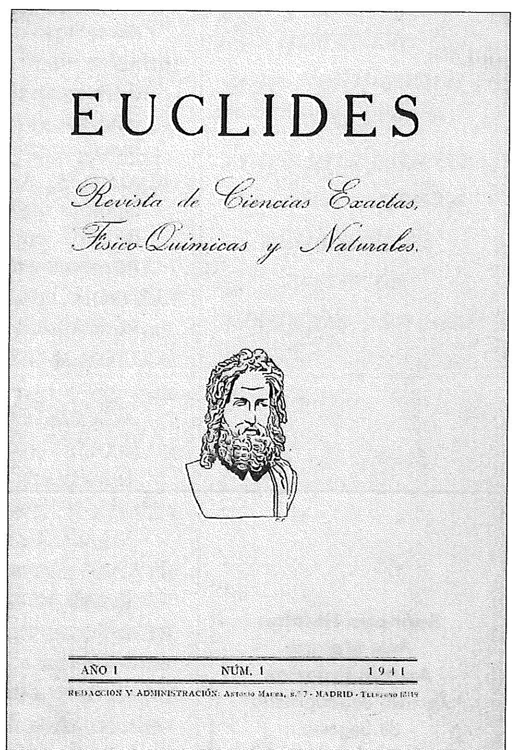
El ámbito de la lista es internacional y la lengua preferente el castellano y cualquier otro idioma latino (catalán, gallego, portugués, italiano y francés). Se aceptarán sin problemas textos escritos en euskera e inglés, siempre que vayan acompañados de su correspondiente traducción.

Para suscribirse a Edumat sólo se debe enviar la orden:
Orden: suscribe EDUMAT Nombre Apellidos
Ejemplo:

To: LISTSERV@LISTSERV.REDIRIS.ES
Subject:
suscribe EDUMAT Nombre Apellidos

En Subject no hay que escribir nada. A partir de aquí hay que responder a un mensaje de confirmación que envía el administrador de Rediris.

Dirección de la página web: http://www.rediris.es/list/info/edumat.html




*Euclides*

Año I, NÚM. 1

1941

SUMA 30
febrero 1999, pp. 47-51

# Aproximaciones de bajo rango de una matriz

Ángela Rojas Matas
Manuel Torralbo Rodríguez

ARTÍCULOS

En este trabajo se presenta la descomposición en valores singulares de una matriz y dos de sus aplicaciones más interesantes, siguiendo la experiencia realizada con alumnos de primer curso de la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial. Teniendo en cuenta el poco tiempo de que se dispone para la asignatura de Álgebra Lineal (un cuatrimestre sólo a cuatro horas por semana), se pretende una breve introducción teórica a este tema, resaltando principalmente las aplicaciones prácticas y procurando despertar el interés de los alumnos. Esta descomposición matricial permite expresar cualquier matriz como una suma finita de matrices de rango unidad. A partir de ella se pueden obtener matrices aproximadas a una dada pero con rango inferior a la original. También se puede aplicar en la resolución eficiente de un sistema por el método de los mínimos cuadrados.

## DESCOMPOSICIÓN en valores singulares

Consideremos una matriz real A de dimensiones mxn. Construimos las matrices $(A^TA)$ y $(AA^T)$. Ambas son simétricas y, por lo tanto, diagonalizables por medio de una base ortonormal de vectores propios. Se pueden demostrar fácilmente las siguientes cuestiones:

1) Si $v \in M_{nx1}$ es un vector propio de $(A^TA)$ asociado a un autovalor $\lambda$, entonces $u = Av$ es un vector propio de $(AA^T)$ asociado al mismo autovalor $\lambda$.

2) Si $v$ es un vector propio unitario asociado a $\lambda \neq 0$ de la matriz $(A^TA)$, entonces

$$u = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Av$$

es un vector propio unitario de $(AA^T)$ asociado también a $\lambda$.

3) Los autovalores no nulos de $(A^TA)$ son necesariamente positivos (consecuencia del apartado anterior), y coinciden con los autovalores no nulos de $(AA^T)$. El número de autovalores no nulos coincide con el rango de A.

Supongamos que consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

En este caso tendríamos que la matriz

$$A^TA = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$$

los autovalores son $\lambda_1 = 18$ $\lambda_2 = 0$ y una base ortonormal de vectores propios sería:

$$\left\{ \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$$

Por otro lado

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 8 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

sus autovalores son $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Entonces:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} Av_1 = \frac{1}{\sqrt{18}} A \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

es un vector propio de $AA_T$ asociado al autovalor 18. Completamos con dos vectores propios unitarios y ortogonales asociados al autovalor doble cero y tendremos una base ortonormal de vectores propios:

$$\left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{45}}, -\frac{4}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}\right) \right\}$$

Con los resultados anteriormente obtenidos es fácil comprobar que se puede escribir la siguiente descomposición matricial de la matriz original:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{18} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = U \cdot S \cdot V^T$$

Las columnas de V se llaman vectores singulares por la derecha de la matriz A y las columnas de U son los vectores singulares por la izquierda. Los elementos situados en la diagonal de la matriz S son los valores singulares de A, en este caso $\sqrt{18}$ y 0. Este ejemplo nos sirve para entender el siguiente teorema:

> *Teorema de la descomposición en valores singulares de una matriz*
>
> Cualquier matriz real A de dimensiones *mxn* se puede descomponer de la forma: $A = U \cdot S \cdot V^T$, donde U es una matriz *mxm* ortogonal, S es una matriz *mxn* diagonal y V es una matriz *nxn* también ortogonal.

El número de valores singulares no nulos nos dará el rango de la matriz original.

*Una imagen digital no es más que una matriz de números donde cada número indica un nivel de gris.*

## Aproximaciones de una matriz

Una consecuencia inmediata de la descomposición anterior nos permite escribir cualquier matriz A de dimensiones *mxn* como una suma finita de matrices de rango unidad de la siguiente forma:

$$A = s_1 R_1 + s_2 r_2 + \ldots + s_k R_k$$

siendo

$$R_i = u_i v_i^T$$

donde $k = \min(m,n)$, siendo

$$s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_r > 0 = s_{r+1} = \ldots = s_k$$

suponiendo que el rango de A es *r*, y que hemos ordenado de forma decreciente los valores singulares no nulos. Las matrices $R_i$ son de rango unidad y la suma de los cuadrados de todos sus elementos da como resultado 1.

De esta forma, la matriz original A de rango *r* queda descompuesta en una suma de *r* matrices de rango unidad. Resulta lógico pensar que la suma anterior se podrá cortar cuando los valores singulares sean suficientemente pequeños.

Supongamos que construimos

$$A_1 = s_1 R_1$$

$$A_2 = s_1 R_1 + s_2 r_2$$

$$\ldots$$

$$A_r = s_1 R_1 + s_2 r_2 + \ldots + s_r R_r$$

Entonces se puede demostrar (Noble, 1989) que la matriz de rango 1 más parecida a la original es precisamente la matriz $A_1$, que la matriz de rango 2 más parecida a la original es $A_2$ , y así sucesivamente. Lógicamente, $A_r$ coincide con A.

Vamos a visualizar las sucesivas aproximaciones de una matriz. Para ello vamos a considerar la imagen A de la figura 1. Una imagen digital no es más que una matriz de números donde cada número indica un nivel de gris. Habitualmente la escala de grises varía de 0, que equivale al negro, a 255, que equivale al blanco. El tamaño de la imagen original es 112x122. En este caso se trata de una imagen binaria. La reconstrucción con sólo los 5 primeros valores singulares es $A_5$ y con los 10 primeros es $A_{10}$.

En la figura 2 se muestra una imagen B que se ha obtenido escaneando la portada del libro de *Algebra Lineal* de Noble (1989). El tamaño es 222x166. En este caso, se muestran las aproximaciones $B_5$ y $B_{15}$.

Por último, se presenta una imagen real (una fotografía digitalizada) de una mujer C en la figura 3. En este caso el tamaño de la imagen es 512x512. Presentamos las aproximaciones $C_{20}$ y $C_{50}$.

En todos los casos se puede observar cómo aproximaciones de bajo rango proporcionan reproducciones bastante buenas de las imágenes originales y cómo al aumentar el número de términos en la suma se van obteniendo imágenes cada vez más parecidas a las originales.

Una imagen digital como C requiere 512x512 = 262.144 posiciones de memoria para ser almacenadas en un disco. Para poder reconstruir, por ejemplo $C_{50}$, es necesario almacenar los 50 primeros valores singulares junto con los 50 primeros vectores singulares por la izquierda y los 50 primeros vectores singulares por la derecha. Es necesario, por lo tanto, un total de:

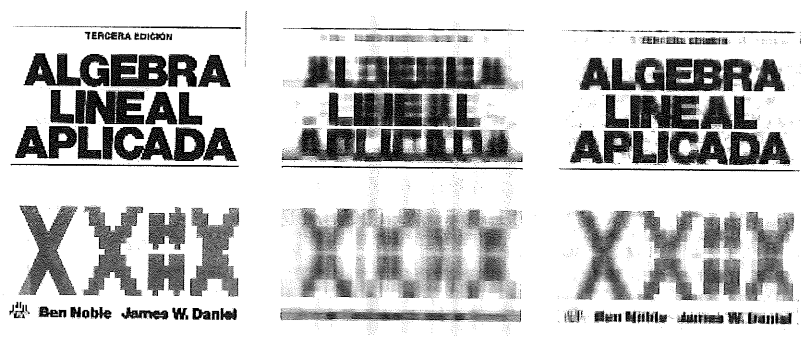
$$50 + 50 \times (512+512) = 51250$$

datos. La reducción es bastante significativa y justifica su uso en el procesamiento de imágenes digitales (Pratt, 1991).

Resumiendo, hemos podido «ver» cómo matrices de rango a inferior a una dada nos pueden proporcionar reproducciones bastante parecidas a las originales. La información importante de una matriz se encuentra en los primeros términos de la descomposición y va asociada a los valores singulares más grandes. Existe mucho software disponible que permite obtener la descomposición en valores singulares de una matriz con sólo proporcionar de entrada la matriz original (Mathematica, Matlab, Cantata de Khoros, NAG, etc.). También se puede encontrar el código para efectuar esta descomposición en C, Basic y Fortran (Press, 1992).

A $A_5$ $A_{10}$

Figura 1




B $B_5$ $B_{15}$

Figura 2

C $C_{20}$ $C_{50}$

Figura 3

## Condicionamiento de una matriz

La omisión de pequeños valores singulares puede resultar también útil en otras situaciones. Supongamos que tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 7 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad [1]$$

la solución exacta (es un sistema de Cramer) resulta ser: $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$. Mientras que el sistema:

$$\begin{pmatrix} 7{,}01 & 9{,}95 & 9 \\ 5{,}01 & 6{,}99 & 8 \\ 4 & 6 & 1{,}01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 20 \\ 10{,}9 \end{pmatrix} \qquad [2]$$

también de Cramer, tiene como solución exacta:

$$x = 92{,}18;\ y = -59{,}02;\ z = -3{,}66.$$

Resulta sorprendente que cambios tan pequeños en los coeficientes o términos independientes del sistema puedan provocar cambios tan grandes en la solución. Sistemas de este tipo se llaman *sistemas mal condicionados.* Vamos a intentar entender por qué ocurre esto.

Si tenemos una matriz A cuadrada y regular, en nuestro caso 3x3, a través de la descomposición en valores singulares $A = U \cdot S \cdot V^T$, podremos descomponerla de la forma:

$$A = s_1 R_1 + s_2 R_2 + s_3 R_3$$

Es inmediato comprobar que: $A^{-1} = V \cdot S^{-1} \cdot U^T$, y por lo tanto:

$$A^{-1} = s_1^{-1} R_1^T + s_2^{-1} R_2^T + s_3^{-1} R_3^T$$

Si tenemos un sistema de Cramer $A \cdot X = B$, como en nuestro caso, la única solución del sistema planteado se obtendría como:

$$X = A^{-1}B = s_1^{-1} R_1^T B + s_2^{-1} R_2^T B + s_3^{-1} R_3^T B \qquad [3]$$

Pues bien, se demuestra que el resultado anterior se puede generalizar a cualquier matriz. Si tenemos un sistema del tipo $A \cdot X = B$, donde la matriz A (que no tiene que ser cuadrada) es de rango *r*, entonces la solución de norma mínima, por el método de los mínimos cuadrados, del sistema anterior resulta ser una adaptación de la fórmula [3], ya que es la siguiente:

$$X = s_1^{-1} R_1^T B + s_2^{-1} R_2^T B + s_3^{-1} R_3^T B \qquad [4]$$

es decir, que se incluyen en la suma exactamente *r* sumandos. El número de sumandos coincide con el rango de la matriz, o lo que es lo mismo, con el número de valores singulares no nulos de la matriz de los coeficientes del sistema.

*Resulta sorprendente que cambios tan pequeños en los coeficientes o términos independientes del sistema puedan provocar cambios tan grandes en la solución.*

La matriz del sistema [1] tiene como valores singulares: $s_1 = 20{,}18$, $s_2 = 3{,}71$ y $s_3 = 0{,}01$ y la matriz del sistema [2] $s_1 = 20{,}16$, $s_2 = 3{,}71$ y $s_3 = 0{,}0005$. Entonces, ambas matrices estrictamente pueden considerarse regulares y, por lo tanto, se puede encontrar la solución exacta aplicando [3], obteniendo los resultados anteriormente citados.

Sin embargo, está claro que el tercer valor singular está muy próximo a cero, es decir, que las matrices son «casi» de rango 2. Si tratamos estas matrices como matrices de rango 2 y aplicamos [4] con sólo dos sumandos resulta que la solución del sistema [1] es: $x = 0{,}80$; $y = 1{,}13$; $z = 1{,}01$, mientras que la solución del sistema [2] es: $x = 0{,}79$; $y = 1{,}12$; $z = 1{,}03$. Los resultados no son ahora tan sorprendentes.

Vamos a exponer a continuación los pasos a seguir si usamos el software *Mathematica* (Wolfram, 1996) concretamente para el primer sistema (análogamente sería para el segundo). Obtenemos la descomposición en valores singulares mediante el comando **SingularValues**:

```
In:= A={{ 7, 10, 9},{ 5, 7, 8},{ 4, 6, 1}};
     B={ 26, 20, 11};
     { UTRAS, S, VTRAS}=SingularValues[N[A]] ;
```

La salida que se obtiene al ejecutar la entrada anterior son tres matrices que hemos llamado UTRAS (traspuesta de U), S (un vector con los valores singulares) y VTRAS (traspuesta de V). Podemos comprobar la descomposición:

```
In:= Transpose[UTRAS]. DiagonalMatrix[S]. VTRAS
```

el resultado proporcionado coincide con la matriz A original.

Extraemos los vectores singulares por la derecha (columnas de V) que notaremos por v1, v2 y v3; también los vectores singulares por la izquierda u1, u2 y u3 ( columnas de U). Construimos las tres matrices de rango unidad siguientes:

```
In:= R1=u1. Transpose[v1];
     R2=u2. Transpose[v2];
     R3=u3. Transpose[v3];
```

La solución del sistema tratando la matriz A como una matriz de rango 3 se obtiene aplicando la fórmula [3] de la siguiente forma:

```
In:= (1/S[[1]])*(Transpose[R1].B) +
   (1/S[[2]])*(Transpose[R2].B) +
   (1/S[[3]])*(Transpose[R3].B)
```

la salida es: {1, 1, 1}.

Mientras que la solución del sistema tratando la matriz A como una matriz de rango 2 se obtiene de la siguiente forma:

```
In:= (1/S[[1]])*(Transpose[R1].B) +
   (1/S[[2]])*(Transpose[R2].B)
```

la salida es: {0,80, 1,13, 1,01}.

## Conclusiones

La descomposición en valores singulares proporciona una información muy útil sobre una matriz cualquiera. Nos permite:

- Asignar un rango «razonable» dependiendo de sus valores singulares.
- Obtener matrices de rango inferior pero muy parecidas a la original.
- Resolver de forma adaptativa un sistema de ecuaciones lineales por el método de los mínimos cuadrados. Además, la solución proporcionada por la fórmula [4] de un sistema $A \cdot X=B$, por el método de los mínimos cuadrados, es más fiable que la obtenida por el método más clásico de resolver este otro sistema: $AT \cdot A \cdot X=AT \cdot B$ (más inestable numéricamente).

Por último, queremos observar que hemos abordado el tema desde un punto de vista práctico, pensando exclusivamente en el tipo de alumnos al que va dirigido. No hemos mencionado de forma consciente algunos conceptos que se hubieran necesitado para dar rigor a algunas de las cuestiones planteadas. Así, por ejemplo, hemos hablado de matriz «parecida» a una dada; hubiera sido más correcto hablar de que la diferencia en norma sea lo más pequeña posible. Sin embargo, esto requiere introducir el concepto de norma matricial, y, como ya comentamos al comienzo de este trabajo, el escaso tiempo de docencia lo impide.

Para terminar, queremos observar cómo la mayoría de los libros actualmente en el mercado de Algebra Lineal no abordan esta interesante descomposición matricial. Creemos que no es tan conocida como realmente se merece.

**Ángela Rojas**
**Manuel Torralbo**
Departamento de Matemáticas
Universidad de Córdoba
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

## Bibliografía

NOBLE, B. y J. W. DANIEL (1989): *Algebra Lineal Aplicada*, Prentice-Hall Hispano-Americana.

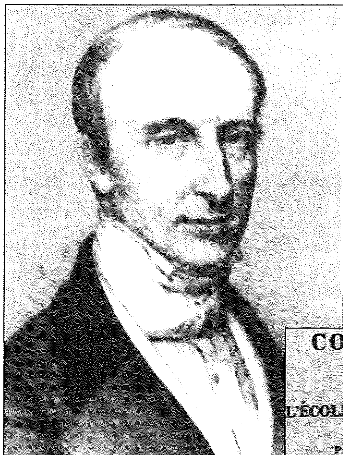
PRATT, W. K. (1991): *Digital Image Processing*, A Wiley-Interscience Publication.

PRESS, W. H., S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, B. P. FLANNERY (1992): *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press.

WOLFRAM, S. (1996): *The Mathematica Book*, Cambridge University Press.

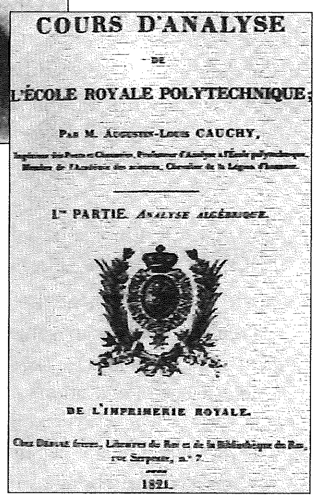
# AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY
## *Cours d'Analise*

### Primera edición, 1821



La Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» ha publicado una edición facsimilar de un ejemplar del libro, que se conserva en la Biblioteca del Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando.

La edición consta de 1.000 ejemplares numerados, impresos sobre papel verjurado conquerol y encuadernados en cartoné.



COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
1re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.
1821.

**Relación de precios**

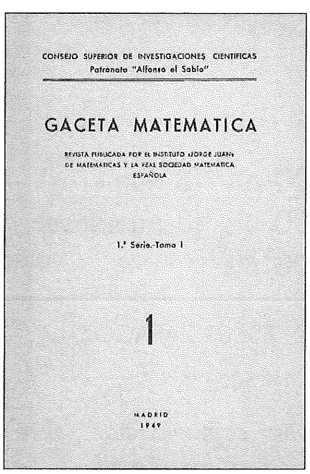
a) Encuadernación en cartoné:
   Socios de la SAEM Thales . . . . . . . . . . . . . 6.500 pts.
   No socios . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9.000 pts.

b) Encuadernación en piel (14 ejemplares):
   Socios de la SAEM Thales . . . . . . . . . . . . . 20.000 pts.
   No socios . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30.000 pts.

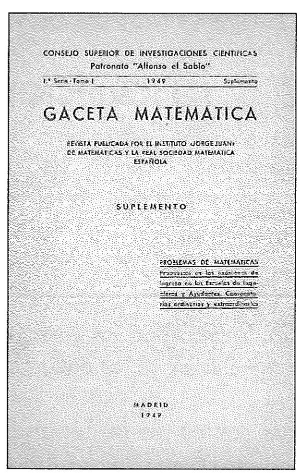
Nota: En los precios anteriores no están incluidos los gastos de envío ni el IVA.

**Peticiones**

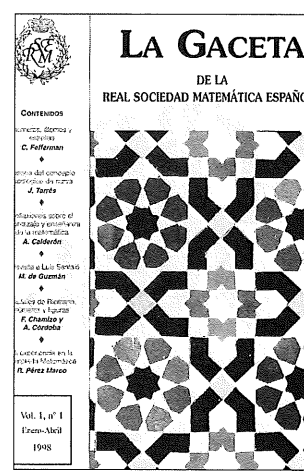
- Socios: SAEM Thales. Apdo. 1.160. Facultad de Matemáticas. 41080 Sevilla
- No socios: Su librería habitual o Centro Andaluz del Libro. Pgno. La Chaparrilla, 34-36. 41016 Sevilla




*Gaceta Matemática*
1.ª Serie. Tomo I. N.° 1
1949




*Gaceta Matemática. Suplemento*
1.ª Serie. Tomo I. N.° 1
1949




*La Gaceta de la RSME*
Vol. 1, n.° 1
1998

SUMA 30
febrero 1999, pp. 53-58

# Una nueva mirada a «la prueba del 9»

María Luz Callejo de la Vega

ARTÍCULOS

La tradicional «prueba del 9», aunque pasada de moda para verificar la corrección de resultados de cálculos numéricos, ofrece una situación problemática interesante sobre teoría de números.
En este artículo se recordará en qué consiste la prueba del 9 y se abordarán las siguientes cuestiones: ¿qué prueba la prueba del 9?; ¿por qué el 9 y no otro número como el 7 o el 11?; ¿sirve el 9 para sistemas de numeración distintos de 10?; por último ¿qué hacer con la prueba del 9: abandonarla como prueba o buscarle otra utilidad didáctica?

DE ENTRE los viejos libros de textos de Matemáticas que como testigos de la historia de la educación están guardados en armarios del Instituto donde trabajo, han caído en mis manos dos que hacen alusión a la famosa «prueba del 9»: uno es la *Aritmética* de Segundo grado de la Editorial Luis Vives, publicado en Zaragoza en 1949; el otro lleva por título *Aritmética y Álgebra*, es del Curso Preuniversitario, sus autores son A. Alcaide y N. Nofuentes y está publicado en Madrid el año 1959. El de Segundo grado dedica un apartado a la prueba de la multiplicación en el que describe cómo se hace la «prueba del 9» y advierte que esta prueba es falsa con frecuencia indicando algunos casos en que un error en los cálculos no se refleja en la prueba; el de Preuniversitario tiene un apartado denominado *Justificación de la «Prueba del 9»* para comprobar la suma, la multiplicación y la división como aplicación de las congruencias.

Esto me ha hecho reflexionar sobre esta prueba que, aunque pasada de moda para verificar la corrección de resultados de cálculos numéricos, ofrece una situación problemática interesante sobre teoría de números.

## ¿En qué consiste la prueba del 9?

La prueba del 9 es un caso de aplicación de la aritmética modular a la detección de errores aritméticos. Esta prueba consiste simplemente en hacer cálculos módulo 9. Reducir un número módulo 9 es hallar el resto de la división de dicho número entre 9; el valor de este resto se puede obtener sin necesidad de dividir, basta con sumar los dígitos del número y si supera a 9 volver a sumar los dígitos del resultado obtenido y así sucesivamente hasta obtener un número menor que 9.

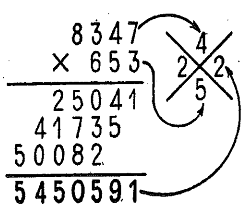
**PRUEBA DE LA MULTIPLICACIÓN**

**93. Para comprobar si una multiplicación está bien hecha,** se repite la operación invirtiendo el orden de los factores. Si los productos resultan iguales, es casi seguro que la operación está bien.

Decimos *casi seguro*, porque es posible que ambas operaciones sean falsas y contengan el mismo error. Si, por ejemplo, a algún producto parcial o total de las dos operaciones, les aumentamos o disminuímos en un mismo número, las dos operaciones serán falsas, aunque sus resultados sean iguales.

**94. Una prueba muy práctica es la llamada prueba del 9.**

Para explicar el modo de hacerla nos serviremos de la operación siguiente, advirtiendo que cuando las sumas pasan de 9, se suman sus cifras, y que los 9 no se cuentan nunca:




Se traza un aspa y se escriben las cifras según indican las flechas.

**Multiplicando:** 8 y 3, 11; 1 y 1, 2; y 4, 6; y 7, 13; 1 y 3, 4.

**Multiplicador:** 6 y 5, 11; 1 y 1, 2; y 3, 5.

**Se multiplican:** 4 × 5, 20; 2 y 0, 2. Se escribe a izquierda.

**Producto:** 5 y 4, 9; se anula; 5 y 5, 10; 1 y 0, 1; y 1, 2.

La operación está bien hecha, porque los números de la derecha y de la izquierda del aspa son iguales.

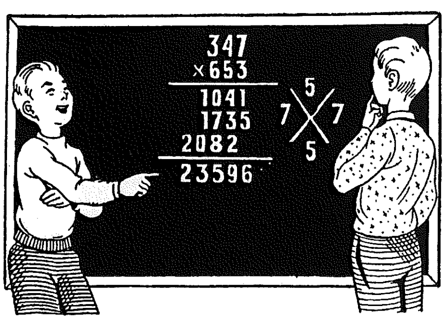
**Nota.** — Esta prueba es falsa con frecuencia. Así sucede cuando las cifras se cambian de lugar; cuando se añade o suprime algún nueve; cuando se añaden o quitan cifras cuya suma es 9, etc.

**¡ATENCIÓN!**

Simplicio Cándido ha hecho esa operación, y asegura que está bien hecha, porque le sale bien la prueba del 9.

En cambio, Juan Pícaro, su amigo burlón, se ríe de él y le asegura que la operación es completamente falsa.

¿Quién tiene razón? Explicar por qué.




— 50 —

Figura 1. *Aritmética. Segundo Grado*, Luis Vives, Zaragoza, 1949

La prueba del 9 aplicada al caso de la multiplicación

8.347 x 653

que presenta el primero de los libros antes citados (figura 1) se realiza de la siguiente forma:

a) se hace la reducción módulo 9 del multiplicando y del multiplicador

multiplicando: 8+3+4+7 = 22; 2+2 = 4

multiplicador: 6+5+3 = 14; 1+4 = 5

b) se multiplican estos números y se hace la reducción módulo 9 del resultado:

$$4 \times 5 = 20$$

$$2+0=2$$

c) se hace al reducción módulo 9 del producto obtenido en la operación, que es 5.450.591:

$$5+4+5+0+5+9+1 = 29;$$

$$2+9 = 11;$$

$$1+1 = 2$$

d) se comparan los resultados de (b) y de (c); si coinciden es probable que la operación esté bien hecha, si no coinciden y hemos aplicado bien la prueba del 9, la multiplicación está mal hecha.

La disposición en forma de aspa (figura 1) es una manera de ir anotando los resultados del proceso anterior.

## Cálculos módulo 9

Veamos en qué se fundamenta esta prueba. Si $a$ y $b$ son dos enteros y su diferencia $a - b$ es divisible por 9, decimos que «$a$ es congruente con $b$, módulo 9» y lo expresamos escribiendo:

$$a \equiv b \text{ (mód 9)}$$

Por tanto:

$$a - b = 9k, \text{ siendo } k \text{ entero}$$

Si $a \equiv b$ (mód 9) y $c \equiv d$ (mód 9), se deduce fácilmente que:

$$a + c \equiv b + d \text{ (mód 9)}$$

$$a - c \equiv b - d \text{ (mód 9)}$$

$$ac \equiv bd \text{ (mód 9)}$$

Ya se trate de sumar números, de restarlos, de multiplicarlos y en general de cualquier cálculo consistente en una sucesión finita de sumas, restas y multiplicaciones, los cálculos módulo 9 consisten:

- bien en realizar el cálculo y reducir el resultado módulo 9;
- bien en reducir módulo 9 los números que entran en juego en dicho cálculo para efectuar después las operaciones con los números reducidos y, si fuese necesario, reducir otra vez módulo 9.

Con esta notación el ejemplo anterior se expresa así:

$8.347 \equiv 4 \text{ (mód 9)} \rightarrow \quad 4$

$\times\ 653 \equiv 5 \text{ (mód 9)} \rightarrow \ \times\ 5$

$5.450.591 \equiv 2 \text{ (mód 9)} \qquad 20 \equiv 2 \text{ (mód 9)}$

Podemos tener una imagen de la aritmética módulo 9 con una esfera de reloj de 9 horas donde 0 equivale a 9 (Lauber, 1990):

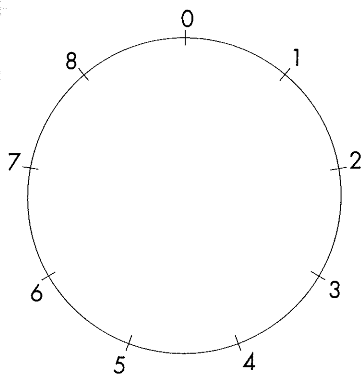



Figura 2

La suma se representa mediante la rotación en el sentido de giro de las agujas del reloj; así para calcular 4 + 7 módulo 9 se comienza en el 4 y se «avanzan» 7 horas, teniendo como resultado 2; la resta se hace invirtiendo el sentido de giro. Las tablas de multiplicación se obtienen uniendo los puntos de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, etc., comenzando por el 0 y dando las vueltas necesarias hasta volver a éste. Por ejemplo la multiplicación por 2 se representa en la circunferencia como un polígono estrellado de 9 lados:

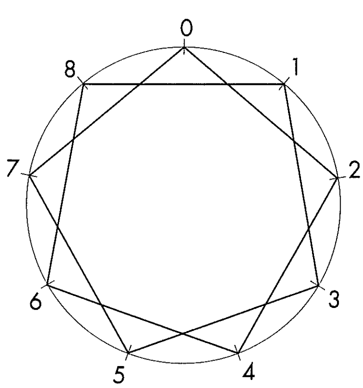



Figura 3

*...las pruebas del 9 solamente nos indican si existe o no congruencia entre el resultado obtenido en el cálculo y el resultado correcto, suponiendo que se haya realizado bien la prueba del 9.*

Las tablas de multiplicación módulo 9 son las siguientes:

| | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| **2** | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 1 | 3 | 5 | 7 |
| **3** | 0 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 | 0 | 3 | 6 |
| **4** | 0 | 4 | 8 | 3 | 7 | 2 | 6 | 1 | 5 |
| **5** | 0 | 5 | 1 | 6 | 2 | 7 | 3 | 8 | 4 |
| **6** | 0 | 6 | 3 | 0 | 6 | 3 | 0 | 6 | 3 |
| **7** | 0 | 7 | 5 | 3 | 1 | 8 | 6 | 4 | 2 |
| **8** | 0 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

## ¿Prueba algo la prueba del 9?

Anteriormente hemos dicho que si coincide la reducción módulo 9 del producto de la multiplicación con la del producto del multiplicando y del multiplicador ya reducidos módulo 9, es probable que la operación esté bien hecha y que si no coinciden y hemos aplicado bien la prueba del 9, es seguro que la multiplicación está mal hecha. Por tanto, hemos dejado entrever que la prueba del 9 no es una demostración matemática. Pero nos preguntamos, ¿prueba algo la prueba del 9?

Supongamos que el cálculo que se desea efectuar es $a * b$ y el resultado encontrado $c$:

$$a * b = c$$

Tendríamos que:

$$a(\text{mód } 9) * b(\text{mód } 9) \equiv c(\text{mód } 9)$$

Pero el recíproco no es cierto porque podemos encontrar un valor $d$ distinto de $c$ pero congruente con $c$ modulo 9 tal que:

$$a * b \neq d$$

como muestra la ilustración, no muy edificante por cierto, del libro de *Aritmética* antes mencionado (figura 1).

Por tanto, las pruebas del 9 solamente nos indican si existe o no congruencia entre el resultado obtenido en el cálculo y el resultado correcto, suponiendo que se haya realizado bien la prueba del 9. Por ello no se trata de un razonamiento demostrativo sino de una condición necesaria que nos da indicios de que hay posibilidades de que la operación esté bien hecha.

En cambio es una «prueba psicológica» en el sentido siguiente: si tenemos que multiplicar dos números grandes, debemos efectuar un gran número de operaciones elementales cuya corrección depende de la habilidad y de los conocimientos de quien las realiza, pero si se hace la prueba del 9 de esta multiplicación, hay que hacer un número más pequeño de operaciones elementales y pensamos que «es más probable equivocarse en el cálculo de a x b que en el de la cuatro cantidades: a(mód 9), b(mód 9), a x b (mód 9), a(mód 9) x b(mód 9)»; luego si los dos últimos números no coinciden es que probablemente hemos cometido un error en el cálculo «largo», o sea el de a x b; si, por el contrario, los dos últimos números son los mismos, es decir, si la prueba del 9 funciona, se piensa que hay pocas posibilidades de haberse equivocado.

Lo que es cierto es que si los cálculos módulo 9 no coinciden (supuesto que se han hecho bien), la operación larga está mal hecha.

Al adentrarnos en la vertiente matemática de la «prueba», constatamos que ésta no es un razonamiento demostrativo, pero ello nos permite contemplar otros aspectos que forman parte de la experiencia matemática como la verificación de una condición necesaria pero no suficiente con su correspondiente carga psicológica y el interés didáctico de un uso extendido en las matemáticas escolares de otros tiempos (Bruckheimer y otros, 1995).

Durante mucho tiempo se enseñó a los escolares a incluir en los cálculos la «prueba del 9»; en manuales antiguos, como el de *Aritmética* que se mencionó al comienzo, se encuentra la disposición en aspa para ir colocando las congruencias módulo 9.

## ¿Por qué el 9?

Esta claro que en lo dicho hasta ahora el 9 no juega ningún papel especial y podría reemplazarse por cualquier otro número natural $m$ y hablaríamos entonces de cálculos módulo $m$. Entonces, ¿por qué elegir la congruencia módulo 9? Hay diversas razones relacionadas con la facilidad de los cálculos y con la fiabilidad de la prueba.

### *Facilidad de los cálculos*

Aunque el creador de la teoría de las congruencias es el matemático alemán Gauss, que publicó su trabajo sobre teoría de números en su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, aparecida en 1801 cuando sólo contaba 24 años, hay trazas del uso de las congruencias siglos antes de Gauss en las reglas antiguas de comprobación de cálculos como la prueba del 9. Oystein Ore (1967) ofrece una posible explicación del nacimiento de esta prueba retrocediendo al tiempo del uso del ábaco para realizar cálculos.

En el ábaco un número ABCD se representa usando A + B + C + D cuentas. Si este número se quiere sumar con otro, por ejemplo EFGHI es necesario añadir E + F + G + H + I cuentas en las barras correspondientes a los distintos órdenes de unidades. Pero en cada barra del ábaco hay 9 cuentas; la suma de los dos números exige reemplazar 10 cuentas de una barra por una cuenta en la barra siguiente, tantas veces como sea necesario. Por tanto, cada vez que hacemos este cambio disminuye en 9 el número de cuentas, luego el número de cuentas en el resultado final debe diferir del número de cuentas total al inicio (A+B+C+D+E+F +G+H+I) en un número múltiplo de 9. Esta comprobación no es otra cosa que la «prueba del 9» para la suma y se apoya en que nuestro sistema de numeración es de base 10 y por ello los cálculos módulo 9 son fáciles y rápidos.

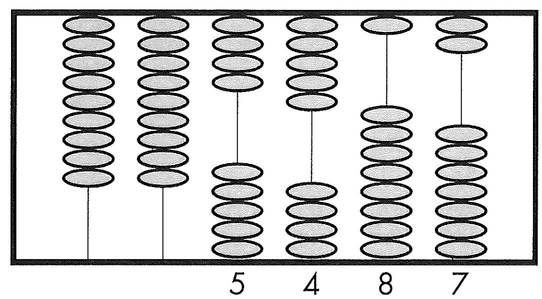
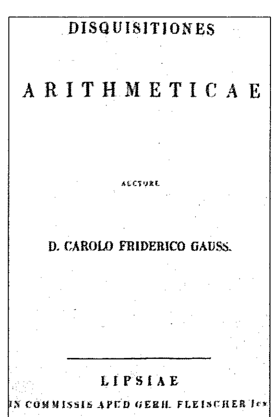



Figura 4


DISQUISITIONES

ARITHMETICAE

AUCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAUSS.

LIPSIAE

IN COMMISSIS APUD GERH. FLEISCHER Iun.

1801.

El número ABCD tiene como desarrollo decimal:

$$1000A + 100B + 10C + D$$

y como las potencias de 10 módulo 9 son todas congruentes con 1, tenemos:

$$ABCD \ (\text{mód } 9) \equiv A + B + C + D$$

Por tanto no hay necesidad de hacer divisiones para calcular congruencias módulo 9 sino que pueden realizarse mentalmente; pero si la base del sistema de numeración fuese distinta de 10, el 9 no jugaría ningún papel especial en los cálculos. Como decía Pascal «los caracteres de divisibilidad de los números deducidos de la suma de sus dígitos descansan a la vez sobre la naturaleza íntima de los números y sobre su representación en el sistema de numeración decimal» (citado en Paquelier, 1983).

Nuestro sistema de numeración tiene también otros números para los que la reducción de un número cualquiera módulo $m$ es tan fácil como con el 9; son el 2, el 5, el 10, el 11, el 20, el 25, el 50, el 100… Pruebas fáciles de realizar son las del 2 y las del 5, pero son poco fiables porque cualquier error en cualquier dígito del producto que no sea el de las unidades no los detecta la prueba; también es fácil la del 11, que detecta errores como el desplazar un lugar un producto parcial de una multiplicación. La reducción de un número módulo 11 se puede hacer agrupando sus dígitos de dos en dos, de izquierda a derecha, sumando luego estos números de dos dígitos y repitiendo este procedimiento hasta obtener un número pequeño cuyo resto al dividir entre 11 se calcule fácilmente.

Por ejemplo si el número que hay que reducir fuese 7.345.651 se escribe

$$7 \quad 34 \quad 56 \quad 51$$

y se calcula

$$7+34+56+51 = 149;\ 1 + 49 = 50$$

y

$$50 \equiv 6 \text{ (mód 11).}$$

La razón de que funcione esta regla es

$$10^{2n} \equiv 1 \text{ (mód 11).}$$

### Fiabilidad

Sin embargo, no todo el mundo se inclina por una economía de cálculos. El francés Nicolas Chuquet (1484) consideraba la prueba del 7 más fiable que la del 9: «Prefiero la prueba del 7 ya que 7 tiene menos familiaridad con los números que 9». Chuquet cita tres tipos de errores que la prueba del 9 no detecta y la del 7 sí: la adición o supresión de un 9 o del 0, la permutación de dígitos o el cambio de un dígito por otros que sumen lo mismo (citado en Bruckheimer y otros, 1995).

Desde el punto de vista didáctico lo más importante es identificar los tipos de errores sistemáticos que se suelen cometer con las operaciones aritméticas y cuáles de ellos los detecta la prueba del 9 o la del 7 o cualquier otra. Así, si un producto parcial de una multiplicación se desplaza un lugar, la prueba del 11 detecta el error.

Como ya hemos indicado, las pruebas por 9 o por cualquier otro número entero $m$ solamente nos informan de la congruencia o no módulo $m$ entre el resultado obtenido en el cálculo largo y el resultado correcto (si la prueba está bien hecha). Nos planteamos pues disminuir la probabilidad de que la coincidencia se deba al azar, considerando que los errores son equiprobables, lo cual sabemos que no es cierto.

Sea $P_n$ la probabilidad de que el resultado obtenido en el cálculo largo y el resultado correcto (si la prueba está bien hecha) sean congruentes módulo $n$; esta probabilidad disminuye a medida que $n$ aumenta pues un cálculo módulo 9 tiene sólo nueve posibles respuestas, luego la posibilidad de que un cálculo incorrecto no se detecte es 1/9. Nos planteamos pues si hay otros números que presentan más ventajas que el 9.

Por un lado los cálculos módulo mayor que 11 no pueden hacerse siempre mentalmente en el caso de la multiplicación, luego los eliminamos; por otro lado, los cálculos módulo menor que $n$ presentan una probabilidad $P_n$ mayor que $P_9$, luego tampoco nos interesan; no nos queda pues más que 10 y 11. El cálculo de un número módulo 10 es muy cómodo pero no tiene en cuenta más que las cifras de las unidades; el cálculo de un número módulo 11 es menos rápido que para 9 y la diferencia entre $P_{11}$ y $P_9$ es pequeña.

Luego si no hacemos más que una prueba nos interesa más la del 9, pero si hiciéramos además la prueba del 11, la probabilidad de que la coincidencia sea debida al azar es muy pequeña: su cálculo se reduce a un producto de probabilidades ya que éstas son independientes.

*Sólo cuando los alumnos estén en edad de comprender el alcance y la limitación de la denominada «prueba» podrán utilizarla sabiendo su carácter de instrumento que da indicios, pero no certeza, sobre la corrección de la operación realizada.*

## Conclusión

¿Qué hacer con la prueba del 9: abandonarla o buscarle otra utilización didáctica?

Como prueba aritmética la del 9 es una causa perdida puesto que tenemos calculadoras que nos permiten conocer con facilidad y rapidez la corrección de un resultado. Si bien las pruebas del 9 suponen un ejercicio interesante de utilización de cálculos módulo 9 o de operaciones en $\mathbb{Z}_9$, donde $\mathbb{Z}_9$ representa las clases de equivalencia módulo 9, así como de homomorfismos de anillos entre $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}_9$, no debemos atribuirle valor de demostración matemática. Sólo cuando los alumnos estén en edad de comprender el alcance y la limitación de la denominada «prueba» podrán utilizarla sabiendo su carácter de instrumento que da indicios, pero no certeza, sobre la corrección de la operación realizada.

Sin embargo, la prueba del 9 tiene interés como situación para indagar el «juego de números» que subyace en sus cálculos, pues da pie a profundizar en su significado; o a trabajar los aspectos de la teoría de números que se han esbozado anteriormente: divisibilidad, cálculos módulo 9, exploración de las propiedades de los números relacionadas con los sistemas de numeración. También se presta la prueba del 9 a proponer problemas relacionados con la generalización: ¿qué pasaría si cambiásemos el 9 por otro número?, ¿y si trabajásemos en otra base, por ejemplo 2, 11?

Más allá de la prueba del 9, los cálculos módulo 9 nos proporcionan situaciones didácticas interesantes como las siguientes:

— A partir de la representación de la multiplicación por 2 en una circunferencia con 9 puntos (figura 3) podemos plantearnos «saltar» ninguno o varios puntos cada vez y tratar de responder a las siguientes cuestiones (cf. Banwell y otros 1974, p. 46):

- ¿Se vuelve siempre al punto de partida?: en qué casos sí y en qué casos no.
- ¿En qué casos se vuelve al punto de partida después de dar una vuelta? ¿Cuántas vueltas se dan en los otros casos?
- ¿Qué polígonos se forman? ¿Cuáles son estrellados?
- ¿Se obtienen las mismas figuras si se invierte el sentido del recorrido?
- ¿Cómo se relacionan los distintos polígonos que se forman con las tablas de multiplicación módulo 9?

Para una división de la circunferencia en 9 partes que se unen de $n$ en $n$, empezando en cualquier punto, se obtienen $p$ polígonos de $q$ lados, según se indica en la tabla adjunta.

| $n$ | $p$ | $q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 9 |
| 2 | 1 | 9 |
| 3 | 3 | 3 |
| 4 | 1 | 9 |
| 5 | 1 | 9 |
| 6 | 3 | 3 |
| 7 | 1 | 9 |
| 8 | 1 | 9 |

La generalización nos empuja a considerar circunferencias con $k$ puntos espaciados regularmente, a considerar las cuestiones anteriores y a hacer observaciones en la tabla dada.

— Las congruencias módulo 9 dan lugar a algunas recreaciones aritméticas como las siguientes (Rouse Ball y Coxeter, 1987):

- Se elige un número cualquiera de tres dígitos que no sea capicúa, se invierte el orden de sus cifras y se le resta al mayor el menor. Si se conoce la última cifra del resultado de esta operación, se puede adivinar éste. Por ejemplo, si la última cifra es 3 el resultado es 693, pues la cifra de las centenas es 9 menos la cifra de las unidades y la cifra de las decenas es siempre 9.
- Se elige un número, se cambia el orden de sus cifras, se resta el menor del mayor, se multiplica la diferencia por cualquier número y se tacha uno de sus dígitos distinto de cero. Si se conoce el número que se obtiene se puede adivinar el número que se ha tachado. Por ejemplo si el número obtenido es 23.420, el número tachado es 7 porque 7 es la diferencia entre 18, que es el múltiplo de 9 más próximo a 11 (11=2+3+4+2+0), y 11:

$$79.213 - 31.729 = 47.484$$

$$47.484 \times 5 = 237.420$$

Se tacha 7 y se tiene 23.420

$$7 = 18 - (2+3+4+2+0)$$

En ambos casos, al cambiar el orden de las cifras se tiene otro número congruente con el anterior módulo 9, luego la diferencia entre ambos módulo 9 es 0. Por tanto, en el primer ejemplo, como el número central es siempre 9, el primero debe ser lo que le falta al último para llegar a 9. En el segundo ejemplo, al multiplicar esta diferencia por cualquier número, el producto sigue siendo congruente con 0 módulo 9, luego el número tachado es lo que le falta a la suma de los dígitos para ser un múltiplo de 9.

— Otro posible uso didáctico es aplicar las congruencias a problemas de astronomía y cronología que encierran periodicidad, a la preparación de calendarios de torneos de competición en los que participan un número impar de equipos o para saber si un número muy grande es primo o compuesto (Ore, 1967).

Resumiendo, la vieja «prueba del 9» es una causa perdida como modo de verificar la corrección de los cálculos, pero es un buen punto de partida para profundizar en el significado de los números, para plantear generalizaciones como las esbozadas anteriormente o para explorar las aplicaciones de las congruencias.

**María Luz Callejo**
Departamento de Didáctica de las Matemáticas.
Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas. Madrid.
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

## Referencias bibliográficas

BANWELL, C., K. SAUNDERS, y D. TAHTA (1974): *Points de départ,* Cedic. París (Or. 1972)

BRUCKHEIMER, M., R. OFIR y A. ARCAVI (1995): «The Case For and Against "Casting out Nines"», *For the Learning of Mathematics,* 15 (2), 23-27

LAUBER, M. (1990): «Casting Out Nines: An Explanation and Extensions», *Mathematics Teacher,* Vol. 83, 661-665

ORE, O. (1967): *Invitation to Number Theory,* The Mathematical Association of America, New Mathematica Library, Washington

PAQUELIER, Y. (1983): *La preuve par neuf,* Trabajo de DEA de Didáctica de las disciplinas, opción Matemáticas, Universidad París VII. No publicado.

ROUSE BALL, W. W. y H. S. M. COXETER (1987): *Mathematical Recreations and Essays,* Dover, Toronto.

SUMA 30
febrero 1999, pp. 59-64

# Una introducción a las fracciones continuas

Manuel Benito Muñoz
José Javier Escribano Benito

ARTÍCULOS

Se presenta el tema de las fracciones continuas de forma genérica, tratando de mostrar diferentes campos de investigación didáctica relacionados con conceptos básicos de las matemáticas: número real, aproximación racional, sucesiones, límites de sucesiones, recursividad y otros, que sin ser fundamentales en la enseñanza media, permiten desarrollar el razonamiento de nuestros alumnos: fracciones continuas, sucesiones de Brocot, sucesiones de Farey, sucesión de Fibonacci...

COMO es bien sabido, el conjunto de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, todo número real puede ser aproximado tanto como se desee por números racionales. En este sentido, la generalización en el siglo XVI del uso de las fracciones decimales representó una importante innovación aritmética ya que la utilización de la expresión decimal de los números ofrece la ventaja de homogeneizar los cálculos, pues todas las operaciones se efectúan de forma análoga a las realizadas con números enteros, al tiempo que permite acotar fácilmente los errores de redondeo.

En cambio las fracciones continuas, otra innovación del siglo XVI, permiten expresar los números reales por medio de las fracciones más simples posibles sus *aproximaciones óptimas*[1].

Comparando, por ejemplo, el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$ = 1,4142136...

$$d_0 = 1;\quad d_1 = \frac{14}{10};\quad d_2 = \frac{141}{100};\quad d_3 = \frac{1414}{1000};\ldots$$

con los valores de las primeras reducidas de su desarrollo en fracción continua: $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$

$$\frac{p_0}{q_0} = 1;\quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2} = 1,5;\quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{5} = 1,4;\quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{17}{12} = 1,41666;\ldots$$

se observa que estas últimas proporcionan mejor aproximación con fracciones de términos más pequeños. Está propiedad, además de su innegable interés teórico, permite numerosas aplicaciones prácticas que van desde el cálculo de engranajes hasta la informática pues el empleo de aproximaciones óptimas se traduce en computación en una menor ocupación de memoria y una disminución del tiempo de cálculo. La importancia de esta última aplicación ha conseguido que un buen número de matemáticos vuelvan a interesarse[2] por las fracciones continuas y otros temas conexos como las sucesiones de Farey y las sucesiones de Stern-Brocot tan frecuentes en las publicaciones de principios de siglo y que, sin embargo, por el vaivén de las modas habían sido casi olvidados en las investigaciones y en la propia formación de matemáticos y técnicos durante los últimos cuarenta años. Del mismo modo, en los planes de estudios de BUP y FP actualmente a extinguir sólo se contempla, aunque raramente se imparte, el estudio de las fracciones continuas en las ramas técnicas de 4.° FP con un enfoque clásico en la misma línea que sigue, por ejemplo, Rey Pastor (1981). Los diseños curriculares LOGSE de Matemáticas tampoco abordan estos temas pero pensamos que pueden incluirse en los diferentes Talleres de Matemáticas cuyos currículos tienen un carácter abierto, siempre y cuando se presenten de un modo menos formal y más intuitivo. En este trabajo reproducimos de forma muy esquemática una experiencia que hemos realizado en la asignatura de Informática de 3.° de BUP como ejemplo de programación de procedimientos recursivos en LOGO. Pensamos que puede servir igualmente para habituar a los alumnos con los conceptos de número real, aproximaciones racionales y, de una forma más concreta, para introducir las fracciones continuas mediante las sucesiones de Brocot extendidas al intervalo $[0, +\infty)$.

## Mediación de fracciones

Si sumamos término a término el numerador y el denominador de dos fracciones no negativas a/b y c/d se obtiene una nueva fracción

$$\frac{a+c}{b+d}$$

comprendida entre ambas llamada *mediación*. Así la mediación de 2/3 y 4/5 es 6/8 = 3/4.

Esta propiedad, que ya era conocida por Arquímedes, fue utilizada por Nicolás Chuquet[3] en 1484 para calcular las aproximaciones sucesivas de $\sqrt{n}$ con $n \leq 14$. Su método, aplicado al cálculo de $\sqrt{6}$, era similar al siguiente:

i) La raíz cuadrada de 6 está comprendida entre 2 y 3, por ello se toma, como primera aproximación de $\sqrt{6}$

$$a_1 = \frac{5}{2}$$

donde 5/2 es la mediación de 2/1 y 3/1.

ii) Como $a_1^2 = 25/4$ es mayor que 6, la segunda aproximación es

$$a_2 = \frac{7}{3}$$

donde 7/3 se obtiene por mediación de 2/1 y 5/2.

iii) $a_2^2 < 6$, la tercera aproximación es, por tanto,

$$a_3 = \frac{7+5}{3+2} = \frac{12}{5}$$

Prosiguiendo de esta forma Chuquet obtuvo para $\sqrt{6}$, las aproximaciones:

$$\frac{5}{2};\ \frac{7}{3};\ \frac{12}{5};\ \frac{17}{7};\ \frac{22}{9};\ \frac{27}{11};\ \frac{49}{20};$$

$$\frac{71}{29};\ \frac{120}{49};\ \frac{169}{69};\ \frac{218}{89};\ \frac{267}{109};\ \frac{485}{198}.$$

Un proceso análogo puede seguirse para calcular aproximaciones racionales óptimas de cualquier número real.

## Construcción de engranajes

Consideremos un engranaje formado por un par de ruedas dentadas. Si designamos con $z_1$ y $n_1$ el número de dientes y la velocidad angular de la rueda conductora, y con $z_2$ y $n_2$ los respectivos de la rueda conducida, se verifica la relación

$$z_1 \cdot n_1 = z_2 \cdot n_2$$

donde $z_1$ y $z_2$ son dos números enteros y, por tanto, la relación de transmisión

$$i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

es un número racional.

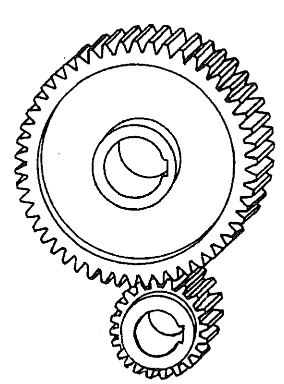


Figura 1. Dos ruedas dentadas acopladas

1 Una fracción irreducible a/b se llama *aproximación óptima de primera especie* de un número real *x*, si no es posible lograr mayor precisión con fracciones de denominador más pequeño. es decir, si se verifica que:

$$\left|x-\frac{c}{d}\right| > \left|x-\frac{a}{b}\right|$$

para toda fracción $c/d \neq a/b$ con denominador $d \leq b$.

2 Véanse, por ejemplo, las ponencias presentadas en las últimas *Journées Arithmétiques* celebradas en Limoges en septiembre de 1997.

3 En un texto manuscrito, *Triparty en la sciencia des nombres*, que no fue impreso hasta el siglo XIX. Véase Dickson (1952, p. 350)

En general, para calcular la relación de transmisión de un tren de engranajes formado por dos o más engranajes dispuestos en serie, se utiliza la siguiente fórmula

$$i = \frac{z_1 \cdot z_3 \ldots}{z_2 \cdot z_4 \ldots}$$

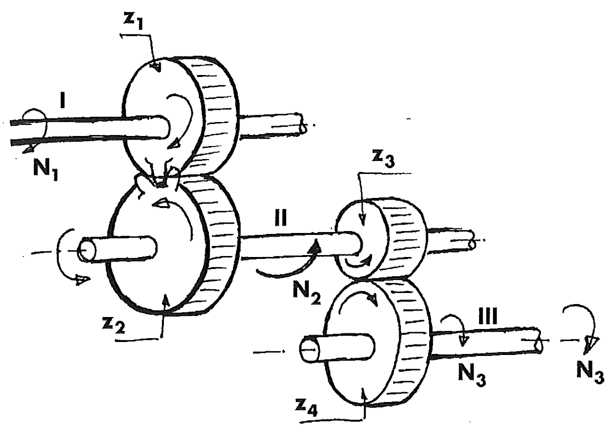



Figura 2. Engranajes

Camus (1699-1768) en su *Cours de Mathématique* (1752) proponía el siguiente ejemplo[4]:

> *Hallar el número de dientes y láminas de las ruedas y piñones de una máquina que, siendo accionada por un piñón colocado en la rueda horaria, haga que una rueda describa una revolución completa en un año normal que se supone consta de 365 días, 5 horas y 49 minutos.*

La relación de transmisión es:

$$i = \frac{12 \cdot 60}{365 \cdot 24 \cdot 60 + 5 \cdot 60 + 49} = \frac{720}{525949}$$

La solución exacta del problema pasaría bien por construir un engranaje simple con 720 dientes en la rueda conductora y 525949 en la conducida, lo que no parece factible, o bien por construir un tren de engranajes lo que no es posible ya que al ser primo el denominador, la fracción no puede expresarse como producto de otras fracciones.

4 Véase Merritt (1950, p. 121).

5 No es necesario establecer un número mínimo ya que siempre es posible encontrar una fracción equivalente multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número.

Habrá que buscar, por tanto, una aproximación de la fracción anterior cuyo numerador y denominador sean, por razones técnicas, menores que 100 (engranaje simple) o bien pueda expresarse como producto de fracciones que cumplan esta condición (tren de engranajes). Aplicando el método de Chuquet encontramos las 756 fracciones siguientes:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots\ \frac{1}{731};\ \frac{2}{1461};\ \frac{3}{2191};\ \frac{5}{3652};\ \frac{7}{5113};$$

$$\frac{9}{6574};\ \frac{11}{8035};\ \frac{13}{9496};\ \frac{15}{10957};\ \frac{17}{12418};\ \frac{19}{13879};$$

$$\frac{21}{15340};\ \frac{23}{16801};\ \frac{25}{18262};\ \frac{27}{19723};\ \frac{29}{21184};\ \frac{31}{22645};$$

$$\frac{33}{24106};\ \frac{64}{46751};\ \frac{97}{70857};\ \frac{130}{94963};\ \frac{163}{119069};$$

$$\frac{196}{143175};\ \frac{229}{167281};\ \frac{262}{191387};\ \frac{491}{358668};\ \frac{720}{525949}.$$

Si prescindimos de los primeros valores que ofrecen una aproximación muy pequeña no es posible resolver el problema con un engranaje simple. Para construir un tren de engranajes debemos desechar aquellas fracciones cuyo numerador (denominador) sea un número primo o alguno de sus factores sea mayor que 100. La lista anterior nos queda reducida ahora a tres fracciones:

$$\frac{21}{15340} = \frac{3 \cdot 7}{2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 59}$$

$$\frac{130}{94963} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 13}{11 \cdot 89 \cdot 97}$$

$$\frac{196}{143175} = \frac{2^2 \cdot 7^2}{3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 83}$$

La primera no nos sirve y de las diferentes opciones que ofrecen las otras dos, la mejor por razones técnicas y de aproximación (el error cometido es menor de $10^{-10}$) es:

$$i = \frac{196}{143175} = \frac{4}{25} \cdot \frac{7}{69} \cdot \frac{7}{83}$$

Esta es justamente la solución propuesta por Camus tras diez páginas de laboriosos cálculos.

## Sucesiones de Brocot

Para facilitar estos cálculos el relojero Archille Brocot publicó en 1862 un folleto: *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode, par Brocot, horloger* que incluía una tabla[6] que comenzaba de un modo similar a la siguiente:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $B_0$: | $\frac{0}{1}$ | | | | | | | | | | | | | | | | $\frac{1}{0}$ |
| $B_1$: | $\frac{0}{1}$ | | | | | | | | $\frac{1}{1}$ | | | | | | | | $\frac{1}{0}$ |
| $B_2$: | $\frac{0}{1}$ | | | | $\frac{1}{2}$ | | | | $\frac{1}{1}$ | | | | $\frac{2}{1}$ | | | | $\frac{1}{0}$ |
| $B_3$: | $\frac{0}{1}$ | | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $\frac{1}{1}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $\frac{2}{1}$ | | $\frac{3}{1}$ | | $\frac{1}{0}$ |
| $B_4$: | $\frac{0}{1}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{2}{1}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{1}$ | $\frac{4}{1}$ | $\frac{1}{0}$ |

Donde cada fila se obtiene copiando la anterior e intercalando, entre cada dos fracciones consecutivas, su mediación.

A cada una de estas filas[7] se le denomina *sucesiones de Brocot de orden n* y está formada por $2^n+1$ fracciones irreducibles ordenadas de forma creciente, de modo que si a/b, a'/b' son dos fracciones consecutivas de Brocot, entonces

$$a'b - ab' = 1$$

y si a/b, a'/b', a"/b" son tres fracciones consecutivas de Brocot, se tiene

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a+a''}{b+b''}$$

La comprobación, e incluso la demostración formal de estas propiedades, es muy sencilla[8] como también lo es el estudio de sus simetrías:

Si $0 \leq a/b \leq 1$, se tiene:

$$b_{n,k} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b_{n,2^n-k} = \frac{b}{a}$$

$$b_{n,k} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b_{n,2^{n-1}-k} = \frac{b-a}{b}$$

También resulta interesante comprobar que el valor máximo de los denominadores (numeradores) de la sucesión de orden *n* coincide con el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci[9].

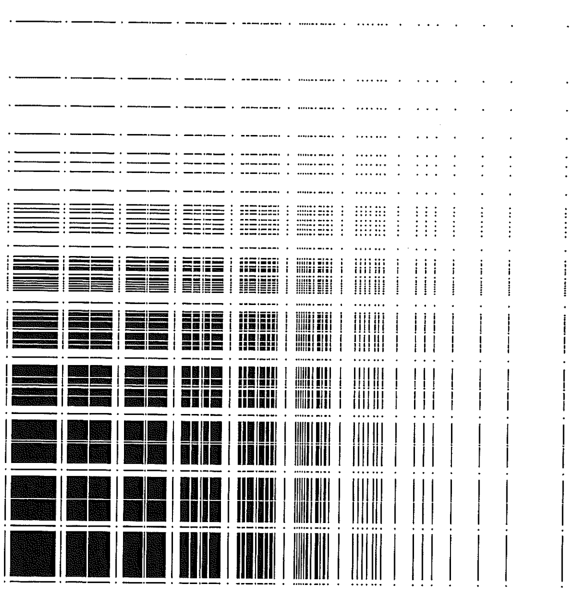


Figura 3. Puntos de $B_{10}xB_{10}$

6 Este tipo de tablas, acompañadas de los desarrollos decimales de sus términos, han sido utilizadas durante muchos años por los técnicos para seleccionar los engranajes más adecuados sin necesidad de repetir el proceso de mediación en cada caso concreto. Véase, por ejemplo, las tablas que aparecen en Merritt (1950).

7 Se trata, como puede observarse, de una generalización de las sucesiones de Farey. En general, se conoce como *sucesión de Farey* de orden *n* al conjunto de las fracciones comprendidas en el intervalo [0, 1] con denominador menor o igual que n, ordenadas de forma creciente. Esta definición puede extenderse al intervalo [0, +∞), tal y como nosotros hemos hecho con las sucesiones de Brocot por razones didácticas.

8 Véase Benito (1998).

9 Se conoce como *sucesión de Fibonacci* a la sucesión: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21;... definida del siguiente modo: $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para todo $n \geq 2$.

## Fracciones continuas

Como hemos visto, el método de Chuquet nos permite asociar a cada número real x > 0 una sucesión de aproximaciones óptimas partiendo de un intervalo inicial que contenga a *x*, sea éste [0, +∞), que convenimos en designar del modo [0/1, 1/0).

***Ejemplos:***

- Al número 5/3 le asociamos la sucesión de aproximaciones:

  1; 2 3/2; 5/3.

- Al número 17/21 le asignamos:

  1; 1/2; 2/3; 3/4; 4/5; 5/6; 9/11; 13/16; 17/21.

- A 5 le asignamos:

  1; 2; 3; 4; 5.

- A 1/5 le asignamos:

  1; 1/2; 1/3; 1/4; 1/5.

- A $\sqrt{6}$ le asignamos:

  1: 2; 3; 5/2; 7/3; 12/5; 17/7; 22/9; 27/11;...

Las sucesivas aproximaciones pueden obtenerse por mediación o directamente de las tablas de Brocot partiendo del valor 1/1 de $B_1$ y «avanzando» a derecha o izquierda según proceda en cada caso (figura 4).

Si en lugar de fijarnos en los valores alcanzados almacenamos el «proceso» seguido, obtenemos una sucesión de ceros y unos –*sucesión de signos*–

$$w(x) = \{w_i(x)\}$$

definida del siguiente modo:

$$w_1(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\in\left[\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right) \\ 1 & \text{si} \quad x\in\left[\frac{1}{1},\frac{1}{0}\right) \end{cases}$$

Si después de *n* pasos *x* pertenece al intervalo [a/b, a'/b'), entonces,

$$w_{n+1}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x\in\left[\frac{a}{b},\frac{a+a'}{b+b'}\right) \\ 1 & \text{si} \quad x\in\left[\frac{a+a'}{b+b'},\frac{a'}{b'}\right) \end{cases}$$

La sucesión correspondiente a un número racional, a/b > 0, tendrá, a partir de un cierto término, todas sus cifras iguales a 0 y, normalmente, omitiremos su escritura.

***Ejemplos***

$$w\left(\frac{5}{3}\right)=1011$$

$$w\left(\frac{17}{21}\right)=011110001$$

$$w(5)=11111$$

$$w\left(\frac{1}{5}\right)=00001$$

$$w\left(\sqrt{6}\right)=1100111100111100111\ldots=$$
$$=11\overline{001111}$$

Si la sucesión de signos asociada a la fracción a/b > 0 es

$$w\left(\frac{a}{b}\right)=w_1\left(\frac{a}{b}\right)w_2\left(\frac{a}{b}\right)\ldots w_m\left(\frac{a}{b}\right)$$

$B_0$: $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{0}$

$B_1$: $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{0}$

$B_2$: $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{1}{0}$

$B_3$: $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{1}{0}$

$B_4$: $\frac{0}{1}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\boxed{\frac{5}{3}}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{4}{1}$ $\frac{1}{0}$

$B_5$: $\frac{0}{1}$ $\boxed{\frac{1}{5}}$ $\frac{1}{4}$

Figura 4. Sucesión de aproximaciones

se tiene que a/b aparece por primera vez en la tabla de Brocot en la fila *m* y en la columna *k* donde *k* es valor de la expresión anterior tomada como número escrito en base 2.

***Ejemplos***

El número 5/3 aparece por primera vez en la fila m = 4 y en la columna $k = 1011_{(2} = 1 + 2 + 8 = 11$

Podemos, por último, resumir aún más la información indicando tan sólo el número de unos y de ceros que, en este orden, se van sucediendo alternativamente. Es decir, si la sucesión de signos asociada al número racional a/b > 0 es

$$w\left(\frac{a}{b}\right)=1\ldots\ldots^{(a_0}\ldots10\ldots\ldots^{(a_1}\ldots0\ldots1\ldots\ldots^{(a_n}\ldots\ldots1$$

escribimos:

$$\frac{a}{b}=\left[a_0;a_1,a_2,\ldots,a_n\right]$$

expresión que coincide con el desarrollo en fracción continua[10] del número.

***Ejemplos***

$$\frac{5}{3}=[1;1,2]$$

$$\frac{17}{21}=[0;1,4,3,1]$$

$$5=[5]$$

$$\frac{1}{5}=[0;4,1]$$

$$\sqrt{6}=[2;2,4,2,4]=\left[2;\overline{2,4}\right]$$

10 El desarrollo formal de la teoría de fracciones continuas puede encontrarse en cualquier libro de Teoría de Números. Por ejemplo, en los citados en la bibliografía: Cilleruelo (1992), Rey Pastor (1981), Hardy (1938) y Beskin (1987). Este último, muy intuitivo, resulta especialmente adecuado para los alumnos de enseñanzas medias.

El proceso inverso, es decir, calcular el número definido por la fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, puede hacerse de forma recurrente

$$p_0 = a_0,\ p_1 = p_0a_1 + 1,\ p_{n+1} = a_np_{n-1} + p_{n-2},\ n \geq 2$$

$$q_0 = 1,\ q_1 = a_1,\ q_{n+1} = a_nq_{n-1} + q_{n-2},\ n \geq 2$$

donde las fracciones

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0] = \frac{a_0}{1}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1}$$

......

reciben el nombre de *reducidas* o *convergentes*.

## Conclusión

Como se ha indicado en la introducción, hemos presentado el tema de forma genérica tratando tan sólo de mostrar diferentes campos de investigación didáctica relacionados con conceptos básicos de las matemáticas: número real, aproximación racional, sucesiones, límites de sucesiones, recursividad y otros, que sin ser fundamentales en la enseñanza media, permiten desarrollar el razonamiento de nuestros alumnos: fracciones continuas, sucesiones de Brocot, sucesiones de Farey, sucesión de Fibonacci...

Corresponde a cada profesor el determinar qué aspectos y con qué profundidad deben ser abordados de acuerdo con el interés y la capacidad de los alumnos a que estén dirigidos.

**Manuel Benito**
IES Práxedes Mateo Sagasta
Logroño
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
Pedro Sánchez Ciruelo
**José Javier Escribano**
IES Valle del Cidacos
Calahorra (La Rioja)

## Bibliografía

BENITO, M. y J. J. ESCRIBANO (1998): *Sucesiones de Brocot*, Editorial Santos Ochoa, Logroño.

BESKIN, N. (1987): *Fracciones maravillosas*, Editorial Mir, Lecciones Populares de Matemáticas, Moscú.

BROCOT, A. (1862): *Calcul des rouages par aproximation, nouvelle méthode, par Brocot, horloger*, París.

CILLERUELO, J. y A. CÓRDOBA (1992): *La Teoría de los Números*, Mondadori España, Madrid.

DICKSON, L. (1952): *History of the Theory of Numbers*, Volúmenes I, II y III, Chelsea, New York.

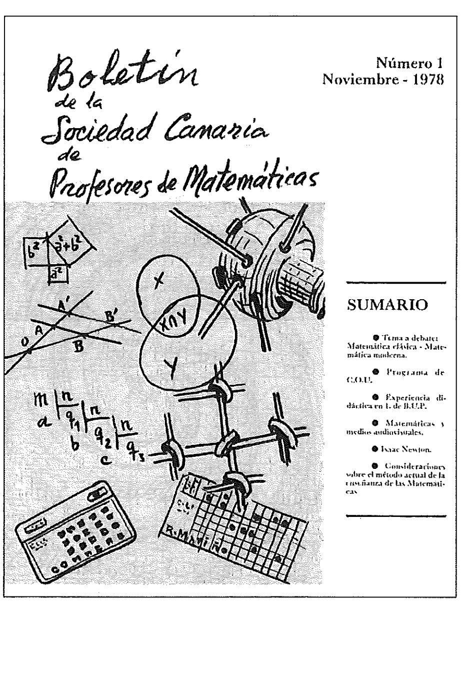
HARDY, G. H. y E. M. WRIGHT (1938): *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford.

LAURIER, E. (1995): *Addition et multiplication par un entier des mots de Christoffel*, Thèse présentée devant l´ Université de Limoges, Limoges.

LUCAS (1981): *Théorie des nombres*, París.

MERRITT, H. E. (1950): *Trenes de engranajes*, Aguilar, Madrid.

REY PASTOR, J. (1981): *Elementos de Análisis Algebraico*, Biblioteca Matemática, Madrid.




*Boletín de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*

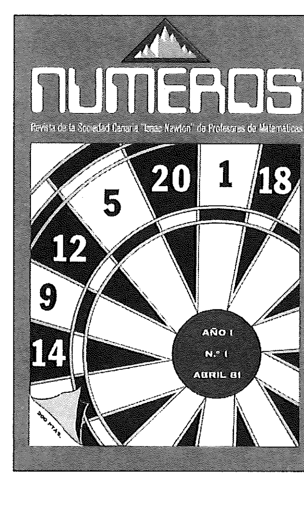
Número 1

Noviembre 1978

*Números*

Año I. N.° 1

Abril 1981



SUMA 30
febrero 1999, pp. 65-75

# Fiayaz en la clase de matemáticas: ambiente de resolución de problemas en un aula multicultural*

Núria Planas i Raig
Xavier Vilella i Miró
Núria Gorgorió i Solà
Montse Fontdevila i Martí

La multiculturalidad en aumento en nuestras aulas es una realidad que exige investigar en búsqueda de un currículo integrador y de un modelo metodológico adecuado para todos. Cualquier alumno, sea cual sea su procedencia cultural, posee en potencia recursos y estrategias para enfrentarse a problemas y situaciones matemáticas. La legitimación del conocimiento matemático de origen no escolar favorece la interpretación de las matemáticas como producto cultural. Por otro lado, la aceptación de valores y expectativas asociados a las matemáticas y un enfoque «enculturizador» en el aula repercuten positivamente en todos los alumnos independientemente del grupo cultural al que pertenecen.

* Esta experiencia ha sido becada en las I Jornadas estatales de Experiencias Educativas (Universitat Autònoma de Barcelona, 8-10 de septiembre de 1998).

## ARTÍCULOS

*Profesora*: Vamos a resolver el problema en la pizarra. Mohamed, ¿quieres hacerlo tú?

*Alumno 1*: ¡Mohamed no! No ha hecho nada, ni ha empezado.

*Alumno 2*: Déjalo, nunca hace nada. No se entera de nada. Éste es tonto.

*[...]*

En nuestras aulas no es fácil detectar los conocimientos matemáticos de los alumnos magrebíes. Tampoco resulta fácil detectar los recursos y las estrategias matemáticas de los alumnos paquistaníes. Con los alumnos de aquí, ocurre algo parecido. Nuestros alumnos, unos y otros, manejan con éxito prácticas matemáticas fuera de clase y, sin embargo, no es fácil integrar dichas prácticas en el contexto escolar.

La experiencia que presentamos responde a una actuación en el aula de matemáticas llevada a cabo en el IES Miquel Tarradell. Este centro, con apenas dos años de vida, está situado en pleno barrio de El Raval de Barcelona y da por primera vez servicio a una población que mayoritariamente no tenía acceso a estudios secundarios. La experiencia se ha desarrollado con un grupo clase de 18 alumnos de 4.° curso de ESO durante el año académico 97-98, en el marco de un crédito variable.

El grupo clase se caracteriza, por una parte, por la heterogeneidad lingüística y cultural y, por otra, por la gran diversidad de historias escolares de los alumnos. La heterogeneidad lingüística y cultural es debida a la presencia de diferentes minorías étnicas de primera generación, 4 alumnos magrebíes, 1 dominicano, 5 paquistaníes, 1 filipino y 1 peruano, junto a 2 catalano-hablantes y 4 castellano-hablantes, entre ellos un gitano.

Esta experiencia forma parte de un proyecto más global *Multiculturalitat i Matemàtiques*, cuyo objetivo es profundizar en el conocimiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje que tienen lugar en aulas de matemáticas multiculturales. Dicho proyecto está siendo patrocinado por el Departament d´Ensenyament de la Generalitat de Catalunya y la fundación Fundació Propedagògic.

## Justificación de la experiencia

Esta propuesta aparece con el fin de abordar la educación matemática de alumnos culturalmente diversos y es fruto de algunas constataciones fundamentales:

- ***Es necesario asumir los retos de la creciente diversidad cultural en nuestras aulas***

  *Profesor 1*: El tema está de moda, ahora todo el mundo se apunta a ser intercultural, a pesar de que el porcentaje de inmigración no llega ni a un 2% de la población. ¡No hay para tanto!

  *Profesor 2*: Pues yo creo que sí, te invito un día a visitar mi clase. No hay ningún apellido que cueste pronunciar, pero ¡qué diferentes son todos! Para Albert, un libro es necesariamente un libro de texto, de sociales, de matemáticas. Para Jordi, en cambio, un libro es lo que impide cada sábado por la tarde que su padre juegue con él.

La multiculturalidad en aumento en nuestras aulas es una realidad que exige investigar en búsqueda de un currículo integrador y de un modelo metodológico adecuado para todos. Entre un gran grupo de alumnos pertenecientes a una cultura mayoritaria, encontramos alumnos sujetos a varios procesos paralelos de desculturación, separados de su cultura de origen y pertenecientes, en su mayoría, a una cultura excluida del sistema escolar.

Desde nuestro punto de vista, los alumnos inmigrantes se encuentran en algún punto entre su cultura de origen, que no es uniforme, y la cultura que los acoge, que tampoco lo es. Por lo tanto, su educación debería contribuir a la construcción de sus identidades sociales y psicológicas con el fin de establecer un continuo entre ambas culturas. Además estos alumnos acumulan, a menudo y en diferente grado, distintos handicaps: déficit lingüístico, dificultades de aprendizaje, situación de riesgo social...

Esta realidad ha puesto de manifiesto la falta de adecuación del sistema educativo, en general, y de la enseñanza de las matemáticas, en particular, a una situación que varía de multicultural a altamente multicultural según las zonas. Por otra parte, entendemos que cualquier proceso favorecedor de «enculturizar» el aula de matemáticas revierte positivamente en todos los alumnos, independientemente de si éstos pertenecen al grupo cultural mayoritario o minoritario.

*La multiculturalidad en aumento en nuestras aulas es una realidad que exige investigar en búsqueda de un currículo integrador y de un modelo metodológico adecuado para todos.*

- ***Es necesario reconocer y rehabilitar el conocimiento matemático asociado a toda cultura***

  *(Se le enseñan dos fotografías a Mourad, una con un hombre vestido a la manera occidental, otra con un hombre musulmán)*

  *Entrevistadora*: ¿Cuál sabe más matemáticas, Mourad?

  *Mourad*: Éste *(señala al hombre occidental)*.

  *Entrevistadora*: ¿Por qué?

  *Mourad*: Este hombre es de un país rico.

  *[...]*

La aculturalidad del conocimiento matemático resulta ya insostenible. La dimensión cultural de la práctica matemática aparece en numerosas ocasiones en las que se ponen de manifiesto diferencias culturales en los conocimientos matemáticos concretos y también en las destrezas cognitivas básicas: percepción, abstracción, generalización, deducción, conclusión, razonamiento y resolución de problemas, imaginación, intuición y otras.

Si se aceptan las matemáticas como una ciencia que emana de la sociedad, y se reconoce la parte que está modelada por las raíces culturales e históricas de esa sociedad, se amplían los significados de las ideas matemáticas. La educación que tiene en cuenta que el proceso de elaboración del conocimiento matemático tiene lugar en la cultura se entiende como enculturación matemática y exige un desarrollo curricular acorde con la génesis cultural de las ideas matemáticas (Bishop, 1988). La aceptación de la naturaleza cultural de las matemáticas tiene claras implicaciones educativas, en particular, reconocer las matemáticas como un producto cultural es un primer paso para aprovechar la diversidad cultural de los alumnos como fuente de riqueza para el aprendizaje de las matemáticas escolares.

La creencia en la aculturalidad del conocimiento matemático ha llevado a que los educadores matemáticos no sientan la necesidad de considerar la diversidad, diversidad en relación a contenido, destrezas y estrategias cognitivas. Sin embargo, la relación entre, por una parte, cultura y matemáticas y, por otra parte, cultura y cognición, corrobora la posibilidad de identificar diferentes potencialidades y estrategias matemáticas según las diferentes culturas y/o civilizaciones (Saxe, 1990). En nuestra experiencia hemos observado que los alumnos con escolarización irregular, procedentes en general de otras culturas, disponen de un cierto bagaje de recursos y estrategias para enfrentarse a problemas de matemáticas, bagaje que ponen de manifiesto siempre que se les permita hacerlo.

Por otra parte, la afirmación de la «universalidad» de las matemáticas se ha asociado a la afirmación de la «neutralidad» de las matemáticas escolares. Las matemáticas han sido consideradas durante demasiado tiempo como una materia desligada de los valores sociales y culturales. Sin embargo, en la actualidad son ya demasiado numerosos los estudios y ejemplos para que la comunidad educativa pueda seguir ignorando la importancia de los valores sociales y culturales en el aula de matemáticas. Estudios y ejemplos que ponen de manifiesto no únicamente que los valores y expectativas de los alumnos interfieren en su aprendizaje matemático, sino también que el acto de enseñar matemáticas es un acto de transmisión de valores además de conocimiento.

*...reconocer las matemáticas como un producto cultural es un primer paso para aprovechar la diversidad cultural de los alumnos como fuente de riqueza para el aprendizaje de las matemáticas escolares.*

- ***Es necesario favorecer la entrada de conocimientos y procedimientos matemáticos de fuera de la escuela***

  *[...]*

  *Entrevistadora*: ¿De qué trabaja tu padre, Anna?

  *Anna*: Tenemos un bar aquí cerca, todos trabajamos en el bar. Yo ayudo cuando puedo.

  *Entrevistadora*: ¿Te encargas algunas veces de cobrar, de dar el cambio a los clientes, de hacer cuentas, Anna?

  *Anna*: ¡Sí! ¡Yo aprendí antes a sumar en el bar que en la escuela!

El conocimiento matemático no es exclusivo del ámbito escolar, aunque es cierto que la escuela debe incidir sobre él y en algunos casos concretos introducirlo. La escuela es uno más de los muchos contextos donde se produce aprendizaje y para muchos grupos culturales no necesariamente el más decisivo (Lave, 1988). El conocimiento matemático procedente de fuera de la escuela no debe considerarse como un estadio pre-científico que debe ser erradicado, sino un punto de partida y un complemento al conocimiento matemático que encontramos dentro de la escuela.

Según las teorías de la cognición situada, se aprende y se conoce en una cultura, pero además se actúa según el entorno concreto más inmediato. El conocimiento matemático y las diferentes capacidades cognitivas se desencadenan según el momento y el lugar donde se haga necesario resolver una determinada situación matemática. Así, en la matemática de la vida diaria el alumno activa unas estrategias distintas que en la matemática escolar, aunque hay mecanismos didácticos para aproximar unas estrategias a las otras.

Actualmente uno de los problemas importantes de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es el del desarrollo de significados de las ideas matemáticas junto con el de la necesaria introducción del elemento humano. Una vez aceptado el hecho que el conocimiento humano forma parte de la cultura donde se desarrolla, si se persigue la significatividad del aprendizaje, hace falta aceptar que es necesario introducir en el aula el conocimiento matemático no escolar usado por la persona o grupo humano. Desde este punto de vista, es importante legitimar la práctica matemática de fuera de la escuela, sus estrategias de éxito y sus procedimientos. La práctica matemática, lejos de ser patrimonio de unos pocos, está en el uso cotidiano de todos, y esto es algo que la escuela no puede ignorar.

Por todo ello, en nuestra experiencia, con todas las limitaciones del contexto escolar, hemos intentado permitir la entrada de prácticas matemáticas no escolares usadas por los alumnos. A lo largo de este curso, hemos observado que los alumnos con escolarización irregular, procedentes en general de otras culturas, disponen de un cierto bagaje de recursos y estrategias para enfrentarse a problemas de matemáticas. Dichos alumnos tienen mayor tendencia a contextualizar capacidades, habilidades y contenidos, aportando conocimientos de fuera de la escuela siempre que el contexto sea receptivo a sus aportaciones. Los alumnos que han recibido una escolarización continuada muestran una mayor tendencia a separar las prácticas escolares aprendidas de las prácticas no escolares. Entendemos pues que la matemática escolar no siempre está preparada para aprovechar el conocimiento matemático no formalizado académicamente.

Partimos, en primer lugar, de la necesidad de favorecer la entrada en el aula de conocimientos matemáticos de fuera de la escuela y, en segundo lugar, de la necesidad de su legitimación y su integración en el contexto escolar para su formalización. Esta apertura al conocimiento de fuera de la escuela facilitará no únicamente la comprensión del conocimiento matemático como un producto cultural, sino también la explicitación de los valores y expectativas que los alumnos asocian a su aprendizaje.

## Características y desarrollo de la experiencia

El objetivo principal de la experiencia es concebir el aula de matemáticas no como un lugar donde se hacen matemáticas, sino como un lugar donde los participantes se comunican y discuten significados matemáticos. Bajo este objetivo, el bloque de actividades se estructura en dos partes diferenciadas, todas organizadas por trabajo en grupos de 3 o 4 alumnos. El alumno trabaja activamente en su grupo pequeño y a su vez en el grupo clase. Para la formación de los grupos se han seguido criterios de homogeneidad lingüística debido a la presencia en el grupo clase de alumnos de incorporación tardía sin dominio de la lengua vehicular de aprendizaje. Dichos alumnos necesitaban que en su grupo hubiera un compañero que les hiciera el papel de traductor.

### *Introducción al bloque de actividades*

Al inicio de las actividades queremos explicitar la dinámica social que regirá el resto de sesiones. En un contexto multicultural de aprendizaje es importante que todos los participantes conozcan las normas de funcionamiento. La clase de matemáticas existe dentro de una institución, institución que es parte de una sociedad, a su vez inmersa en una cultura. De ahí que los comportamientos en el aula de matemáticas no estén libres de valores ni permanezcan aislados de la cultura en que ocurren, sino que reflejan el comportamiento del marco social en que se inscriben.

El comportamiento de los alumnos está modelado por valores, costumbres y normas (Abreu, 1995). Ciertos comportamientos son esperados y tolerados, mientras que otros no. Las interacciones y el rol que cada uno espera del otro, la relación con la norma social, afectan directamente los procesos de aprendizaje. Cuando en un aula de matemáticas hay miembros de diferentes grupos culturales con diferentes referentes, la norma social no se entiende por defecto y debe ser aclarada. Aparece la necesidad urgente de, por un lado, explicitar la norma social en el aula de matemáticas y, por otro lado, negociar las bases que la rigen.

*Cuando en un aula de matemáticas hay miembros de diferentes grupos culturales con diferentes referentes, la norma social no se entiende por defecto y debe ser aclarada.*

*Entrevistadora*: Tu profesora me ha dicho que no te gusta mucho ir a clase, Sajid.

*Sajid*: Sí me gusta

*Entrevistadora*: Pero no te gusta mucho estudiar.

*Sajid*: *...Paquistán pegar. Paquistán estudiar. Aquí no pegar...*

Por todo ello, en primer lugar y con la finalidad de explicitar la norma social del aula, dedicamos una sesión a elaborar un mural-decálogo, fruto de la negociación, de aquello que estará permitido hacer en clase. En ningún caso se dan por sobreentendidas estas normas, se asume que deben ser minimizados los implícitos en los comportamientos y en la dinámica de actuación de todos los participantes en el crédito.

En este mural, presentamos 10 puntos negociados que tratan 4 aspectos fundamentales:

- La relación de los miembros de la clase de matemáticas con el conocimiento (los significados construidos por cada alumno y por el conjunto de la clase).

- El papel del profesor en el aula (control, toma de decisiones, apoyo, mediación...).
- La relación alumno-profesor (las decisiones, e incluso parte de la evaluación, están repartidas, el profesor actúa orientando, y puede adaptar secuencias programadas a las necesidades de los alumnos).
- El papel del alumno en el aula de matemáticas (trabaja activamente con otros alumnos y con el profesor).

***Normas del aula de Matemáticas***

- Este mural no se puede arrancar.
- En esta clase todos hemos usado antes matemáticas.
- En esta clase todos participamos activamente.
- En esta clase todos podemos hacer preguntas.
- En esta clase todos podemos opinar.
- En esta clase todos podemos tomar decisiones.
- En esta clase la profesora facilitará tu trabajo.
- En esta clase tú eres miembro de un grupo.
- La profesora también es miembro de este grupo.
- En esta clase todos evaluamos.

Otro de los objetivos de las primeras sesiones es facilitar la explicitación de valores asociados a las matemáticas. Para ello, ambientamos el aula con fotografías donde aparecen diferentes actividades humanas a fin de iniciar una discusión sobre la presencia de aspectos matemáticos en las actividades de fuera de la escuela.

Entre las fotografías que presentamos hay la de una mujer ante un ordenador, la de unos obreros de la construcción, la de un carpintero en su taller y la de un cocinero preparando su receta. Las fotografías van acompañadas de un listado de las actividades matemáticas presentes en toda cultura: contar, medir, explicar, diseñar, jugar y localizar (Bishop, 1988). Los alumnos trabajan en grupo, y tienen una tabla en la que deben indicar la presencia de actividades matemáticas con una o más cruces. La intervención de la profesora consiste en orientar la discusión, ofreciendo sugerencias a los alumnos para que descubran aspectos matemáticos no evidentes para ellos. Como conclusión de la sesión se elabora una tabla conjunta a partir de la puesta en común de los distintos grupos.

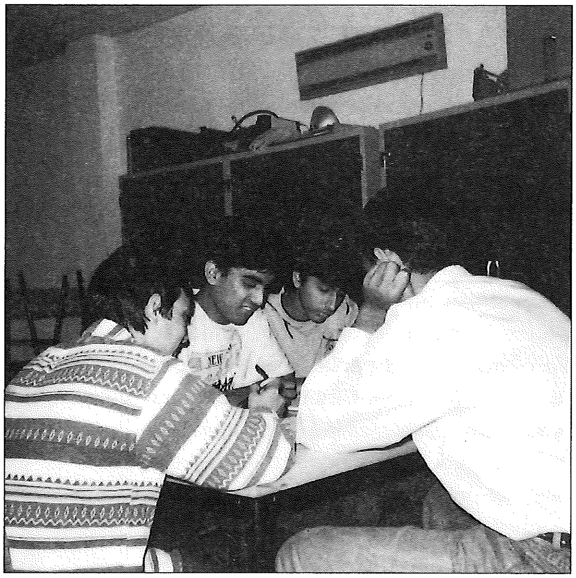
Durante la sesión, los alumnos manifiestan una actitud de disponibilidad para ampliar el campo de aquello que tradicionalmente se considera conocimiento matemático. Sin caer en el extremo de la omnipresencia de las matemáticas, descubren multitud de aspectos matemáticos en nuestras acciones cotidianas: estimación, razonamiento proporcional, visualización... Además, la observación de las discusiones en grupo nos permite conocer alguno de los valores que los alumnos asocian a «saber matemáticas» y, en algunos casos, descubrir las expectativas de los alumnos en relación a su aprendizaje.

Las actividades de las sesiones iniciales, la elaboración del mural y la discusión alrededor de las fotografías, generan en la clase un ambiente de motivación e interés, causado en parte por los elementos de novedad y extrañeza. Este ambiente resulta muy positivo para establecer un primer contacto con algunos de los alumnos que «iban a un crédito de matemáticas» y tenían pocas expectativas de «pasarlo bien».

## *Núcleo del bloque de actividades*

Nuestro planteamiento responde a la intención de enseñar las matemáticas en un ambiente de resolución de problemas (Schliemann, 1984).

La pauta de las sesiones tiene cinco tiempos. Se inicia la sesión con el planteamiento de un problema por parte de la profesora. A continuación, el alumno debe hacer una



breve reflexión individual, para trabajar después en pequeño grupo. Posteriormente los resultados se comparten en una puesta en común general. La actividad termina con la recopilación de la sesión, dirigida por la profesora, en la que los alumnos toman sus notas («¿Qué he aprendido?»). La duración de cada tiempo es muy variable según sea la reacción de los alumnos al problema propuesto.

Al introducir el problema, la profesora responde las preguntas de los alumnos aclarando aquellos aspectos que se le piden, evitando, sin embargo, dar instrucciones que puedan encasillar la resolución. Mientras los grupos trabajan, la profesora interviene cuando es estrictamente necesario para hacer alguna aportación o para dinamizar algún grupo. A lo largo de la experiencia hemos observado que los miembros de cada grupo, en un primer momento, hablan entre ellos pero no de contenidos matemáticos (la salida que harán la próxima semana, el partido de fútbol...); sin embargo, a medida que el problema va tomando forma en su imaginario van sustituyendo el motivo de las interacciones por cuestiones relativas al problema.

A lo largo de la puesta en común de las diferentes estrategias usadas por parte de los grupos, éstos se relacionan entre ellos y hay lugar para el debate y el intercambio. La descontextualización del problema se hace con cautela y en cada caso acorde al grado de dificultad que conlleva. La profesora interviene buscando diferentes aportaciones individuales, valorando las diferentes resoluciones, abriendo preguntas y aportando sugerencias, introduciendo la discusión científica y resaltando la capacidad científica del propio alumno. También interviene cuando quedan aspectos esenciales sin tratar y provoca la generalización de la situación propuesta cuando sea conveniente. Además, la profesora, como facilitadora y animadora de la actividad del grupo, toma parte para legitimar diversos enfoques en el tratamiento de los problemas matemáticos, estimulando la corrección el error, cuando lo haya, y, a su vez, integrándolo en el proceso mismo de resolución.

Considerando la socialización como generadora de aprendizaje hemos querido destacar el papel socializador de la clase de matemáticas. De ahí que el modelo didáctico escogido esté centrado en la interacción social fomentando la capacidad de trabajo en grupo mediante la resolución de problemas. Por otra parte, el modelo curricular escogido es básicamente de integración en el entorno. Planteamos la experiencia utilizando el entorno como factor motivador. El profesor tiene el papel de mostrar problemas y ayudar a resolverlos, y los alumnos de explorar el entorno y resolver los problemas. Al principio, los alumnos, en su mayoría, piden un modelo directivo con una mayor presencia del profesor, pero a medida que van avanzando las sesiones se sienten más cómodos y van aceptando la norma de dinámica social establecida, van entendiendo que las clases deben ser muy participativas y que ellos son los protagonistas.

*...problemas ricos: ricos para el alumno, para el profesor y para la detección de información sobre valores, creencias y naturaleza de las matemáticas. Se trata de problemas de contexto que fomentan el uso de estrategias diversas y que no generan el uso mecánico de un algoritmo.*

La secuencia de problemas que hemos escogido la hemos definido como una secuencia de *problemas ricos*: ricos para el alumno, para el profesor y para la detección de información sobre valores, creencias y naturaleza de las matemáticas. Se trata de problemas de contexto que fomentan el uso de estrategias diversas y que no generan el uso mecánico de un algoritmo. Hemos intentado que sean problemas proyectivos en el sentido de facilitar en su resolución la exteriorización de la cultura del alumno, y su bagaje de conocimientos. También hemos querido que sean problemas donde el principal objetivo perseguido no sea necesariamente el del academicismo sino el de la eficacia. Algunos de estos *problemas ricos* son clásicos, otros han sido creados por nosotros mismos. Destacamos que en un momento avanzado del bloque de actividades proponemos que sean los propios alumnos los que creen un *problema rico* y lo planteen a sus compañeros.

Un problema es un *problema rico* no sólo por sí mismo sino por el trato que se le da y por cómo es planteado ante el grupo de alumnos. Sin embargo, cuando un problema promueve determinados requisitos el terreno ya está preparado para que sea un *problema rico*. Conseguir integrar en un problema varias de las características citadas a continuación es un enorme logro. Aunque somos conscientes de la casi imposibilidad de englobarlas todas, intentarlo resulta un reto que nos hemos propuesto.

Un *problema rico* será aquél que:

- Genera buenas preguntas.
- Fomenta la toma de decisiones.
- Integra el contexto escolar y el familiar o local.
- Se adecua a lo que el alumno sabe.
- Conecta diferentes tipos de conocimientos matemáticos.

- Incluye puntos concretos del currículo intencional.
- Puede relacionarse con otras áreas de conocimiento.
- Activa la curiosidad y creatividad del alumno.
- Es accesible a todos los alumnos.
- Posibilita una gradación según diferentes ritmos de aprendizaje.
- Permite incorporar los conocimientos matemáticos de fuera de la escuela.
- Deja aflorar los valores culturales del alumno.
- Amplía la imagen de las ideas matemáticas y desarrolla significados.

## Ejemplo de problema rico

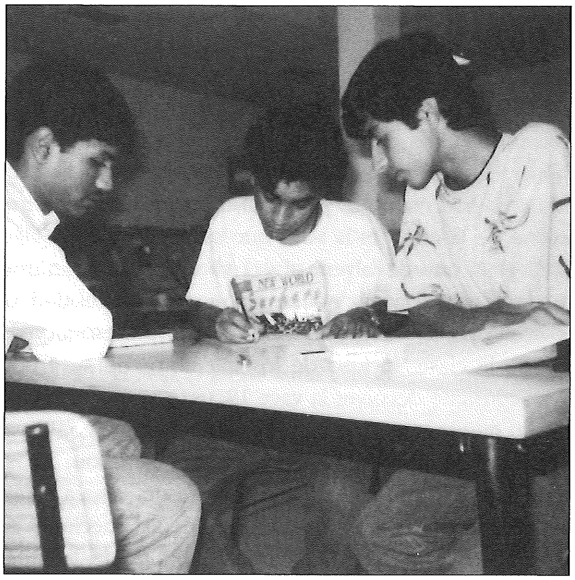
Un granjero muere y deja sus animales, 17, a sus tres hijos. A su hijo mayor le deja la mitad de sus animales, a su segundo hijo una tercera parte y a su hijo menor una novena parte.

¿Cómo se repartirán los 17 animales los tres hijos del granjero?

A continuación presentamos el desarrollo de la sesión basada en este problema.

En primer lugar, el problema se escribe en la pizarra. Dejamos que los alumnos escojan el referente de las 17 unidades. Tras la intervención de un alumno, todos los grupos parecen estar de acuerdo en que los animales van a ser vacas, ya que en los demás casos propuestos el problema carece de sentido real. Se produce una breve discusión sobre el reparto de la herencia; unos alumnos parecen estar de acuerdo en que los tres hijos reciban partes desiguales, mientras que otros alumnos parecen disgustarse por el trato discriminatorio que recibe el hijo menor del granjero. Este breve debate provocado por la profesora permite que todo el grupo se apropie de la situación, que cada alumno incorpore sus referentes culturales a través de apreciaciones personales, y que se establezca una primera relación vivencial con la situación matemática planteada.

*Con el objetivo de no entrometerse en exceso en la tarea de los grupos, la profesora va escuchando las conversaciones que tienen lugar y sólo hace algunas aclaraciones concretas...*



La profesora atiende los diferentes grupos, haciendo aclaraciones puntuales y animando el trabajo. Con el objetivo de no entrometerse en exceso en la tarea de los grupos, la profesora va escuchando las conversaciones que tienen lugar y sólo hace algunas aclaraciones concretas: todas las vacas deben ser repartidas sin que sobre ninguna, es preferible no matar ninguna vaca al repartirlas, el problema sí tiene solución... Todos los grupos parecen estar de acuerdo en que una simple división es una solución poco válida en este contexto.

Tras unos veinte minutos de trabajo en pequeños grupos se abre el debate al grupo entero; la profesora anima a que algún grupo muestre sus dificultades y dé una aproximación a una posible solución. Esmilde, habla representando a su grupo y dice que hay que dividir y, ante la aparición de decimales, quedarse con el número entero que mejor aproxime al decimal. Desde otro grupo, Fiayaz no parece estar muy de acuerdo. Transcribimos parte de su protocolo de resolución:

*Profesora*: Fiayaz, ¿cómo lo harías?

*Fiayaz*: ...¿Alguna vaca embarazada?

*Profesora*: ¿Por qué lo preguntas?

*Fiayaz*: Si hay vaca embarazada, 18 vacas y fácil.

*Profesora*: Lo siento, Fiayaz, no hay ninguna vaca embarazada.

*Fiayaz*: ¿Hay más vacas en el pueblo?

*Profesora*: Sí, supongo que sí.

*Fiayaz*: Ya está, el pueblo ayuda al padre, ahora el pueblo tiene 18 vacas y fácil.

No todos están de acuerdo con la propuesta de resolución de Fiayaz; para la mayoría de alumnos hay recursos poco matemáticos. Fiayaz no sólo no recurre a la división de una manera clara sino que necesita más información para poder resolver con éxito el problema. Aquí interviene la profesora para legitimar la aportación de Fiayaz y para provocar una mayor discusión. El principal inconveniente según la mayoría de la clase es la vaca que se pide, puesto que si se pide hay que devolverla. Esto no supone ningún contratiempo para Fiayaz, no siente ninguna necesidad de devolverla pero, ante la insistencia de la profesora, y del resto de la clase, incluso de los miembros de su grupo, Fiayaz consigue devolver la vaca 18, usando una estrategia de éxito que sorprende a la profesora. Sin embargo, Fiayaz es incapaz de justificar matemáticamente el éxito de su estrategia y sólo con la ayuda de la profesora llega a entender que esto es debido a que la suma de las fracciones no es la unidad. A pesar de la argumentación Fiayaz, legitimada por la profesora, algunos de los alumnos creen que su resolución no tiene carácter matemático.

Por último, la profesora pide a los alumnos que escriban en su dossier la resolución de Fiayaz. En este caso ha habido una única resolución consensuada, pero no en todos los problemas ocurrirá. Se comenta con los alumnos la variedad de aspectos curriculares que se han tratado, hablando de los contenidos que han aparecido, no únicamente de contenidos conceptuales sino también, y muy especialmente, de contenidos referentes a actitudes matemáticas. Entre los contenidos conceptuales tratados en este problema aparecen razonamiento proporcional, fracciones y decimales, estimación y aproximación, la noción de unidad y su desarrollo en suma de fracciones.

Las estrategias no esperadas usadas por los alumnos confirman nuestra hipótesis: cuando se permite a los alumnos introducir en el aula el conocimiento de fuera de la escuela, aparecen capacidades y potencialidades no esperadas. Además el proceso de legitimación de las diversas aportaciones favorece el desarrollo de nuevos conocimientos.

## Otros ejemplos de problemas ricos[1]

> Tenemos una receta de cocina para 6 personas, pero nosotros debemos cocinar para 20 personas. Hay que decidir las cantidades que se necesitan de cada ingrediente para ir a comprarlas.

En este problema la profesora no da la receta, sino que en la sesión anterior ha pedido que alguien pregunte en su casa alguna receta. Sobre la receta traída, pastel de carne para 6 personas, se construye el problema. Hay grupos que usan para su resolución decimales, índices de proporcionalidad y otras complicaciones parecidas. Otros grupos se implican más en el problema y ven en él una situación real donde la eficacia y la economía son factores importantes. Un alumno propone hacer la receta para 24 personas y dividir lo que sobre entre los 20 platos. Otro alumno propone comprar en la tienda los ingredientes necesarios aproximadamente, haciendo una estimación superior teniendo en cuenta que nada de lo que sobre será desperdiciado.

A medida que el problema va avanzando y los grupos van tomando decisiones, aparecen tímidamente algunas características de la práctica matemática de fuera de la escuela que contrastan con las características esenciales del aprendizaje escolar. Así observamos que se utilizan conocimientos no estrictamente matemáticos, se acepta que la práctica acostumbra a ser casi siempre correcta y exitosa, se busca fundamentalmente la eficacia y los procedimientos se van inventando según se van necesitando. La cognición individual, el razonamiento puro o la manipulación simbólica dejan de ser los únicos recursos para la resolución del problema considerados como legítimos por los alumnos.

Éste es un caso donde se aceptan como válidas diferentes resoluciones por ser todas ellas razonables tras las explicaciones de los grupos que las defienden. La diferencia básica entre las dos grandes categorías de procesos de resolución recogidos surgen de la consideración del problema como un objetivo por si mismo o como parte de un objetivo mucho más amplio.

> El responsable de un restaurante tiene que encargar la carne que necesitará en una semana.
>
> En el congelador cabe una cantidad determinada de carne y cada vez que el repartidor llega con carne hay que pagarle el viaje.
>
> Se trata de disponer de la mayor cantidad de carne posible pagando el mínimo por su transporte.

*...cuando se permite a los alumnos introducir en el aula el conocimiento de fuera de la escuela, aparecen capacidades y potencialidades no esperadas. Además el proceso de legitimación de las diversas aportaciones favorece el desarrollo de nuevos conocimientos.*

1 La idea de estos problemas surge de la lectura de masingila, Davidenko y Prus-Wisniowska (1996)

Este problema es un problema de restricciones y de optimización. Hay muchas variables a tener en cuenta y los alumnos pronto lo advierten: restricciones de espacio para almacenar la carne, el coste de la distribución y la eficacia en el pedido de carne ya que no debe pedirse más carne de la que se usará.

El problema se va concretando con la ayuda de uno de los alumnos de la clase que ayuda siempre que puede en el bar que regenta su familia. Pregunta en su casa, y al día siguiente nos da información relacionada con el contexto del problema. Sus aportaciones contribuyen a que al concretar el problema no nos alejemos excesivamente de una posible situación verídica. En particular, nos hace observar que se puede pedir más carne de la que cabe en el congelador debido a que para su descongelación se almacena en el frigorífico, hecho que no había sido tenido en cuenta por ningún alumno.

La resolución de este problema requiere de una sesión extensa y de bastante ayuda por parte de la profesora. La mayoría de los alumnos lo abordan confeccionando un calendario con los días de la semana para ir haciendo pruebas y simulando diferentes resoluciones. Queremos hacer notar que inicialmente la resolución de este problema es realmente difícil para nuestros alumnos, tanto desde el punto de vista matemático como desde del punto de vista práctico. Por una parte, en el nivel en que trabajamos no disponen todavía de los instrumentos matemáticos necesarios para resolverlo. Por otra, en la práctica cotidiana corresponde a una situación real que solo los expertos pueden resolver a partir de su experiencia.

Sin embargo, todos los grupos llegan a una respuesta razonable, y lo que es más importante, el proceso de resolución es un proceso rico. El problema genera buenas preguntas y pone en movimiento los conocimientos de los alumnos, ampliando la imagen de las ideas matemáticas y desarrollando significados. El problema es apropiado rápidamente por los alumnos, ya que despierta su curiosidad y permite incorporar conocimientos de fuera de la escuela.

*En un momento avanzado del bloque de actividades, proponemos que sean los propios alumnos los que creen un problema rico y lo planteen a sus compañeros.*

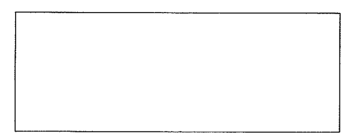
### *Los alumnos crean problemas ricos*

En un momento avanzado del bloque de actividades, proponemos que sean los propios alumnos los que creen un *problema rico* y lo planteen a sus compañeros. El *problema rico* creado por cada grupo sirve de punto de partida para que la profesora comente los avances producidos y se produzca intercambio entre los grupos.

Se dedica una sesión a que cada grupo solucione el problema de otro grupo. En esta situación, la ayuda debe provenir del grupo que ha creado el problema y debe ser graduada. En ningún momento el grupo resolutor puede contar con la ayuda de la profesora.

He aquí uno de los problemas creado por un grupo:

> El granjero que se murió también tenía un terreno rectangular, además de las 17 vacas. Si a cada hijo le deja la misma parte de terreno que de vacas, dibuja la parte de terreno que le toca a cada hijo.



En este problema se ve la intersección de dos problemas ricos realizados previamente. El problema que hemos presentado «de las 17 vacas» y otro problema, mucho más visual, cuyo objetivo era dividir un trapecio en las partes proporcionales fijadas. De la unión de los dos problemas, este grupo crea un problema nuevo.

En general, todos los grupos se inspiraron en algún problema presentado en clase en alguna sesión anterior. Este hecho, si bien pone de manifiesto que los alumnos se sienten todavía inseguros en su creatividad, pone en evidencia que han comprendido en que consiste un problema rico, y han seguido los procesos de resolución consensuados en clase.

## Evaluación

La evaluación es evaluación del proceso y del progreso y, en todo momento, es coherente con el planteamiento didáctico desarrollado. Nuestro objetivo primordial es integrar en el sistema de evaluación no sólo los contenidos matemáticos sino también los métodos y los valores. En la primera parte del bloque de actividades, la profesora ha comunicado a los alumnos los valores que se quieren transmitir y cuáles son los objetivos: la participación del alumno, sus aportaciones, su productividad matemática... La explicitación de los criterios de evaluación es fundamental en las primeras sesiones.

Todas las sesiones de trabajo finalizan con una síntesis, en la que cada alumno debe resumir la evolución de sus ideas en el marco de un grupo. Se trata de unas notas, en forma de diario personal, que incluyen brevemente las ideas que se les ocurrieron en su reflexión individual primera, las que aparecieron en la interacción en el pequeño grupo, las más interesantes de la puesta en común final y, por último, las resoluciones aceptadas como válidas al final de cada sesión. Además, los alumnos, de forma voluntaria e individual, han tenido la posibilidad de llevarse problemas para pensar los fines de semana, «el problema del fin de semana», de modo que la profesora cuenta con un elemento más para evaluar.

La evaluación del proceso se lleva a cabo a través de unas plantillas de observación sistemática de los distintos productos del alumno, ya sean escritos, hablados, o dibujados, y de observación de sus actitudes. En estas plantillas la profesora toma en consideración aquellos aspectos que cree que le dan la información necesaria para el seguimiento de sus alumnos, sin olvidar que la operatividad exige que los aspectos considerados no sean excesivos. Algunos de los aspectos observados son la utilización de los propios conocimientos, la exactitud del razonamiento, la flexibilidad y capacidad de contextualizar el problema y el grado de participación mostrado.

Simultáneamente, se lleva a cabo una evaluación de progreso partiendo de la comparación de datos recogidos desde el inicio hasta el final del bloque de actividades. En la evaluación del progreso se consideran tres aspectos:

- Los contenidos matemáticos y su uso con eficacia.
- Los valores y creencias, y las actitudes positivas hacia el conocimiento matemático.
- El trabajo en grupo, y la capacidad de cohesión y participación.

El alumno también participa en los procesos de evaluación a cuatro niveles: autoevaluación inicial, evaluación de la clase, evaluación del funcionamiento del grupo pequeño, y evaluación del profesor. Los alumnos dan su valoración por escrito, teniendo libertad para tratar los cuatro aspectos, centrándose en aspectos a mejorar y cosas a cambiar, dificultades personales y logros.

> [...] Un día cuando sonó el timbre del recreo ni lo oí, no había manera de repartir la leche en esas jarras. Pero la profesora me dijo que continuara el problema en mi casa.
>
> Me ha gustado mucho más este crédito que si hubiera sido de matemáticas.

*...la profesora ha comunicado a los alumnos los valores que se quieren transmitir y cuáles son los objetivos: la participación del alumno, sus aportaciones, su productividad matemática...*

## Necesidad de una generalización

Aunque todas las aulas son diferentes, las dificultades y problemas a los que nos enfrentamos como profesores de matemáticas tienen muchos puntos en común. Este hecho nos lleva a pensar que es posible, e incluso necesario, analizar las experiencias desarrolladas en un contexto particular con el fin de obtener implicaciones que sean válidas en un contexto más general. Desde esta perspectiva, justificamos a continuación la necesidad de intentar generalizar nuestra experiencia.

En primer lugar, consideramos urgente educar la sensibilidad de la comunidad docente sobre la situación multicultural, para cambiar su percepción de la diferencia, con el fin de que ésta pueda ser entendida como fuente de riqueza educativa para todos los alumnos. Por otra parte, debería reconocerse la importancia de la dinámica social del aula en situaciones multiculturales y cómo la explicitación y negociación de las normas que la rigen puede favorecer el aprendizaje de todos los alumnos.

Creemos que cualquier acción educativa destinada a mejorar la educación matemática de los alumnos desde la perspectiva de la enculturación debe ser el resultado de diversas acciones, coordinadas a distintos niveles, que promuevan cambios, entre otros:

- En el currículo.
- En la gestión del aula.
- En la gestión de contenidos.
- En la dinámica de las relaciones interpersonales.

Si bien una lectura positiva del currículo intencional permite y favorece la enculturación matemática, es todavía necesario que se produzcan cambios a nivel del currículo implementado. Entendemos que en el desarrollo del currículo aún falta encontrar un equilibrio entre los conocimientos procedentes de fuera de la escuela y los conocimientos escolares. Esta permeabilidad a los conocimientos no escolares puede verse favorecida por cambios en la gestión de aula que potencien la cooperación y el trabajo en pequeños grupos, cambios en la gestión de contenidos que contemplen la interdisciplinariedad y la conexión de conocimientos y cambios en las relaciones interpersonales que faciliten las aportaciones de todos los alumnos.

La reforma nos abre la posibilidad de plantear experiencias que nos acerquen a este equilibrio sin caer en una reducción del currículo ni por un extremo ni por el otro. Nuestra propuesta es un intento de ir hacia este equilibrio en un contexto donde la urgencia de adecuar la acción educativa es, si cabe, más pronunciada. No hay nada nuevo en nuestra propuesta, excepto la insistencia por dotar de un amplio significado las ideas matemáticas más cotidianas a través de problemas reales. Por suerte, en un aula multicultural hay suficiente contraste para dar diferentes dimensiones a una misma idea matemática, y para recurrir a diferentes aproximaciones de resolución.

Finalmente, queremos insistir en que entendemos nuestras propuestas como válidas no únicamente para las matemáticas, sino para la escuela en general, y dirigidas a favorecer no únicamente el aprendizaje de los alumnos inmigrantes, sino el de todos los alumnos. Al fin y al cabo, toda aula es multicultural en diferentes grados y desde diferentes perspectivas. De lo que se trata ahora es de que toda educación sea multicultural.

**Núria Planas**
IES Miquel Tarradell.
Barcelona
**Xavier Vilella**
IES Vilatzara.
Vilassar de Mar
**Núria Gorgorió**
Facultat de Ciències
de l'Educació.
Universitat Autònoma
de Barcelona
**Montse Fontdevila**
Federació d'Entitats
per l'Ensenyament
de les Matemàtiques
a Catalunya

## Agradecimientos

Queremos agradecer al claustro de profesores del IES Miquel Tarradell su estímulo, y al Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya y la Fundació Propedagògic el patrocinio del proyecto de cooperación *Multiculturalitat i Matemàtiques*. Nuestro agradecimiento también al Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, por su apoyo al proyecto TIEM98 que nos permitió trabajar con G. de Abreu, A. Bishop, K. Clements y N. Presmeg, cuyos consejos y asesoramiento nos están siendo de gran utilidad.

## Bibliografía

ABREU, G. (1995): «Mathematics in Everyday Life Versus Mathematics in School: A Question of Situated Cognition or a Question of Social Identities?», *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, vol. 11, n.° 2, 85-93.

BISHOP, A. J. (1988): *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education*, Kluwer. Dordrecht.

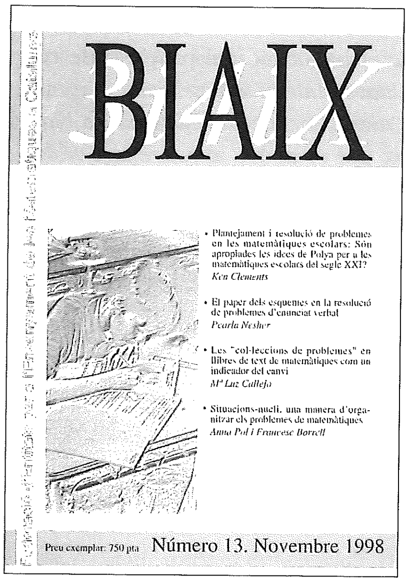
LAVE, J. (1988): *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life,* Cambridge University Press, Cambridge.

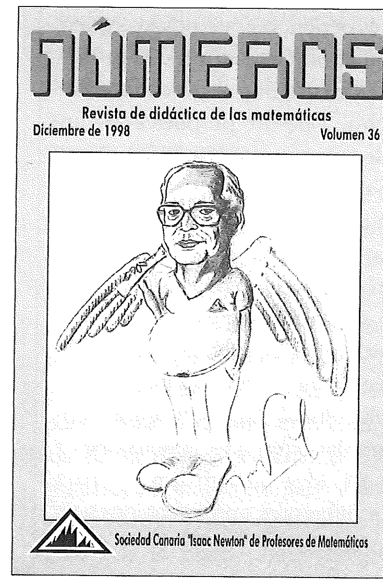
MASINGILA, O., S. DAVIDENKO y E. PRUS-WISNIOWSKA (1996): «Mathematics learning and practice in and out of school: a framework for connecting these experiences», *Educational Studies in Mathematics*, n.° 31, 175-200.

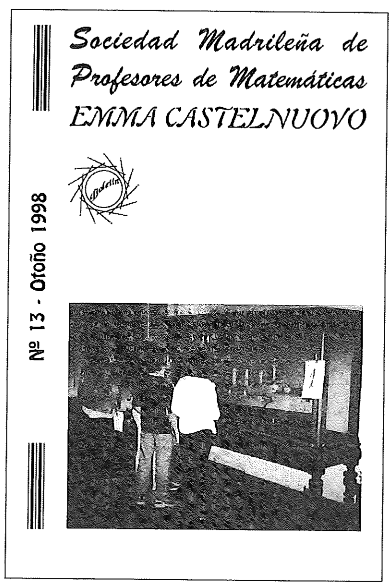
SAXE, G. B. (1990): *Culture and cognitive development: Studies in mathematics understanding*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, N.Y.

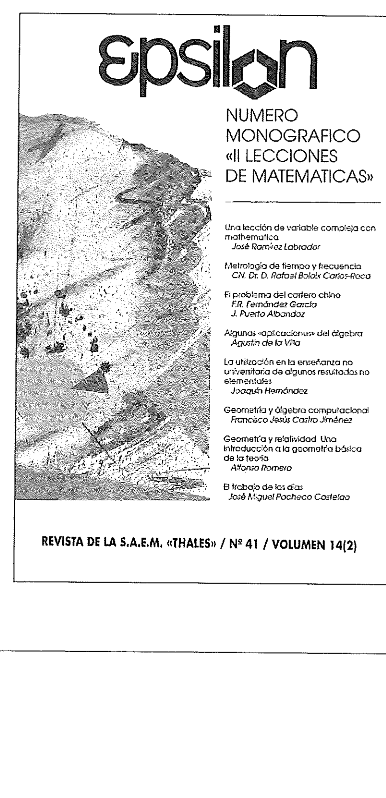
SCHLIEMANN, A. D. (1984): «Schooling versus practice in problem solving: A study on mathematics among carpenters and carpenters apprentices», *Proceedings of International Congress on Mathematical Education*, 4, 92-95.

# PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES



SUMA 30
febrero 1999, pp. 77-87

# El «contexto natural». Influencia de la lengua natural en las respuestas a las pruebas de matemáticas*

Bruno D'Amore
Berta Martini

En este trabajo se estudia la influencia y el papel de un aspecto del contexto exterior producido por elecciones de tipo lingüístico. Cuando el lenguaje escogido es de tipo coloquial, las primeras preguntas son informales, sobre aspectos extraescolares, y la discusión numérica atañe a N, hablamos de contexto natural. Este contexto parece inducir, en el sujeto sometido a la prueba, la convicción implícita de que debería contestar según modelos intuitivos, que dependen de la competencia que adquirió en los primeros niveles de escolarización o de modelos ingenuos. También examinamos el problema de la conciencia de los alumnos en situaciones de dificultad.

* Trabajo realizado con la subvención del C.N.R. (Consejo Nacional de la Investigación) (contrato número 96.00216. CT01).

Traducción: Francisco Vecino Rubio

## Uso de la lengua natural en Matemáticas

En un trabajo nuestro anterior (D'Amore y Martini, 1997), que recomendamos leer como introducción a éste, se alude al problema del uso de la lengua natural en el ámbito matemático.

No se trata ciertamente de un argumento despreciable: investigaciones de los últimos 15 años sobre el uso de la lengua natural en el aula, en las clases de matemáticas, nos inducen a pensar que las modalidades lingüísticas, conforme a las que se desarrolla la comunicación, son de fundamental importancia en el análisis de los comportamientos y de las respuestas de los alumnos. (Como referencias bibliográficas señalamos: Laborde, 1982; Maier, 1993; D'Amore, 1994 y Laborde, 1995, pero la literatura al respecto es vastísima)[1].

Aquí nos ocuparemos específicamente, sin embargo, sólo del uso de la lengua natural en un caso particular, es decir en la elaboración de pruebas y en la consiguiente tipología de las respuestas que los alumnos proporcionan, introduciendo como variables de carácter *redaccional* y *ambiental* justamente el lenguaje usado y el ambiente creado, a propósito, con preguntas de diversa índole (matemática y extramatemática).

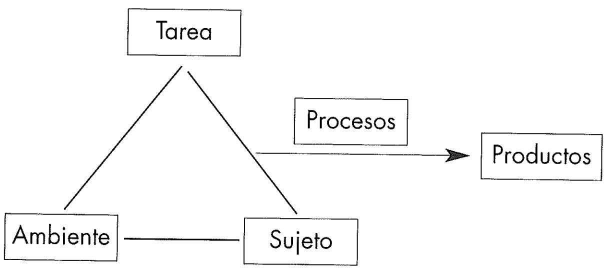
## El contexto natural

Con frecuencia, cuando se habla de «contexto», se hace en el sentido que le da Lester (1980), en el ámbito del *problem solving*, y ello se refiere a las condiciones ambientales en las que se encuentra actuando el potencial resolutor: ambiente físico, psicológico y social. Se trata, pues, tanto de factores externos como de factores inherentes a la tarea.

ARTÍCULOS

Estudios posteriores de Lesh (1981 y 1985) y Cobb (1988) han aportado mayor claridad a este delicado argumento, evidenciando cada vez más lo que debe entenderse por «contexto interno» y qué relaciones hay entre las dos formas, más bien mezcladas, de contexto (interno y externo).

D'Amore y Zan (1996) proponen un esquema, obtenido sintetizando a Kilpatrick (1975) y Lester (1980), en el que se evidencian los factores y las relaciones entre factores, en la actividad de *problem solving*:




Entre los diversos factores que determinan el funcionamiento de los distintos aspectos de ese «triángulo» a la izquierda del esquema, los de carácter lingüístico de ningún modo han sido olvidados o infravalorados por la investigación internacional; sin embargo, nos parece poco analizada la cuestión que delineamos ahora mismo, de forma rápida, pero que retomaremos detalladamente en el curso de este trabajo. Nos cuestionamos la relación que existe entre:

- El lenguaje usado en la redacción de una prueba (por tanto, dentro de la «tarea»).
- El contexto que se produce (influencia de la «tarea» y del «ambiente» –creado a propósito por quien escribe la prueba– sobre el «sujeto»).
- El ambiente cognitivo en el que el resolutor piensa buscar la respuesta (influencia del «ambiente cognitivo en que el resolutor busca las respuestas» sobre el «sujeto»).
- La respuesta producida (que implica el «sujeto», los «procesos» y, por tanto, el «producto»).

Los problemas que hemos estudiado explícitamente (D'Amore y Martini, 1997), son el clásico de Schoenfeld de «el autobus y los soldados» y el nuestro sobre «coches y niños», que son estructuralmente semejantes aunque ambos se expresan en un lenguaje muy simple, natural, muy cercano al coloquial[2].

Desde ese punto de vista, no deberían surgir diferencias importantes inducidas por registros diversos o por distintas modalidades lingüísticas.

Sin embargo, el hecho de que se hable de objetos más cercanos a las costumbres de los sujetos examinados (coches –y no autobuses del ejercito–, niños –y no soldados–, escuela –y no campo de instrucción–), influye sobre el hecho de que el contexto evocado por el segundo problema haga el mismo lenguaje descriptivo mucho más cercano al natural, y no sólo por los números menores que se emplean en ese segundo problema (en efecto se ha evidenciado explícitamente este hecho, una vez tras otra, en las respuestas de los sujetos entrevistados, como han demostrado D'Amore y Martini –1997–): el alumno sometido a esa prueba declara que imagina mejor la escena (los motivos se describen en el artículo citado) y que «no tiene necesidad de hacer operaciones».

*...juega un papel esencial, en la tipología del comportamiento del resolutor en el momento de dar la respuesta (escrita en la prueba, oral en las entrevistas), algo que describiremos a continuación y que llamaremos* contexto natural, *inducido por los términos y por los objetos evocados.*

Para nosotros, juega un papel esencial, en la tipología del comportamiento del resolutor en el momento de dar la respuesta (escrita en la prueba, oral en las entrevistas), algo que describiremos a continuación y que llamaremos contexto natural, inducido por los términos y por los objetos evocados.

Sobre el papel del contexto natural no habíamos realizado pruebas específicas con ocasión de la proposición del doble problema: autobús y soldados contra coches y niños, y, por tanto, hemos decidido hacerlas ahora.

De forma preliminar, describiremos de forma explícita el concepto que proponemos: el de *contexto natural*. El uso de la lengua común, con preguntas que incumben a hechos aritméticos en que intervienen sólo *números naturales* y hechos extra-escolares, sobre argumentos agradables y bien conocidos por nuestros sujetos, crea un contexto de espera (y por tanto de respuesta) que llamaremos contexto natural, una especie de ambiente mental de referencia, en que se coloca el resolutor al buscar las respuestas a las preguntas de la prueba.

Opinamos que, para construir una prueba capaz de crear un contexto natural, se deben elegir de forma cuidadosa y oportuna las primeras preguntas y adoptar también un lenguaje de tipo coloquial en las preguntas siguientes, incluso si hacen referencia a cuestiones matemáticas. Y viceversa, se

1 Revisten un interés específico, en este campo, los estudios sobre los distintos registros representativos, ya que éstos no sólo proporcionan diversos significantes de un mismo significado sino que, de hecho, vehiculan toda una serie de informaciones y de modalidades interpretativas de extraordinaria relevancia; véase Duval (1993) y D'Amore (1997).

2 Para comodidad del lector, aportamos aquí los textos de los problemas a que nos referimos. Problema de Schoenfeld del autobús y los soldados: «Un autobús del ejército transporta 36 soldados. Si se tiene que transportar a 1.128 soldados al campo de instrucción, ¿cuántos autobuses se necesitan?». Problema de los coches y de los niños: «Un automóvil transporta 4 niños. Si se debe llevar a 6 niños a la escuela, ¿cuántos coches se necesitan?».

puede evitar esto planteando, desde las primeras preguntas, problemas sobre hechos matemáticos que no tengan en cuenta hechos extra-matemáticos o exclusivamente los números naturales, y que en cambio evoquen un ámbito de respuesta, típicamente escolar.

## Primera hipótesis de la investigación

En nuestra opinión, la creación de un contexto natural y el empujón (implícito) consiguiente para responder a las preguntas de una prueba, en tal contexto, rebaja el nivel del umbral crítico y el de referencia cognitiva, en la que aquel que debe responder a las preguntas busca argumentos para su respuesta.

El sujeto busca, entonces, las respuestas apropiadas en ambientes cognitivos ingenuos, en modelos matemáticos de la realidad de bajo pérfil cognitivo, inducidos eventualmente por sus experiencias cognitivas (en matemáticas) adquiridas en los primeros años de escolaridad.

Por ejemplo, en lo referente a los sistemas numéricos, dentro del contexto natural prevalecen y se usan los modelos intuitivos de número natural y de las operaciones que implican sólo números naturales y prevalecen, también, referencias a interpretaciones ingenuas de la realidad en términos de números naturales, incluso allí donde serían más significativos y oportunos otros sistemás numéricos.

Pero, ¿existe o no ese contexto natural? Nuestra hipótesis es que existe; discutiremos más adelante la pertinencia de esta hipótesis.

## Una primera prueba para verificar la incidencia del contexto natural en las respuestas

Se trataba, pues, de crear una prueba con preguntas relativas a hechos extra-

*Por ejemplo, en lo referente a los sistemas numéricos, dentro del* contexto natural *prevalecen y se usan los modelos intuitivos de número natural y de las operaciones que implican sólo números naturales y prevalecen, también, referencias a interpretaciones ingenuas de la realidad en términos de números naturales...*

3 La contribución de muchos profesores de la escuela media superior ha sido determinante para la buena aplicación de la experiencia. Les agradecemos su colaboración, antes de la bibliografía.

matemáticos (sobre argumentos conocidos y agradables para el alumno) y números naturales, en lenguaje coloquial (incluso a costa de no ser rigurosos desde un punto de vista formal).

Con tal propósito, y después de algunas pruebas preliminares, hemos elegido la siguiente batería de 3 preguntas, en este orden:

- P1. Escribe la suma de los números que forman tu fecha de nacimiento.

  [Por ejemplo si naciste el 28 de septiembre de 1978, la suma es 2+8+0+9+1+9+7+8=44].
- P2. Escribe el título de la última película que has visto (en el cine o en la TV).
- P3. Escribe el nombre de tu cantante preferido.

En ese punto, incluimos una pregunta, no rigurosa formalmente, pero que se expresaba en lengua coloquial y que reclamaba, pues, por su propia forma lingüística, el contexto natural inducido implícitamente, según nuestra opinión, por las tres primeras preguntas:

- P4. ¿Cuál es el número más pequeño del mundo?

La pregunta P4 se da ciertamente con una formulación ambigua; pero nuestro objetivo era precisamente evaluar la modalidad de la respuesta y sus distintos géneros.

(En lo que sigue, llamaremos prueba T1 a la constituida por las cuatro preguntas, P1-P4).

Como explicaremos mejor, a continuación, esa prueba escrita iba seguida de entrevistas.

En pruebas preliminares y más bien informales hechas a estudiantes de distintos niveles (media inferior, primer año de Institutos Profesionales, V de Liceo Clásico Experimental, en Italia)[3], a profesores (elementales, en Italia; de Instituto Profesional, en Suiza), a estudiantes universitarios del IV curso de la licenciatura en Matemáticas (en Salónica, Grecia), habíamos obtenido muchas respuestas «Cero». Queríamos verificar la incidencia real de esa respuesta y sus causas, pero en un contexto de investigación empírica.

Tras esas pruebas preliminares, muy útiles para poner a punto las preguntas de las pruebas, y a las que no nos referiremos aquí, pasamos a las pruebas propiamente dichas, con el test T1. Nos ha parecido útil hacer tales pruebas a estudiantes de la superior, vistos el sentido de las preguntas y las hipótesis que se hacían en él. Por tanto se llevó a cabo la experiencia en dos clases de II superior, en Bologna [una en un Instituto de Arte y la otra en un Itc (Instituto Técnico Comercial, escuela para contables)] y en dos clases de V superior, en S. Lazzaro di Savena (Bologna) [una de Itis (Instituto Técnico Industrial Estatal, escuela para jefes técnicos) y la otra de Itc].

Más adelante describiremos las modalidades y resultados de esta prueba sobre T1 (incluidas las entrevistas).

Más allá de la indagación, tal como se ha delineado, parecía además muy interesante, en este caso específico, ver qué tipo de respuesta se daría a la pregunta P4, siempre que no se tratase de «Cero». Veremos que ello es efectivamente interesante. Puede resultar curioso señalar que la respuesta a la pregunta P4, en las pruebas preliminares con estudiantes universitarios y del último año de la superior, ha sido, con una cierta preponderancia en las escuelas con mayores contenidos de carácter matemático, el «número» «$-\infty$». Por tanto, este «objeto» se considera como un número entero propiamente dicho[4]. Respuestas como «no existe» o similares han sido más bien escasas en las pruebas preliminares.

Asimismo hablaremos de las modalidades aplicadas y proporcionaremos los resultados (obtenidos por escrito o a través de entrevistas) de esta indagación.

Naturalmente era necesario hacer una contraprueba obvia.

La pregunta que, en efecto, surge espontánea es: ¿es cierto que una eventual respuesta «Cero» está ligada al contexto natural creado con las tres primeras preguntas del test? ¿No existirán otros motivos?

Se trataba, pues, de idear otra prueba en que las primeras preguntas creasen un ambiente, por así decirlo, no-natural, es decir que no implicase sólo números naturales y hechos extra-matemáticos, de forma que la pregunta (ex P4) sobre «el número más pequeño del mundo» se expresase en lenguaje más formal, adecuándose a las competencias matemáticas del alumno, propias de la escuela secundaria.

Concebimos entonces el test siguiente (que llamaremos a continuación T2):

- P5. Encuentra tres ejemplos de números reales que satisfagan esta desigualdad:

$$-\frac{5}{2} < x < +\frac{2}{3}$$

- P6. Resuelve la siguiente ecuación en $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

- P7. ¿Cuál es el número $x$, tal que $x$ es menor que $y$, para cada $y$?

en el que P5 y P6 sólo persiguen el objetivo de contextualizar el test, en ambiente típicamente disciplinar, y P7 es una traducción un poco más formal de la P4 en un lenguaje no coloquial.

## Una segunda prueba para verificar la incidencia del contexto natural en las respuestas

Muchas de las respuestas a T1, dadas por escrito o en las entrevistas, hacían intervenir el infinito, de manera más o menos explícita. No sólo: surgían a menudo, incluso sin darse cuenta, las dos posiciones filosóficas clásicas a propósito del infinito: potencial y actual (Arrigo y D'Amore, 1993).

Nos preguntamos entonces si las respuestas a P4 se veían condicionadas por el ámbito muy particular en que nos habíamos colocado. Es decir, si no era el contexto natural el causante de las respuestas o si, en todo caso, no era el único.

Había que hacer otra prueba, sobre un argumento que no implicase esta difícil noción. Y también debía hacerse doble: una vez creando el contexto natural y otra vez no creándolo.

Elegimos entonces la siguiente batería de preguntas (que llamaremos de ahora en adelante T3), de las cuales las tres primeras podían, en nuestra opinión, crear un contexto natural para la cuarta:

- P1, P2, P3 (las mismas de T1).
- P8. ¿Existe un número cuyo cuadrado sea 5?

Seleccionamos a continuación la siguiente batería de preguntas (que llamaremos T4), con el criterio acostumbrado: no se crea un contexto natural con las primeras (es más, se introduce desde el inicio en un contexto típicamente disciplinar) y la última ha de ser la misma P8 del test T3 (contexto natural), pero formulada en un lenguaje (un poco) más formal:

- P5, P6 (las mismas usadas anteriormente en T2).
- P9. ¿Existe un número $x$ tal que $x^2 = 5$?

Más abajo hablaremos de las modalidades seguidas y daremos los resultados de esta prueba.

*Se trataba, pues, de idear otra prueba en que las primeras preguntas creasen un ambiente, por así decirlo, no-natural, es decir que no implicase sólo números naturales y hechos extra-matemáticos...*

## La gestión de las situaciones incoherentes. Segunda hipótesis de la investigación

Al realizar la prueba T1, hemos examinado una variante. Supongamos que a las preguntas P1-P4, en contexto natu-

4 Sobre tal interpretación concuerdan además Shama y Movshovitz-Hadar (1994).

ral, siga una pregunta P10 en que se considere la existencia de números negativos, por ejemplo:

- P10. ¿Es mayor –3 o +2?

Nótese que P10 también se expresa en una forma lingüística coloquial y que por ello surgen dudas sobre su impecabilidad... Sin embargo, en ella se prueba la competencia del estudiante sobre el hecho de la existencia de los números negativos (y entonces la respuesta «Cero» no constituye la respuesta pertinente a la pregunta sobre el número más pequeño del mundo...).

Si un estudiante, de acuerdo con el contexto natural, ha respondido «Cero» a P4, ¿qué hara cuando tenga que responder a P10, recordando la existencia de los números negativos?

Con mayor precisión, nos preguntábamos:

1. Si a la pregunta P4 el estudiante responde «Cero» y a la P10 responde «+2», ¿volverá a la P4 para corregir la respuesta «Cero»? ¿En qué modo? ¿O bien deja «Cero» como respuesta a P4 y «+2» a P10? ¿Se da cuenta o no de la contradicción? ¿En qué medida influye en ello el contexto natural y en qué medida la coherencia dentro del test?
2. Si se intercambian el orden de P10 y P4, ¿el sujeto seguirá respondiendo «Cero» a la P4 o dará otras respuestas? Es decir, si las preguntas P1, P2 y P3 crean un contexto natural, ¿la precedencia de la P10 sobre la P4 lo destruye?

Es necesario precisar que otras investigaciones, consideradas ya clásicas, han sacado a la luz el hecho de que los estudiantes *deshechan la capacidad de poner de manifiesto elementos conflictuales y reconocerlos contemporáneamente como tales* (véase Stavy, y Berkovitz, 1980 y Hart, 1981).

Otras investigaciones han probado que la percepción de muchos elementos en conflicto no se vive como una situación problemática por parte del estudiante, sino como una situación completamente aceptable. Es decir: las incoherencias no determinan ilicitud; véase Schoenfeld (1985) y Tirosh (1990).

*...mientras en matemáticas la coherencia del sistema es un hecho central y se es consciente de su papel determinante, eso no vale para la situación didáctica; en el caso particular del infinito...*

Es más, mientras *en matemáticas* la coherencia del sistema es un hecho central y se es consciente de su papel determinante, eso no vale para la situación *didáctica*; en el caso particular del infinito; véase Tsamir y Tirosh (1997).

Nuestra hipótesis es que se confirmarán los resultados de las investigaciones antes citadas, incluso en un caso tan explícito y evidente como el que hemos propuesto. Ello nos parece ligado al hecho de que los estudiantes no están suficientemente interesados en la *gestión de la coherencia* (ni local, ni global) del sistema y del lenguaje que están aprendiendo a manejar.

Como atenuante parcial de la gravedad de esta conclusión eventual, si se llega a probar, puede actuar quizás una clausula implícita del contrato didáctico que podría no consentir o no empujar a la revisión de las respuestas propias, una vez dadas; es decir que llevaría a interpretar las respuestas aisladas como si fuesen independientes entre sí y no pertenecientes a una situación global.

Más tarde hablaremos de las modalidades de aplicación, daremos los resultados de la prueba y discutiremos sobre la validez de nuestra hipótesis.

Para comodidad del lector, recogemos en el siguiente cuadro los test en que se basan las pruebas:

| | |
|---|---|
| P1. | Escribe la suma de los números que forman tu fecha de nacimiento. [Por ejemplo si naciste el 28 de septiembre de 1978, la suma es 2+8+0+9+1+9+7+8=44]. |
| P2. | Escribe el título de la última película que has visto (en el cine o en la TV). |
| P3. | Escribe el nombre de tu cantante preferido. |
| P4. | ¿Cuál es el número más pequeño del mundo? |
| P5. | Encuentra tres ejemplos de números reales que satisfagan esta desigualdad: $-5/2 < x < +2/3$. |
| P6. | Resuelve la siguiente ecuación en $\mathbb{R}$: $x^2 - 4x + 4 = 0$ |
| P7. | ¿Cuál es el número $x$, tal que $x$ es menor que $y$, para cada $y$? |
| P8. | ¿Existe un número cuyo cuadrado sea 5? |
| P9. | ¿Existe un número $x$ tal que $x^2=5$? |
| P10. | ¿Es mayor –3 o +2? |
| | T1: P1-P2-P3-P4 |
| | T2: P5-P6-P7 |
| | T3: P1-P2-P3-P8 |
| | T4: P5-P6-P9 |
| | $T1^1$: P1-P2-P3-P4-P10 |
| | $T1^2$: P1-P2-P3-P10-P4 |

## Modalidades y resultados de las pruebas

### *Modalidades y resultados de la prueba T1 (con entrevistas)*

Hemos aplicado la prueba T1 en dos clases de II (una de un Instituto de Arte; otra de Itc) y en dos clases de V (una de Itis; otra de Itc)[5].

A cada alumno se le daba un cuadernillo de 4 folios, formato A4, grapados en la parte superior izquierda; en cada folio se reflejaba una sola pregunta (por orden: P1-P2-P3-P4), con un cuadro grande vacío. Pedíamos a los estudiantes que no hojeasen los folios, que escribiesen su nombre (sin apellido) en el primer folio, que trabajasen en silencio, que no se intercambiasen informaciones, que respondiesen con absoluta tranquilidad y sinceridad, asegurándoles que el resultado de la prueba no se pasaría a sus profesores (los cuales nos dejaron solos con los estudiantes, como prueba de lo anterior).

Cuando dijimos «¡podéis empezar!», los estudiantes respondieron por escrito a la pregunta P1 en el primer folio. Pasados uno o dos minutos, sólo cuando lo ordenamos pudieron responder a la P2. Y así sucesivamente hasta llegar a la P4. Al finalizar recogimos el cuadernillo. Por lo que la totalidad de la prueba escrita duraba de 5 a 8 minutos. El profesor volvía a entrar, nosotros mirábamos inmediatamente sólo las respuestas a P4 y elegíamos los estudiantes para las entrevistas. Los alumnos elegidos, uno cada vez, venían a un aula cercana en la que se desarrollaba la entrevista individual. Se pedía al profesor que vigilase para que no se diese un cambio de informaciones entre los que volvían de la entrevista y los que salían para realizarla.

En este apartado, nos interesa ver cuántos estudiantes respondían a la pregunta P4, de forma que hubiese intervenido el contexto natural; obviamente no examinamos las respuestas a P1-P2-P3 que, recordamos, servían sólo para crear, en nuestra opinión, tal contexto natural.

Aun siendo casi siempre «Cero» la respuesta obtenida por escrito, se dio una gran variedad de respuestas si consideramos también las entrevistas; sólo poquísimos estudiantes responden de forma impecable, por ejemplo: «Para cada número pequeño, existe siempre otro más pequeño» (se trata de un estudiante de II Ist. de Arte, que firma con pseudónimo). Pero sobre la tipología de las respuestas, volveremos más adelante, con una gran riqueza de contestaciones particulares.

Antes de seguir, nos interesa evidenciar que hubo casos de respuestas ingenuas que, si bien no eran «Cero» (respuesta tomada por nosotros como prototipo de quien entra sin saberlo en el *contexto natural*), parecen ligadas justamente a tal contexto, confirmando su existencia. Se trata por ejemplo de las respuestas «1» (en las entrevistas: «porque cero no es un número», y eso aparece varias veces) y respuestas que revelan modalidades de medida. Como ejemplo, tenemos la respuesta «0,1» de Carlotta que, por escrito, no dice casi nada (incluso porque podría interpretarse como dos respuestas distinta, «0» y «1», separadas por una coma); y en la entrevista, la estudiante la justifica como: «la medida más pequeña posible».

*...interesa evidenciar que ha habido casos de respuestas ingenuas que, si bien no eran «Cero» (respuesta tomada por nosotros como prototipo de quien entra sin saberlo en el contexto natural), parecen ligadas justamente a tal contexto, confirmando su existencia.*

Por tanto, sea la respuesta «0» como la «1» o la «0,1», u otras análogas, se pueden adscribir, creemos, a la influencia del contexto natural.

Sin embargo, por corrección, dejaremos en adelante separadas las dos tipologías de respuesta.

Indicaremos, a continuación, con $c$ el porcentaje de las respuestas «Cero» y con $c.n.$ el porcentaje de respuestas que parece se deban al contexto natural, según lo dicho anteriormente. Obviamente, $c.n. \geq c$, dada la inclusión de las respuestas «Cero» entre las debidas al ingreso en el contexto natural. (Se sobreentiende que redondearemos siempre los resultados hasta la unidad más próxima).

He aquí una tabla con los resultados en porcentajes:

| | *c* | *c.n.* |
|---|---|---|
| II Inst. de Arte | 50 | 70 |
| II ITC | 34 | 34 |
| V ITIS | 40 | 40 |
| V ITC | 37 | 37 |

Se nota enseguida que una respuesta distinta de «Cero», pero igualmente ligada al contexto natural, se da sólo en el Instituto de Arte; la mayor familiaridad con las matemáticas en los otros Institutos permite menos... divagaciones. Como veremos, cuando analicemos detalladamente la tipología de las respuestas, en las clases de V, sobre todo, se difunde la respuesta prevista por nosotros: «$-\infty$».

5 Recordamos que en Italia los estudiantes de I superior tienen (normalmente) una edad de 14-15 años, los de II 15-16 años y así sucesivamente.

Examinemos ahora las entrevistas para dar algún detalle más.

***II de Instituto de Arte***

Casi todos los estudiantes entrevistados confiesan que la primera respuesta intuitiva que les viene a la mente, de forma espontánea, es «Cero»; de ellos algunos escriben efectivamente «Cero» o «0» (Ilaria explica que su «0» es la traducción matemática de la respuesta «Nada» que se le ha ocurrido); otros escriben respuestas distintas como «1» o «–1», pero la explicación nos la proporcionan Angelo, Fabrizio y Matteo que explican que no podían escribir «Cero» porque «no se trata de un número». El –1 se piensa como «algo muy pequeño» y no como una unidad negativa.

Todo ello parece confirmar el ingreso en un contexto natural.

***II Itc***

Muchos estudiantes declaran haber pensado enseguida y espontáneamente en «Cero»; pero han reflexionado y han escrito cosas diversas [tenemos un «–número infinito» (el «–» es un signo de «negativo») tenemos un «–0» (idem), algún «No sé»,...].

***V Itis***

Aquí la casuística es muy simple ya que la clase se divide en dos respuestas: el 40% escribe «Cero» y el 60% escribe «–∞». De los estudiantes que dan la segunda respuesta, hay muchos que admiten a –∞ como « un número», como «el número más pequeño», etc.

Algunas entrevistas, sin embargo, permiten descubrir el contraste interno entre «la primera respuesta que se me ha ocurrido» y la sucesiva reflexión dentro del conocimiento matemático. Otras entrevistas muestran, con claridad, la búsqueda de números que se explican teniendo en cuenta el contexto natural. Por ejemplo, Giacomo dice: «He pensado en el número que vale menos». Por tanto, esta respuesta que se da cerca del 60% de los alumnos y que parece ser, para ellos, matemáticamente impecable, es a menudo el fruto de una reflexión crítica... que, tal vez, puede incluso considerarse a la inversa. Por ejemplo, Davide escribe «–∞» pero confesando a viva voz que no está muy convencido porque «quizás era más apropiado decir algo cercano al cero. No sé». También Ermanno y otros confiesan haber pensado en cero y haber escrito después la otra respuesta. Para concluir, entre las justificaciones de la respuesta «Cero» he aquí la de Giampiero: «Pensé en cero porque no es nada y no hay nada menos de nada».

*Algunas entrevistas permiten descubrir el contraste interno entre «la primera respuesta que me ha venido a la mente» y la sucesiva reflexión dentro del cognitivo matemático. Otras entrevistas muestran, con claridad, la búsqueda de números que se explican teniendo en cuenta el* contexto natural.

Nos parece que, en este caso también, el contexto natural juega un papel esencial y notable, más allá de lo que parece por las respuestas escritas a las que hemos hecho referencia en la tabla anterior.

***V Itc***

Aquí hay estudiantes que no responden (hecho más bien raro, en general). Lo podemos tomar como una señal de dificultad, como veremos en breve. Uno sólo responde «–∞»; se trata evidentemente de una respuesta sacada de no se sabe dónde, ni de qué otras fuentes de conocimiento o de comunicación. Muchos estudiantes confiesan, incluso los que no han respondido «Cero», haber pensado, en primera instancia, en cero. Tenemos además a un estudiante que declara haber pensado en los «Submúltiplos del cero», a una estudiante en «Submúltiplos de 1» (Stefania), otra en «Algo no tangible» (Michela, que en el escrito lo había dejado en blanco porque no sabía qué responder); un estudiante declara: «He pensado en algo tan pequeño que no se puede escribir y después se me ha pasado el tiempo. Si hubiese tenido tiempo habría escrito: un número infinitesimal» (Carlo, que lo había dejado en blanco).

También, en este caso, nos parece que la influencia del contexto natural es manifiesta. Se nota siempre una especie de lucha entre la primera respuesta que acude a la mente (la mayor parte de las veces «Nada» o «Cero»), justificada, según nuestra opinión, por la hipótesis del contexto natural, y lo que después la competencia obliga a reelaborar o escribir.

## Modalidades y resultados de la prueba T2

La prueba T2 se ha realizado solo en un Itis, con dos clases de II y dos de V.

En las II, la respuesta de tipo *c.n.* (que comprende tanto la respuesta «Cero», como cualquier otra «ingenua», asimilable a cero) se obtiene en un 25% de los casos. En la tabla del apartado anterior, teníamos al contrario un 70% (Instituto de Arte) y un 34% (II Itc).

En las V, la respuesta de tipo *c.n.* se da en un 0% de los casos, ante los precedentes 40% (Vde Itis) y 37% (Vde Itc).

Parece que se puede afirmar que la respuesta a P4, planteada en contexto natural, lleva a muchos de los alumnos a dar respuestas cuya motivación reside en el ámbito natural (lengua coloquial y números naturales). Ello es tanto más evidente cuanto mayor es el nivel de las clases, como las de V de Itis, en las cuales se han tratado contenidos matemáticos fuertes.

### Modalidades y resultados de las pruebas T3 y T4

Las pruebas T3 y T4 se efectuaron también solo en un Itis, en dos clases de II y en dos de V.

En la prueba T3 (contexto natural), el 57% de los estudiantes de II responde no a P8 (lenguaje coloquial) (pensando por lo tanto, sólo en los números naturales) mientras en la prueba T4 (contexto disciplinar no natural), nada menos que el 83% de II responde sí a la P9 (lenguaje disciplinar).

En la prueba T3, el 29% de los estudiantes de V responde no a la P8 (pensando por lo tanto, sólo en los números naturales) mientras el 88% responde sí a la pregunta P9.

Parece que se puede afirmar que es justamente la idea de contexto natural la que conduce hacia respuestas como las vistas, *incluso cuando no están implicadas cuestiones concernientes al infinito matemático.*

> *Parece que se puede afirmar que es justamente la idea de* contexto natural *la que empuja hacia respuestas como las vistas,* incluso cuando no están implicadas cuestiones concernientes al infinito matemático.

### Modalidades y resultados de la (contra) prueba T1[1] (P4-P10) y T1[2] (P10-P4) (con entrevistas)

Describiremos en este apartado las modalidades de ejecución de la (contra)prueba, cuyo objetivo se aclaró ya, y sus resultados.

Recordamos que:

- El test T1 está formado por las cuatro preguntas que habíamos llamado P1-P2-P3-P4 (en que las tres primeras tienen sólo el objetivo de crear un contexto natural).
- La P4 se refiere al «número más pequeño del mundo».
- La P10 es la que compara –3 y +2, siempre escrita en lenguaje natural, muy cercano al coloquial.

Recordemos que hemos indicado con:

- $T1^1$ el test T1 seguido de la pregunta P10 (por tanto $T1^1$ es el test formado con el orden P1-P2-P3-P4-P10).
- $T1^2$ el obtenido de $T1^1$ intercambiando P4 y P10, por tanto formado por P1-P2-P3-P10-P4, en ese orden.

Las modalidades de ejecución de la prueba fueron las ya descritas, sólo que ahora los folios A4 dados a cada alumno eran obviamente 5 y no 4.

La prueba se efectuó en Itc (tres II) y Liceo Científico (dos II y dos V).

Veamos de forma rápida los resultados en el Itc.

### Itc, clases de II

En el test $T1^1$, las respuestas de tipo *c.n.* a la P4 fueron el 70%; en el $T1^2$ descienden hasta el 42%. De las entrevistas se obtiene que, especialmente en el $T1^1$, los estudiantes admiten que la respuesta que acude, de forma inmediata, a la mente es «Cero» o, más raramente, «1».

Hacemos notar que *sólo un estudiante*, después de haber leído la P10, regresa a la P4 y borra la primera respuesta («Cero») para sustituirla con «$-\infty$». Frente a esto son muchos los estudiantes que admiten haber relacionado las dos preguntas, pero no haber pensado retornar sobre los propios pasos para modificar la respuesta a P4 después de la exigencia planteada por P10. Lo dice muy explícitamente Elisa: «... pero he decidido dejarlo así». Sobre este punto, ligado sobre todo a la coherencia, volveremos más tarde.

Respecto a las pruebas efectuadas en las clases de II y V de Liceo Científico, hay muchísimas respuestas del tipo: «$-\infty$» (sobre todo en V), «no existe» o similares (sobre todo en V), mientras raramente se encuentran las respuestas «Cero» o «1» (sobre todo en II).

Sin embargo, en las entrevistas, hay muchos estudiantes que, sobre todo en el caso de $T1^1$, admiten haber pensado justamente en «Cero», en «1», en «algo muy cercano a cero» (una de las respuestas por escrito es, desde ese punto de vista, ejemplar: «$0,\overline{0}1$», es decir: el cero despues de la coma se considera periódico).

Sobre la influencia de P10 sobre P4 en $T1^1$, algún estudiante confiesa haber relacionado las dos preguntas pero no haber sentido la necesidad de volver sobre sus pasos.

Sobre la influencia de P10 sobre P4 en $T1^2$, pocos admiten haber tenido la inspiración de responder a P4 a partir de P10, como si eso sucediese de forma implícita.

Sobre los temas estudiados en este apartado, podemos aprovechar también los resultados de algunas pruebas y algunas entrevistas hechas de una manera menos formal en un II del Instituto de Arte, en un II de Itc, en un V de Itis y en dos V de Itc.

***II de Instituto de Arte***

Sólo Carlotta y Sante admiten que han pensado en una posible relación entre P4 y P10, pero al final Carlotta ($T1^1$) ha preferido dejar las cosas como estaban y ha dejado «Cero»; mientras tanto Sante ($T1^2$), en el momento de responder a P4, se ha dado cuenta de la existencia de números negativos y ha respondido «–0» (el signo quiere decir «menos»), respuesta ya encontrada antes y no tan rara. Todos los demás admiten no haber pensado en el enlace entre las dos preguntas.

***II de Itc***

Ninguno de los entrevistados declara haber relacionado P4 y P10.

***V de Itis***

En las entrevistas, aun considerando todas las variantes de la respuesta, que veremos más abajo, parece que muchos estudiantes se han visto influenciados, en $T1^2$, por la pregunta P10 para responder a la P4. Pero casi ninguno lo admite; a la pregunta explícita del entrevistador, responden no haber relacionado las dos cosas. Es como si muchos no fuesen conscientes de ese hecho (probado por vía empírica, como muestran los resultados). Ello confirma lo ya dicho anteriormente.

***V de Itc***

Las respuestas «Cero» a la P4 en $T1^2$ disminuyen notablemente, mientras los casos de respuestas distintas de «Cero» pero, en cualquier caso ingenuas y ligadas, en nuestra opinión, al contexto natural, incluso crecen. Por las entrevistas, resulta que no muchos estudiantes admiten haber sido influenciados en la respuesta a P4 por la precedente P10, pero resulta obvio, por las tentativas de explicación de sus respuestas (distintas de «Cero») a P4, que se da un evidente estado de confusión... Mientras los alumnos de Itis superan tal estado con sus competencias, respondiendo entonces «–∞», los de Itc no parecen tener a la mano, con la misma desenvoltura, un objeto matemático... similar que resuelva el problema; es por ello que se lanzan a enrevesadas respuestas, interesantes y de una ingenuidad que confirma, una vez más, el conflicto entre:

> *Por las pruebas efectuadas, por los resultados expuestos, sobre todo gracias a las entrevistas que se han revelado muy significativas (gracias al clima de confianza que se ha instaurado siempre entre entrevistadores y alumnos), pensamos que podemos confirmar la hipótesis hecha acerca del* contexto natural.

- El contexto natural creado.
- Las competencias matemáticas.
- El conocimiento del hecho de que, existiendo los números negativos, la respuesta «Cero» no se puede dar.

Se dan respuestas como «0,0...» (Stefania), «es un número neutro y el más cercano a cero es 1» (Federico), «un número comprendido quizás entre –3 y +2» (Elisa) (con evidente influencia de la P10 sobre la P4), y otras.

### ¿Qué responden los estudiantes a P4, cuando no responden «Cero»?

A esta pregunta ya hemos dado muchos tipos de respuesta; si bien en las respuestas escritas se detecta una amplia gama, es en las entrevistas personales donde se obtiene la máxima variedad de respuestas posibles.

Más allá de «Cero», «–∞» y «1», que son con diferencia las respuestas más frecuentes, hay otras recordadas: «–0», «–1», «bajo cero», «submúltiplos de 1», «submúltiplos de cero», «–100000000000», «0,1», «$0,\overline{01}$», etc.

Ello nos inclina a pensar que, incluso en alumnos de V superior, por tanto muy cerca de la selectividad y a pocos meses de la elección de una facultad universitaria en que proseguir sus estudios, hay una gran confusión sobre el significado de los números y de su escritura.

La respuesta «–∞» la dan, por escrito, muchos estudiantes de los Institutos con un contenido matemático fuerte; pero tal signo se considera a menudo como un número entero propiamente dicho, confirmando lo encontrado por Shama y Movshovitz-Hadar (1994). No sabemos lo que piensan los profesores que usan este símbolo, pero nos parece una actitud más bien peligrosa la asunción (o la aceptación de la misma) de una idea como esa.

El punto esbozado aquí no forma parte de los objetivos de nuestra investigación (ya suficientemente vasta como para no necesitar añadir otros argumentos) y por tanto nos hemos limitado a citar el problema en esas pocas líneas.

## Discusión de los resultados, respuestas a las preguntas y verificación de nuestras hipótesis

### ¿Existe o no el contexto natural?

Por las pruebas efectuadas, por los resultados expuestos, sobre todo gracias a las entrevistas que se han revelado muy significativas (gracias al clima de confianza que se ha instaurado siempre entre entrevistadores y alumnos), pensamos que podemos confirmar la hipótesis hecha acerca del contexto natural. El hecho de formular las primeras preguntas de un test en lenguaje coloquial, de forma que impliquen cuestiones extraescolares con las que se planteen simples problemas con números naturales solamente, parece remitir a un contexto formado por el par: lenguaje coloquial/números naturales; ello hace que el ámbito al que se van a buscar las respuestas, incluso repetidamente, sea el de los modelos intuitivos ingenuos de los primeros años de escolaridad. Eso parece ser cierto en niveles de escolaridad más bien elevados y con fuerte contenido matemático.

Probablemente, dado el interés de la cuestión sugerida aquí, se deberán realizar otras pruebas, en el futuro, para establecer la importancia real de este fenómeno, sus variables y sus límites. Nos parece que constituye un campo de un cierto interés, en el sentido ya apuntado.

## Gestión de las situaciones de incoherencia

Nos habíamos planteado algunas preguntas que podemos responder ahora.

Como habíamos visto, sobre todo gracias a las entrevistas, el estudiante sometido a una serie de cuestiones tiene un comportamiento resolutivo «local» y

- no está preparado para
- no se siente autorizado a
- no piensa tener que

retornar sobre sus pasos y modificar una respuesta ya dada, de acuerdo con observaciones e informaciones sucesivas.

Es más, esas informaciones parecen ser un hecho implícito, inconsciente; en efecto el cambio entre P4 y P10 ha ejercido un fuerte peso sobre el tipo de respuesta a P4, pero el estudiante no parece ser consciente de ello.

Pero retornemos al título de este apartado.

No podemos sino confirmar las investigaciones de Stavy y Berkovitz (1980) y Hart (1981) sobre la incapacidad de los alumnos de notar situaciones conflictivas y de vivirlas como tales. Confirmamos además las investigaciones de Schoenfeld (1985) y Tirosh (1990) sobre el hecho de que las incoherencias no constituyen para el estudiante situaciones ilícitas. La investigación de Tsamir y Tirosh (1997) se había centrado en una situación de inconsciencia de la incoherencia, en un caso específico sobre el infinito; nosotros pensamos haberlo extendido a otra situación, con otro caso también concerniente al infinito. Se debe hacer notar, por honestidad, que nos parece que los ejemplos en este campo de indagación sobre cuestiones que

*...quizás nuestros alumnos terminan por saber gestionar una matemática muy sofisticada pero, ¿se desinteresan de que haya una explícita contradicción entre dos respuestas suyas?*

conciernen al infinito se deben mirar siempre con cuidado porque las respuestas contradictorias por parte de los estudiantes se hacen difícilmente imputables a algo preciso... Habría pues que proponer ejemplos en campos de investigación de ese género, pero en sectores matemáticos diversos.

Lo más interesante, para nosotros, no son las respuestas escritas; hemos podido constatar que, a menudo, la respuesta escrita a un test se da de forma rápida y tal vez un poco superficial (con las entrevistas se instauran posibilidades de análisis más profundas). Hemos tenido la fortuna de encontrar muchísimos alumnos con ganas de hablar en la entrevista y con una gran sinceridad. Ha sido en la entrevista cuando hemos tenido la clara demostración de que la respuesta «Cero» a la pregunta P4 y la respuesta «+2» a la P10 se consideran contradictorias (ya que en la primera se olvida la existencia de los números negativos, recordados en la segunda) *sólo después que el entrevistador lo hace notar*; pero ni aún entonces parece notarse ninguna clase de molestia, sorpresa y mucho menos deseos de rectificar, modificando una de las respuestas, a fin de hacer coherente la propia posición personal global. Efectivamente, como había ya dicho certeramente Tirosh (1990), estas situaciones de contradicción parecen no sorprender, desagradar o requerir intervenciones correctoras.

Se trata de una llamada de atención sobre una grave laguna de la didáctica de las matemáticas; quizás nuestros alumnos terminan por saber gestionar una matemática muy sofisticada pero, ¿se desinteresan de que haya una contradicción explícita entre dos de sus respuestas?

Nuestra hipótesis nos parece en cualquier caso confirmada. Sobre todo a través de las entrevistas, confirmamos no sólo el que los estudiantes parecen del todo indiferentes al encontrarse frente a una contradición explícita, sino que nos parece confirmado también el hecho de que no se trata (o, mejor, se trate no sólo) de desinterés, ya que además parece intervenir una especie de clausula del contrato didáctico que parece no consentir o no empujar a la revisión de las respuestas propias, una vez dadas; es decir, que las respuestas simples se interpretan como si fuesen cada una independiente de las demás y no pertenecientes a una situación global.

Ciertamente esto trae a colación la metacognición y la capacidad de control y ello explica por qué hemos ligado, desde el inicio, este trabajo al nuestro precedente (D'Amore-Martini, 1997), al que remitimos para detalles mayores sobre este punto específico.

*...parece intervenir una especie de clausula del contrato didáctico que parece no consentir o no empujar a la revisión de las respuestas propias, una vez dadas...*

## Agradecimientos

Damos las gracias a las profesoras Gabriella Bolognini, Carla Gamberini, Laura Giovannoni, Patrizia Ghidini, Grazia Grassi, Annamaria Lonoce, Elisa Menozzi, Maria Ragagni, Patrizia Ricci, Anna Maria Rossini, Luciana Tampieri, Mara Tullini y Maria Cristina Volta, no sólo por habernos permitido realizar las pruebas en sus clases, en horario lectivo, sino también por darnos la posibilidad de efectuar las pruebas en las clases de otras compañeras.

## Bibliografía

ARRIGO, G. y B. D'AMORE (1993): *Infiniti*, Angeli, Milano.

COBB, P. (1988): «Multiple perspectives», *Proceedings ICME VI*, Budapest July-August 1988.

D'AMORE, B. (1994): «Esporre la matematica apppresa: un problema didattico e linguistico», en B. JANNAMORELLI (ed.), *Insegnamento/Apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*, Atti del I Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo 1993, Qualevita, Sulmona. También en *La matematica e la sua didattica*, 3, 1993, 289-301. Una versión ampliada, en alemán: *Journal für Mathematik Didaktik*, 17, 2, 1996, 81-97.

D'AMORE, B. y B. MARTINI (1997): «Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard», *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175. Tambien en: español: *Números* (Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas), 32, 1997, 27-42.

D'AMORE, B. (1997): «Oggetti relazioni e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli», *L'educazione matematica*, enero 1998, en proceso de publicación.

D'AMORE, B. y R. Zan (1996): «Italian Research on Problem Solving 1988-1995», en N. MALARA, M. MENGHINI y M. REGGIANI (eds.): *Italian Research in Mathematics Education: 1988-1995*, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Quaderni CNR, 136-150. Reeditado en A. GAGATSIS y L. ROGERS (eds.) (1996), *Didactics and history of mathematics*, Thessaloniki, 35-52. Reeditado en una versión más amplia en: *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 300-321.

DUVAL, R. (1993): «Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée», *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

HART, K. (ed.) (1981): *Children's understanding of mathematics*, 11-16, Murray, London.

KILPATRICK, J. (1975): en G. KULM (1984): «The classification of problem solving research variables», en G. A. GOLDIN y C. E. MCCLINTOCK (eds.), *Task variables in mathematical problem solving*, Franklin Inst. Press, Philadelphia (Pennsylvania).

LABORDE, C. (1982): *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse, Univ. J.Fourier, Grénoble.

LABORDE, C. (1995): «Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?», en B. JANNAMORELLI (ed.): *Lingue e linguaggi nella pratica didattica,* Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo-aprile 1995, Qualevita, Sulmona, 63-78. Reeditado en *La matematica e la sua didattica*, 2, 1995, 121-135.

LESH, R. (1981): «Applied mathematical problem solving», *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235-264.

LESH, R. (1985): «Conceptual analysis of mathematical ideas and problem solving processes», *Proceedings PME IX*, London.

LESTER, F. K. (1980): «Research on Mathematical Problem Solving», en R. SHUMWAY (ed.): *Research in Mathematics Education*, NCTM, Reston (Virginia).

MAIER, H. (1993): «Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves», *Cahiers de didactiques des mathématiques*, 3, 86-118. Trad. it. en *La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305.

SCHOENFELD, A. H. (1985): *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.

SHAMA, G. y N. MOVSHOVITZ HADAR (1994): «Is infinity a whole number?», *Actas del XVIII PME*, Lisboa, 265-272.

STAVY, R. y B. BERKOVITZ (1980): «Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspects of the concept of temperature», *Science Education*, 28, 305-313.

TIROSH, D. (1990): «Inconsistencies in students' mathematical costructs», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

TSAMIR, P. y D. Tirosh (1997): «Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito», *La matematica e la sua didattica*, 2, 122-131.

**Bruno D'Amore**
**Berta Martini**
Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica.
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

SUMA 30
febrero 1999, pp. 89-96

# Geometría en la ciudad: un recorrido matemático por Zaragoza

José María Sorando Muzas

En esta experiencia, realizada con escolares de 3.° ESO, se les ha propuesto identificar cuerpos y diseños geométricos presentes en el paisaje urbano, clasificarlos y resolver problemas a partir de ellos, conocer hechos y anécdotas vinculados a cada lugar, así como practicar la fotografía, todo ello trabajando en equipo; en suma, un aprendizaje interdisciplinar donde el aula es la ciudad. Los buenos resultados obtenidos alientan para su repetición en nuevos recorridos matemáticos.

IDEAS Y RECURSOS

LA PRÁCTICA docente más habitual en las clases de Matemáticas en ESO consiste en el desarrollo lineal de los temas previstos para cada curso siguiendo, casi siempre, esta secuencia: Aritmética, Álgebra, Geometría, Funciones, Estadística y Azar (si se llega...). No es ésta la única opción didáctica posible (me remito a los artículos publicados en SUMA), y no entraré en considerar si es la más aconsejable, pero desde luego es la más extendida.

Se justifica comenzar con Aritmética y Álgebra considerando que serán necesarias para los cálculos, planteamientos y desarrollos que surgirán en los temas posteriores. Su enseñanza y aprendizaje rara vez se apoyan en otros recursos metodológicos que los tradicionales: explicaciones en pizarra y libro, tomas de apuntes y ejercicios en la pizarra y el cuaderno. A veces se plantean problemas, que ofrecen la posibilidad de una verdadera búsqueda, no ya la simple repetición, pero su resolución se desenvuelve en el mismo circuito: pizarra y cuaderno.

Aunque los enunciados de esos ejercicios y problemas se refieran a hechos de la vida cotidiana, para muchos alumnos no dejan de ser abstracciones que, por ser planteadas y resueltas siempre en el ámbito académico, difícilmente relacionan con su mundo. En tal caso, cuando se aproxima la primera evaluación se desvanecen los buenos propósitos del comienzo de curso y los deseos de aprender ceden ante las estrategias de supervivencia escolar.

## Nuevas oportunidades con la Geometría

En el 2.° trimestre, antes o después, suele aparecer la Geometría y con ella se nos ofrecen nuevas posibilidades. Es posible la manipulación de materiales didácticos: espejos, centicubos, mosaicos, construcciones poliédricas, etc.

Y también es posible el aprendizaje con objetos y en contextos «reales»: simetrías en logotipos publicitarios, propiedades de las formas y optimización en los envases, semejanza en los planos de nuestra casa o del instituto, trigonometría en el paisaje y edificios de nuestro barrio, etc.

Hacer uso de estas posibilidades en cierto modo «rompe» con la ortodoxia o rutina académica anterior. Los propios profesores saludan con ironía al profesor de Matemáticas que, en ausencia de un aula-materia, recorre los pasillos cargado de poliedros, cartulinas y otros cachivaches inusuales o que despliega a sus alumnos por el patio para que midan ángulos y distancias. Y también algunos alumnos acogen estas novedades como algo anecdótico (hasta que comprueban que también son objeto de evaluación).

Pero el principal cambio se produce en la percepción de los alumnos hacia la asignatura. Diríase que se les ha cambiado el terreno de juego y ahora algunos que anteriormente se desenvolvían con desgana se sienten más motivados y, en consecuencia, más hábiles. También se da en algún caso la situación inversa (el desconcierto del «alumno aplicado» ante las novedades) pero la aceptación es rápida. La clase se revitaliza.

Si tras la manipulación y la experimentación se realiza la reflexión, individual y en grupo, sobre lo aprendido así como su abstracción y formalización, se integrarán los nuevos conocimientos con aquellas Matemáticas más «áridas» del comienzo de curso. Es tarea del profesor conducir este proceso para que los alumnos no perciban partes totalmente separadas dentro de la misma asignatura y tampoco asocien importancia con seriedad, banalidad con diversión.

Estos planteamientos pueden ser desarrollados y afianzados en los siguientes temas (Funciones, Azar y Estadística) que ofrecen buenas posibilidades para compaginar la experimentación y la manipulación con el cálculo y la abstracción.

## Cómo surgió la idea

Entre logros y tropiezos, así se iban desarrollando mis clases en 3.° ESO cuando llegó al instituto la convocatoria del «Concurso de fotografía matemática Andalán» que es convocado cada año por el IES Andalán de Zaragoza y va dirigido a los estudiantes de Secundaria de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Informé del concurso a mis alumnos, animándoles a participar. Su reacción fué de sorpresa: «¿Fotografías matemáticas? ¿Qué es eso?». Tuve que mostrarles algunas fotos realizadas por mí, para que vieran que era posible esa extraña combinación. Tras lo cual les pregunté: «¿Conocéis algún lugar de la ciudad donde sea posible realizar alguna fotografía matemática?»... nuevo encogimiento de hombros.

Había que ponérselo aún más fácil, con un ejemplo: «¿En qué lugar de Zaragoza habéis visto, juntas, una esfera y tres pirámides de gran tamaño?»... ni idea. Esto ya era demasiado, pues tal lugar es muy transitado, casi a la puerta de unos grandes almacenes de todos conocidos. Conclusión: estos chicos no conocen su ciudad o la miran sin ver. Así que, atando todos los cabos anteriores, urdí las actividades que a continuación se describen.

*Si tras la manipulación y la experimentación se realiza la reflexión, individual y en grupo, sobre lo aprendido así como su abstracción y formalización, se integrarán los nuevos conocimientos con aquellas Matemáticas más «áridas»...*

## Planteamiento de las actividades

Se entregó a los alumnos la hoja adjunta («Geometría en tu ciudad») en la que se les informaba sobre el sentido, el contenido y las condiciones de realización de las actividades. Cuando, tras su lectura, un grupo de alumnos solicitaba participar, se les entregaba otras cuatro hojas (también se adjuntan) en las que se les planteaban los objetivos que había que localizar y las pruebas en cada uno de ellos. Añadiré algunos comentarios a las mismas:

- Se plantean diez objetivos o lugares que hay que visitar, situados en cuatro plazas muy conocidas de la ciudad, fácilmente accesibles desde el barrio donde viven los alumnos, a pie o con transporte público. Se renunció a otros objetivos posibles que, aunque interesantes, estaban peor comunicados.
- La presentación de cada objetivo mediante un sencillo acertijo no añade apenas dificultad, pero sí un pequeño matiz investigador y aventurero.
- Las pruebas que se deben realizar en cada objetivo incluyen siempre: hacer una fotografía, que constituye la prueba de que el objetivo fue alcanzado, una cuestión sobre conocimiento de la ciudad y un problema matemático. Son pruebas

accesibles para todos los grupos aunque, según se vio, no para todos los alumnos. Se pretende proponer un trabajo que estimule a la participación porque se perciba como posible y sea realizable, contando con las aportaciones de cada uno.

- En esta ocasión apenas se incidió en tratar con los alumnos algunos aspectos de la fotografía como técnica y como medio de expresión y creación. Es una ampliación pendiente.
- Las cuestiones sobre la ciudad tratan desde su gran historia hasta lo anecdótico y obligan a leer rótulos, a consultar la biblioteca o a veces simplemente a preguntar, en un intento por dar significado a cada lugar y así conocer mejor Zaragoza.

*La realización de las actividades en grup se establece como un estímulo para alumnos poco decididos.*

- Los problemas tratan sobre: clasificación de cuerpos geométricos, comprobación de sus propiedades, estimación de medidas, cálculo de costes y relaciones, técnicas de recuento, visión espacial y cálculo de superficies y volúmenes.
- El caracter voluntario y extraescolar de esta experiencia viene dado por su dificultad de organización colectiva en horario escolar: desplazamientos, horarios, control de los grupos; pero también es un requisito necesario para que los alumnos «descubran» los objetivos por sí mismos, sin ir conducidos por el profesor, y resuelvan las pruebas sin imitar a otros compañeros.
- La realización de las actividades en grupo se establece como un estímulo para alumnos poco decididos. Se trata así de un tiempo de trabajo por la calle con amigos, lo cual llega a parecerse bastante a un tiempo de ocio.

(C) J.Mª SORANDO

| ÁREA:MATEMÁTICAS | CURSO 3° E.S.O. |
|---|---|
| TEMA:GEOMETRÍA | SERIE: Convocatoria<br>HOJA: 1 |
| U. DIDÁCTICA: Geometría en la ciudad | |

**GEOMETRÍA EN TU CIUDAD**

**(*Un recorrido matemático por Zaragoza*)**

• Esta actividad es **voluntaria**. Se trata de una sugerencia que libremente puedes seguir o no. Si no la realizas, ello no influirá para nadaen la clase ni en la evaluación. Si la realizas, influirá positivamente en ambas.

• Se desarrolla en el día o días que elijas, fuera del horario escolar, en diversos lugares de la ciudad y sin acompañamiento del profesor. Por ello, antes de decidirte, coméntalo con tus padres y házlas sólo si cuentas con su conformidad.

• Se realiza en grupos, de tres alumnos cada uno, que podéis formar como queráis.

• ¿Qué se pretende?...

*— Que te diviertas, a la vez que aprendes.*
*— Que conozcas un poco mejor la ciudad en que vives: localizando lugares y aprendiendo cosas nuevas sobre ellos.*
*— Que descubras algunos aspectos matemáticos de los edificios y de los monumentos.*
*— Que resuelvas pequeños problemas sobre los lugares que visitas.*
*— Que practiques la fotografía.*
*— Que trabajes en equipo.*

• ¿Qué hay que hacer?

*— Pónte de acuerdo con otros dos compañeros para formar un grupo. Conseguid una cámara fotográfica (¡con carrete!).*
*— Presentaos al profesor como grupo y él os dará las hojas con las pistas y las pruebas a realizar.*
*— Las pistas os van a enviar a cuatro lugares de la ciudad fácilmente accesibles (andando o en bus): Pza. de Europa, Pza. del Pilar, Pza. de Paraíso, Estadio de La Romareda. En cada uno de esos lugares deberéis localizar varios objetos (edificios o monumentos; diez en total) a través de sencillos acertijos.*
*— Como prueba de que habéis alcanzado cada objetivo, deberéis hacerle una fotografía. Esto os obliga a ir a una hora en que haya suficiente luz natural.*
*— En cada uno de los objetivos, además se os plantearán otras dos pruebas:*
*– buscar alguna información sobre él*
*– resolver algún sencillo problema matemático relacionado con él*
*— Una vez cubiertos todos los objetivos que hayáis podido alcanzar, elaboráis un informe en el que se incluyan las fotos y las respuestas a las pruebas.*
*— Al acabar la actividad, los compañeros de clase conocerán los resultados de vuestro trabajo y de los demás grupos.*

• ¿Hasta cuándo se puede hacer?: **hasta el 27 de Marzo** (tenéis cinco semanas para hacerlo), pero...

*— Si hacéis ésas u otras fotos que decidáis presentar al Concurso de Fotografía Matemática "Andalán", el plazo termina el día 11 de Marzo.*

***¡Anímate a recorrer Zaragoza con "ojos matemáticos"!***

(C) J.Mª SORANDO

| ÁREA:MATEMÁTICAS | CURSO 3º E.S.O. |
|---|---|
| TEMA:GEOMETRÍA | SERIE: Prueba |
| U. DIDÁCTICA: Geometría en la ciudad | HOJA: 1 |

### En la Plaza de Europa

**Objetivo 1:** *Doce pequeñas estrellas al gran obelisco. Cuatro grandes estrellas dan luz a toda la plaza.*

**Pruebas:**

**1.a.** Fotografiad cualquiera de estas estrellas.

**1.b.** ¿Por qué son doce las estrellas en el centro de la plaza?

**1.c.** Este cuerpo geométrico se llama *Stella Octángula.*

– ¿Es un poliedro?

– ¿Sus caras son polígonos regulares? ¿Cuántas tiene?

– ¿Cuántos vértices tiene? ¿Cuántas aristas?

– ¿Se cumple la relación "caras + aristas = vértices + 2"?

– ¿Es un poliedro regular?

**Objetivo 2:** *Tras el fondo Sur del estadio, está el que llaman "El Cubo de Urbanismo".*

### En La Romareda

**Pruebas:**

**2.a.** Fotografiadlo.

**2.b.** ¿Pero realmente se trata de un cubo? Fijáos en las fachadas y razonad...

**2.c.** En las inmadiaciones de este lugar, en los últimos veinte años, han sucedido varios acontecimientos televisados a toda España y a otros países (¡no son los partidos del Real Zaragoza!). ¿Cuáles han sido?

(C) J.Mª SORANDO

| ÁREA:MATEMÁTICAS | CURSO 3º E.S.O. |
|---|---|
| TEMA:GEOMETRÍA | SERIE: Prueba |
| U. DIDÁCTICA: Geometría en la ciudad | HOJA: 2 |

### En la Plaza del Pilar

**Objetivo 3:** *En el extremo Este de la plaza, un edificio recubierto con placas de un curioso mineral de color entreverado (es ónice, traído de Irán)*

**Pruebas:**

**3.a.** Fotografiadlo.

**3.b.** En su interior, una escalera desciende al subsuelo de la plaza. ¿Qué se encuentra allí debajo? ¿Qué importancia tuvo este lugar hace 2000 años?

**3.c.** También a este edificio se le llama a veces "El Cubo". Pronto veréis que no lo es. ¿De qué cuerpo geométrico se trata? ¿Cuánto costó el material para su recubrimiento, sabiendo que cada placa de ónice valía 200.000 ptas.? ¿Con cuántas pesetas contribuyó tu familia a ese gasto (a través del presupuesto municipal?

**Objetivo 4:** *Este negro edificio sí es un cubo.*

**Pruebas:**

**4.a.** Fotografiadlo.

**4.b.** ¿Qué uso se da a este edificio?

**4.c.** Calculad de forma aproximada, pero razonada, cuál es su volumen.

**Objetivo 5:** *Sitúate en la Delegación del Gobierno y verás, junto al negro cubo el blanco cilindro.*

**Pruebas:**

**5.a.** Fotografiadlo.

**5.b.** Calculad de forma aproximada, pero razonada, cuál es su volumen

**5.c.** ¿Además de la citada Delegación del Gobierno, qué otros organismos oficiales e instituciones residen en la plaza?

(C) J.Mª SORANDO

| ÁREA:MATEMÁTICAS | CURSO 3º E.S.O. |
|---|---|
| TEMA:GEOMETRÍA | SERIE: Prueba |
| U. DIDÁCTICA: Geometría en la ciudad | HOJA: 3 |

### En la Plaza del Pilar

**Objetivo 6:** *La esfera del mundo, en hormigón.*

**Pruebas:**

**6.a.** Fotografiadla.

**6.b.** ¿En qué año se realizó la última remodelación de esta plaza? Cerca de aquí está grabada la solución.

**6.c.** Calculad de forma aproximada, pero razonada, el volumen de esta esfera. Si los edificios de los objetivos 4 y 5 anteriores fuesen también macizos y de hormigón, para su construcción, ¿cuántas veces se hubiera necesitado en cada uno de ellos el material empleado para esta esfera?

**Objetivo 7:** *En el extremo Oeste de la plaza, ya fuera de ella, un gran rectángulo de cristal azul.*

**Pruebas:**

**7.a.** Fotografiadlo.

**7.b.** Calculad de forma aproximada, pero razonada, cuántos $m^2$ de cristal hay aquí.

**7.c.** Al otro lado, hacia la plaza, cae el agua por una rampa quebrada, hasta un estanque peculiar. Fuente y estanque conforman una forma irregular. ¿Qué representan estas extrañas formas? (Lo veréis si os subís al banco que hay junto al extremo inferior del estanque).

(C) J.Mª SORANDO

| ÁREA:MATEMÁTICAS | CURSO 3º E.S.O. |
|---|---|
| TEMA:GEOMETRÍA | SERIE: Prueba |
| U. DIDÁCTICA: Geometría en la ciudad | HOJA: 4 |

### En la Plaza de Paraíso

**Objetivo 8:** *Una fuente con dieciocho cubos en aparente equilibrio, a la sombra de la gran Caja.*

**Pruebas:**

**8.a.** Fotografiadlos.

**8.b.** Calculad de forma aproximada, pero razonada, cuántas ventanas tiene este gran edificio.

**8.c.** Esta plaza está dedicada a D, Basilio Paraíso. ¿Quién fue ese hombre?

**Objetivo 9:** *Tres altas pirámides custodian una esfera.*

**Pruebas:**

**9.a.** Fotografiadlas.

**9.b.** ¿Qué significado tienen en este monumento estos cuerpos geométricos?

**9.c.** La forma de estas pirámides es algo diferente a las pirámides de Egipto. ¿De que tipo son estas pirámides?

**Objetivo 10:** *Cuatro sabios custodian una puerta sobre la escalinata. Veinte metros a la derecha, sobre la fachada... un triángulo y tres cuadrados forman un esquema geométrico que debes conocer.*

**Pruebas:**

**10.a.** Fotografiadlo.

**10.b.** ¿Qué conocido resultado geométrico se representa con este esquema?

**10.c.** ¿Quiénes son los cuatro sabios de la puerta? ¿A qué se dedicó cada uno de ellos? Si están aquí es porque algo tienen que ver con este edificio. ¿Qué fue y qué es en la actualidad?

## Los objetivos que hay que localizar

Para quienes no conozcan nuestra ciudad comento brevemente cada una de las diez localizaciones (ver también las fotos adjuntas).

***Objetivo 1***: En la Plaza de Europa las grandes torres de iluminación y las pequeñas farolas son columnas coronadas en cada caso por una Stella Octangula. El conjunto reproduce el diseño de la bandera de la Comunidad Europea. Dicha estrella no es un cuerpo geométrico que conocieran los alumnos previamente y debían razonar sobre él a simple vista.

***Objetivo 2***: Junto al estadio de la Romareda hay un edificio prismático rectangular, popularmente mal llamado «cubo». Su apariencia engaña, ¡las caras no son cuadradas!

La última remodelación de la Plaza del Pilar (1991) la sembró de formas geométricas.

***Objetivo 3***: Un controvertido prisma romboidal que da acceso a los restos del Foro Romano de Caesaraugusta. Al estar ubicado en una esquina de la plaza y no ser visible su planta, surgen las dudas: ¿es un rectángulo?, ¿es un rombo?, ¿hay lados iguales?, ¿hay lados paralelos?...

***Objetivo 4***: La Oficina Municipal de Turismo es un hexaedro o cubo.

***Objetivo 5***: El acceso a un aparcamiento subterráneo es un cilindro.

***Objetivo 6***: Una esfera terrestre conmemora los viajes de Colón.

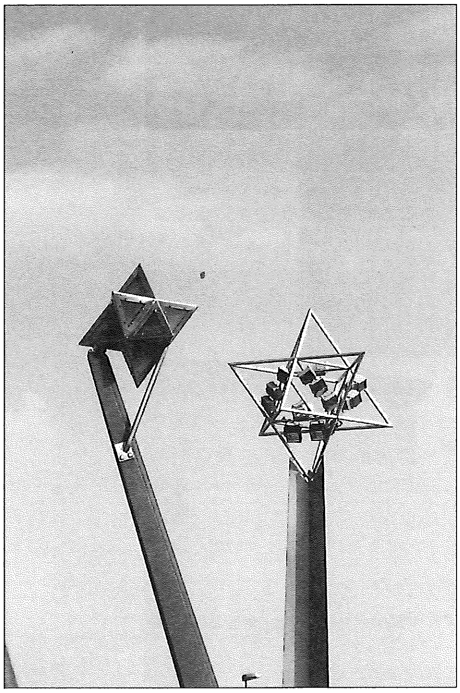
***Objetivo 7***: La Fuente de Hispanoamérica, según el punto de observación que se tome, parece un falso prisma triangular o es un bajorrelieve del mapa americano.

En la Plaza de D. Basilio Paraíso encontramos los restantes objetivos:

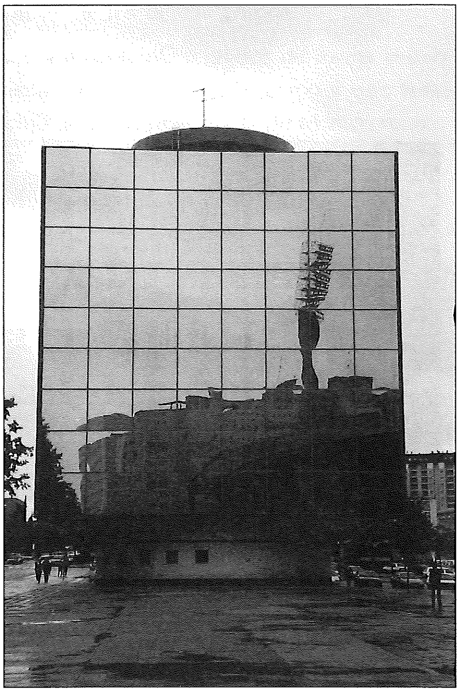
***Objetivo 8***: Una escultura con 18 cubos, a la puerta de un enorme edificio con más de mil ventanas, cuyo recuento se ve favorecido por las simetrías.

***Objetivo 9***: El monumento a la Constitución Española de 1978, simbolizada por una esfera que es custodiada por tres pirámides triangulares oblícuas que, a su vez, simbolizan los tres poderes del Estado.

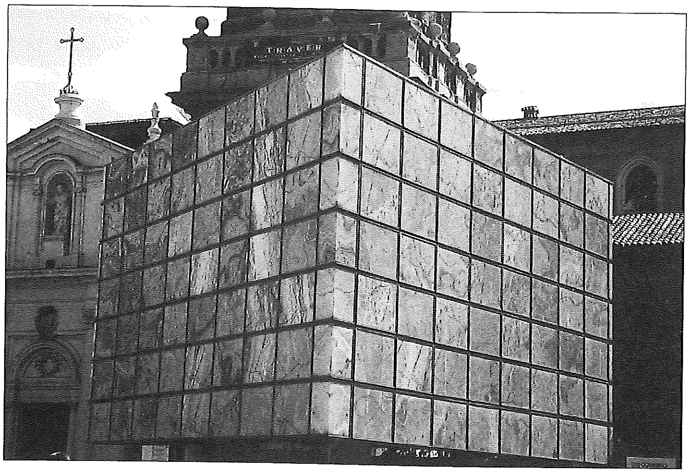
***Objetivo 10***: Por último, en la fachada de la antigua Facultad de Medicina y Ciencias, hoy edificio del Paraninfo de la Universidad, encontramos la representación gráfica del Teorema de Pitágoras.



Objetivo 1

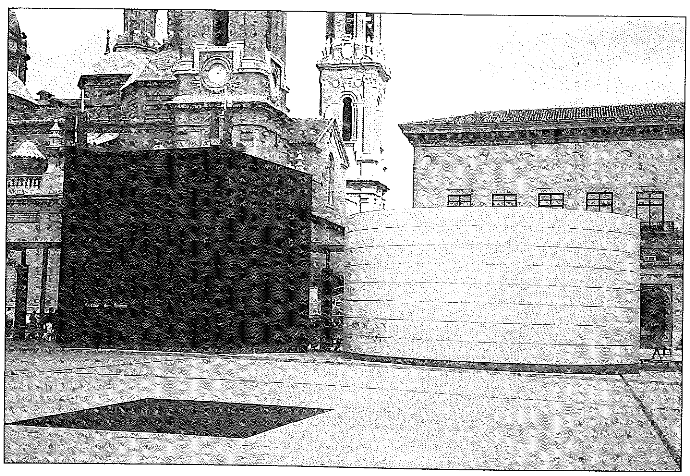


Objetivo 2



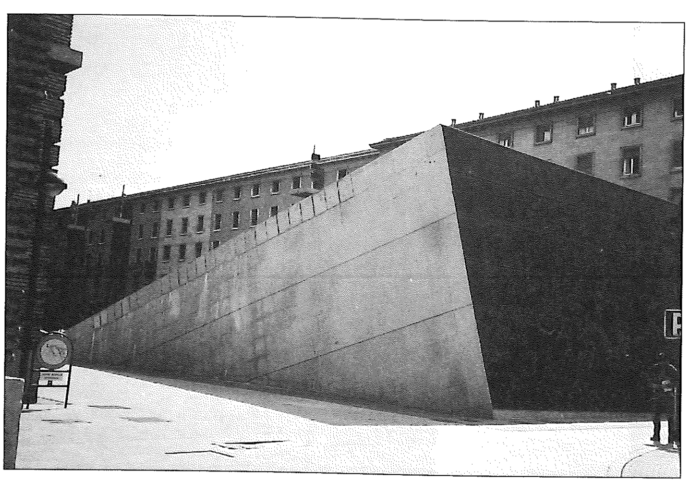

Objetivo 3

Objetivo 6



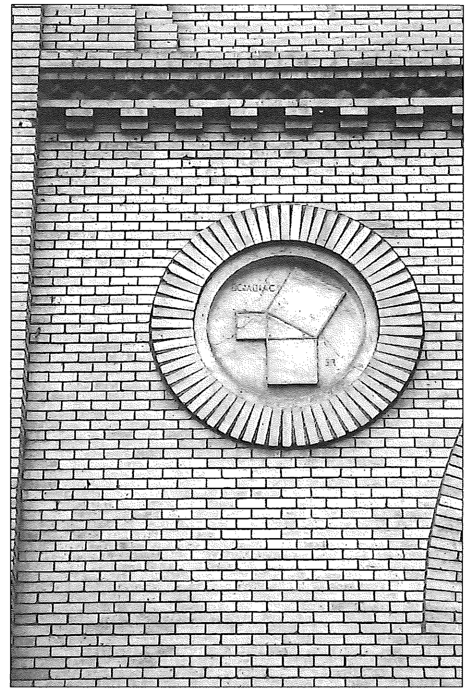
Objetivos 4 y 5

Objetivo 8



Objetivo 7

Objetivo 9



Objetivo 10

## Resultados obtenidos

La experiencia fue propuesta a 62 estudiantes de 3.° ESO. La realizaron 30 (10 grupos), es decir, un 48% del total. Para valorar esta participación, se debe considerar que estos muchachos viven en un barrio alejado del centro y que debieron dedicar dos tardes a las actividades (en algún caso más, pues ¡se veló el carrete!). Y lo hicieron voluntariamente, cuando durante el resto del curso su voluntad ha sido bastante escasa... También hay que comentar que los alumnos que participaron no fueron siempre los más brillantes, habiendo de todo un poco.

En muchos casos los alumnos no resistieron la tentación de incluirse a sí mismos en las fotos matemáticas, cual cazadores orgullosos ante la pieza capturada... y como exponente del buen humor y simpatía que fueron la tónica dominante.

*Se dedicó una clase al comentario de las pruebas y de sus respuestas.*

Fue curioso observar cómo los grupos mantenían el secreto sobre sus avances y averiguaciones, guardándolos a salvo del «espionaje» de los demás grupos.

Los informes finales fueron presentados de forma primorosa. En la división de tareas en cada grupo a que antes aludía, cabe incluir la de escribano y la de técnico en edición informática.

El profesor evaluó y puntuó en cada informe: la localización de cada objetivo; la corrección, precisión y argumentación de la respuesta a cada prueba; y también la ortografía y la presentación. La corrección de todos esos aspectos concluyó en unas notas entre el 6,5 y el 9,5, magníficas para unos alumnos que habitualmente obtienen ¡un 50% de suspensos! (y no sólo en Matemáticas). Dichas notas fueron incorporadas por el profesor a la evaluación de los alumnos que habían realizado la experiencia.

Se dedicó una clase al comentario de las pruebas y de sus respuestas. Fue significativo observar el interés de los alumnos (poco acostumbrado) por las correcciones del profesor, así como la curiosidad de todos, participantes o no, por conocer el trabajo de sus compañeros.

## Conclusiones

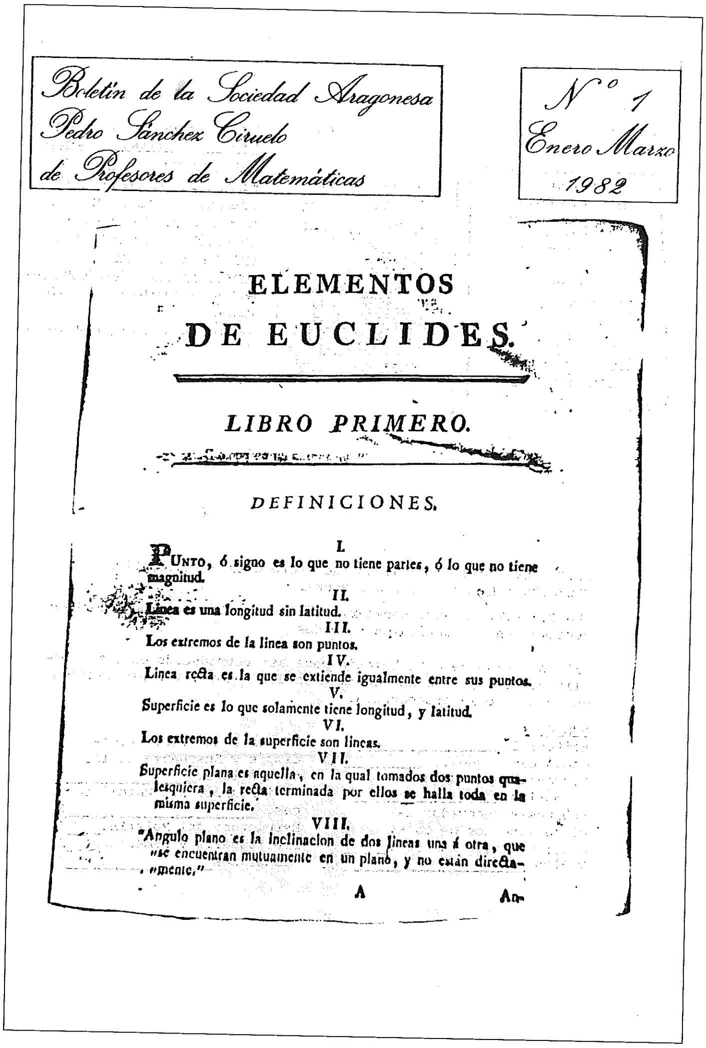
Tras considerar los anteriores resultados parece que el planteamiento general de las actividades resultó bien aceptado y que su nivel de dificultad, aparentemente bajo, era el adecuado para estos alumnos. Por ello se trata de una experiencia que intentaré repetir de nuevo, aunque, al menos durante el próximo curso, con otro recorrido, para soslayar así el «envejecimiento» de una situación didáctica demasiado reciente.

Si alguno de los lectores considera que esta experiencia puede ser aprovechable en su caso, no le resultará difícil trazar algún recorrido matemático en su ciudad. En aquellos lugares donde en la pasada década ha dejado su huella el llamado «urbanismo duro», abundan las formas geométricas. En otros ambientes urbanos siempre es posible un trabajo más centrado en los edificios, las distancias y el plano. En cualquier caso, parece que 2.° y 3.° de ESO son los niveles más aptos para realizarla, considerando no sólo el contenido matemático, sino también la necesidad de desplazamientos de alumnos sin compañía adulta.

Esta experiencia ha sido bastante limitada, tanto en su alcance como en sus pretensiones. No representa a una propuesta global, pero muestra que es posible, y pienso que necesario, dar cabida en la clase de Matemáticas a los enfoques experimental y lúdico, en la medida que cada situación y nuestra propia imaginación lo permitan.

Las Matemáticas serán atractivas para los alumnos si éstos llegan a descubrir que están en su mundo y que pueden ser una búsqueda divertida. Nuestra tarea como profesores consiste en abrir sus ojos a esa «mirada matemática», dentro y fuera del aula.

**José María Sorando**
IES Élaios. Zaragoza
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»


Boletín de la Sociedad Aragonesa Pedro Sánchez Ciruelo de Profesores de Matemáticas

N.º 1
Enero Marzo
1982

ELEMENTOS
DE EUCLIDES.

LIBRO PRIMERO.

DEFINICIONES.

I.
Punto, ó signo es lo que no tiene partes, ó lo que no tiene magnitud.

II.
Linea es una longitud sin latitud.

III.
Los extremos de la linea son puntos.

IV.
Linea recta es la que se extiende igualmente entre sus puntos.

V.
Superficie es lo que solamente tiene longitud, y latitud.

VI.
Los extremos de la superficie son lineas.

VII.
Superficie plana es aquella, en la qual tomados dos puntos qualesquiera, la recta terminada por ellos se halla toda en la misma superficie.

VIII.
"Angulo plano es la inclinacion de dos lineas una á otra, que "se encuentran mutuamente en un plano, y no están directamente."

A An-

*Boletín de la Sociedad Aragonesa Pedro Sánchez Ciruelo de Profesores de Matemáticas*

N.° 1

Enero-Marzo 1982

SUMA 30
febrero 1999, pp. 97-102

# El uso didáctico del Cabri: implicaciones

Liliana Siñeriz
Raquel Santinelli

IDEAS Y RECURSOS

Se presentan algunas actividades tratadas en el aula con alumnos de segundo año de enseñanza secundaria (14-15 años) utilizando el software CABRI GEOMÈTRE, se describen los procedimientos de resolución de los alumnos surgidos a partir de las posibilidades que brinda el programa, y se muestra la forma de trabajo utilizada no sólo para aprovechar didácticamente las bondades del software sino incluso para sacar partido de algunas de sus limitaciones.

DAMOS CUENTA aquí de algunas cuestiones didácticas surgidas en la implementación de una secuencia de enseñanza, donde usamos el CABRI para introducir y trabajar conceptos de geometría elemental. La experiencia se realizó durante 7 meses, bajo la modalidad taller, con 20 alumnos de segundo año (14-15 años) de una escuela secundaria de San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro, Argentina. El uso del CABRI permite plantear situaciones que pueden ser ejemplificadas y modificadas dinámicamente. Esta particularidad facilita la realización en la enseñanza secundaria de algunas actividades propias del método matemático: explorar, observar, comparar, analizar, conjeturar, relacionar, verificar, generalizar, etc.

El objetivo principal de este taller fue iniciar a los alumnos en la «actividad matemática» presentándoles situaciones que les permitían tanto conjeturar definiciones y propiedades a través de la observación de características invariantes de los objetos geométricos, como hacer verificaciones y construcciones sencillas donde se aplicaban los conceptos geométricos introducidos. El enfoque didáctico estuvo orientado permanentemente a lograr que los alumnos llegaran a distinguir la diferencia entre construcciones aproximadas y construcciones exactas, objetos «que cumplen aproximadamente» y objetos «que cumplen exactamente» con las características planteadas en un problema.

Para lograr estos objetivos se diseñó una secuencia de actividades que permitió realizar simultáneamente el aprendizaje de los comandos básicos del CABRI y su aplicación inmediata al estudio de los conceptos geométricos tratados: puntos, rectas, segmentos notables, propiedades y construcciones de triángulos y cuadriláteros, simetrías (axial, central, composiciones). Los estudiantes habían visto en primer año los primeros axiomas geométricos, los conceptos de recta, semirrecta, ángulos, triángulos, mediatriz, bisectriz, altura, criterios de congruencia de triángulos, circunferencia, recta tangente a una circunferencia, circunferencias concéntricas, secantes, tangentes; construcciones de ángulos congruentes y de triángulos usando los criterios de congruencia, circunferencia dado el radio y rectas paralelas usando regla y escuadra.

Para la realización de las actividades los alumnos siempre trabajaron en parejas con posterior discusión general y puesta en común de resultados.

Describiremos en lo que sigue algunas de las actividades propuestas y la forma de trabajo utilizada no sólo para aprovechar didácticamente las bondades del software, sino incluso para sacar partido de algunas de sus limitaciones. Durante el desarrollo del taller se registraron algunas resoluciones realizadas en clase, lo que nos permite reproducir los procedimientos enfocando las estrategias y dificultades surgidas.

*...la forma de trabajo utilizada no sólo para aprovechar didácticamente las bondades del software, sino incluso para sacar partido de algunas de sus limitaciones.*

## Construcciones aproximadas y construcciones exactas

La siguiente actividad fue planteada en la segunda clase, después de haber visto los comandos básicos creación de punto, recta y círculo básico, segmento, recta y círculo por dos puntos, construcción de punto sobre objeto e intersección de objetos:

> *Hallar el centro del círculo básico sin usar el comando existente en el menú.*

Algunos procedimientos de resolución presentados por los alumnos fueron:

*Procedimiento 1*: Se toma un círculo básico y dos puntos $a$ y $b$ sobre objeto en el círculo. Se crea y mide el segmento definido por los dos puntos (cuerda $\overline{ab}$) y se desplaza uno de los puntos hasta obtener la cuerda máxima. Luego se toma su punto medio.

*Procedimiento 2*: Se toma un círculo básico y dos puntos $a$ y $b$ sobre objeto en el círculo. Se crea y mide el segmento definido por los dos puntos (cuerda $\overline{ab}$) y se desplaza uno de los puntos hasta obtener la cuerda máxima. Se toma un punto $x$ sobre objeto en la cuerda. Se crean y miden los dos segmentos $\overline{ax}$ y $\overline{xb}$, y se desplaza $x$ hasta obtener igual medida en ambos segmentos.

*Procedimiento 3*: Se toma un círculo básico y dos puntos $a$ y $b$ sobre objeto en el círculo. Se crea y mide el segmento definido por los dos puntos (cuerda $\overline{ab}$) y se desplaza uno de los puntos hasta obtener la cuerda máxima. De la misma manera se repite este procedimiento con otros dos puntos $c$ y $d$ del círculo, obteniéndose otra cuerda máxima $\overline{cd}$. Se crea el punto intersección de ambas cuerdas (con el comando existente o por aproximación).

Luego de la discusión de los distintos procedimientos, se pidió a los alumnos que verificaran la posición del centro obtenido usando el comando del menú para observar la aproximación lograda.

De la consideración de los procedimientos también surgió que fijando uno de los extremos, la imprecisión de la medida provista por el programa permite obtener una familia de cuerdas «máximas». Dependiendo del tamaño del círculo, el ángulo entre dos cuerdas «máximas» $\overline{ab}$ y $\overline{ab'}$ puede variar de 4° a 30°. Esto fue utilizado para poner de manifiesto que la diferencia entre construcción aproximada y construcción exacta a veces puede ser notable, dependiendo de la naturaleza del instrumento de medición usado. Se rescató entonces la idea de que sólo una construcción exacta resuelve eficientemente el problema, y se señaló que su realización sería retomada más adelante, cuando dispusieran de más conocimientos geométricos.

La siguiente actividad fue propuesta después de trabajar con los comandos de construcción de rectas paralelas y perpendiculares, punto medio y simétrico de un punto:

> *Construir un cuadrado dado el lado.*

En general se utilizaron lados verticales y horizontales (segmentos que aparecen en pantalla «sin escaleras») lo cual de alguna manera asegura, según el caso, perpendicularidad y paralelismo. Esto motivó que luego se les planteara la construcción de un cuadrado en posición oblicua. En la mayoría de los casos, la congruencia de segmentos se verificó midiendo los mismos.

Los siguientes son algunos procedimientos de resolución realizados por distintas parejas de alumnos. El símbolo □ junto a los segmentos y el arco en los ángulos significa que han sido medidos con la opción correspondiente del menú.

*Procedimiento 1*: Se dibuja un cuadrilátero cualquiera y se lo deforma hasta lograr un aparente cuadrado de lados verticales y horizontales. No se verificó la medida de lados ni de ángulos.

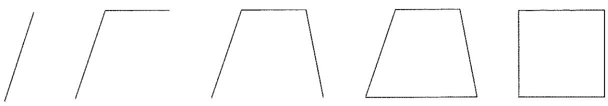


Figura 1

Cuando se les pidió un cuadrado en posición oblicua, aparecieron las alternativas siguientes:

a) Repitieron el mismo procedimiento, sin medir lados ni ángulos.

b) No midieron los lados pero aparentemente eran congruentes, y midieron un par de ángulos opuestos modificándolos hasta lograr que fueran rectos. No verificaron si los ángulos restantes eran rectos. En la discusión general, quedó claro que así lo infirieron.

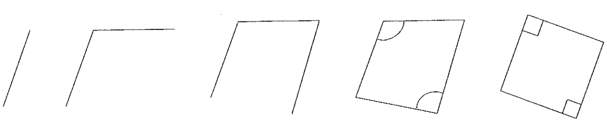


Figura 2

*Procedimiento 2*: Se dibuja un segmento vertical, luego otro horizontal, y así sucesivamente hasta lograr un cuadrilátero que aparentemente es un cuadrado. Se miden los lados para asegurar que sean congruentes. No se verifica que los ángulos sean rectos.

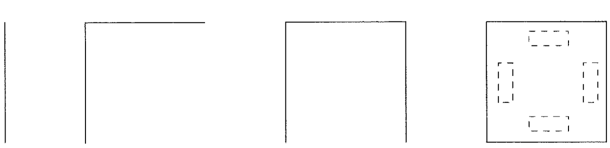


Figura 3

Cuando se les pidió un cuadrado en posición oblicua, dibujaron, a partir de un lado oblicuo, un cuadrilátero con los lados aproximadamente perpendiculares. Midieron los lados, pero no los ángulos. (Dibujaron un rombo que aparentemente era un cuadrado).

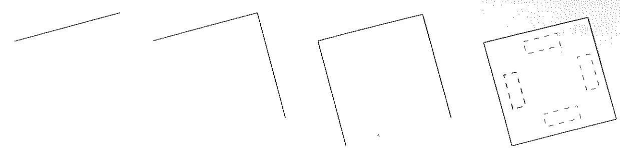


Figura 4

*Procedimiento 3*: Se dibuja un segmento vertical, luego, a partir de cada extremo, se dibuja un segmento horizontal, y por último se unen los dos extremos que quedan libres. Se miden los lados y los ángulos y se van modificando hasta lograr el cuadrado.

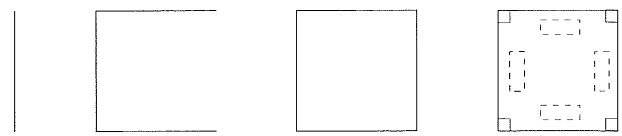


Figura 5

Cuando se les pidió un cuadrado en posición oblicua, repitieron el mismo procedimiento a partir de un primer lado oblicuo.

*Procedimiento 4*: Se traza una recta A por dos puntos *a* y *b*, tratando de que sea horizontal. Se traza una recta B básica también horizontal y se ubica un punto *x* sobre la misma. Se traza una recta C por los puntos *a* y *x*, moviendo *x* para que C quede vertical. Se traza por *b* una recta D paralela a C. Por último, se crea un punto *d*, intersección de B y D. No se miden lados ni ángulos.

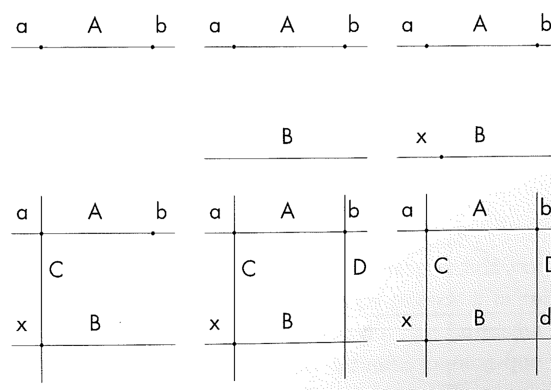



Figura 6

Cuando se les pidió un cuadrado en posición oblicua, repitieron el mismo procedimiento a partir de una primera recta oblicua, y midieron el ángulo hasta obtener el ángulo recto.

*Procedimiento 5*: Se traza una recta R no horizontal por los puntos *a* y *b*. Se traza una recta P paralela a R por un punto exterior *p*. Se hallan los simétricos *a'* y *b'* de *a* y *b* con respecto a P. Se definen y completan los lados del rectángulo *aa'bb'*. Se mueve *a* hasta que $\overline{ab}$ sea congruente con $\overline{bb'}$.

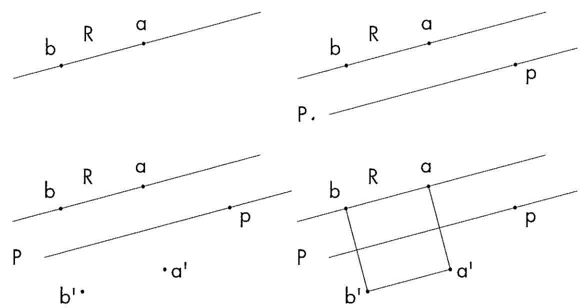



Figura 7

Al realizar la discusión de los procedimientos se vio que la mayoría de las construcciones eran aproximadas, y que el procedimiento 5 a lo sumo llegaba a la construcción exacta de un rectángulo Por eso se les planteó *la construcción de un cuadrado de lado dado, de tal manera que al mover cualquiera de los vértices, la figura cambiara de tamaño pero siguiera siendo un cuadrado.* Con unas pocas indicaciones, una pareja de alumnos que ya había hecho la construcción exacta del rectángulo, logró el siguiente procedimiento:

*Procedimiento 6*: Se traza una recta R horizontal por los puntos *a* y *b*. Se toma como lado del cuadrado el segmento $\overline{ab}$. Por *a* se traza una recta P perpendicular a $\overline{ab}$. Se traza un círculo de centro *a* y radio $\overline{ab}$. Se ubican las intersecciones *c*, *e* y *d* del círculo con las rectas R y P. Se traza el cuadrado *bced*.

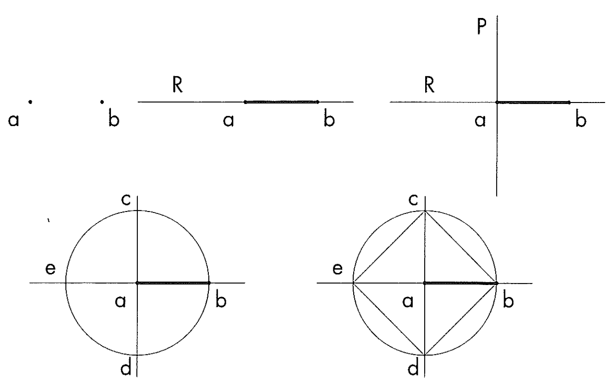



Figura 8

Se les hizo notar que el problema pedía la construcción de un cuadrado de lado dado $\overline{ab}$. Entonces lo resolvieron hallando el simétrico *a'* de *a* respecto de la diagonal $\overline{db}$ obteniendo el cuadrado *aba'd*.

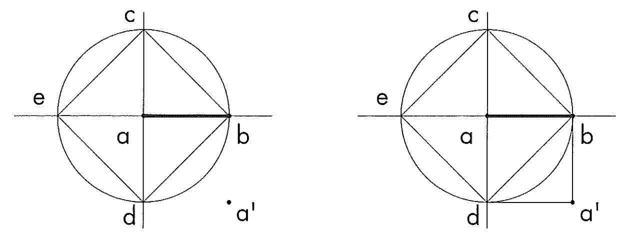



Figura 9

*Al abordar el tema «distancia de un punto a una recta» pretendíamos que los alumnos conjeturaran la definición, a partir del uso del CABRI.*

## Conjeturas de definiciones y propiedades

Al abordar el tema «distancia de un punto a una recta» pretendíamos que los alumnos conjeturaran la definición, a partir del uso del CABRI. En una primera instancia pensamos plantear a los alumnos el siguiente problema:

*Dados el punto p y la recta R, ¿cuál es la distancia del punto a la recta?*

Nuestra hipótesis de trabajo era que los alumnos trazarían varios segmentos desde un punto dado *p* a distintos puntos $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ de la recta y que medirían estos segmentos, o que trazarían un solo segmento $\overline{px}$, con *x* punto sobre objeto en la recta, obteniendo distintas medidas para $\overline{px}$ al desplazar *x*; pensamos que se verían ante la necesidad de seleccionar una de tales medidas, que el criterio más evidente sería elegir la menor, y que, por último, observarían que la longitud mínima corresponde al segmento de perpendicular entre el punto *p* y la recta dada.

Sin embargo, las características del software hacen que no sea posible determinar un único segmento de longitud mínima. En realidad se tiene una familia de segmentos de «longitud mínima», incluido el perpendicular, contenida en un ángulo de vértice *p* de casi 5°. No se puede por lo tanto concluir de aquí que el segmento de longitud mínima entre el punto *p* y la recta R es necesariamente el que se encuentra sobre la perpendicular a R que pasa por $p$. Esta dificultad, que podía convertirse en un obstáculo didáctico en el proceso de aprendizaje, nos llevó a modificar el diseño de clase y a motivar la definición de distancia a través de un ejemplo en la pizarra. La discusión con los alumnos permitió que éstos conjeturaran que la distancia está dada por la medida del segmento de longitud mínima entre el punto y la recta, y que observaran que dicho segmento se encuentra sobre la perpendicular. Una vez enunciada la definición, se les planteó el siguiente problema para resolver usando CABRI:

> *Hallar un punto p que se encuentre a una distancia igual a 6 cm de la recta dada R. ¿Es el único punto que está a esa distancia? Explicarlo.*

Los distintos procedimientos empleados para resolver la primera parte del problema fueron los siguientes:

*Procedimiento 1*: (Este procedimiento fue usado por la mayoría de los alumnos). Se traza una recta R horizontal y un punto $p$ fuera de ella. Luego se toma un punto $x$ sobre objeto en la recta (o un punto $x$ aproximadamente sobre la recta) y se define el segmento $\overline{xp}$. Se modifica la posición de $x$ y de $p$ hasta que se consigue un segmento vertical de 6 cm.

*La discusión con los alumnos permitió que éstos conjeturaran que la distancia está dada por la medida del segmento de longitud mínima entre el punto y la recta, y que observaran que dicho segmento se encuentra sobre la perpendicular.*

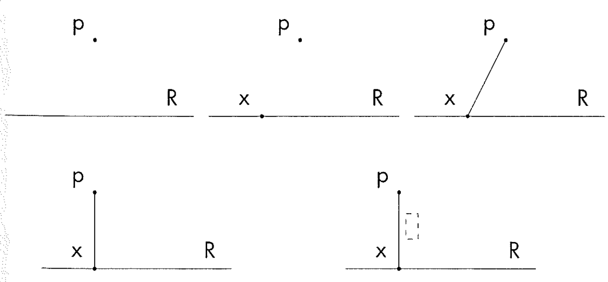



Figura 10

La ausencia de «escaleras» en la recta R y en el segmento $\overline{xp}$ asegura su perpendicularidad, pero esta condición no está explicitada sino usada intuitivamente. En una instancia posterior, cuando se les propuso el mismo problema partiendo de una recta R oblicua, se evidenció que la perpendicularidad no era considerada como parte necesaria de la definición, ya que en la mayoría de los procedimientos no apareció ni el trazado de la perpendicular usando el comando disponible en el menú ni la medición del ángulo.

*Procedimiento 2*: (Este procedimiento, que explicita la perpendicularidad, fue presentado por una sola pareja de alumnos). Se toma una recta R oblicua, por dos puntos $a$ y $b$. Se traza una perpendicular P a R por $a$. Se toma un punto $p$ sobre la recta P. Se define y se mide el segmento $\overline{ap}$ y se mueve $p$ hasta obtener la medida de 6 cm.

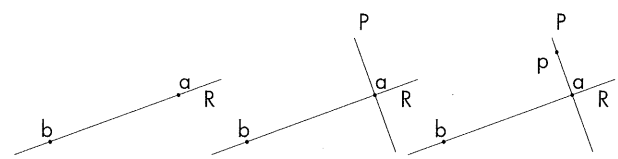



Figura 11

*Procedimiento 3*: (Esta construcción que también explicita la perpendicularidad, fue hecha por sólo una pareja que primero había realizado el procedimiento 1). Se toma una recta R oblicua por dos puntos $a$ y $b$, y un punto $p$ fuera de ella. Se crea y mide el segmento $ap$. Se marca y mide el ángulo $b\hat{a}p$. Se mueve $p$ hasta lograr la medida de 6 cm y el ángulo $b\hat{a}p$ recto.

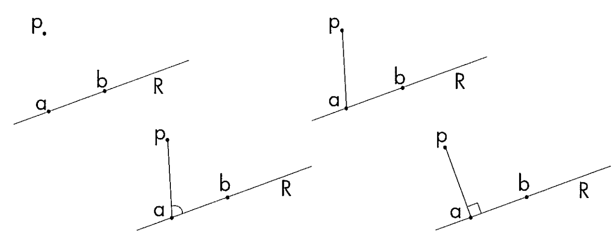



Figura 12

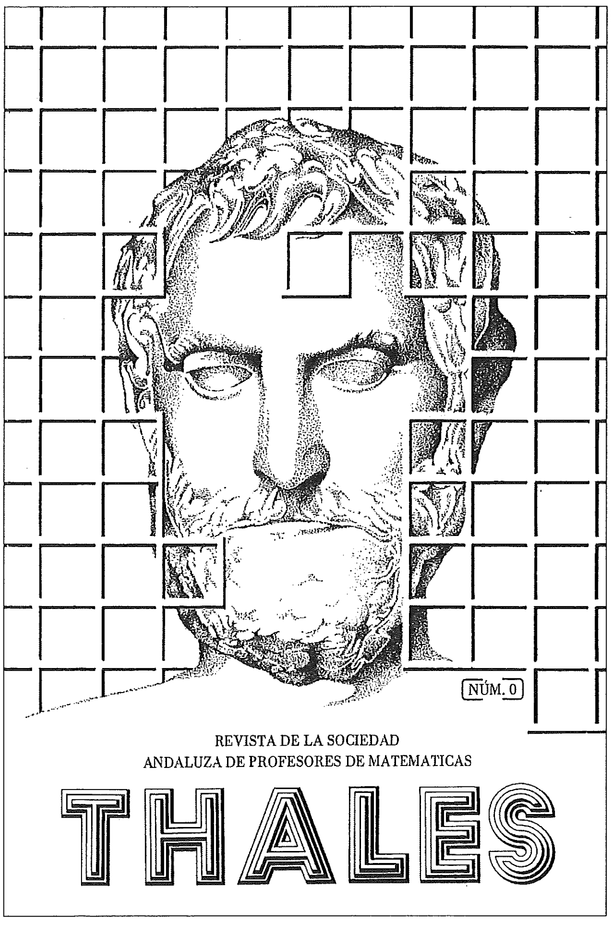
La segunda parte del problema fue respondida con las siguientes expresiones: «hay infinitos puntos a la misma distancia», «existen millones de puntos con la misma distancia respecto a la recta», «hay infinitos puntos que forman una recta paralela a la primera».

## Conclusiones

El trabajo desarrollado en el taller nos ha mostrado que es posible «hacer matemática» en el nivel secundario, y que el CABRI es una herramienta de gran potencial didáctico cuyo uso implica, sin embargo, un cuidadoso análisis de sus posibilidades.

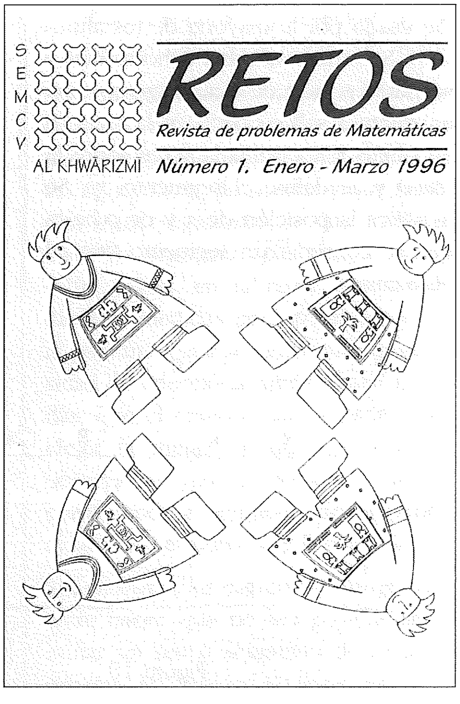
Si bien en algunos casos fue posible utilizar las imprecisiones de medida inherentes al programa, para resaltar la necesidad de recurrir a las construcciones exactas, en otros casos esta dificultad debió ser tenida en cuenta para no introducir un obstáculo didáctico. No siempre la medida sirve para conjeturar definiciones y propiedades, tal como se puede observar en el ejemplo anterior sobre el concepto de distancia de un punto a una recta. Por razones de espacio no desarrollaremos aquí otros ejemplos. Sólo mencionaremos que esta dificultad también se puso de manifiesto al trabajar la composición de simetrías axiales secantes y tratar de conjeturar la relación entre el ángulo de rotación del movimiento resultante con el ángulo entre los ejes de simetría. En este caso el margen de error imposibilitó que los alumnos dedujeran que el ángulo de rotación es el doble del ángulo formado por los ejes.

**Liliana Siñeriz**
**Raquel Santinelli**
Departamento de Matemática.
Centro Regional
Universitario Bariloche.
Universidad Nacional
del Comahue
(Argentina)




*Thales*

Núm. 0




*Retos*

Número 1

Enero-Marzo
1996

SUMA 30
febrero 1999, pp. 103-109

# Trazado de curvas ilustres. Una propuesta con CABRI II

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Inmaculada Llamas Centeno

Después de una breve introducción donde se exponen algunas ideas sobre lo que han supuesto las nuevas tecnologías en la enseñanza y de cómo creen los autores que deben utilizarse en el aula, se muestra una propuesta para tratar distintos lugares geométricos con ayuda del ordenador.
Utilizando el programa CABRI II se propone el estudio y la construcción de ciertas curvas como son los óvalos de Cassini, el caracol de Pascal, la nefroide y la cicloide dibujadas a partir de su definición como lugares geométricos que se completan con otros métodos de construcción utilizando envolventes.
Se intenta ofrecer una visión de las posibilidades del ordenador para facilitar su incorporación al aula, como material a disposición del profesor y del alumno.

IDEAS Y RECURSOS

DESDE HACE AÑOS se habla de la incorporación de las nuevas tecnologías al ámbito educativo, sin que los resultados obtenidos hayan estado en consonancia con la importancia atribuida y con las expectativas que sobre el papel ofrecían para modificar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Calculadoras, vídeo, ordenador y, ahora, también internet y multimedia han entrado en el aula de forma muy diversa y con planteamientos muy variados, encontrando excesivas dificultades, sólo superadas por las iniciativas de los docentes y por el interés que en los alumnos despertaban.

Estos desencantos también han alcanzado a las matemáticas, área que parecía estrechamente ligada con estas tecnologías, que en poco o en casi nada han modificado la metodología y los planteamientos empleados en el aula.

En la utilización de las denominadas nuevas tecnologías, de las que la escuela no puede quedar al margen, pero de las que tampoco podrá esperar que sirvan para solucionar los problemas que la Educación plantea, se deberán evaluar y aprovechar las ventajas y posibilidades que ofrecen, considerándolas como un recurso más a disposición del profesor y del alumno.

Capacidad gráfica, realización de tareas mecánicas, rapidez, facilidad para modificar y obtener nuevos resultados son cualidades a tener en cuenta para fomentar su utilización del ordenador como material de ayuda y de consulta en el trabajo de clase.

Poco a poco han aparecido programas que pueden resultar muy válidos para tratar distintos elementos del currículo y con los que es conveniente familiarizar al alumnado y al profesorado. Será necesario adaptar los contenidos y la metodología para incorporar distintos programas como los de cálculo simbólico, de estadística o de construcciones geométricas, entre otros, de la misma manera que en otras ocasiones se utilizan geoplanos, mosaicos, poliedros u otros materiales tan útiles en el aula como lo es el libro de texto.

Las actividades, que exponemos a continuación, están basadas en el empleo de un programa de trazado geométrico como recurso para el estudio y construcción de varias curvas «ilustres» como una actividad más de ayuda en el desarrollo de los contenidos de geometría, aplicables tanto en Educación Secundaria Obligatoria como en las matemáticas del Bachillerato.

La utilización de un programa de este tipo permite abordar la geometría a través de la experimentación y la manipulación de distintos elementos, facilitando la realización de construcciones geométricas para deducir resultados a partir de la observación directa frente a la deducción abstracta empleada en numerosas ocasiones.

Para realizar las siguientes actividades hemos utilizado CABRI-GÉOMÈTRE en su versión II, aunque, evidentemente, servirá cualquier otro de características similares.

La facilidad de aprendizaje y la sencillez para diseñar y construir ayudarán en la resolución de las distintas actividades planteadas que tan sólo intentan mostrar algunas de las posibilidades que ofrecen estos programas que, utilizados de manera adecuada, serán muy útiles tanto para el profesor como para el alumno.

De cada una de las curvas estudiadas: óvalos de Cassini, caracol de Pascal, nefroide y cicloide, exponemos métodos de construcción basados en la propia definición de la curva como lugar geométrico y, en ocasiones, también a través de envolventes.

Aunque una vez conocida la expresión de una curva, bastará con representarla con un programa adecuado como DERIVE, MATHEMATICA, etc., estudiando a continuación sus propiedades, preferimos aprovechar las posibilidades que CABRI ofrece para simular movimiento a través de la opción Animación o para dibujar directamente el lugar geométrico seleccionado la correspondiente opción, aproximando su construcción al método que, en su día, generó su estudio y descubrimiento.

Deseamos recordar que algunas de las curvas expuestas llevan el nombre o fueron estudiadas por Giovanni Cassini y por Christian Huygens, en cuyo recuerdo se ha bautizado la misión espacial que recientemente ha partido hacia Saturno.

## Óvalos de Cassini

Engloban un conjunto de curvas definidas como el lugar geométrico de los puntos del plano, tales que el producto de las distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante.

*...algunas de las curvas expuestas llevan el nombre o fueron estudiadas por Giovanni Cassini y por Christian Huygens, en cuyo recuerdo se ha bautizado la misión espacial que recientemente ha partido hacia Saturno.*

Si representamos la constante por $b^2$, el lugar geométrico se puede expresar mediante la igualdad

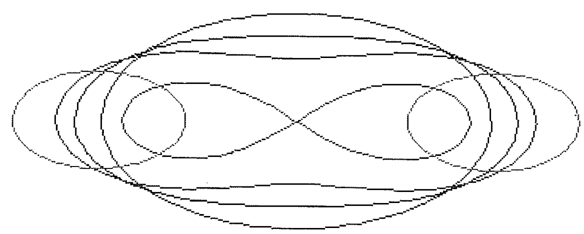
$$PF \cdot PF' = b^2$$

en la que F y F' representan a los focos, tales que FF' = 2a.

La relación entre los valores *a* y *b* determina el tipo de curva que se obtendrá.

- Si $b > a$, la curva será un óvalo que no se corta a sí mismo.
- Si $b = a$, aparecerá la lemniscata de Bernoulli.
- Si $b < a$, representará dos óvalos separados.

Algunos óvalos de esta familia aparecen en la figura 1.



Óvalos de Cassini

Figura 1

Para calcular la ecuación en coordenadas cartesianas de esta familia de curvas bastará con aplicar la expresión de la distancia entre dos puntos en la definición de los óvalos, obtendremos

$$\left[(x-a)^2 + y^2\right]\left[(x+a)^2 + y^2\right] = b^4$$

que, en coordenadas polares, será

$$r^4 + a^4 - 2r^2a^2 \cos 2\theta = b^4$$

Estas curvas fueron estudiadas en 1680 por el astrónomo y matemático francés Jean Dominique Cassini (1625-1712), del que cabe destacar su contribución en el descubrimiento de satélites de los planetas Júpiter y Saturno, y al que en 1672 se le nombró astrónomo real y primer director del Observatorio de París.

Los trabajos de Cassini sobre los óvalos que llevan su nombre se publicaron en 1749 por su hijo en el libro *Elements d'astronomie*.

Para construir los óvalos de Cassini utilizando CABRI, se deben realizar los pasos siguientes:

- Dibujar una circunferencia cuyo diámetro sea la distancia focal FF'.
- Una vez fijado el eje mayor AB, señalar un punto P en la circunferencia.
- Trazar desde el vértice A la semirrecta que pasa por P y que cortará a la circunferencia en el punto Q.
- Con centros en el foco F y en F' dibujar dos circunferencias de radios AQ y AP, respectivamente.

  Los puntos de intersección M y N de estas dos circunferencias serán puntos de la curva.

Una vez activada la traza de los puntos M y N, aplicamos movimiento al punto P a través de la opción *Animación* para obtener la representación de la curva, que podemos observar en la figura 2.

Recordemos que, como alternativa a las opciones *Traza* y *Animación*, se podrá utilizar la opción *Lugar Geométrico* para obtener el lugar representado por los puntos M y N cuando el punto P recorre la circunferencia.

Cuando se utiliza esta última opción, una vez dibujada la curva, podremos desplazar un foco sobre el eje para obtener los distintos tipos de óvalos.

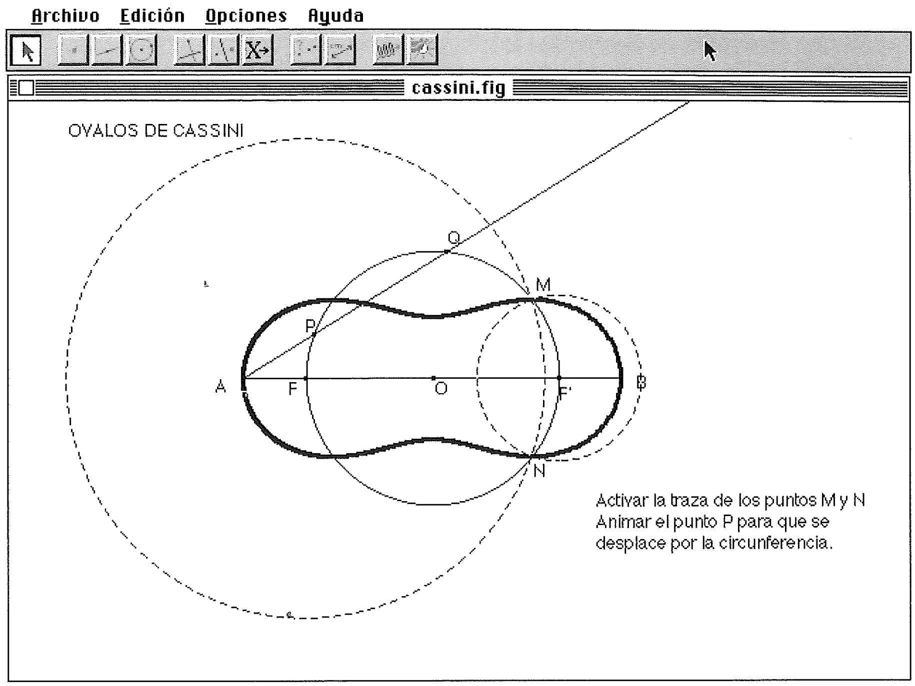



Figura 2

## Caracol de Pascal

Se puede definir como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a los puntos de una circunferencia es una constante, estando la distancia medida en las cuerdas trazadas desde un punto fijo de la propia circunferencia.

Al trazar una cuerda con origen en el punto A de una circunferencia, la cortará en otro punto que representamos por M. Los puntos P y Q de la semirrecta AM que cumplen la condición

$$PM = QM = b$$

pertenecen al caracol de Pascal, siendo *b* la constante.

*El caracol recibe su nombre de Etienne Pascal (1588-1651) padre de Blaise Pascal, aunque también fue estudiada por Gilles Personne de Roberval (1602-1675).*

La expresión en coordenadas cartesianas de esta curva es

$$\left(x^2+y^2-2ax\right)^2 = b^2\left(x^2+y^2\right)$$

siendo *a* el radio de la circunferencia y *b* la constante que determina la distancia de los puntos.

En coordenadas polares el caracol se expresa por la igualdad:

$$r = b + a\cos\theta$$

Al igual que ocurre con los óvalos de Cassini, las expresiones anteriores determinan una familia de curvas, ya que según la relación existente entre los valores *a* y *b* obtendremos distintas curvas, algunas con denominación propia.

Así cuando b = 2a, aparece una *cardioide* y para b = a se obtiene la curva denominada *trisectriz*.

El caracol recibe su nombre de Etienne Pascal (1588-1651) padre de Blaise Pascal, aunque también fue estudiada por Gilles Personne de Roberval (1602-1675).

Para realizar la construcción, según la propia definición, realizaremos las operaciones siguientes:

- Sobre una circunferencia fijar el punto A y un punto M que se desplazará sobre ella.
- Trazar la semirrecta AM.
- Una vez fijado el valor de b, dibujar una circunferencia con centro en M y radio b.
- Señalar los puntos P y Q de intersección de esta circunferencia con la semirrecta AM, que determinan el caracol de Pascal.

Al activar la traza de los puntos P y Q representados en la figura 3, y aplicar a continuación animación sobre el punto M obtendremos la representación de la curva.

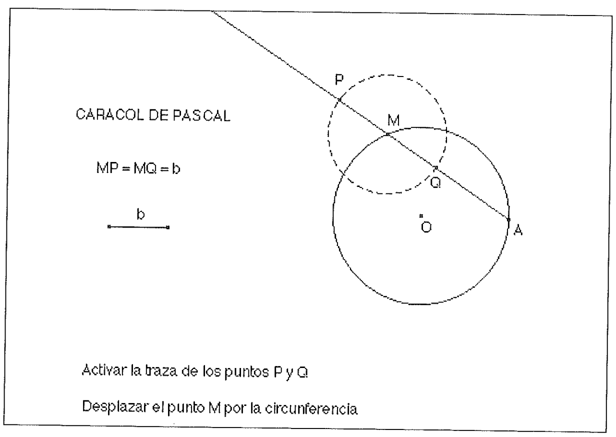



Figura 3

Otro procedimiento para obtener esta curva consiste en fijar un punto A en el plano y un punto M en una circunferencia, trazar la circunferencia con centro en M y radio AM y construir el lugar geométrico descrito por esta circunferencia cuando M recorre la circunferencia inicial (Figura 4).

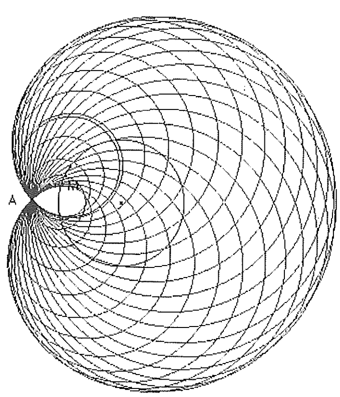



Figura 4

Cambiando la posición del punto A, observaremos los efectos que produce en el lugar geométrico, obteniendo como caso particular la cardioide cuando el punto A está en la circunferencia.

El caracol de Pascal también se puede obtener como la curva podaria de una circunferencia con respecto a un punto del plano.

Partiendo de una situación análoga a la anterior, un punto M de una circunferencia y un punto exterior A, trazamos la perpendicular por el punto A a la recta tangente a la circunferencia en el punto M. El punto P, intersección de las dos rectas, es un punto de la curva que se completará al mover el punto M en la circunferencia. (Figura 5).

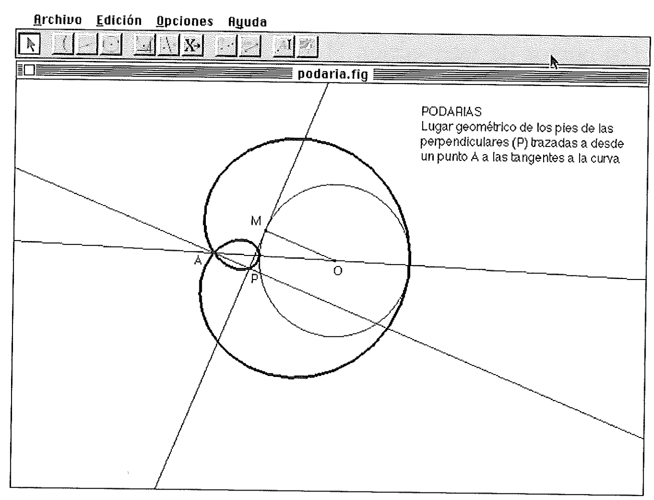



Figura 5

Evidentemente, cuando el punto A también es de la circunferencia, aparecerá la cardioide representada en la figura 6.

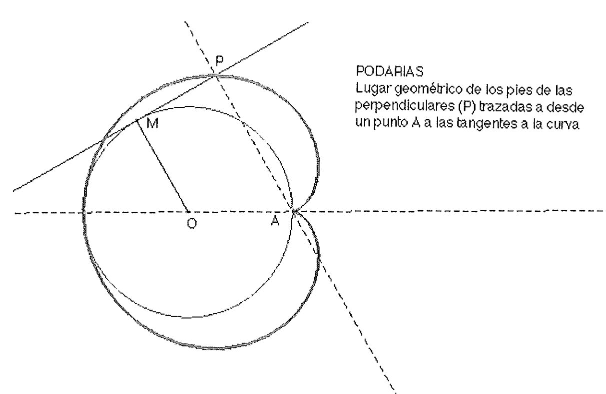



Figura 6

## Nefroide

Definida como el lugar geométrico descrito por un punto fijo de una circunferencia de radio *a* (circunferencia generatriz) que se desplaza, sin resbalar, sobre el exterior de una circunferencia de radio 2a (circunferencia directriz).

La nefroide pertenece a una familia de curvas denominada *epicicloides*, generadas como los lugares geométricos descritos cuando la circunferencias generatriz y directriz tienen radios *a* y *b*, respectivamente.

La cardioide, citada en el apartado anterior, pertenece a esta familia ya que se puede obtener cuando los radios de las dos circunferencias son iguales.

Para representar en forma paramétrica una nefroide, escribiremos

$$x = a(3\cos t - \cos 3t)$$
$$y = a(3\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t)$$

que en coordenadas cartesianas se expresa por

$$(x^2 + y^2 - 4a^2)^3 = 108a^4y^2$$

El nombre de nefroide se lo dio en 1878 el matemático inglés Richard A. Proctor (1837-1888), aunque, su estudio se realizó en 1679 por Christian Huygens (1629-1695), científico holandés cuyos trabajos sobre lentes le sirvieron para descubrir los anillos y un satélite de Saturno. Inventó el reloj de péndulo en 1656 y en 1673 publicó las leyes del péndulo y varios teoremas sobre la fuerza centrífuga.

Para obtener su trazado realizamos los siguientes pasos:

- Trazar una circunferencia *c* y marcar un punto H en *c*.
- Dibujar el segmento AB y un punto S en él.
- Definir utilizando *Transferencia de medidas*, el punto M en la circunferencia tal qe la distancia del arco HM sea igual a la del segmento AS.
- Dibujar la circunferencia tangente a la anterior en el punto M cuyo radio sea la mitad del radio de la circunferencia *c*.
- Señalar en esta nueva circunferencia el punto P que describirá el lugar geométrico.
- Activar la traza del punto P y animar el punto S que se desplazará por el segmento.

Como alternativa al último paso, se podrá utilizar la opción *Lugar Geométrico* para obtener el lugar descrito por el punto P cuando S recorre el segmento.

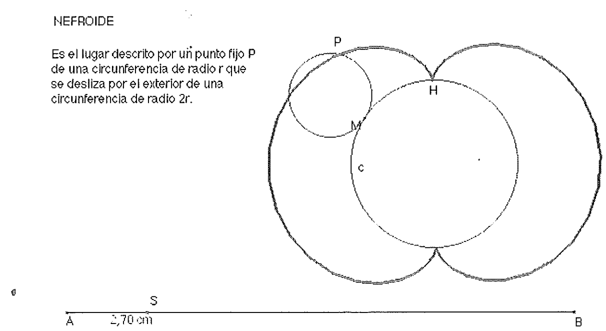



Figura 7

También se puede obtener una nefroide como envolvente de un conjunto de círculos ($c_1$ y $c_2$ en la figura 8) tangentes al diámetro MN de una circunferencia.

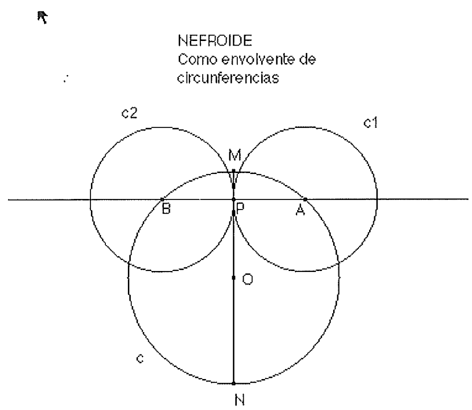



Figura 8

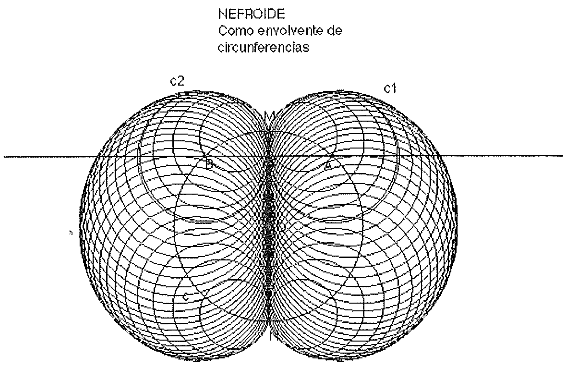



Figura 9

Además, podrá trazarse como envolvente de un diámetro (AB en la figura 10), de una circunferencia que se desliza, sin resbalar, por el exterior de otra circunferencia de igual radio.

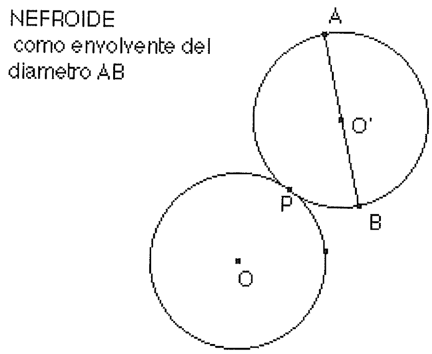



Figura 10

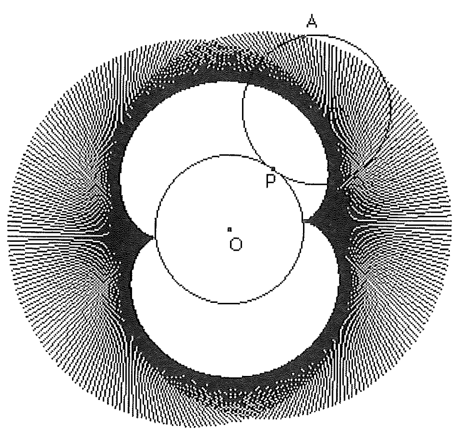



Figura 11

Con similares construcciones dibujaremos circunferencias de radios distintos para obtener nuevas curvas de la familia de epicicloides, así como para determinar que lugar geométrico se dibujará cuando una circunferencia se desplaza sobre el interior de otra circunferencia.

## Cicloide

A esta curva se le llamó la «Helena de los geómetras» por las continuas disputas que su estudio ocasionó en el siglo XVII.

Definida por Mersenne (1588-1648) en 1615, aunque conocida anteriormente, como el lugar geométrico que describe un punto fijo de una circunferencia (rueda) que gira sobre una recta (suelo).

*A esta curva [cicloide] se le llamó la «Helena de los geómetras» por las continuas disputas que su estudio ocasionó en el siglo XVII. Definida por Mersenne (1588-1648) en 1615, aunque conocida anteriormente, como el lugar geométrico que describe un punto fijo de una circunferencia (rueda) que gira sobre una recta (suelo).*

El interés por esta curva está basado en una paradoja de Aristóteles: «¿Por qué dos circunferencias concéntricas, recorren una distancia igual si se les hace girar según una circunferencia y recorren distancias proporcionales cuando se les hace girar separadas?»

Si el radio de la circunferencia es $a$, las ecuaciones paramétricas de la cicloide se expresan por las igualdades

$$x = a(t - \mathrm{sen}t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

Denominada cicloide por Roberval, fue estudiada por Galileo (1564-1642) que intentó calcular el área encerrada por un arco de curva utilizando para ello procedimientos mecánicos, obteniendo una buena aproximación del resultado que establece que el área encerrada bajo un arco de curva es tres veces el área del círculo que la genera.

Sin lugar a dudas, podemos afirmar que esta curva despertó pasiones entre los matemáticos del siglo XVII, como lo prueba que en su estudio, además de los ya citados, intervinieron Torricelli (1608-1647), Fermat (1601-1665), Descartes (1629-1695), Huygens e, incluso, Pascal (1623-1662), que llegó a proponer un concurso sobre esta curva, planteando una serie de cuestiones sobre propiedades que él ya había descubierto. El concurso se declaró desierto y Pascal publicó sus trabajos.

Para dibujar la cicloide y simular el movimiento de la circunferencia sobre una recta, realizaremos los pasos siguientes:

- Trazar una semirrecta cuyo origen será un punto A.
- Sea P un punto en la semirrecta.
- Fijado el radio r, trazar la circunferencia generatriz tangente en el punto P a la semirrecta.
- Utilizar la opción Transferencia de medidas para obtener un punto M en la circunferencia, tal que el arco PM sea igual al segmento AP.
- Dibujar el punto N simétrico de M con respecto a la perpendicular a la semirrecta en P.

La cicloide, representada en la figura 12, es el lugar geométrico del punto N cuando P recorre la semirrecta.

Indicaremos que el punto N es necesario ya que, por la forma en la que CABRI realiza la transferencia de medidas, el punto M se genera midiendo a la derecha de P, por lo que, si dibujamos el lugar geométrico de M, obtendríamos una cicloide invertida.

La cicloide puede considerarse dentro de una familia de curvas a la que pertenecen la cicloide prolongada generada por un punto de una circunferencia concéntrica con la circunferencia generatriz y la cardioide acortada obtenida cuando el punto pertenece a un circunferencia concéntrica interior con la generatriz.

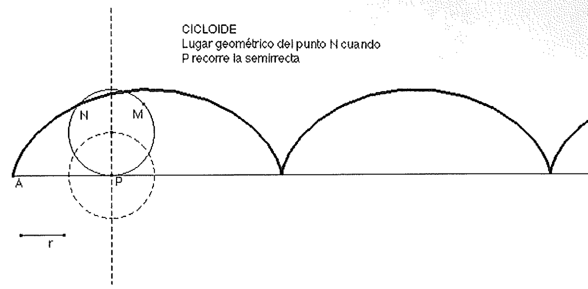



Figura 12

**Agustín Carrillo**
Centro de Profesorado
de Linares-Andújar.
**Inmaculada Llamas**
IES Jándula de Andújar.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

## Bibliografía

BOYER, C. B. (1987): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

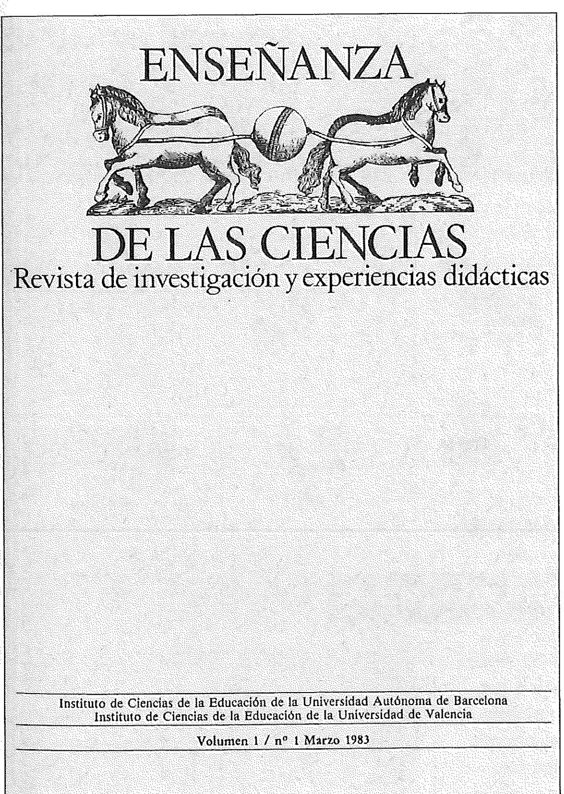
CARRILLO DE ALBORNOZ, A. e I. LLAMAS (1997): *Geometría con CABRI II*, Centro de Profesores, Andújar (Jaén).

DURÁN, A. J. (1996): *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Universidad, Madrid.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. I y II*, Alianza Editorial, Madrid.

RÍO SÁNCHEZ, J. del (1994): *Lugares geométricos. Cónicas*, Síntesis, Madrid.

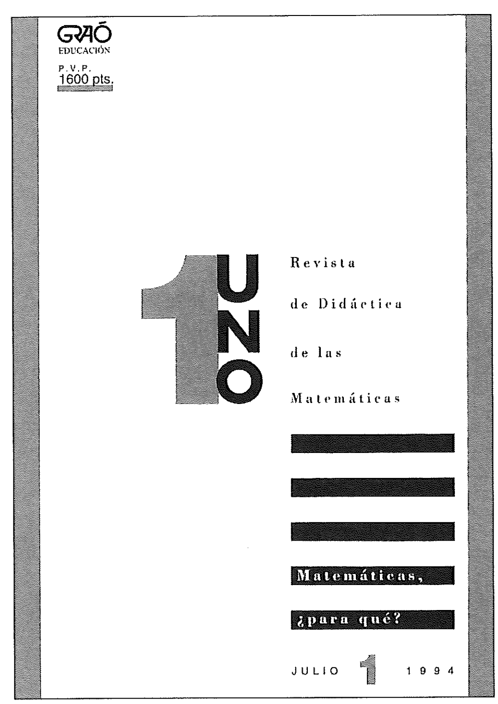
WUSSING, H. y W. ARNOLD, (1989): *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza.




*Enseñanza de las Ciencias*

Volumen 1/n.° 1

Marzo 1983




*UNO*

n.° 1

julio 1994

# 9as

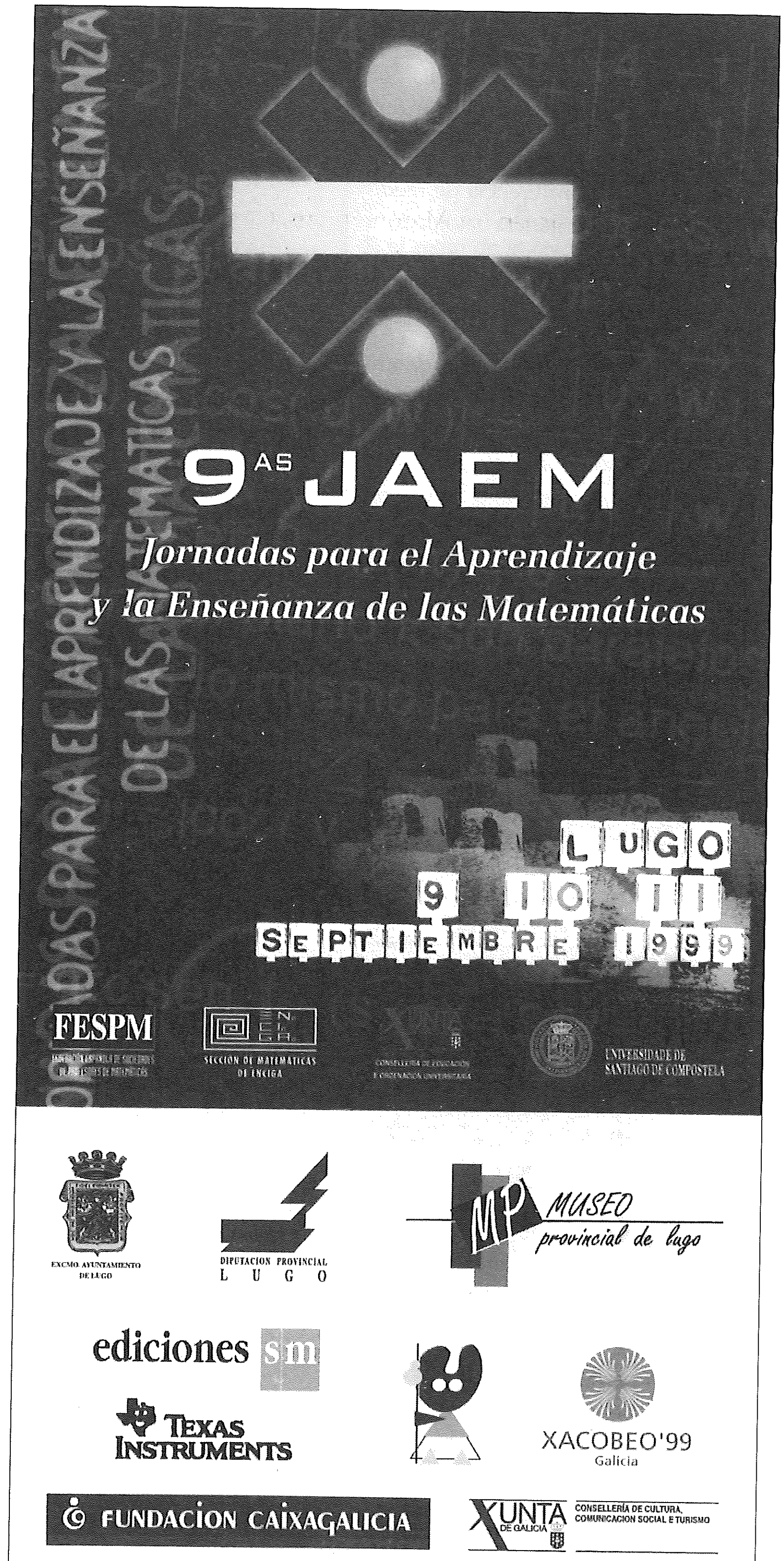
# J

# A

# E

# M

# LUGO



SUMA 30
febrero 1999, pp. 111-120

# Mosaicos. Movimientos en el plano

Antonio Bermejo Fuertes

IDEAS Y RECURSOS

En el artículo se muestran unos materiales con los que se invita al profesorado a compartir, en el departamento de Matemáticas, el estudio y resolución de algunos problemas concretos del currículo del 2.° ciclo de la ESO, que hacen referencia a formas poligonales y a movimientos en el plano. Se trata de aportar ideas concretas que puedan ser de inmediata aplicación en la práctica. Además, el análisis de materiales, llevado a cabo por un grupo de profesores, es la mejor garantía de investigación y de reflexión sobre su uso, pudiendo servir, por una parte, como referencia para una posterior elaboración propia y, por otra, más importante, para posibilitar una reflexión sobre la práctica diaria en el aula.

EN LA LOGSE se insiste una y otra vez en que disponemos de un currículo abierto; es decir, un proyecto, un plan de acción en el que no todo está decidido, sino que hay muchas decisiones que deberán ser tomadas por el equipo de profesores de cada centro, en primer lugar, y después y, como consecuencia de ello, por el profesor en cada aula. Estas decisiones, como es lógico, se irán viendo reflejadas en la práctica diaria; de lo que se deriva la importancia de organizarla coherentemente y, en consecuencia, también los materiales que vayamos a utilizar.

Los profesores tenemos que ser conscientes de que establecer la labor diaria del aula (lo que quiere decir, determinar claramente qué queremos que nuestros alumnos aprendan y mediante qué actividades intentaremos que se consiga este aprendizaje) no se puede dejar a la intuición ni a la simple imitación del libro de texto; y aunque el uso de este material sigue siendo prioritario en las aulas, es importante que no sea el único referente curricular.

Por materiales curriculares podemos entender todos aquellos recursos que ayudan al profesorado a adoptar decisiones en el proceso de enseñanza/aprendizaje. Su utilización, como ya se ha indicado anteriormente, necesita de unos acuerdos previos, primero en el claustro, y después en el seminario o departamento, que permitan dar coherencia a la actividad educativa del centro. Su función no es, por tanto, definir para el profesorado las intenciones educativas (ya que éstas tienen que fijarse previamente mediante los Proyectos del Centro), sino ayudarle a llevarlas a la práctica. Por este motivo no se deberían aplicar sin más materiales ya elaborados por otras personas, siendo fundamental que, previamente a su utilización, los profesores de cada centro reflexionen sobre la posible validez de cara a su centro y a sus alumnos, estudien los fundamentos de cada propuesta, los valoren y, posteriormente, decidan sobre su uso inmediato o posible modificación.

Además de los libros de texto, es conveniente contar con materiales diversos, de distintas características (guías didácticas, ejemplos de programaciones, ejemplos de actividades, trabajos elaborados por alumnos, libros de consulta, cuadernos de trabajo, etc.) que, utilizados de una forma flexible, permitan adecuarse al contexto, a las características de los alumnos, a los objetivos, a los contenidos y al enfoque metodológico que el centro haya adoptado.

*Un tema muy actual en los medios educativos es distinguir entre lo que es útil de aprender y lo que es deseable de enseñar,... lo extraordinariamente inútil es aquello no adecuado ni al nivel ni a la capacidad del que aprende (Claudi Alsina, 1987).*

En este proceso es importante una autoformación del profesor, centrada, prioritariamente, en la reflexión sobre la propia práctica educativa, buscando la forma de que los alumnos estén más motivados y trabajen con mayor entusiasmo. Esto sólo se consigue ensayando, planteando situaciones de aprendizaje distintas, buscando respuestas nuevas a los problemas cotidianos que se presentan en el aula. Además, este proceso es mucho más fértil cuando se realiza con los demás compañeros del centro, a través de un trabajo en equipo, lo que propicia un enriquecimiento mutuo mediante un trabajo compartido en el que se pueden discutir y coordinar acciones, planificando la práctica educativa en común y siendo capaces de llegar a tomar decisiones que respondan a criterios consensuados.

El material que se presenta a continuación se encuadra en el Bloque 3.° «Representación y organización en el espacio» de la Educación Secundaria Obligatoria. Está pensado para el 2.° ciclo, y puede ser útil como un primer paso para entrar en el estudio de la Geometría. Es un tema que puede considerarse muy motivador para los alumnos ya que los conceptos geométricos aquí elaborados son accesibles para cualquier alumno del ciclo 14 a 16 años; además para empezar a trabajar se necesita muy poca información y no es difícil ir encontrando resultados parciales, en los que cada alumno, de acuerdo con sus posibilidades, interviene con mayor o menor profundidad.

Los objetivos que se deben conseguir, su concreción en el aula (objetivos didácticos), así como los contenidos que hay que enseñar para alcanzar dichos objetivos, se explicitan en el cuadro 1.

En el cuadro 2 se presenta un mapa conceptual con contenidos conceptuales. Estos mapas son modelos que sirven para representar conceptos y las relaciones que se dan entre ellos. Su elaboración potencia el pensamiento reflexivo, la creatividad y el espíritu crítico. Asimismo, favorecen el pensamiento divergente al permitir interrogarnos sobre las propiedades de un concepto: qué es, para qué sirve, cómo funciona, dónde está... Cuando son discutidos y construidos en grupo ayudan a compartir significados.

Su uso, aunque presenta en un principio ciertas dificultades y son precisas ciertas técnicas para su elaboración, permiten, en compensación, estructurar de manera clara y precisa todos los con-

**Objetivos**

- Resolver problemas de clasificación, trazado o combinación de formas poligonales.
- Saber trazar y clasificar mosaicos y decoraciones del plano.
- Apreciar las cualidades estéticas, creativas y geométricas inherentes a las decoraciones artísticas del plano basadas en repeticiones.
- Utilizar las isometrías, analizando su potencial generador en las formas geométricas.

**Objetivos didácticos**

- Desarrollar estrategias de búsqueda de figuras que rellenen el plano.
- Utilizar correctamente el libro de espejos en la obtención de mosaicos.
- Describir la obtención de «mosaicos especiales».
- Obtener transformaciones de figuras planas a partir de diseños o creaciones artísticas.
- Identificar las isometrías o movimientos del plano, sabiendo utilizarlos y comprendiendo sus propiedades fundamentales.
- Confiar en las propias capacidades para percibir las construcciones planas.

**Contenidos conceptuales**

- Mosaicos. Mosaicos regulares.
- Retículas regulares que rellenan el plano: triangular, cuadrada y hexagonal.
- La retícula rómbica.
- Mosaicos semirregulares.
- Mosaicos semirregulares congruentes. Los ocho modelos.
- Isometrías básicas: simetrías, traslaciones y rotaciones o giros.
- Composición de isometrías básicas.

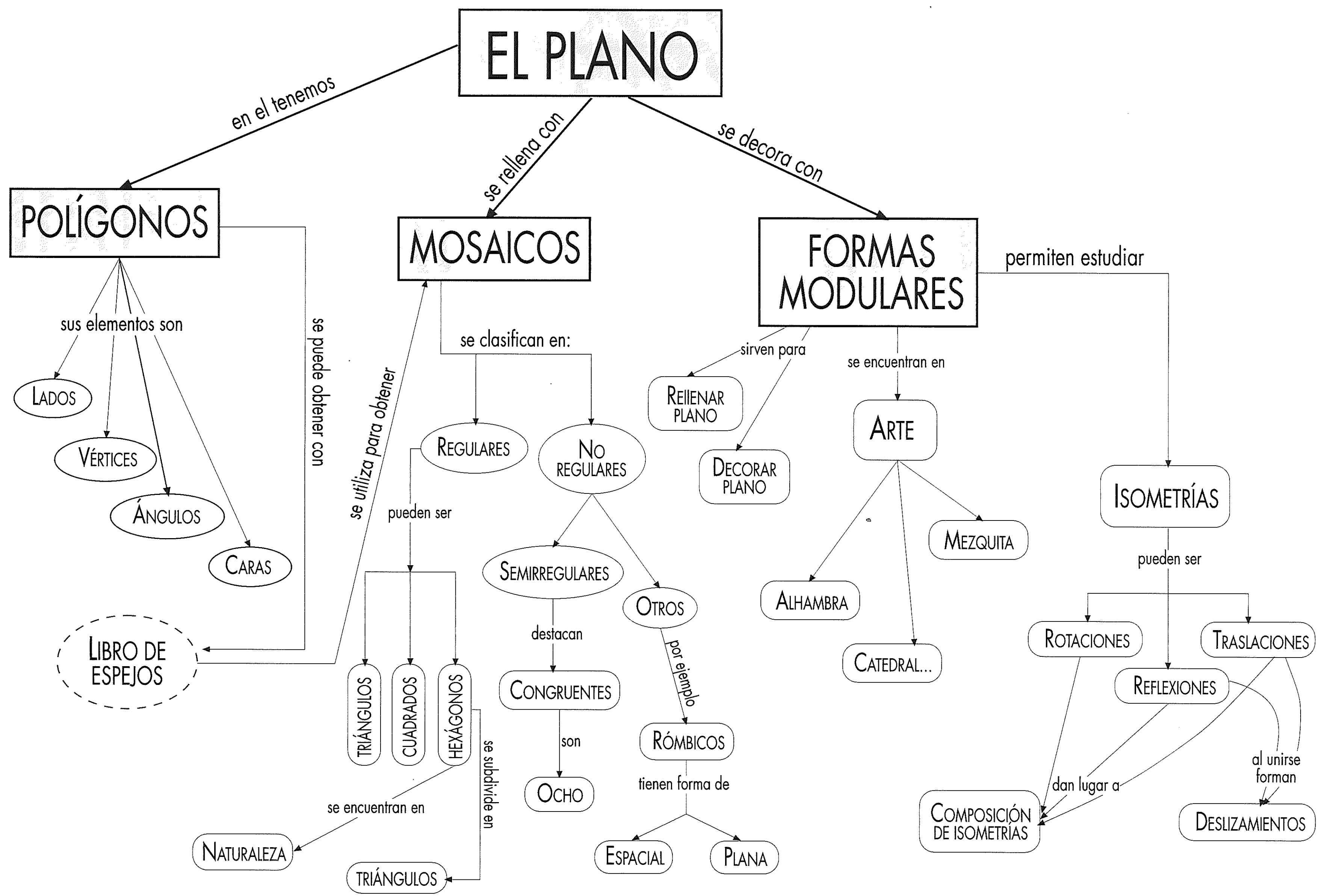
**Contenidos procedimentales**

- Manejo de figuras planas para la comprobación de conjeturas.
- Uso del libro de espejos para la obtención de mosaicos.
- Confección de la red triangular, cuadrada y hexagonal.
- Construcción de figuras planas a partir de una dada utilizando los movimientos.
- Comprobación de propiedades que caracterizan los mosaicos utilizando movimientos.

**Contenidos actitudinales**

- Apreciar la belleza derivada de la repetición rítmica geométricamente de motivos planos.
- Valoración de las cualidades artísticas de los mosaicos y de su uso reiterado a lo largo de la historia del arte.
- Curiosidad e interés por investigar sobre configuraciones y formas generadas dinámicamente.
- Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
- Valoración del trabajo coperativo en equipo.

Cuadro 1


EL PLANO
en el tenemos
se rellena con
se decora con
POLÍGONOS
sus elementos son
LADOS
VÉRTICES
ÁNGULOS
CARAS
se puede obtener con
LIBRO DE ESPEJOS
se utiliza para obtener
MOSAICOS
se clasifican en:
REGULARES
pueden ser
TRIÁNGULOS
CUADRADOS
HEXÁGONOS
se encuentran en
NATURALEZA
se subdivide en
TRIÁNGULOS
NO REGULARES
SEMIRREGULARES
destacan
CONGRUENTES
son
OCHO
OTROS
por ejemplo
RÓMBICOS
tienen forma de
ESPACIAL
PLANA
FORMAS MODULARES
sirven para
RELLENAR PLANO
DECORAR PLANO
se encuentran en
ARTE
MEZQUITA
ALHAMBRA
CATEDRAL...
permiten estudiar
ISOMETRÍAS
pueden ser
ROTACIONES
REFLEXIONES
TRASLACIONES
dan lugar a
COMPOSICIÓN DE ISOMETRÍAS
al unirse forman
DESLIZAMIENTOS

Cuadro 2

tenidos, de ahí el que puedan considerarse como instrumentos muy efectivos para presentar relaciones que de otro modo sería complicado explicitar.

Como actividad práctica se propone al lector hacer un mapa conceptual con los contenidos procedimentales y actitudinales del cuadro 1, y relacionarlos con los correspondientes contenidos conceptuales del cuadro 2.

En cuanto a las orientaciones didácticas, la dinámica que se propone es la de realizar las distintas partes de la actividad (acciones) de una forma personal, que después dé lugar a una discusión y trabajo en grupo, y a una posterior puesta en común de conclusiones de toda la clase; esto último con el fin de propiciar un diálogo participativo de todos los alumnos, que permita completar las acciones y profundizar en aquellos aspectos que el profesor estime más oportunos.

Finalmente, es preciso recordar que las actividades no son procedimientos (estos son contenidos, algo que hay que aprender), sino un vehículo para que se aprendan esos y otros contenidos. En las que siguen, en primer lugar aparece una breve introducción para proponerse a continuación el desarrollo de una acción concreta. Dichas acciones cumplen alguna de las premisas siguientes, donde se intentan recoger las características más importantes que deberían cumplir todo tipo de actividades:

1. *Deben posibilitar descubrir propiedades*: se da una información por dibujos y el alumno tiene que encontrar las figuras o transformaciones objeto de estudio. Por ejemplo, la acción 1.
2. *Han de potenciar el pensamiento creativo*: cualquier situación problemática es preciso abordarla haciendo uso de todas las técnicas disponibles (medir, construir, dibujar...), mostrando disposición a interrogarse ante cualquier situación, formulando hipótesis y comprobándolas experimentalmente. Por ejemplo, la acción 3.
3. *Deben propiciar que se generen aplicaciones*: se trata de realizar dibujos o esquemas a partir de un modelo abierto y flexible dado, con el fin de generar algo nuevo relacionado con el tema objeto de estudio. Por ejemplo, la acción 4.
4. *Han de permitir resolver situaciones problemáticas planteadas*: en este sentido, es importante tener en cuenta que toda actividad ha de generar en primer lugar desequilibrio, y después asimilación y acomodación de los nuevos conceptos. Por ejemplo, la acción 2.

## Mosaicos

N.P.P. (Nota para el profesor).- Deseamos encontrar los mosaicos regulares y la condición que han de cumplir los ángulos interiores de los polígonos regulares que los determinan. La forma en que se presentan estas primeras actividades es abierta; el profesor no indica la solución correcta, sino que ayuda a sus alumnos a analizar las soluciones intermedias, a que adopten criterios de clasificación, a que desarrollen su capacidad de iniciativa e investigación. De esta forma la dinámica de trabajo que se propone es la del profesor facilitador, cooperador con el alumno, que interviene sólo cuando es necesario, estimulando la colaboración y la discusión entre sus alumnos.

*...la dinámica de trabajo que se propone es la del profesor facilitador, cooperador con el alumno, que interviene sólo cuando es necesario, estimulando la colaboración y la discusión entre sus alumnos.*

### Acción 1

Los suelos y paredes de muchos edificios poseen formas decorativas formadas por combinaciones geométricas que solemos llamar mosaicos. Aquí tienes un ejemplo.

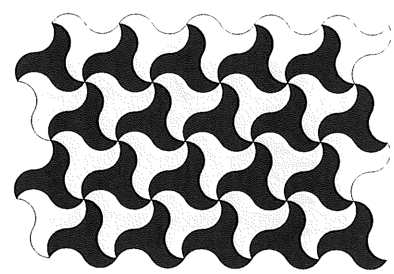


Figura 1

Puedes ver que las piezas no dejan huecos ni se superponen unas sobre otras.

Si el mosaico está formado por polígonos regulares, todos del mismo tamaño, se denomina *regular*.

Contesta a la siguiente pregunta valiéndote sólo de dibujos: ¿Se puede embaldosar el plano sólo con cuadrados? Supón, para ello, que el plano no tiene límites ni formas fijas, que los cuadrados son todos iguales y que el embaldosado se realiza haciendo coincidir los lados completos.

N.P.P.- En esta acción se pretende que el alumno trabaje únicamente con la vista. Es decir, no puede utilizar ninguna herramienta, ni siquiera lápiz y papel. La técnica que hay que emplear consiste en observar detenidamente un cuadrado, imaginar qué ocurrirá si colocamos a su lado otros cuadrados, yuxtapuestos unos a otros y, si de esta forma, seríamos capaces de rellenar el plano. En realidad muy probablemente la solución al ejercicio se encuentre a nuestros pies, en el suelo del aula que ocupamos, que estará formada, muy posiblemente, por baldosas cuadradas todas iguales. En este sentido hay que destacar que la manipulación de objetos y la visualización de imágenes ayuda a comprender enormemente ciertas situaciones; más aún, el grado de visualización que puede alcanzar un alumno depende, en gran medida, de dicha manipulación y de la construcción de formas. Posteriormente a este primer momento, en el que el alumno investiga a través de la experimentación y la observación, vendrá un segundo paso de formalización, estableciéndose las propiedades esenciales que verifican los mosaicos regulares. Así para Pérez Gómez (1995) «La visualización juega un papel importante en el proceso de aprendizaje del alumno... La creación de imágenes mentales es irreemplazable en todo pensamiento, ya que constituyen el recurso para promover la actividad intelectual que sirve de intermediario entre la memoria permanente del alumno y la experiencia directa, es decir, entre el mundo real y el mundo interior».

### Acción 2

En las condiciones anteriores: ¿se puede embaldosar el plano con sólo triángulos equiláteros? ¿Y con pentágonos regulares? ¿Y con hexágonos regulares?

Recorta varios polígonos iguales, y compruébalo. En el caso del cuadrado podrás verificar ahora si la respuesta que has dado en la actividad anterior es la adecuada.

### Acción 3

La acción 1 también la puedes resolver de una forma muy sencilla utilizando el libro de espejos ¿cómo?

Este libro es muy sencillo de construir. Basta tomar dos espejos de 10 x 10 cm

*El libro de espejos es una herramienta muy útil para el estudio de los polígonos, de sus elementos más característicos; así como para el estudio de sus medidas. Asimismo también nos puede servir para el tratamiento manipulativo del concepto de simetría y para identificar regularidade en figuras geométricas, formas de la naturaleza, dibujos...*

y unirlos por uno de sus bordes con cinta adhesiva, de manera que las superficies reflectantes queden hacia el interior.

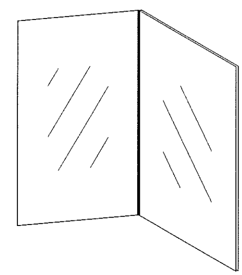


Figura 2

Si colocamos las dos hojas del libro sobre dos lados consecutivos del cuadrado ¿qué ocurre? Repite esta operación para el resto de polígonos de la acción 2.

N.P.P.- En estas primeras acciones hemos tratado de desarrollar estrategias de búsqueda de figuras que rellenen el plano. El libro de espejos es una herramienta muy útil para el estudio de los polígonos, de sus elementos más característicos; así como para el estudio de sus medidas. Asimismo también nos puede servir para el tratamiento manipulativo del concepto de simetría y para identificar regularidades en figuras geométricas, formas de la naturaleza, dibujos...

### Acción 4

Ya sabemos que el cuadrado rellena el plano, siendo necesario cuatro de ellos para dar una vuelta completa alrededor de un punto.

En la figura 3 aparece dibujado el ángulo interior del cuadrado. ¿Cuál es su valor? ¿Qué relación existe con el giro completo? Vamos a comprobar que esta misma relación también la ha de cumplir cualquier polígono regular que rellene el plano. De entrada verifícalo para los polígonos solución que hayas obtenido en la acción 2.

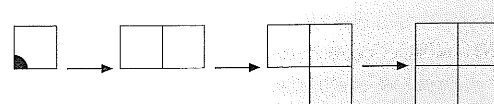


Figura 3

N.P.P.- Tras la primera fase manipulativa de las tres primeras acciones, en ésta se pretende que el alumno comience a formalizar la construcción de los mosaicos regulares; es decir, ha de averiguar por qué unos polígonos regulares cumplen la condición pedida y otros no. Todo ello nos llevará a buscar los divisores de 360 que son a su vez ángulos interiores de polígonos regulares; posteriormente relacionaremos esta idea con el concepto de giro, en el sentido de que, partiendo de uno cualquiera de los vértices del polígono y girando una amplitud igual a su ángulo interior un número exacto de veces, podemos volver al punto de partida.

### Acción 5

En las acciones anteriores has comprobado que entre los polígonos regulares de 3 a 6 lados, hay varios que rellenan el plano. Se trata ahora de buscar entre el resto de polígonos regulares. En primer lugar, por triangulación buscamos una fórmula que nos permita calcular el valor del ángulo interior de cualquier polígono regular.

| *Polígono* | *N.° de lados* | *N.° de triángulos* | *Suma ángulos interiores* | *Valor de cada ángulo interior* |
|---|---|---|---|---|
| Triángulo | 3 | 1 | 1 x 180 | 180/3 = 60° |
| Cuadrado | 4 | 2 | 2 x 180 | 360/4 = 90° |
| Pentágono | 5 | | | |
| Hexágono | 6 | | | |
| Polígono de n lados | n | | | |

Completa la tabla y contesta: ¿Qué polígono regular tiene el ángulo interior más pequeño? ¿Cuál es su valor? ¿Y cuál tiene el más grande y qué valor tiene?

N.P.P.- El proceso de triangulación, consiste en descomponer el polígono de partida en el menor número posible de triángulos; para ello basta trazar diagonales desde un vértice. En el caso de *n* lados es preciso utilizar el lenguaje algebraico; se trata de hacer una conjetura y después comprobar si la propiedad es válida para todos los casos. En este sentido, reconocer relaciones y regularidades, así como saber generar ejemplos para poner a prueba una conjetura, son estrategias muy interesantes para realizar generalizaciones.

### Acción 6

Vamos a calcular los divisores de 360; después comprobaremos si son ángulos interiores de polígonos regulares y así podremos encontrar los polígonos regulares que rellenan el plano.

En primer lugar descomponemos 360 en factores primos. ¿Cuántos divisores tiene?

$$(1+2+2^2+2^3)\cdot(1+3+3^2)\cdot(1+5)$$

| | 1 | 2 | $2^2$ | $2^3$ |
|---|---|---|---|---|
| 3 | | | | |
| $3^2$ | | | | |
| 5 | | | | |

Figura 4

*...reconocer relaciones y regularidades, así como saber generar ejemplos para poner a prueba una conjetura, son estrategias muy interesantes para realizar generalizaciones.*

Observa la secuencia de la figura 4; todos los sumandos del resultado son divisores de 360. ¿Por qué? ¿Cuántos son?

Una forma cómoda de obtenerlos se consigue colocándolos adecuadamente en esta tabla. Complétala y obtén los 24 divisores. De acuerdo con lo indicado anteriormente, sólo cuatro pueden ser ángulos de polígonos regulares. ¿Por qué?

Comprueba después si, además, esos cuatro valores corresponden al ángulo interior de un polígono regular (utiliza la tabla de la acción 5) y verifica que sólo tres lo hacen.

### Acción 7

El rombo no es un polígono regular, sin embargo es un modelo muy empleado en pavimentos de mosaicos. Comprueba que rellena el plano.

Juega con el rombo, construye varios iguales y comprueba después que colocados convenientemente dan la impresión de una red de cubos escalonados.

N.P.P.- En esta actividad el alumno puede diferenciar entre moverse en el plano (observando hexágonos), o hacerlo en el espacio (viendo cubos apilados). En este sentido la Geometría ofrece numerosas posibilidades para desarrollar la percepción e intuición espacial. El estudio de formas y tamaño de objetos en el espacio, de su dirección, orientación y perspectiva, son aspectos que permiten desarrollar la capacidad de observación, la comprensión de relaciones espaciales y la representación de objetos en el espacio.

### Acción 8

Comprueba que un hexágono regular puede descomponerse en tres rombos; por ello, el rombo es un submúltiplo de la red hexagonal. Pero a la vez es un múltiplo de la red triangular ¿por qué?

## Mosaicos semirregulares

### Acción 9

Los mosaicos *semirregulares* se obtienen empleando varias clases de polígonos regulares, con la condición de que sean del mismo tamaño los de cada clase y que unos y otros tengan los lados de igual longitud.

Por ejemplo, con octógonos y cuadrados se puede construir uno de ellos. Este mosaico también puede obtenerse a partir de un octógono y el libro de espejos. ¿Cómo?

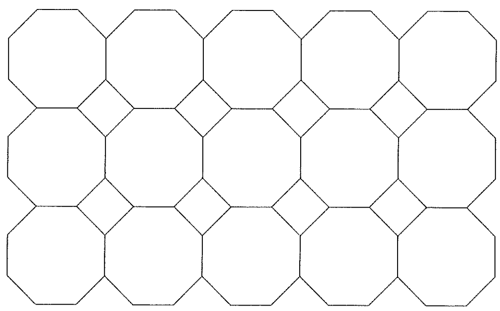


Figura 5

### *Acción 10*

Uniendo hexágonos por un vértice de forma horizontal, y por un lado, de forma vertical, y rellenando los «huecos» con triángulos, tenemos otro mosaico semirregular. Recorta hexágonos y triángulos equiláteros, con lados de igual longitud, e intenta obtenerlo.

### *Acción 11*

Hay numerosos mosaicos semirregulares, pero en cambio son muy pocos los que cumplen la condición de que en todos los vértices del mosaico se encuentren los mismos polígonos y en el mismo orden (mosaicos congruentes). Así, el mosaico de la acción 9 es congruente; sin embargo, el de la acción anterior no. ¿Por qué?

*Hay numerosos mosaicos semirregulares, pero en cambio son muy pocos los que cumplen la condición de que en todos los vértices del mosaico se encuentren los mismos polígonos y en el mismo orden (mosaicos congruentes).*

### *Acción 12*

Recorta polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8 y 12 lados, de tal modo que todos tengan el mismo lado. Construye con ellos mosaicos semirregulares. ¿Cuáles son congruentes? Intenta encontrar los ocho mosaicos semirregulares congruentes.

N.P.P.- Tras una primera fase de búsqueda más o menos aleatoria (semejante a la realizada para los regulares), se pasará a un estudio sistemático, para lo cual se podrán seguir los pasos que se indican a continuación. Ahora bien, esta primera fase se considera básica ya que, entre otras cosas, permitirá que el alumno reflexione sobre la dificultad del problema planteado, al mismo tiempo que podrá investigar sobre aspectos muy concretos que después le orientarán hacia la solución de una forma más rápida, como por ejemplo lo son, el número mínimo y máximo de polígonos regulares que pueden concurrir en un vértice cualquiera del mosaico, o sobre la clase de polígonos que pueden ser éstos.

Paso 1.° Teniendo en cuenta la tabla de la acción 5, estudiar todos los posibles mosaicos cuando son tres los polígonos que confluyen por vértice. A este estudio se le puede dar un tratamiento algebraico a través de las siguientes ecuaciones:

a) $2X + Y = 360$ o $X + Y + Z = 360$; siendo X, Y, Z ángulos interiores de polígonos regulares. Así en la primera se van dando valores a X (60, 90, 108...) y se va calculando Y (teniendo en cuenta que basta estudiar los casos en que $Y > X$). ¿Por qué?

b) En el caso de que las incógnitas sean el número de lados, las ecuaciones a resolver serían: $1/X + 1/X + 1/Y = 1/2$ o $1/X + 1/Y + 1/Z = 1/2$. ¿Por qué?

Nota.- Si uno de los tres polígonos tiene un número impar de lados, esto obliga a que los polígonos que le rodean no sean distintos en lados consecutivos, lo que simplifica bastante la búsqueda, ya que sólo es preciso hacerlo entre los polígonos con un número par de lados.

Paso 2.° Hacer lo mismo para cuatro o cinco polígonos por vértice. ¿Por qué no es preciso hacerlo para seis o más?

Nota.- En el caso de cuatro polígonos, una de las ecuaciones es $2X + 2Y = 360$ con $Y > X$; aquí se abren muchos interrogantes, como por ejemplo ¿qué representan las incógnitas?; ¿por qué sólo hay dos?; ¿por qué $Y > X$?... E incluso simplificando y dando valores a X se obtiene rápidamente un mosaico semirregular formado por dos triángulos y dos hexágonos en cada vértice, que colocados adecuadamente hacen que el mosaico sea congruente. En el caso de cinco polígonos, al ser un número impar, ocurre como en el caso de tres, por lo que se simplifica bastante la búsqueda.

## Movimientos en el plano

En las acciones anteriores hemos intentado llegar a saber trazar y clasificar mosaicos y decoraciones del plano a partir de figuras planas. Nos centramos ahora en los movimientos en el plano.

Si tomamos los mosaicos regulares, al ser todas las piezas iguales, podemos suponer que una pieza genera otra vecina mediante distintos tipos de movimientos. En la figura 6 aparece un mosaico regular formado por triángulos equiláteros.

El paso del triángulo 1 al 2, le llamamos *traslación*; mediante este movimiento conseguimos que los triángulos se recubran a sí mismos de forma que el ornamento de partida, el mosaico regular, no haya cambiado.

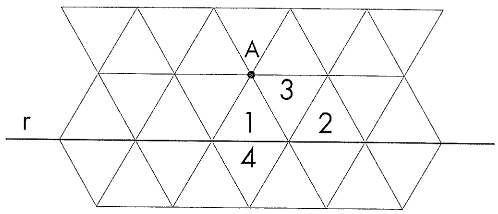



Figura 6

Lo mismo ocurre con otros dos movimientos más: así el paso del triángulo 1 al 3, lo logramos al girar el 1.° alrededor del punto A, un ánglo de 60°; le llamamos *rotación*; el punto A se llama *centro* del giro. Finalmente, el paso del 1 al 4, le llamamos *reflexión* sobre la línea *r*, que se denomina *eje de simetría*. Traslación, rotación y reflexión son tres movimientos mediante los cuales puede hacerse coincidir una figura consigo misma.

## Acción 13

El mosaico de la figura 7 está formado a partir de un módulo plano: «el hueso» (polígono nazarí muy usual en la Alhambra de Granada). Tiene como polígono base un cuadrado, y se ha obtenido a partir de dicho polígono mediante el principio que rige en los módulos planos (variar la forma manteniendo su superficie). Se trata de investigar sobre el menor motivo, es decir, la menor porción del diseño, que mediante traslaciones da lugar a todo el conjunto.

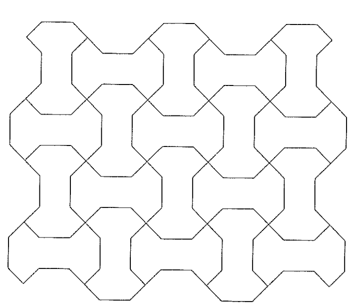


Figura 7

N.P.P.- Aparte de las características puramente matemáticas de este polígono nazarí (p.e. es un polígono cóncavo, tiene cuatro ángulos interiores rectos...), posee la «propiedad» de crear belleza. Los matemáticos del Islam fueron maestros en este campo, así en sus trabajos en la Alhambra podemos observar que no se limitaron a llenar el plano con simples polígonos, sino que, a partir de diseños básicos, fueron capaces de conseguir composiciones de gran atractivo y armonía.

Si nos olvidamos de sus colores (es decir, fijándonos solamente en el fondo y en el diseño en sí) estos mosaicos (Alhambra, Mezquita de Córdoba...) son un material muy atractivo y útil para estudiar las isometrías en el plano y sus composiciones.

## Acción 14

Observa los mosaicos de la figura 8 (se deben al artista holandés Escher). Buscar motivos mínimos que generen todo el conjunto por traslaciones. Si se utilizan además otros movimientos o una composición de los mismos ¿pueden reducirse dichos módulos básicos?

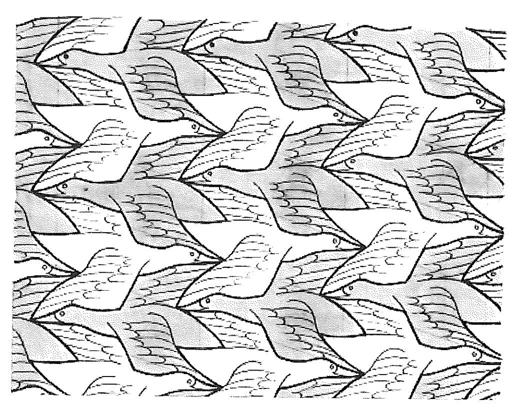
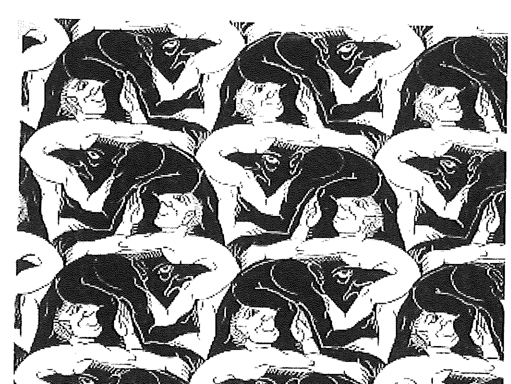


Figura 8



N.P.P.- El propio Escher fue un gran estudioso de la Alhambra. La diferencia de sus mosaicos con respecto a los de aquella, reside en que Escher los dotó de vida propia a través de animales y plantas; aunque esta incorporación de seres vivos le obligó a utilizar, en algunos casos, geometrías no euclídeas.

Por otro lado las posibilidades que ofrece cada mosaico son múltiples. Así, partiendo de que los giros o rotaciones quedan determinados al conocer el centro del giro y el ángulo (teniendo en cuenta que su sentido positivo es el contrario a las agujas del reloj) y observando de nuevo un mosaico cualquiera, como por ejemplo el de la acción 13, surgen múltiples preguntas: tomando uno cualquiera de los «huesos», determinar el ángulo y el centro que genera a cada uno de los huesos adyacentes. En alguno de estos casos, bien porque cambie el valor del ángulo, bien porque varíe el centro del giro ¿es posible más de una solución?

La visualización juega de nuevo un papel determinante en el proceso de trabajo con los alumnos. Si tomamos un único «hueso» y colocamos un espejo sobre una línea de puntos que lo divida justamente por la mitad, surge de forma natural la idea de reflexión como movimiento del plano que deja invariante la figura. Ahora bien, este hecho es válido sólo en sentido euclídeo (se conservan las distancias y los ángulos, aunque para éstos se inviertan sus sentidos), ya que aunque la figura obtenida parezca la misma que la de partida, sus puntos interiores ocupan ahora una posición diferente y los únicos puntos que no modifican su posición son los que se encuentran sobre el propio eje. En el caso de la rotación (movimiento del plano que conserva las distancias y los ángulos) el único punto invariante es el centro del giro.

### *Acción 15*

Observa la figura 9 (también son dos mosaicos de Escher). ¿Qué transformaciones necesitas para componer todo el mosaico? Busca en cada caso el motivo mínimo. ¿Es posible, sin tener en cuenta la diferencia de colores, obtener todo el mosaico a partir de un solo elemento básico: «jinete y caballo», u, «hombrecillo», respectivamente?

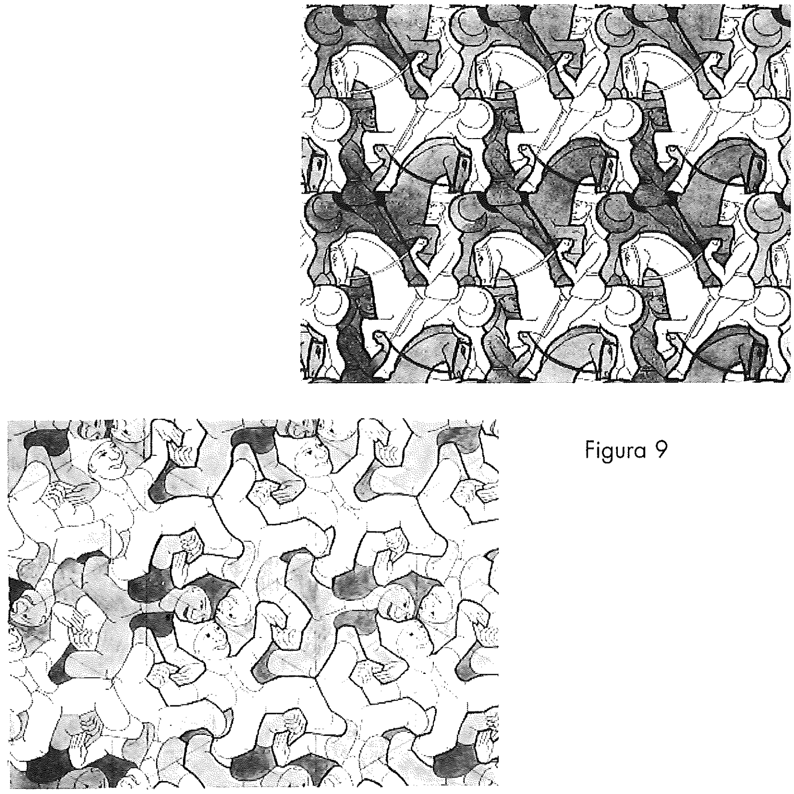


Figura 9

*...los mosaicos permiten acercar la matemática al mundo real, los alumnos, partiendo de un planteamiento experimental e intuitivo, y a través de la visualización, representación y experimentación, pueden analizar y resolver situaciones artísticas...*

N.P.P.- De nuevo se pueden plantear múltiples preguntas, incluso en un sentido inverso, por ejemplo «indica dos hombrecillos de forma que se pueda llevar uno sobre otro haciendo primero un giro y después una traslación».

Alguna composición de movimientos como por ejemplo «la simetría con deslizamiento», que es poco intuitiva y, en consecuencia, difícil de asimilar, podemos observarla más fácilmente en el mosaico de los jinetes. En este caso, un caballero blanco, tiene que moverse en la tercera dimensión para poder cubrir a uno negro; es decir, ha de dejar el plano, ser colocado al revés y a continuación ser deslizado para poder cubrir a uno negro.

Finalmente es preciso comentar que el trabajo en el aula se puede ampliar hasta intentar objetivos más ambiciosos, por ejemplo reconocer que la composición de isometrías lleva siempre a una de las cuatro isometrías distintas: reflexión o simetría, rotación o giro, traslación y deslizamiento (simetría con traslación); o bien, comprobar que el conjunto de movimientos que aplican una figura en sí misma es un grupo con la composición de movimientos.

En definitiva, los mosaicos permiten acercar la matemática al mundo real, los alumnos, partiendo de un planteamiento experimental e intuitivo, y a través de la visualización, representación y experimentación, pueden analizar y resolver situaciones artísticas, en las que se realza, más que las figuras geométricas que las determinan, el concepto de transformación geométrica y su composición. Se puede relacionar así Arte y Geometría. Y todo ello, pudiendo poner en práctica la tan traída frase de que «El aspecto formativo cobra fuerza frente al informativo. Los procesos de pensamiento son tan importantes como los productos finales del mismo».

## Bibliografía


ALSINA, C., C. BURGUÉS y J. M. FORTUNY (1987): *Invitación a la didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C., R. PÉREZ y C. RUIZ (1989): *Simetría dinámica*, Síntesis, Madrid.



**Antonio Bermejo**
Centro de Profesores
y Recursos de Astorga (León)
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas



BERMEJO, A. (1995): «Materiales didácticos. Decorando el plano», *Sigma*, n.° 17, 95-114.

BRUNO ERNST (1989): *El espejo mágico de M.C. Escher*, Taco, Berlín.

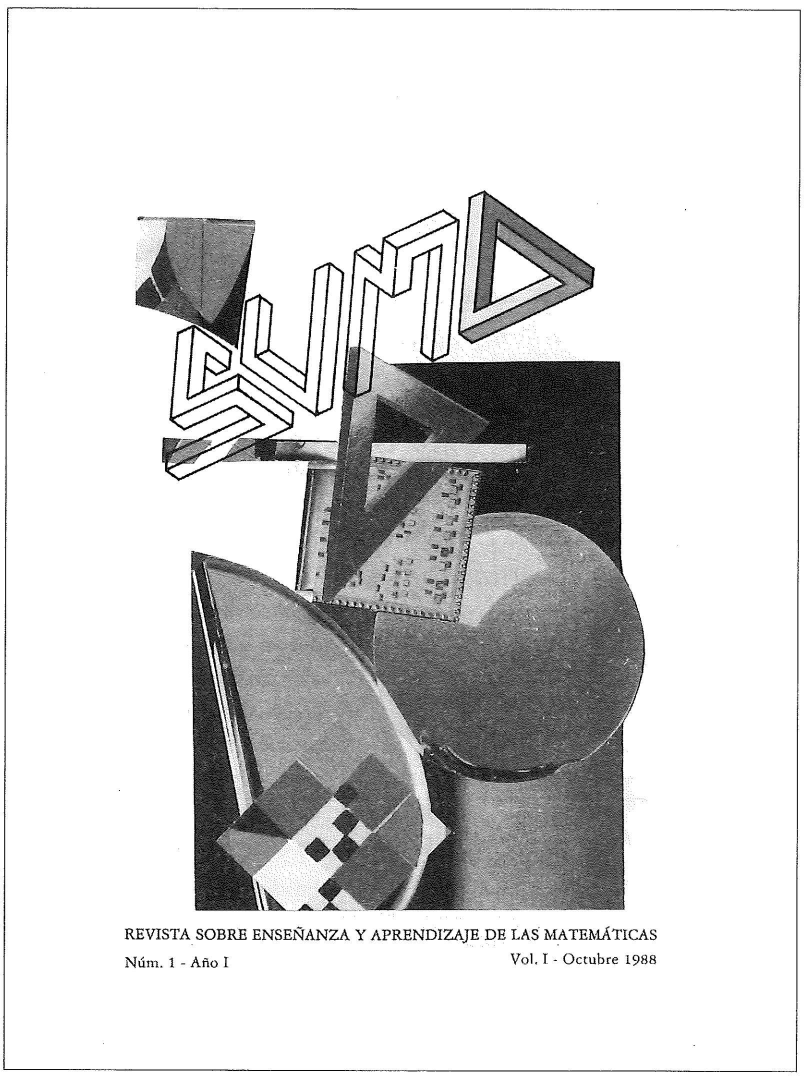
GARCÍA, J. y C. BERTRÁN (1984): *Geometría y experiencias*, Alhambra, Madrid.

GRUPO CERO (1984): *De 12 a 16, un proyecto de currículum de Matemáticas*, Mestral, Valencia.

MEC (1995): *Guía de Recursos Didácticos. Matemáticas. ESO*, MEC, Madrid.

PÉREZ, R. (1994): «Construir la Geometría», *Uno*, n.° 2.

PÉREZ, R. y J. RUIZ (1995): «Visiones matemáticas de la Alhambra. El color», *Epsilon*, monográfico sobre la Alhambra.


*SUMA*

Núm. 1 - Año I

Octubre 1988

SUMA 30
febrero 1999, pp. 121-123

# La mar de silencio

Miquel Albertí Palmer

Tras relatar la experiencia vivida al pasearme por las dunas del desierto marroquí siento la imposibilidad de contar cantidades finitas de granos de arena. Me doy cuenta de que en este ámbito sólo vale el dicho: *o todo o nada*. Para contar me bastan las cifras 0, 1, ∞. ¿Cómo definir pues una suma y un producto en este conjunto que sean coherentes tanto con la suma y producto corrientes como con las ideas de nulidad, finitud e infinitud que sugieren los símbolos 0, 1 e ∞? Al intentarlo veo que la coherencia está reñida con la lógica usual: he aquí el trampolín para indagar.

MISCELÁNEA

ANOCHE no me sentía nada bien. Justo después de cenar, y a pesar de la juerga que se estaba montando, decidí acostarme. Si me hubiese quedado tampoco hubiera participado en la diversión, tan solo les habría aguado la fiesta. Por suerte las cosas cambian y también acaba lo que parece interminable. Los malos acompañantes de estos últimos días han huido: ya no me duelen ni el estómago ni la cabeza y la diarrea ha desaparecido. Hice bien en comer poco. Ahora, a punto de clarear pero bien espabilado, ¡lo nunca visto!, me siento como nuevo. Y el paisaje que contemplan mis ojos hace que todo me parezca ¿idílico?, ¿utópico?, ¿ficticio?, ¿irreal?, ¿onírico?, ¿mentira? No, no es mentira. La realidad vuelve a superar a la ficción que la imaginación sugiere, pero si a menudo es eso lo que nos hace dudar de que lo vivido sea real, ahora es precisamente esto lo que me permite asegurar que no sueño. Tampoco puedo ser la víctima de un espejismo porque es imposible que el mar quieto y silencioso de dunas rosadas que se extiende hasta el horizonte, mire donde mire, lo sea. Uno puede padecerlos en el desierto: charcos de agua cristalina, bosques de palmeras que cobijan un oasis, montones de terrones que anuncian un poblado, y muchos otros. ¡Pero el desierto entero no puede ser un espejismo de sí mismo!

Antes de que todos se levanten me voy a dar una vuelta por las dunas. Quiero pasearme solo por la arena. En seguida me sorprende su finura. Es mucho más blanda de lo que me había imaginado y caminar sobre ella no resulta cosa fácil: me hundo hasta las rodillas. El color rosado que ahora tiene no será el mismo dentro de un rato. A lo largo del día pasará por una infinidad de tonalidades. Leyendo el tiempo en cada uno de sus cromatismos los tuareg convierten su mar en un inmenso reloj de color, no de arena.

Me habré alejado unos doscientos metros de las jaimas, pero aún no he perdido de vista sus estandartes. Unos pasos más y me quedaré completamente solo enmedio de las olas. ¿Sabré nadar?

Sentado en tierra cojo un puñado de arena. Fina y fría como un líquido, forma una pequeña cascada cuando se me escurre entre los dedos. Pero no fluye toda, muchos granos se me quedan pegados en la mano, alojados entre las dunas de mis huellas dactilares: transformados allí en rocas gigantescas.

Imposible contarlos. Demasiados y demasiado pequeños. Entonces si no puedo contar los que se me han quedado pegados, ¿cuántos había cogido?, ¿cuántos veo de un vistazo?, ¿cuántos forman una duna?, ¿cuántos hay en todo el desierto? No sólo es imposible contarlos, sino nombrarlos, ¿qué número se necesita pronunciar?, ¿diez millones?, ¿un millón de millones?, ¿infinito? Quizá sí, pero sé que aunque son muchos los que hay tampoco son infinitos porque el desierto es limitado. Cierto es que ocupa un espacio enorme y que cada uno de los granos que lo llenan es microscópico, diminuto, muy poca cosa, pero al fin y al cabo alguna cosa es. Por tanto, a pesar de ser muchísimos, serán finitos. Un número brutal e inimaginable.

*Imposible contarlos. Demasiados y demasiado pequeños. Entonces si no puedo contar los que se me han quedado pegados, ¿cuántos había cogido?, ¿cuántos veo de un vistazo?, ¿cuántos forman una duna?, ¿cuántos hay en todo el desierto? No sólo es imposible contarlos, sino nombrarlos...*

El vocablo *desierto* sugiere a la vez ideas contrarias como *nada* e *inmensidad*, *vacio* y *plenitud*, *nulidad* e *infinidad*. ¿Estoy seguro de que son contrarias? ¿Qué se puede contar en el desierto? Me refiero a los desiertos de arena como éste, no aquellos en que uno puede ver un cactus aquí, una piedra allí, unos matorrales más allá. No, en el desierto-desierto uno tiene pronto la impresión de que si quiere contar alguna cosa los números no le servirán de gran ayuda o, dicho de otra manera, con pocos tendrá suficiente. Sin árboles ni piedras ni animales que contar, sólo arena, el sol y, de vez en cuando, la luna, uno se da cuenta de que hay bastante con utilizar tres cardinales. Se puede contar *ningún grano, un grano, muchos granos*, como hacía la gente de la prehistoria. Y si cambias de tema puedes decir *un sol, una luna, un cielo*; o bien: *ninguna luna, ningún sol.* De la única cosa que hay muchos es de granos de arena y son tantos que sólo puedes hablar de ninguno, de uno o de todos, la infinidad. Hace falta una paciencia casi infinita para contar una cantidad finita. No hay término medio. Luego para contar me bastan las cifras 0, 1 y $\infty$. ¿Cómo puedo calcular con ellas? ¿Qué representa cada una? Si interpreto 0 como la nada; 1 como lo finito; y $\infty$, como lo infinito, entonces para sumar puedo pensar que:

nada + nada = nada

finito + finito = finito

infinito + infinito = infinito

finito + infinito = infinito

para construir la tabla de sumar:

| + | 0 | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | $\infty$ |
| 1 | 1 | 1 | $\infty$ |
| $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |

y, de la misma forma, la de multiplicar:

nada · nada = nada

finito · finito = finito

finito · nada = nada

infinito · infinito = infinito

infinito · finito = infinito

infinito · nada = ?

¿Cómo definir el último producto? Este es uno de los casos de indeterminación del álgebra de límites. Tal vez no vendría mal decir:

infinito · nada = finito

| · | 0 | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | $\infty$ |
| $\infty$ | 1 | $\infty$ | $\infty$ |

Ahora bien, ¿hasta qué punto son coherentes estas tablas? ¿Se comportan como la suma y el producto corrientes? La suma así definida es asociativa, conmutativa y tiene elemento neutro: el 0, pero no nos permite restar porque ni 1 ni $\infty$ tienen simétrico. Si queremos que funcione como la suma de números enteros habrá que añadir los simétricos de 1 y de $\infty$: $-1$ y $-\infty$. Entonces tendremos más problemas. ¿Qué será $\infty - \infty$? Veamos qué pasa diciendo $\infty - \infty = 0$:

| + | $-\infty$ | $-1$ | 0 | 1 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ | 0 |
| $-1$ | $-\infty$ | $-1$ | $-1$ | 0 | $\infty$ |
| 0 | $-\infty$ | $-1$ | 0 | 1 | $\infty$ |
| 1 | $-\infty$ | 0 | 1 | 1 | $\infty$ |
| $\infty$ | 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |

Todo elemento tiene simétrico, hay neutro y se cumple la propiedad conmutativa (como puede apreciarse en la simetría diagonal de la tabla), pero esta suma tampoco funciona como la de los números enteros porque no es asociativa:

$$1 + (\infty - \infty) = 1 + 0 = 1$$

$$(1 + \infty) - \infty = \infty - \infty = 0$$

Quizás el problema es que se han de cambiar algunas operaciones. ¿Quién sabe si diciendo $\infty - \infty = 1$ se arreglaría todo? Estúdiense varias opciones y también qué pasaría con el producto en caso de añadir a su tabla los elementos $-1$ y $-\infty$.

Curiosamente desaparecen los problemas al alejarnos de lo que antes nos parecía lo más razonable:

| + | 0 | 1 | ∞ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | ∞ |
| 1 | 1 | ∞ | 0 |
| ∞ | ∞ | 0 | 1 |

| · | 0 | 1 | ∞ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | ∞ |
| ∞ | 0 | ∞ | 1 |

Estas tablas, aunque se nos antojen ilógicas, funcionan porque se comportan como la suma y el producto ordinarios: el conjunto $\{0, 1, \infty\}$ con la suma y producto definidos en ellas tiene estructura de cuerpo conmutativo: ambas operaciones son asociativas, conmutativas, tienen elemento neutro (0) y elemento unidad (1), todo elemento admite simétrico y, si es diferente de cero, inverso. Bajo un punto de vista estructural funcionan porque han heredado los rasgos del gran cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, pero por otra parte son absurdas:

infinito + finito = nada !!

infinito + infinito = finito !!

finito + finito = infinito !!

infinito · infinito = finito !!

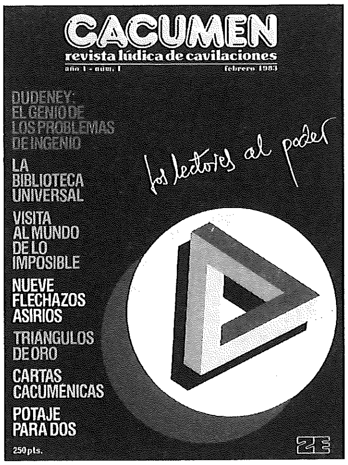
*¿Son lógicas estas operaciones?*
*[...]*
*¿Es que a veces algo ilógico resulta razonable?*
*[...]*
*¿A quién se le ocurre pensar en estas tonterías?*

¿Son lógicas estas operaciones? Sí, y prueba de ello es que se ajustan a una estructura lógica, pero no nos lo parecen porque *nuestra lógica*, aquella a la que estamos acostumbrados, es otra. ¿Son razonables por el hecho de ajustarse a un determinado tipo de estructura? ¿Es que a veces algo *ilógico* resulta razonable? ¿No eran *lógico* y *razonable* conceptos sinónimos? ¿A quién se le ocurriría sumar y multiplicar siguiendo estas leyes? ¿No es la búsqueda de coherencia estructural la que ahora nos ha llevado a un absurdo? ¿No es esto contradictorio? ¿A quién se le ocurre pensar en estas tonterías?

Había pensado llevarme una botella llena de arena rosada, un puñado de desierto que me hiciera revivir y creerme que de verdad me había paseado por sus olas de polvo, pero si lo hubiera hecho así siempre me habría preguntado cuántos granos contenía. Por eso decidí llevarme sólo uno. Un único grano de todos los que forman el desierto. ¿Se puede elegir sólo uno de entre tantos? Tarea difícil. Lo mío me costó tomarlo entre los que el sudor había pegado a mis huellas dactilares y esconderlo en un pliegue de papel. Después de ducharme limpié la ropa y los zapatos, suelas incluidas, de cualquier polvareda. No quería llevarme ningun otro.

Ahora lo tengo aquí, en casa. Es mi grano de arena de recuerdo *al* y *del* Sáhara. Sin par a pesar de sus lejanos e incontables compañeros. Casi un punto matemático. Mío. Único. Chiquitín.

**Miquel Albertí**
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona)




*Cacumen*

Año I - núm. 1

febrero 1983

## EL CAZADOR DE DRAGONES

(Relacionado con el Editorial)

Había una vez, hace muchos años, en un país remoto, un ciudadano que después de una profunda reflexión decidió dedicarse profesionalmente a cazador de dragones.

Para ello, se preparó concienzudamente. Buscó toda la bibliografía existente sobre el tema, la estudió en profundidad, construyó las armas y artefactos que en ella se describían y después de tres o cuatro años pensó que ya estaba suficientemente capacitado para cazar dragones y se dedicó a buscarlos por todos los sitios para poder cazarlos.

Y aquí le surgió el problema: no encontró dragones por ninguna parte, con lo que pensó que había malgastado tiempo y esfuerzo y entró en un estado depresivo bastante agudo. Hasta que encontró a un amigo suyo, que casualmente era matemático, y le contó toda la historia, a lo que éste le respondió:

– Esto que te ocurre no es ningún problema. Tienes una solución muy fácil: ¡Pon una academia y enseña a matar dragones!

# X OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

## 2.° ESO

## Albacete
## 25-29 junio 1999

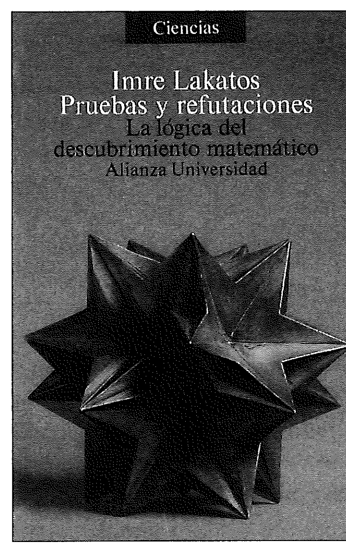
Organiza: Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas

Convoca: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

SUMA 30
febrero 1999

# Un ataque al formalismo

**PRUEBAS Y REFUTACIONES. La lógica del descubrimiento matemático**
**Imre Lakatos**
**Alianza Universidad**
**Madrid, 1978, 1982 y 1986**
**ISBN: 84-206-2206-0**
**páginas**
**(Primera edición en inglés, como una serie de artículos, en el British Journal for Philosophy of Science, en 1963)**




RECENSIONES

No es *Pruebas y Refutaciones* (P y R) un texto fácil. Lakatos es un escritor duro, matiza hasta el extremo, y los temas sobre los que escribe no son precisamente triviales. El libro deja huella, provoca y fuerza el pensamiento de quien lo lee y es muy difícil de abarcar en su totalidad. A pesar de ser un texto de historia y filosofía internas de las matemáticas, resulta interdisciplinar (conceptual, metodológica y culturalmente) en su interinidad. Esta interdisciplinariedad choca con el corto positivismo que impregnó nuestras matemáticas universitarias; el libro resulta así un vendaval de aire fresco que requiere calma y tiempo para ser controlado inteligentemente. Me fiaré, pues, de la memoria como guía de mis comentarios, en lugar de recurrir a una somera revisión apresurada del libro. Lo que seleccione será lo que de momento me ha sido finalmente útil, y en cualquier caso será representativo de mi particular lectura, necesariamente provisional, de *Pruebas y refutaciones*[1].

## I

Estamos ante una obra refinada y exquisita. El primer acercamiento produce una sensación de plenitud cultural, de entusiasmo ante la poderosa demostración del amplio bagaje intelectual del autor. Un bagaje matemático, filosófico, histórico, político y sociológico. Cualquier libro aporta pistas sobre la personalidad del escritor: P y R descubre un Lakatos riguroso, polemista infatigable, ácido, irrespetuoso e irónico. No me resisto a incluir algunos (deliciosos) párrafos que justifiquen los tres últimos adjetivos:

- Uno se pregunta cuándo «El autor confiesa su ignorancia en el dominio x» sustituirá al eufemismo «el autor da por supuesta la familiaridad con el dominio x»: sin duda tan sólo cuando se reconozca que el conocimiento carece de fundamentos. (nota n.° 63)

- Gamma: ¿Entonces, es un contraejemplo una crítica?

  Maestro: Ciertamente. Las conjeturas ignoran desagrados y sospechas pero no pueden ignorar los contraejemplos.

  Zeta [aparte]: Obviamente, las conjeturas son muy distintas de quienes las representan. (pág. 27)

- Matthiessen posee una notable confianza en su método de convertir contraejemplos revolucionarios en burgueses ejemplos eulerianos bien ajustados. (nota n.° 48)

Esta tercera cita muestra el empleo irónico de una terminología política izquierdista que se puede encontrar en otros pasajes del libro:

> Esta formulación matizada recibe en el segundo artículo un curioso giro imperialista. (nota n.° 6)

Pero la ironía es sólo aparente. La acusación de imperialista al deductivismo es coherente con el pensamiento del autor y el final de la nota n.° 68 indica que Lakatos utiliza de forma ingeniosa, productiva, provocadora y muy atractiva las analogías entre el campo de la política y el campo de la ciencia:

> La analogía entre ideologías políticas y teorías científicas es, por tanto, mucho más estrecha de lo que normalmente se cree: las ideologías políticas, que pueden comenzar discutiéndose (y quizá aceptándose tan sólo bajo presión), pueden convertirse en conocimiento básico incuestionable en una sola generación: los críticos se olvidan (quizá se ejecutan) hasta que una revolución vindica sus objeciones.

Me extiendo en aspectos secundarios porque motivaron mi curiosidad por las circunstancias personales del autor. No resulta fácil encontrar datos biográficos sobre Lakatos (1922-1974) (los libros sobre filosofía de la ciencia suelen ser publicaciones extremadamente serias). Recojo algunos de los que aportan Davis y Hersh[2]:

Licenciado en física, matemáticas y filosofía. Su madre y su abuela murieron en Auschwitz. Después de la guerra fue comunista activo, llegando a ocupar un alto cargo en el Ministerio de educación de su país (Hungría). Detenido en 1950 cumplió tres años de cárcel. Tras la sublevación de 1956 huyó a Inglaterra donde bajo la influencia de Popper y Polya desarrolló su obra.

*Cualquier libro aporta pistas sobre la personalidad del escritor: Pruebas y Refutaciones descubre un Lakatos riguroso, polemista infatigable, ácido, irrespetuoso e irónico.*

## II

*Pruebas y refutaciones* es un libro sobre historia de las matemáticas. Una historia exclusivamente interna que pretende una reconstrucción racional del proceso de conjeturas, pruebas y refutaciones que a lo largo del siglo XIX discute la validez de la inicial conjetura ingenua de Euler sobre la relación entre vértices, caras y aristas de un poliedro, lo que nos permite asistir al cruce de ideas que está en los orígenes de la Topología. Pero la historia de Lakatos no es una narración ni un análisis estructural sino una obra de teatro, representada en este caso por un profesor y sus alumnos (una clase más bien aventajada, como reconoce el propio Lakatos) que son quienes escenifican en un tiempo limitado la discusión.

Se ha criticado duramente a Lakatos por su modelo de historia de la ciencia como reconstrucción racional del pasado. Desde luego que cualquier obra histórica, de cualquier escuela, lo es en la medida en que es un producto intelectual, pero Lakatos parece optar por ordenar y encorsetar el pasado en la rigidez de un desarrollo argumental al servicio de su modelo explicativo de la génesis del conocimiento matemático. La «historia real» (esa que ya no existe) «resuena», como dice Lakatos, en las notas a pie de página, aportando al espectador o espectadora información adicional (así descubrimos, por ejemplo, en la interesante nota n.° 1, que Descartes ya había intuido la conjetura de Euler) o recordándole que no está ante una simple obra de ficción, que los argumentos de los actores lo fueron en su momento de Cauchy, Hessen, Lhuilier o Gergonne.

Una novela o una obra de teatro históricas reinventan el pasado, pero ello no impide su aceptación por la crítica. Se da por supuesto que el género, por su propia naturaleza, tiene derecho a recurrir a estas licencias. Ocurre que la historia y la filosofía de la ciencia tienen pretensiones dogmáticas: intentan en sus trabajos definir el camino de las futuras investigaciones. La crítica (los críticos a la postre pretenden lo mismo) se hace entonces más dura. Recojo aquí una interesante objeción de Kuhn[3]:

«La historia ha de ser reconstruida sin violentar los datos disponibles por causa de la

1 Una divulgación clara de la aportación de *Pruebas y refutaciones* a la forma de entender las matemáticas puede verse en Davis y Hersh: *Experiencia matemática*, MEC y Labor, 1988.

2 Obra citada.

3 Thomas S. Kuhn: «Notas sobre Lakatos». Recogido en Imre Lakatos: *Historia de la Ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Tecnos, 1974, 1982, 1987 y 1993.

selección e interpretación. Sólo si se emplean estos y otros criterios internos del oficio de historiador, las conclusiones de la investigación histórica podrán contradecir y cambiar la posición filosófica con la que el historiador empezara. Lo que me inquieta del ensayo de Lakatos es que excluye todos estos criterios, privando así a la historia de toda función filosófica».

### III

Los manuales más divulgados de historia de las matemáticas presentan la creación matemática como producto de mentes geniales aparentemente desconectadas del resto de los mortales. Si una determinada época resulta especialmente fructífera en este tipo de genios, se habla entonces del espíritu de dicha colectividad o de la sociedad en que viven. El espíritu de los pueblos se llega a convertir en ocasiones en el dato objetivo desde el que se justifica la evolución de la historia. Es raro encontrar enfoques más progresistas como el que desarrolla en algunos párrafos de su sencillo pero profundo librito Lucio Lombardo Radice[4], una bonita síntesis de historia interna y externa, donde sin llegar a establecer conexiones fuertes, de tipo determinista, entre la evolución de la sociedad y la de las matemáticas resalta el paralelismo de los caminos seguidos por las dos en los siglos posteriores al Renacimiento.

Aceptar que una historia social está necesariamente ligada al externalismo supone obviar opciones tan enriquecedoras como la de P y R. Me atrevería a interpretar esta obra como un ejemplo de historia social interna. Crelle, Matthiessen, Jonquières, Poinsot, Lhuilier, Gergonne, Baltzer, Grunert, Bérard, Hessel, Heis, Eschweiler, Becker, etc., me resultaban totalmente desconocidos antes de P y R. Lakatos está citando, sin duda, a matemáticos del XIX de nivel alto pero no habituales en los textos de historia. No tuvieron la intuición original del teorema ni han quedado como autores de algún final transitorio, pero sus aportaciones, sus dudas, sus conjeturas y contraejemplos, sus conservadurismos o sus cambios de enfoque, fueron etapas claves en el proceso. Al enfrentar sus líneas de pensamiento, Lakatos está mostrando la historia como una creación colectiva.

*Pruebas y refutaciones es un libro sobre filosofía de la ciencia (de las matemáticas) cuya finalidad, declarada en la introducción, es desarrollar un fuerte ataque al formalismo, «el último eslabón de una larga cadena de filosofías dogmáticas de las matemáticas».*

### IV

Desde la construcción axiomática de Euclides, las matemáticas (más bien habría que decir la geometría) gozaron de una consideración especial dentro de las ciencias. Ni siquiera el ataque del empirismo a las pretensiones de certeza de la ciencia llegó a poner en cuestión este baluarte último de seguridad. Los resultados de *Los Elementos* seguirían siendo válidos, se ha afirmado en infinidad de ocasiones, aunque el mundo fuera de otra manera. Así hasta el XIX, en que la aparición de las geometrías no euclídeas (un final inesperado para lo que inicialmente era sólo un pequeño ajuste motivado por esa vieja pretensión de perfeccionismo a ultranza (se buscaba, se busca, satisfacción, seguridad, convicción plena)) provoca una crisis aguda de inseguridad (se dice crisis de fundamentos) que desemboca en el cambio de siglo en el formalismo y el logicismo. Puesto que la geometría no era fiable se recurrió sucesivamente a la aritmética y a la teoría de conjuntos, pero los perseguidores de certezas infalibles[5] continuaron implacables su labor crítica. Así, paradoja tras paradoja hasta llegar al terreno seguro de un mero juego simbólico vacío de contenido y sostenido por las reglas de la Lógica. Como bien advierte Lakatos (el alumno Kapa en P y R) «si quiere usted que las matemáticas tengan sentido, ha de abandonar usted la certeza. Si quiere usted certeza elimine el significado». O también[6]: «La Lógica tal vez *explique* la matemática, pero no puede *probarla*».

La deshumanización de las Matemáticas. Al igual que en Arte, el paradigma matemático del siglo XX ha estado guiado por la abstracción. (En nuestro caso, la abstracción como programa en el reino de la abstracción. Es decir, la abstracción de la abstracción). Pero mientras algunos artistas sostuvieron que este era el camino para una comunicación más intensa, las matemáticas se encerraron en el elitismo de la forma que se justifica a sí misma. ¿Cómo pudimos llegar a aceptarlo en nuestros años de Universidad?[7] En cualquier caso no fuimos los únicos. Todavía hoy muchas personas piensan las matemáticas como el único reducto de certeza absoluta, aunque para ello deba ser inevitablemente vacío.

### V

*Pruebas y refutaciones* es un libro sobre filosofía de la ciencia (de las matemáticas) cuya finalidad, declarada en la introducción, es desarrollar un fuerte ataque al formalismo, «el último eslabón de una larga cadena de filosofías *dogmáticas* de las matemáticas». Para Lakatos, las matemáticas «no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones», y como ejemplo de la validez de su planteamiento escenifica el desarrollo de la conjetura de Euler. Es cierto que en la historia real las cosas no suceden linealmente, como en el teatro de Lakatos, pero ello no es un dato en contra. Lo que interesa es que «la incesante mejora de las conjeturas, la especulación y la crítica» ocurrieron y ocurren realmente.

Sin ánimo de ser exhaustivo resaltaré algunas sorpresas y algunos conceptos útiles recogidos a lo largo del apasionante proceso que se describe en el libro.

4 *La matemática de Pitágoras a Newton*, Ed. Laia, Barcelona, 1983.

5 Me pregunto últimamente si no hay algo patológico en todo esto. Escuchemos a Bertrand Russell: «Necesitaba la certidumbre en idéntica forma en que la gente necesita la fe religiosa» (citado por Davis y Hersh en *Experiencia matemática*).

6 «Regresión infinita y fundamentos de la matemática». Recogido en Imre Lakatos: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza Universidad, 1981 y 1987.

7 Pregunto cómo pudimos porque era claro que el cuerpo no lo aceptaba. Sin duda debió funcionar una especie de sublimación, una forma de contrarrestar un cierto complejo de inferioridad. Me refiero a los mortales, claro. Porque bourbakistas convencidos, haberlos, los había y desde luego «haylos».

• *Prueba.* Para mí era equivalente a demostración. Es cierto que esta segunda palabra es más contundente pero la expresión «queda probado el teorema» se emplea habitualmente en el sentido de que ya no quedan dudas sobre su validez. Para Lakatos, «prueba» es «un experimento mental (o "cuasi-experimento") que sugiere una descomposición de la conjetura inicial en subconjeturas o lemas, incorporándola así a un cuerpo de conocimiento tal vez muy lejano».

Veamos como ejemplo tres de los posibles enfoques para probar el teorema de Pitágoras: mediante puzzles diversos, a partir del teorema del cateto, o a partir de las propiedades de las operaciones de los vectores libres del plano o del espacio. En los dos últimos casos estamos incorporando la conjetura sobre la relación entre los lados de un triángulo rectángulo a cuerpos de conocimiento cada vez más lejanos del inicial en que fue formulada. ¿Tenemos entonces tres demostraciones del teorema? No, tenemos tres pruebas.

• *Análisis de la prueba.* Proceso creativo necesario para encontrar caminos que permitan superar las dificultades planteadas por los contraejemplos. La otra opción (entran ganas de escribir «la única que nos vendieron», pero no está claro que vendieran siquiera esto) es la modificación ingenua de la conjetura. Las pruebas, enorme sorpresa, no siempre prueban lo que pretendían probar. No es grave que una prueba sea refutada.

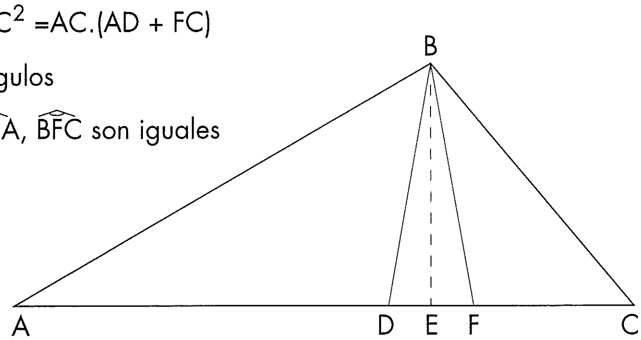
La descomposición de la conjetura mediante la prueba supone la aceptación implícita del «entorno ambiental» (el cuerpo de conocimiento) en que se despliega la conjetura, pero este puede ser discutido por la crítica por inadecuado, obsoleto, restrictivo o excesivamente amplio. ¿Reconocemos a Pitágoras en el teorema del coseno o en la expresión $ds^2 = du^2 + 2 \cos\omega \, du \, dv + dv^2$ para la distancia entre dos puntos opuestos de una célula de una retícula de Chébyshev? Sí, ciertamente al generalizar en este caso hemos cambiado de nombre el teorema después de haber establecido zonas de seguridad inapelables, pero ¿invalida esto el hecho de la revisión permanente como sistema de avance, como metodología para la construcción del conocimiento matemático? ¿Qué impulsa a Tabit ibn Qurra a generalizar el mismo teorema de Pitágoras en otra dirección sino ese afán de revisión del contexto en el que se encajaba la conjetura inicial?

*Lakatos parece reducir la motivación del avance en la creación de conocimiento matemático al simple juego intelectual (aunque el resultado sea mucho más que eso).*

$AB^2 + BC^2 = AC.(AD + FC)$

si los ángulos

$\widehat{ABC}$, $\widehat{BDA}$, $\widehat{BFC}$ son iguales




## VI

Escribir es una excelente manera de pensar. Entusiasmado por la lectura, acuciado por su problemática, no intuí entonces las consecuencias de la propuesta de P y R. Lakatos parece reducir la motivación del avance en la creación de conocimiento matemático al simple juego intelectual (aunque el resultado sea mucho más que eso). Y en ocasiones puede ser así: probablemente ibn Qurra, traductor de *Los Elementos* al árabe, fue motivado en su generalización por la demostración que Euclides da del teorema de Pitágoras; la discusión sobre la conjetura de Euler puede haber sido igualmente un tema incontaminado de cuestiones prácticas; pero las matemáticas se ven cuestionadas en muchas ocasiones por problemas prácticos o experimentales y P y R sugiere un proceso creativo desde la torre de marfil. En este sentido falsea la historia.

## VII

Abrevio la particular selección de términos que empecé hace dos apartados.

• *Contraejemplos locales.* Atacan a la prueba, no a la conjetura.

• *Contraejemplos globales.* Atacan directamente a la conjetura pero no a la prueba. Curiosamente son más fáciles de solventar que los locales. Los contraejemplos pueden ser locales y no globales, globales y no locales o las dos cosas a la vez.

• *Conjeturar ingenuo.* Probablemente el único camino cuando no se sabe qué hacer. Estéril a poco sutil que sea la situación. A pesar de ello es lamentable que los niños y niñas no sean educados desde Primaria en la sana costumbre de establecer conexiones en cuanto dispongan de algunos datos para ello.

• *Deducción euclídea.* Se sabe de antemano lo que se va a demostrar. No produce conocimiento nuevo. Es una forma de presentación de resultados, no un método de creación. Los libros están llenos de simples comprobaciones que pasan por demostraciones.

• *Conjeturar deductivamente.* Proceso deductivo en el que el conocimiento que se alcanza se obtiene al final. No es necesario cerrar el círculo como cuando se parte de un proceso inductivo. Ejemplo sencillo: la expresión que aporta el número de cerillas necesarias para completar *n* cuadrados en hilera puede obtenerse por una inducción, analizando una tabla de datos que relacione el número de cuadrados y el número de cerillas, lo que obliga a analizar posteriormente la estructura de la construcción para tener garantías de no haber dado un salto en falso (hasta aquí el manido modelo inducción-deducción), o directamente por este análisis (conjeturar deductivo).

• *Exclusión de monstruos.* Procedimiento habitual, muy tosco, empleado en múltiples actividades humanas. Es especialmente estéril. Un ejemplo cercano que permite observar la exclusión de monstruos como método conservador de defensa ante lo desconocido es el bonito juego sugerido por la original propuesta de Fielker[8] para generalizar el concepto de polígono al aceptar el reto de localizar un polígono de 2,5 lados. Una reconstrucción racional típicamente lakatosiana, en este caso con una finalidad didáctica y sin pretensión histórica. Pero un polígono de 2,5 lados es un monstruo, aunque termine apareciendo en escena la estrella pitagórica, y algunas personas se ofenden cuando se les plantea la propuesta de Fielker.

## VIII

¿Puede alguien seguir pensando después de P y R que en matemáticas se crea encadenando mecánicamente definiciones-teoremas-corolarios? La sombra del formalismo y del deductivismo es alargada[9]. ¿Por qué son más divulgadas las citas de Russell aludiendo a la naturaleza formalista de las matemáticas que aquellas en las que su fe entra en crisis? En 1955 ya se habían escrito opiniones como las de Mostowski[10]: «El resultado de Gödel y otros resultados negativos confirman el aserto de la filosofía materialista de que la matemática es, en última instancia, una ciencia natural, que sus nociones y métodos tienen sus raíces en la experiencia y que los intentos de establecer los fundamentos de la matemática sin tener en cuenta su origen en las ciencias naturales están condenados al fracaso».

Por primera vez en 2500 años se ha propuesto una consideración diferente para las matemáticas. Ya no son el reducto siempre resistente del deductivismo. Para Lakatos las matemáticas son una ciencia cuasi-empírica[11]: «a lo sumo está bien corroborada, pero es siempre conjetural». Una de las consecuencias es la falibilidad. Ni siquiera cuando el alumno que en P y R hace suyo el programa euclídeo, Epsilon, presenta su versión del teorema de Euler («Si los espacio circuito y los espacios circuito limitantes coinciden, el número de dimensiones del espacio 0-cadena menos el número de dimensiones del espacio 1-cadena más el número de dimensiones del espacio 2-cadena es igual a 2») se habla de demostración sino de prueba. ¿Dónde queda la demostración? Más bien habría que hablar de permanente ajuste de pruebas en un proceso que sin embargo no puede plantearse indefinido a corto plazo si se quieren evitar riesgos como la esterilidad o la superficialidad. La demostración quedaría como prueba indiscutida en recintos de seguridad ya superados.

*¿Puede alguien seguir pensando después de Pruebas y Refutaciones que en matemáticas se crea encadenando mecánicamente definiciones-teoremas-corolarios?*

## IX

Amin Maalouf hace decir a Omar Jayyam en su novela *Samarcanda*: «¿Sabes lo que me fascina de las ciencias? Que encuentro en ellas la suprema poesía: con las matemáticas el vértigo embriagador de los números; con la astronomía, el enigmático susurro del Universo. Pero ¡por favor, que no me hablen de la verdad!». Si se ha tenido ocasión de leer los *Rubaiyyat* de Jayyam se comprenderá que Maalouf no ha traicionado su pensamiento. Llegamos entonces a una perogrullada: la personal concepción que se tenga de las matemáticas es resultado de la ideología y de la psicología de cada cual. Pero precisamente este carácter de perogrullada hace más incomprensible la pretensión dogmática mantenida imperturbablemente a lo largo de la Historia. ¿Cómo ha sido posible, por ejemplo, la continuidad de la ilusión del origen puramente intelectual (un mero afán de perfeccionismo teórico) del conjunto de axiomas elegido por Euclides, al margen por completo de las dificultades materiales derivadas del manejo de los incómodos compases griegos?

## X

Lakatos comenta al final de P y R un último argumento defensivo de los partidarios del estilo deductivista: la dificultad que entrañaría una presentación alternativa (de tipo heurístico, centrada en la metodología y no en la Lógica) de los textos de matemáticas. La contestación es evidente: hay que intentarlo. El dogmatismo de Dieudonné muestra hasta qué punto puede haber ideología subyacente en la toma de postura sobre esta cuestión. Llega a hablar de «la absoluta necesidad impuesta sobre todo matemático que se preocupe por la integridad intelectual» de presentar sus razonamientos en forma axiomática[12].

Vayamos a las fuentes y revisemos la demostración que da Euclides del teorema de Pitágoras. ¿Algo que objetar a un proceso deductivo tan rígidamente estructurado? Depende de lo que busquemos. ¿Por qué hace Euclides lo que hace? ¿Por qué esa altanería de no declarar expresamente la idea heurística que le ha permitido construir su encorsetada argumentación? ¿Por qué no nos dice que ésta ha sido posible porque previamente había intuido que los cuadrados AGFB y ACKH tienen la misma superficie que los rectángulos BQLD y QLEC?

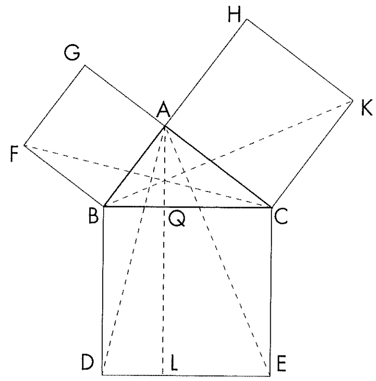
8 Véase el artículo «Parasoles» en *Rompiendo las cadenas de Euclides*, una hermosa recopilación editada por el MEC en 1987.

9 Incluso las notas de los editores de P y R tienen en ocasiones el aspecto de una reprobación de las opiniones de Lakatos.

10 Recogida en la obra citada en la nota 6.

11 El término es complejo. La interpretación intuitiva primera (son empíricas pero no tanto, sólo un poco) es empobrecedora. Para las características que Lakatos adjudica a una ciencia cuasi-empírica, véase el interesante artículo «¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática?», recogido en el libro reseñado en la nota 6.

12 Citado por Lakatos en P y R (pág. 17).




## XI

P y R es un libro con unas implicaciones didácticas evidentes. Y no sólo porque su desarrollo ocurra en una clase ideal sino también por su contenido mismo. El deductivismo inspira el 90% de las clases de matemáticas en todos los niveles educativos, si no claramente en cuanto a que la exposición de contenidos siga el rígido modelo teorema-demostración-corolario sí en lo que supone de mera transmisión de un saber ya establecido sin participación de sus receptores, y P y R lo critica severamente por su inadecuación como modelo explicativo de la génesis del conocimiento matemático pero también por sus consecuencias didácticas:

> El enfoque deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. [...] el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada. (pág. 166)
>
> Aún no se ha constatado suficientemente que la educación matemática y científica actual es un semillero de autoritarismo, siendo el peor enemigo del pensamiento crítico e independiente. Mientras que en matemáticas este autoritarismo sigue el patrón deductivista, en la ciencia opera mediante el patrón inductivista. (nota 39. pág. 166)

Un buen ejemplo de «clase lakatosiana» de Primaria o Secundaria lo proporcionan los diálogos que recoge Fielker en sus artículos[13].

## XII

Las aportaciones de mayor interés que la didáctica puede recibir de la historia de las matemáticas proceden de la historia interna. El conocimiento de la génesis de los conceptos es básico para darles sentido más allá del oficial juego vacío de contenido.

> Es una vergüenza de la presente educación matemática que los estudiantes puedan citar exactamente las diferentes definiciones de las integrales de Cauchy, Riemann, Lebesgue, etc., sin conocer cuáles eran los problemas que trataban de resolver o cuáles eran los problemas en cuyo proceso de solución se descubrieron. (nota 203)

*Pruebas y Refutaciones es un libro con unas implicaciones didácticas evidentes.*

13 Por ejemplo, en el delicioso librito que editó la Generalitat Valenciana: *Usando las calculadoras con niños de diez años.*

14 Véase el artículo «La responsabilidad social de la ciencia» en la obra citada en la nota 6. Un texto complejo, que merece la pena ser leído detenidamente (la frase que he recogido va seguida de otra en la que asigna a la sociedad la tarea de controlar a la ciencia), en el que llega a justificar sin traba alguna la investigación científica con fines militares. Sus opiniones me parecen explicables a la luz de su experiencia política.

## XIII

La Resolución de Problemas ofrece un camino para la creatividad en clase de matemáticas (por cierto que fue Polya quien sugirió a Lakatos la conjetura de Euler como tema para su investigación). La lectura de P y R permite mejorar la observación y el análisis de los procesos mentales que tienen lugar en el aula.

## XIV

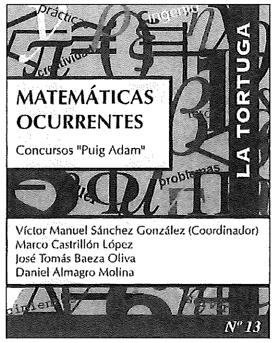
El mundo es afortunadamente complejo. Lo que para mí es una concepción progresista y refrescante de las matemáticas es sostenida por un autor como Lakatos muy conservador en su valoración de las relaciones entre ciencia y sociedad. Para él, «la ciencia, como tal, no tiene ninguna responsabilidad social»[14]. Una defensa tan radical de la autonomía de la ciencia es probablemente coherente con el internalismo de P y R, pero me resisto a establecer una relación determinista. Me gusta P y R y no veo por qué tiene que estar necesariamente asociado su enfoque con una ideología conservadora.

## XV

Si puedo generalizar a partir de mi personal evolución, me atrevería a decir que *Pruebas y refutaciones* ha sido un libro mítico para muchas personas que estudiamos matemáticas en los años setenta. Un libro diferente que se deseaba leer pero no se leía. Por mi parte, he necesitado un largo período de tiempo antes de sentirme fuerte para atacar su lectura. Ha sido fundamental para ello el haber tomado contacto con la Resolución de Problemas. P y R es un libro sobre la génesis del conocimiento matemático, sobre la creación en matemáticas. Si no se ha tenido ocasión de hacer matemáticas (¿nos ofrecieron oportunidades en la Universidad? ¿nos lo exigieron?) difícilmente se comprenderán los procesos que describe. Por otra parte, una clase de Secundaria puede ser (debería serlo) un excelente lugar para observar cómo se hacen matemáticas individual y colectivamente. A partir de toda esta experiencia acumulada empezó a ser posible la lectura de P y R. Los problemas que lo hacían mítico eran míos (nuestros). Primero había que recuperarse del estéril período formalista universitario.

**Ángel Ramírez**

**MATEMÁTICAS OCURRENTES**
**(CONCURSOS PUIG ADAM)**
**Víctor Manuel Sánchez González (Coordinador)**
**Marco Castillón López**
**José Tomás Baeza Oliva**
**Daniel Almagro Molina**
**Editorial Euler**
**Madrid, 1998**
**ISBN: 84-85731-27-1**
**166 páginas**




Desde 1983, y sin faltar a la cita ningún año, la Sociedad de Profesores de Matemáticas Puig Adam viene organizando un concurso de problemas en tres niveles, para estudiantes de enseñanza secundaria, tanto obligatoria como bachillerato. El concurso comenzó restringiendo su ámbito a la provincia de Madrid y limítrofes, pero desde hace unos años pueden participar estudiantes de todo el territorio nacional y en los últimos años ha adquirido proyección internacional al poder participar sus ganadores (hasta 2 por nivel) en la Olimpiada Internacional de Río de la Plata.

En este libro vienen resueltos con todo detalle los 180 problemas aparecidos en las quince ediciones que lleva el concurso. Los profesores de secundaria que venimos preparando estudiantes, tanto para este concurso como para la olimpiada de COU, echábamos en falta un libro como éste, fundamentalmente porque llena el hueco que podría haber entre los ejercicios o incluso problemas dirigidos a una gran cantidad de estudiantes que pudieran aparecer en algunos textos de secundaria y los problemas que aparecen en los libros más conocidos en nuestro mercado sobre olimpiadas internacionales que resultan ser tremendamente difíciles para nuestros alumnos.

Las estrategias utilizadas para la resolución de los problemas están al alcance de nuestros actuales estudiantes de bachillerato, con la posible excepción del método de inducción que utiliza alguna vez.

En las últimas páginas del libro, como pequeño homenaje a los ganadores a lo largo de las diversas ediciones del concurso, aparecen los nombres de los cinco primeros clasificados en cada nivel así como el instituto o colegio de donde procedían.

Para terminar esta pequeña recensión, he aquí alguno de los problemas que aparecen:

*Nivel 1.°* (XII edición): Dado el cuadrado ABCD, construir un pentágono en el cual los puntos A, B, C, D y F sean vértices consecutivos y cuya área sea 3/2 de la del cuadrado. ¿Cuántas soluciones tiene este problema?

*Nivel 2.°* (VII edición). Sea P un punto interior de un rectángulo ABCD. Se conocen las distancias de P a tres vértices de dicho rectángulo. Calcular la distancia de P al cuarto vértice. Aplicación: PA = 5, PB = 10, PC = 14, hallar PD.

*Nivel 3.°* (XIII edición): Juan da a Pedro un número escrito en un sistema de numeración de base menor que 9, en el que todas las cifras son menores que 3, pero Pedro cree que se trata de un número escrito en el sistema de numeración decimal, por lo que comete un error. Sabiendo que este error es 15.861, ¿cuál era la base del sistema en que Juan escribió el número?

**Joaquín Hernández Gómez**


**VARIACIONES SOBRE UN MISMO TEMA**
**(Una cita con la creatividad en clase de matemáticas)**
**Ángel Ramírez**
**Carlos Usón**
**Proyecto Sur**
**Granada, 1998**
**ISBN: 84-8254-119-6**
**289 páginas**

El sistema educativo alcanza a la amplia mayoría de la población en los países como el nuestro (aproximadamente el 30% de la población asiste a cursos reglados y casi el 2% somos profesores también de centros educativos, a los que hay que añadir los familiares directos), lo que hace que, como todo sistema social amplio, tenga unas grandes inercias, que dificultan los cambios en profundidad. Hay múltiples retoques, ligeras variaciones, cambios de planes, pero es complicado un cambio generalizado de los paradigmas profundos.

Ha llegado a ser un lugar común decir que, en estos tiempos difíciles (y atinadamente recordaba Borges que a uno de sus personajes le había tocado vivir, *como a todo el mundo*, tiempos difíciles), con el desarrollo imparable de la cultura de la información, la escuela tiene que afrontar nuevos retos. Ha dejado de ser la fuente fundamental de información para los jóvenes, y por eso ya no es prioritario transmitir datos sino procurar que los alumnos y alumnas 'aprendan a aprender' (y ya hemos caído en la frase del millón y/o el tópico). Todo eso en matemáticas se corporiza en que no se trata tanto de que los escolares memoricen resultados y algoritmos, sino que construyan, que generen, que recreen las matemáticas; y que por medio de la práctica lleguen a interiorizar estrategias de pensamiento que les servirán para afrontar con más garantías los problemas que les depare la vida. Pero aquí topamos (igual que Sancho Panza con la Iglesia) con lo que sabemos (o creemos saber) hacer, con lo único de lo que tenemos experiencia. Ya se sabe que la enseñanza 'tradicional' de las matemáticas, el deductivismo, no es ni muy rentable ni muy gratificante, pero ¿y las otras? Con los inconvenientes que tiene (o que se dice que tiene): es más lenta, no se puede evaluar demasiado bien lo que se ha aprendido, no hay bibliografía al respecto, uno (el profesor) tiene el riesgo de que te cojan sus alumnos en algún renuncio,... Y total, hay que sobrevivir que son muchos años y muchas horas de clase, y además ¡no les interesa nada!

Ya se que estoy haciendo una caricatura, pero a poco que nos apliquemos en las salas de profesores o en los departamentos de matemáticas, no es difícil que oigamos comentarios de ese tipo. Y bien es verdad que han mejorado sustancialmente las cosas, tanto en la práctica (cada vez es mayor el porcentaje del profesorado que da pasos adelante en la tarea de posibilitar un aprendizaje más creativo y más personal) como en la teoría (incluso la oficial, pues en la base de la llamada todavía reforma está el constructivismo). Pero quedan bolsas enormes de tradicionalismo educativo amparadas en los lugares comunes citados más arriba.

Aunque también hay realidades gozosas de las posibilidades reales de los resultados que logran nuestros adolescentes cuando se les da cancha, se les abren perspectivas y hay unos profesores dispuestos a avanzar con ellos en la aventura fascinante del descubrimiento. Cuando como dice el entrenador de fútbol Ángel Cappa y recogen en el capítulo 'Ventana sobre el pensamiento divergente' del libro que reseñamos: «si queremos recuperar el placer del juego deberemos devolverle al jugador el poder de decisión, el protagonismo y la pasión que le robaron y le pertenece» (y él se refiere al fútbol, pero es obvio que se adapta a la perfección al aprendizaje de cualquier materia y en concreto de las matemáticas). Eso es lo que vienen haciendo Ángel Ramírez y Carlos Usón y de ello dan cuenta en este apasionante libro que recoge su práctica educativa, y los resultados que obtienen sus alumnos. Este es un libro al que ha dado forma ellos dos, pero que han escrito sobre todo sus alumnos, con nombres y apellidos (Arturo San Juan y Marta Velasco, Fátima Ruiz o Héctor Reinares, entre tantos), y lo han hecho de forma admirable.

Porque al leer el libro (aunque ya conocía parte del trabajo por una versión resumida que hicieron cuando les concedieron con toda justeza uno de los Premios Giner de los Ríos de innovación educativa) uno siente una sana envidia de Carlos y de Ángel por los resultados que obtienen con sus alumnos, y que vemos reproducidos en sus páginas. Pero todavía es mayor la envidia que despiertan sus alumnos (porque tienen la vida por delante y todo un universo mental por descubrir). Y es que como escribía Ángel Ramírez en un artículo (y suscribo al 100%) «la felicidad no es la ausencia de problemas sino el tener la suerte de poder resolver algunos de los que se nos presentan», y los alumnos que aparecen en las páginas del libro han empezado con buen pie a recorrer el camino de la felicidad, en el que, como en casi todo, lo importante es el camino, no el final.

En cuanto al contenido del libro, recoge variadas reflexiones sobre las posibilidades, las dificultades, los retos que superar y las alegrías que se alcanzan cuando se transita por la creatividad, cuando se le echa imaginación a la vida académica, con variadas facetas del quehacer de los alumnos, con muestras bien explícitas de los trabajos de los mismos; del avance que supone esta forma de trabajo (como refutación práctica de que así se va más lento) aun sabiendo que el aprendizaje de una teoría supone su reinvención (la matemática recreativa, el aprendizaje recreativo) y que eso requiere tiempo (nada que valga la pena es sencillo de adquirir). Un libro con variadas sugerencias de líneas de trabajo, pero no sólo en los ejemplo concretos (que hay muchos y muy interesantes) sino sobre todo en el espíritu de indagación, de búsqueda, de descubrimiento. Un libro que está enraizado en corrientes pedagógicas progresistas y en el que resuenan los ecos matemáticos y didácticos de Lakatos, de Fielker, de Hernán (y no son malos consejeros), que como todos los resultados interesantes está inserto en la cultura global, de la que participan también de otros personajes sólo tangencialmente relacionados con las matemáticas (o al menos eso parecería con una visión no muy abierta). Y así vemos aparecer por sus páginas, entre otros, a Tolstoi y a Kropotkin, a Galeano, Valdano o Gore Vidal, y también al 'principito' de Saint Exupery .

Y sólo nos queda invitar a todos los profesores a leer y pensar en/con el libro. Para disfrutarlo e incluso para disentirlo; porque es interesante que se sepan las posibilidades de otras formas de enseñanza (aunque no se suscriban se podrá objetar con mayor conocimiento de causa). Y felicitar a los autores (por el libro y por el Premio Giner de los Ríos), por las cosas tan interesantes que cuentan y lo bien que las transmiten; por la carga de ánimo y de moral que vehiculan; por los caminos que abren y por las razones que aportan para seguir con una enseñanza creativa. E incluir en los parabienes a la editorial Proyecto Sur que en su modestia está dando a la luz una serie de trabajos capitales para la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

**Fernando Corbalán**

SUMA 30
febrero 1999

# Pruebas IX Olimpiada, Premios San Fernando-Thales, PROFMAT 98,...

CRÓNICAS

## IX OLIMPIADA Matemática Nacional (Problemas propuestos)

### Prueba Individual

***Problema 1***

Una cuadrilla de pintores tenía que pintar dos paredes, una de doble superficie que la otra. Toda la cuadrilla estuvo pintando en la pared grande durante medio día. Por la tarde la mitad de la cuadrilla pintó en la pared pequeña y la otra mitad en la grande. Al finalizar el día sólo les quedó un poco por pintar en la pared pequeña, para lo cual fue necesario que pintara un solo pintor el día siguiente completo. ¿Cuántas personas componían la cuadrilla?

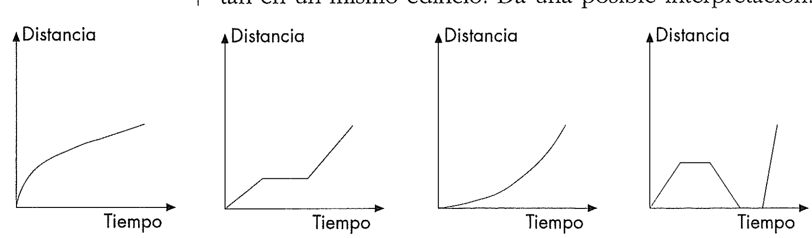
*Nota*: La jornada laboral está compuesta por 4 horas antes del mediodía y 4 horas por la tarde. Todos los pintores rinden el mismo trabajo y de forma uniforme.

***Problema 2***

Tenemos una mesa de billar con forma rectangular de lados $a$ y $b$ números enteros. Golpeamos una bola desde una esquina con ángulo de 45°. ¿Cuántas veces rebotará en las bandas antes de entrar en otra esquina? Se supone que la bola no toma efecto y que puede rodar indefinidamente.

***Problema 3***

Las gráficas de la figura corresponden al recorrido que efectúan hasta la misma oficina cuatro personas que habitan en un mismo edificio. Da una posible interpretación.



## Prueba por equipos (celebrada en la central térmica de Endesa)

### *Problema 1*

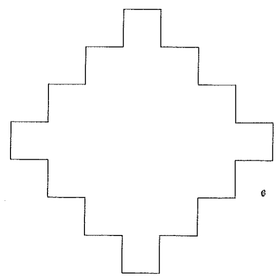
En una convención del partido republicano de los estados reunidos americanos de América había cien políticos. cada político era o bien honesto, o bien deshonesto. Sabiendo que:

1. Al menos uno de los políticos era honesto.
2. Dado cualquier par de políticos, al menos uno de los dos era deshonesto.

¿Cuántos políticos deshonestos había?

### *Problema 2*

La señora Eustaquia Chindasvinta es propietaria de un terreno con la forma que se ve en la figura. Esta forma posee la propiedad siguiente: «si medimos su perímetro en Km y su área en Km$^2$, las dos medidas están representadas por el mismo número». ¿Qué curioso, verdad? ¿Cuál es, en metros, la longitd del perímetro?



### *Problema 3*

Diofanto (s. IV dc) fue uno de los matemáticos que más fama dio a Alejandría. Un relato griego narra de forma concisa su vida. Fue muchacho durante 1/6 de su vida, durante un 1/12 se dedicó a viajar, se casó 1/7 después, tuvo un hijo 5 años más tarde, que vivió la mitad de la edad de su padre, el cual murió 4 años después. ¿Cuántos años vivió Diofanto?

### *Problema 4*

Andrés, que es un niño inquieto, observa que cuando cumple 14 años, su padre cumple 41, es decir, el número 14 con las cifras invertidas. Si Andrés y su padre vivieran cien años, ¿podrías decir las veces que a lo largo de su vida volverá a ocurrir este fenómeno?

### *Problema 5*

¿En qué cifra acaba el número$3^{3658}$?

### *Problema 6*

Los números del 1 al 51 están escritos en forma de espiral. El 51 está en la 4ª columna a la izquierda del que inicia la serie y dos filas por debajo. Si continuamos la serie, ¿dónde estará el 84?, ¿y el 3658?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 |
| | 30 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 38 |
| | 29 | 12 | 3 | 4 | 5 | 18 | 39 |
| | 28 | 11 | 2 | 1 | 6 | 19 | 40 |
| | 27 | 10 | 9 | 8 | 7 | 20 | 41 |
| 51 | 26 | 25 | 24 | 23 | 22 | 21 | 42 |
| 50 | 49 | 48 | 47 | 46 | 45 | 44 | 43 |

## Prueba por equipos (celebrada en el Parque de las Ciencias de Granada)

### *Actividad 1*

Se trata de hacer polígonos doblando y cortando el papel de bordes irregulares. Todos hemos hecho un cuadrado a partir de una hoja rectangular. pero es posible que no hayamos hecho un cuadrado a partir de un papel que no tiene los bordes rectos y paralelos.

La actividad consiste en:

- Doblando y cortando, haz un *cuadrado* de papel, partiendo de una hoja con los bordes irregulares.
- Haz un *rombo* en las mismas condiciones anteriores.
- Haz *todos los cuadriláteros de cada tipo* (rectángulo, trapecio isósceles, trapecio no rectángulo ni isósceles, etc.) doblando y cortando un papel que tiene los bordes irregulares.

### *Actividad 2*

Construir todos los *polígonos regulares* que podáis, doblando y cortando hojas de papel de forma rectangular.

### *Actividad 3*

Construir todos los *poliedros* diferentes que podáis, doblando (no se puede cortar) papeles de forma rectangular.

### *Actividad 4*

A las losetas que cubren una superficie plana y se ajustan bien entre sí, sin dejar huecos ni montarse unas encima de otras se les llama *teselas*. Cuando una superficie podemos cubrirla perfectamente en todas las direcciones con este tipo de teselas, decimos que hemos realizado una *teselación*.

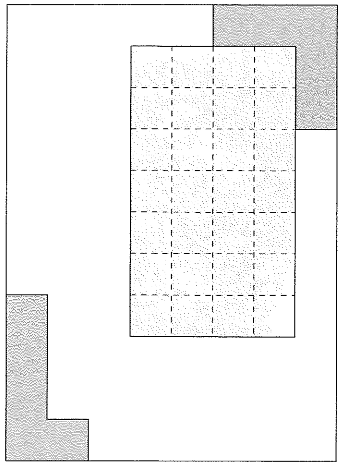
Utilizando los polígonos regulares que os proporcionan, investigad cuál o cuáles de ellos pueden ponerse alrededor de un vértice sin que dejen huecos ni se monten unos encima de otros.

Combinando más de un polígono regular, construir distintas teselaciones.

[A los alumnos se les mostró un ejemplo de teselación construida con una cruz griega].

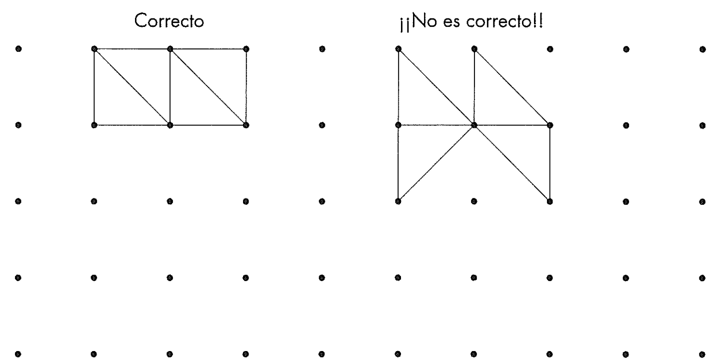
*Actividad 5*

Alrededor de la piscina de 4 x 7 queremos colocar césped artificial. Para ello disponemos de piezas que tienen la forma de pentominós; en el manual de instrucciones nos confirman que con las mismas podemos cubrir todo el campo, sin cortar ni superponer ninguna pieza. Por favor, ayudadnos a colocar el césped.



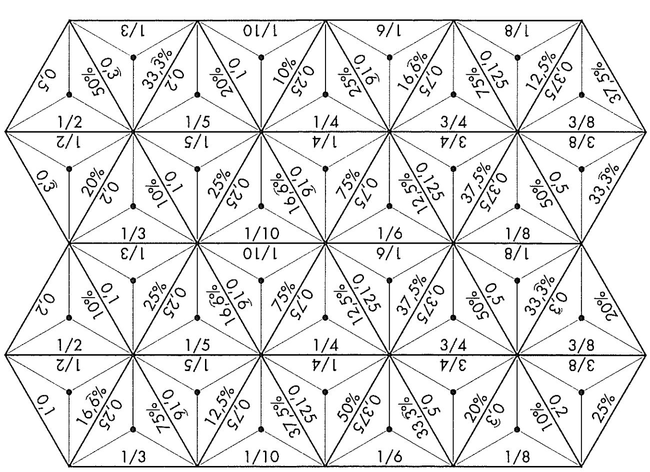
*Actividad 6*

Construir en el geoplano todas las figuras posibles formadas por 4 triángulos rectángulos de igual superficie, unidos por los catetos o la hipotenusa. Podéis construir más de 10 figuras diferentes.




*Actividad 7*

Con el dominó de triángulos equiláteros que os presentamos ya habréis tenido ocasión de jugar. tenéis que unir siempre los lados que tengan expresiones equivalentes.

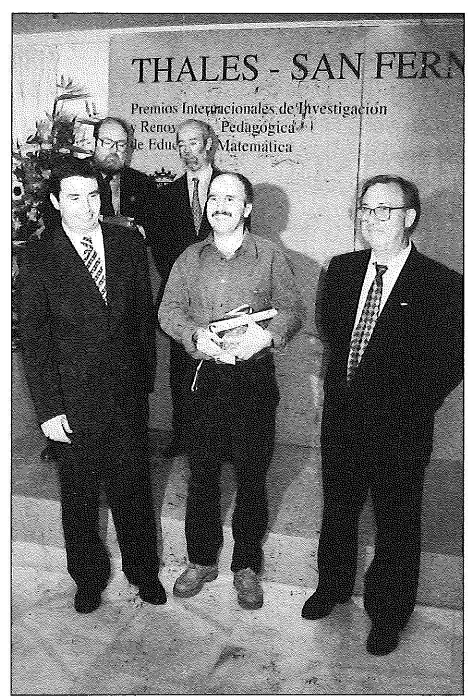


## Premios Thales-San Fernando

El 9 de septiembre de 1997, dentro de las VIII Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas y en la ciudad de Salamanca, tuvo lugar la presentación oficial de los Premios Internacionales de Investigación y de Renovación Pedagógica en Educación Matemática «Thales-San Fernando», por parte del alcalde de la ciudad de San Fernando (Cádiz) y del director de la revista *Épsilon* de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Ambas entidades convocaban conjuntamente estos premios, que podían proceder de cualquier parte del mundo siempre y cuando estuvieran escritos en español o portugués, como un medio más para promover la investigación educativa y la renovación docente en matemáticas en el ámbito del área cultural iberoamericana. El plazo de presentación de trabajos expiraba el pasado 30 de junio.

Se presentaron, conforme a las bases, 38 trabajos, con la siguiente distribución geográfica: 17 de España, 5 de Brasil, 5 de Argentina, 2 de Venezuela, 2 de Costa Rica, 2 de Uruguay, 2 de Bolivia, 1 de México, 1 de Chile y 1 de Cuba. De ellos 11 participaban en la modalidad de Investigación y 27 en la modalidad de Renovación.

Los trabajos presentados se estudiaron, durante los meses de julio y agosto del año pasado y en reunión celebrada el 4 de septiembre, el Jurado declaraba los cinco finalistas de cada modalidad.




El ganador de la modalidad de Renovación Pedagógica, Antón Labraña, con el alcalde de San Fernando y el presidente de «Thales». Al fondo, Claudi Alsina y José L. Pino.

Vista parcial del salón donde tuvo lugar el acto académico. En primer plano los miembros del Jurado, de derecha a izquierda: Claudi Alsina, Ricardo Luengo, Ceferino Ruiz, Ubiratan D'Ambrosio y Javier Pérez

En la ciudad de San Fernando tenía lugar, el 30 de octubre por la mañana, una visita a la Biblioteca del Observatorio de San Fernando y una recepción en el Ayuntamiento. Por la tarde se celebró un acto académico, con el siguiente programa:

1) Acto de apertura, a cargo del alcalde de San Fernando, Antonio Moreno Olmedo y del presidente de la SAEM Thales, Antonio Pérez Jiménez.
2) Conferencia: «¿Matemáticas de hoy o de ayer para la educación de mañana?», por Ubiratan D'Ambrosio.
3) Intervención de los autores de los trabajos finalistas de la modalidad de *Investigación en Educación Matemática*, por orden alfabético del título de dichos trabajos.
4) Intervención de los autores de los trabajos finalistas de la modalidad de *Renovación Pedagógica en Educación Matemática*, por orden alfabético del título de dichos trabajos.
5) Conferencia: «Utopías, renovaciones y clases de Matemáticas», por Claudi Alsina.
6) Clausura del acto académico, a cargo del Director General de Universidades e Investigación de la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía, José Luis Pino Mejías, en representación del Consejero, del alcalde de la ciudad y del presidente de la Sociedad Thales.

José Luis Pino, en su intervención, anunció la convocatoria bianual de estos Premios «Thales-San Fernando», mediante una iniciativa conjunta de la Consejería de Educación, el Ayuntamiento de San Fernando y la Sociedad Thales.

Tras este cierre de las actividades académicas, hubo una cena en honor de los finalistas, a la que asistieron 120 personas. Finalmente, a los postres, el jurado daba a conocer la decisión del mismo:

1. Declarar finalistas del I Premio Internacional de Investigación en Educación Matemática «Thales-San Fernando», a los siguientes trabajos:

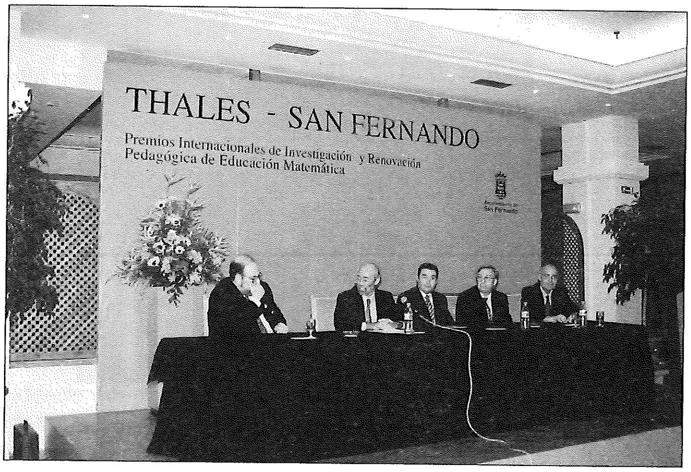
- *Creencias de un grupo-clase de 1.° de FPI Administrativo sobre la resolución de problemas*, de Carmen Núñez Paños, de Lugo.
- *Resolver tipos de problemas matemáticos: ¿una habilidad inhabilitante?*, de M.ª Verónica Díaz Quezada y Álvaro Poblete Letelier, de Osorno (Chile).
- *Autorregulación de los alumnos de su proceso de resolución de problemas*, de M.ª Carmen Pinilla Fernández-Castañón de Ceuta.
- *O que acontece no encontro sujeito-matemática?*, de Verilda Speridiao Kluth, de Sao Paulo (Brasil).

2. Declarar ganador del I Premio Internacional de Investigación en Educación Matemática «Thales-San Fernando», al trabajo:

- *Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis*, de Ricardo Cantoral Uriza y Rosa M.ª Farfán Márquez, de México.

3. Declarar finalistas del I Premio Internacional de Renovación Pedagógica en Educación Matemática «Thales-San Fernando», a los siguientes trabajos:

- *Los juegos a la hora de aprender matemáticas*, de Adriana B. Berio y Amalia M. Corso, de Buenos Aires (Argentina).




Clausura del acto académico

Entrega de premios a los ganadores de la modalidad de Investigación Educativa. En primer plano Ricardo Cantoral recibe el premio que le entrega José L. Pino

- *Un asistente didáctico-matemático para el estudio y representación de funciones*, de Ferrán Verdú Monllor y Fco. Jesús García García, de Alicante.
- *Aprendizaje de la multiplicación en un contexto significativo*, de Ignacio Linares Pérez y Tomás Macías Gil, de Cádiz.
- *Los números Z: puerta de acceso a otra matemática*, de Manuel Alcalá Hernández, de Rincón de la Victoria (Málaga).

4. Declarar ganador del I Premio Internacional de Renovación Pedagógica en Educación Matemática «Thales-San Fernando», al siguiente trabajo:

- *¿Azar o casualidad?: una perspectiva cultural desde la escuela*, de Antón Labraña Barrero, de Santiago de Compostela.

El Secretario del Jurado fue llamando uno por uno a todos los finalistas que, junto con un obsequio conmemorativo, recibieron un diploma acreditativo. Los ganadores de cada modalidad recibieron además un talón por medio millón de pesetas.

Todos los trabajos finalistas, junto con un informe del acto académico aparecerá publicado próximamente como un número monográfico de la revista *Épsilon*.

**Javier Pérez**

Director de *Épsilon*

*Todos los trabajos finalistas, junto con un informe del acto académico aparecerá publicado próximamente como un número monográfico de la revista Épsilon.*

## PROFMAT-98

El pasado mes de noviembre entre los días 11 y 14 se celebró el ProfMat 98 en la ciudad de Guimarães, al norte de Portugal. Esta es la cita anual de los profesores portugueses, organizada por la Asociación de Profesores de Matemáticas (APM). Allí trabajamos, aprendimos, intercambiamos experiencias y convivimos cerca de 1.700 profesores originarios de diversos países, desde EE.UU. y Brasil, pasando por Mozambique, hasta Inglaterra, Francia, Holanda y, por supuesto, de la Península Ibérica.

La ingente labor desarrollada durante esos días viene señalada por los números: 5 Conferencias Plenarias, 24 Conferencias no plenarias, 10 Mesas de Trabajo, 9 Grupos de Discusión, 60 Talleres, 28 Comunicaciones y 10 Presentaciones de Proyectos. Todo ello complementado con exposiciones y presentación de materiales.

Las conferencias plenarias que se ofrecieron fueron:

- «Probabilidades: fascinación y temor», por José Paulo Viana, de la Escola Secundaria Vergilio Ferreira.
- «Autonomía, ¿para qué?», por João Barroso, de la Universidad de Lisboa.
- «La Formación de los Profesores de Matemáticas», por João Pedro da Ponte, de la Universidad de Lisboa.
- «Después de "Matemática 2001"», presentada por un grupo de profesores encabezado por la actual presidenta de la APM Cristina Lourreiro.

La quinta conferencia plenaria con el título «Matemáticas en la vida diaria (de los alumnos)» corrió a cargo de nuestro colega Fernando Corbalán Yuste del IES Grande Covián de Zaragoza, que a pesar de no expresarse en portugués no tuvo ninguna dificultad en hacer disfrutar a todos los profesores presentes. En su conferencia se plantearon ejemplos de relación entre las matemáticas del aula y el entorno social de los alumnos, convergiendo en aspectos de Etnomatemática. Además, el profesor Fernando Corbalán, presentó un interesente proyecto que se está llevando a cabo de forma experimental en Aragón con el título *Emprender en la Escuela*. La intención de este proyecto es que el alumno, dentro del proceso educativo adquiera «...creatividad, capacidad de iniciativa y de asunción de riesgos, motivaciones y referencias claras sobre lo que significa el trabajo de empresario». Básicamente preparar al alumno para afrontar una vida laboral en la que, como ya se indicaba en el Informe Cocfcrokt, posiblemente deba pasar por distintos trabajos, incluso por periodos de desempleo o de autoempleo.

Como es tradicional en las jornadas portuguesas, los dos días anteriores al comienzo se han desarrollado una serie de cursos (con la asistencia de unas 600 personas) que complementan la formación de los profesores que asisten a este evento. Uno de esos cursos, así como una de las conferencias del ProfMat, corrió a cargo de nuestro compañero Juan Díaz Godino de la Universidad de Granada.

La temática desarrollada durante el Congreso ha sido de lo más variada, desde el estudio del potencial matemático de los juegos tradicionales africanos, hasta la utilización de programas informáticos como *Sketchpad* para el trabajo con Geometría. Pasando por la utilización del Arte para enseñar matemáticas, la formación del profesorado o la utilización de la calculadora gráfica.

Sin embargo, han existido dos temas especialmente desarrollados que en nuestra opinión merece la pena resaltar.

Por un lado, la presentación del proyecto «Matemática 2001», que ha consistido en un estudio por todo Portugal del estado actual de la enseñanza de la matemática en los niveles no universitarios (en la linea del Informe Cockcroft). El estudio elaborado por la APM con el apoyo del Instituto de Innovación Educacional, se ha realizado durante los últimos dos años y medio (marzo de 1996 a octubre de 1998). Incide en tres aspectos:

- las prácticas pedagógicas en la enseñanza de la Matemática;
- las necesidades de formación y desarrollo profesional de los profesores y,
- las condiciones de apoyo para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El documento «Renovación del Currículo de Matemáticas» editado por la APM en 1988 sirvió de guía de referencia para este estudio. En el documento final que se ha editado y que fue entregado a todos los participantes, se reúnen más de una treintena de recomendaciones para el futuro, desde aspectos de promoción profesional, o de formación del profesorado, hasta recomendaciones sobre utilización de recursos o creación de aulas-laboratorios en los centros.

Por otro lado, y dado que estamos en el año de su centenario, se han presentado diversos talleres basados en la obra de Maurice Cornelius Escher. Desde el estudio de sus creaciones, hasta el trabajo con el programa *Tesselmania* para elaborar mosaicos. Además, durante todas las jornadas estuvo montada en una sala cercana a la escuela y abierta a la ciudad, la exposición «M. C. Escher. Arte y Matemática» elaborada por la APM. Esta exposición interactiva se ha creado para ser itinerante y pasar por los centros que la soliciten. Se compone de una serie de paneles donde se explica la obra de Escher y una serie de actividades para los alumnos, desde reproducción de mosaicos, estudio de simetrías sobre sus dibujos o elementos construidos sobre sus famosos cuadros, como por ejemplo el triángulo imposible o la escalera que siempre sube, que mirándolos desde un punto adecuado parecen posibles de construir. Se complementa con una serie de vídeos sobre la obra de Escher de la serie «Arte y matemáticas», de Michel Emmer, o una serie de programas de

*...la presentación del proyecto «Matemática 2001», que ha consistido en un estudio por todo Portugal del estado actual de la enseñanza de la matemática en los niveles no universitarios (en la linea del Informe Cockcroft).*

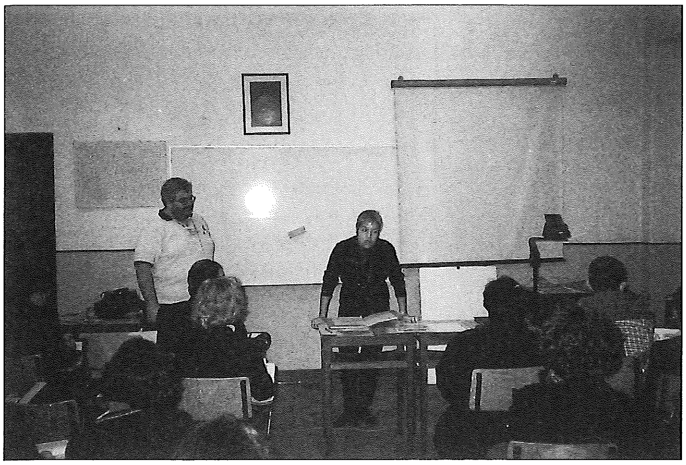
ordenador entre los que esta *Tesselmania*, y un programa interactivo sobre la obra del autor. La dirección de Internet en la que se puede consultar aspectos de esta exposición es

http:\\alfarrabio.um.geira.pt/~escher

Ésta no fue la única exposición que se pudo visitar durante las jornadas. Además de las comerciales y de materiales de la APM (junto a la que se situó un pequeño stand de la SAEM Thales), existían varias exposiciones de trabajos realizados por alumnos, de recursos para un laboratorio de matemáticas, e incluso muestra de los materiales que se pueden conseguir en préstamo en los Centros de Recursos que la APM suele tener en cada núcleo comarcal. También había exposiciones de fotos y matemáticas (entre ellas la correspondiente al VII Concurso Provincial de Fotografía y Matemáticas de la Sociedad Thales en Sevilla), así como aspectos de etnomatemática que estudiaban las matemáticas en los bordados (típicos de aquella zona de Portugal) o en la carpintería. Por último, estaba la tradicional exposición titulada «Otras Artes» en las que los profesores de matemáticas ofrecen muestras de sus otras aficiones, como pintura, escultura, bordados, coleccionismo, etc.

Junto con el material que se nos entregó a los participantes, se incluía las actas de las jornadas, aunque en ella no aparecen todas las actividades, sino sólo aquellas que habían llegado antes de su elaboración. Tambien se ha hecho un CD-Rom de las Jornadas que se entregó durante el desarrollo de las mismas, en el que aparece toda la información incluida en el programa, así como informaciones complementarias.

Como es tradicional en estos encuentros de profesores, tambien se cuidaron los aspectos lúdicos y de convivencia, con una selección de actuaciones musicales y teatrales que se realizaron en una tienda levantada en la propia escuela. Para colmo, esos días coincidieron con un Festival de Jazz en la ciudad, así como con unas Jornadas Gastronómicas.



PROFMAT-98. Comunicación de Matemáticas y Prensa

Suponemos que lo anterior da una idea de la importancia de estas Jornadas, tanto por el número de participantes como por la cantidad de actividades organizadas. Baste decir que en uno de los boletines diarios que se repartían durante el Encuentro, se incluía una carta de apoyo del Presidente de la República Portuguesa, Jorge Sampaio, y que la sesión de cierre contó con la presencia del Ministro de Educación.

Para acabar, sólo resta indicar que el XV Encontro Nacional, ProftMat 99, se celebrará el próximo noviembre en Portimão, en el Algarve Portugués.

**José Muñoz Santonja**

**Juan Antonio Hans Martín**

SAEM Thales

## Proyecto «Talento Matemático»

Desde octubre, los sábados por la mañana de 10 a 1, en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Complutense, ha empezado un curso para chicas y chicos de aproximadamente 12-13 años, que quieran profundizar de forma más o menos lúdica en temas matemáticos. El proyecto está dirigido por el Profesor Miguel de Guzmán e implica la participación de varios docentes de la Facultad y de unos veinticinco chicas y chicos que han sido seleccionados a través de una prueba y de una sucesiva entrevista.

*Desde octubre, los sábados por la mañana de 10 a 1, en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Complutense, ha empezado un curso para chicas y chicos de aproximadamente 12-13 años, que quieran profundizar de forma más o menos lúdica en temas matemáticos.*

Tratándose de un experimento, la convocatoria no ha tenido gran difusión y apareció un solo día en la prensa y durante más tiempo en Internet. Esta experiencia está muy vinculada a proyectos que desde hace bastante años se están desarrollando en los Estados Unidos (en la John Hopkins University de Baltimore, siguiendo la investigación del Profesor Stanley) y en Alemania, en Hamburgo, bajo la dirección de los Profesores Kiesswetter y Zimmermann.

Los días 20 y 21 de noviembre pasado fue presentado el curso a profesores de las facultades de varias universidades del Estado y de las asociaciones de profesores de matemáticas. Presentaron sus ponencias los profesores William Durden de la John Hopkins y de la Sylvan Accademy, Kiesswetter y Zimmermann de Hamburgo y Jozsef Pelikan, de la Universidad de Budapest y uno de los responsables de las olimpiadas matemáticas húngaras, que seleccionan al equipo de este país, que cada año se clasifica entre los mejores del mundo.

El que firma este comentario estaba presente como «enviado» de la sociedad Castelnuovo, profesor de uno de los «talentos matemáticos» y padre de una de las alumnas participantes. Pido perdón por las muchas comillas, pero el nombre del proyecto, y no sus contenidos, y las implicaciones ideológicas que conlleva, no me gustan demasiado.

Pido además disculpas si no puedo limitarme a una escueta crónica del encuentro, pero, como he dicho, me encuentro demasiado implicado para protegerme detrás de una neutralidad que, por otra parte, bien pocas veces existe. Y, finalmente, lo confieso, no soy matemático, sino biólogo, y la idea de que un día pueda ofrecerse un curso para «jóvenes talentos biólogos», ¡a saber lo que esto puede significar!, me suena a doctor Frankestein.

Resumiendo, el profesor Pelikan se limitó a contarnos las excelentes tradiciones de la extraordinaria habilidad con que, desde hace años, los jóvenes húngaros asombran al mundo, atribuyéndolas, con mucho humor, a razones políticas, ya que el régimen no podía prohibir la especulación matemática como hacía con la política; económicas, ya que en un país pobre la investigación matemática solo requería básicamente lápiz y papel; y culturales, ya que, para poner un ejemplo significativo, se cumple este año el siglo de vida de una revista de matemática y física dirigida a los estudiantes de bachillerato, que tiene amplia difusión en todo el país.

De la descripción que el Profesor Pelikan daba, se llegaba a la conclusión de que la principal característica de la experiencia húngara de selección y preparación de jóvenes talentos matemáticos es la extrema competitividad. Los mejores alumnos están invitados a frecuentar un

Instituto que conn los años ha adquirido fama y ofrece los mejores profesores del país.

Más compleja es la historia del proyecto de la John Hopkins University de Baltimore que, a partir de las observaciones de un psicólogo, el Profesor Stanley, sobre la escasez de la oferta formativa que la escuela ofrece a los alumnos más dotados, obligándoles a aburrirse aprendiendo a un ritmo demasiado lento para ellos, ha organizado unos cursos que conforman ahora un inmenso plan llamado *Sylvan Accademy*. La fundación que desarrolla el proyecto está dotada de extraordinarios medios y mantiene contactos con las más prestigiosas universidades públicas y privadas de EE.UU., de manera que los cursos que ofrece durante el verano liberan a los estudiantes de la obligación de frecuentar los cursos ordinarios de matemáticas y le proporcionan créditos para la universidad. La característica más relevante de la experiencia americana parecía así la aceleración del currículo académico, evidentemente permitida por la ley.

Pero la experiencia que se está empezando a desarrollar en Madrid tiene más parecido con el trabajo que desde hace casi quince años tiene lugar en Hamburgo y que se enfoca hacia el enriquecimiento, o sea en ofrecer a los alumnos más capaces, indicados por las escuelas y seleccionados a través de un test, un programa lúdico y creativo de matemáticas. El test que utilizan en Alemania es el mismo que se ha utilizado este año en Madrid y las finalidades y modalidades de desarrollo son muy parecidas.

Aunque el auditorio se rió y estuvo de acuerdo con el Profesor Pelikan en que «cada aceleración es un enriquecimiento y cada enriquecimiento es una aceleración», (y puede que cada actividad intelectual conlleve algo de competitividad, en el mejor de los casos, respecto a uno mismo), a mi me parece que no es secundaria la actitud en la que se pone el acento para juzgar un proyecto.

Así, mientras los invitados iban contándonos sus experiencias y contestaban a las preguntas del cualificadísimo auditorio, yo pensaba en la práctica cotidiana de la enseñanza y si tenía algo que ver con estos proyectos. No dudo que la escuela hace muchas víctimas entre los que no aguantan el ritmo y los «genios», y que en ningún país, que yo conozca, se ha logrado una instrucción de masa y no masificada, para cada uno y no para todos, pero ¿conocéis algún socio de la «Emma Castelnuovo» que no esté de acuerdo con el análisis que sigue y que no esté intentando recorrer caminos distintos?:

«Se pone demasiado énfasis en el pensamiento 'lineal' y demasiado poco en la construcción de procesos basado en la conexión de ideas implicado en la resolución de problemas complejos y en las más típicas situaciones reales así como en los eventos matemáticos. Los textos y los materiales y métodos de enseñanza, y en particular los test de respuesta múltiple, están demasiado orientados hacia el conocimiento y los productos del pensamiento. El todo no sólo es más que la suma de sus partes, sino que es algo diferente. Nosotros ponemos énfasis en una matemática informal y en ideas matemáticas en lugar de estructuras abstractas; creemos que la matemática es un proceso abierto del pensamiento y no un universo de productos determinados; subrayamos que las matemáticas pueden ser consideradas un juego y también un arte; los 'buenos matemáticos' no se definen simplemente por no cometer errores, sino por la calidad de sus ideas.»

*Pidámosles que compartan reflexiones y materiales con los que en las aulas intentan desarrollar las mismas habilidades en todos los alumnos, para demostrarles que tienen más «talento» de lo que creen y que las matemáticas pueden ser de verdad una ocasión de libertad y de igualdad, como Emma Castelnuovo afirma desde siempre.*

Y, ¿a qué os suenan las habilidades que el proyecto alemán, y por consiguiente el español, pretenden medir y desarrollar?: «organizar el material; reconocer modelos y normas; cambiar la representación de un problema y reconocer modelos y normas en la nueva área; comprender estructuras complejas y trabajar en estas estructuras; invertir procedimientos; encontrar (construir) problemas conexos.»

Las dos largas citas son del artículo, proporcionado en el encuentro, de H. Wagner y B. Zimmermann «Identificacion and fostering of mathematically gifted students» en *Educational Studies of Mathematics*, 17 (1986): 243-259.

Si esto es el espíritu con que equipos de docentes universitarios trabajan con chicos y chicas de doce o trece años que encuentran divertido dedicar tres horas de las mañanas de los sábados a discutir y resolver enigmas matemáticos, ¡Qué se levanten las copas y canten los corazones! Pidámosles que compartan reflexiones y materiales con los que en las aulas intentan desarrollar las mismas habilidades en todos los alumnos, para demostrarles que tienen más «talento» de lo que creen y que las matemáticas pueden ser de verdad una ocasión de libertad y de igualdad, como Emma Castelnuovo afirma desde siempre.

**Guido Ramellini**

Scuola Italiana di Madrid

SMPM «Emma Castelnuovo»

# IX JAEM

## IX JORNADAS de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) convoca para los días 9, 10 y 11 de septiembre de 1999 las IX JAEM que serán organizadas por la Asociación de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA) y se celebrarán en Lugo.

En estas jornadas se presentarán ponencias y comunicaciones sobre una serie de mesas temáticas además de otras actividades como exposiciones, conferencias plenarias, talleres, pósters, presentación de conclusiones de seminarios de la Federación y excursiones.

### Avance de programa

*Lugar de celebración*: Facultad de Veterinaria. Campus de Lugo, Universidade de Santiago de Compostela.

*Estructura general*:

- Conferencias plenarias.
- Conferencias en las mesas temáticas.
- Comunicaciones de los participantes.
- Paneles.
- Talleres.
- Exposiciones.
- Excursiones.

*Mesas temáticas*:

1. Tecnologías en la Enseñanza de la Matemática. Calculadoras gráficas y ordenadores.
2. La enseñanza de la estadística: un reto pendiente.

3. Talleres y optativas de Matemáticas.
4. Matemáticas en la vida real y en relación con otras materias escolares.
5. Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.
6. Bases del aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil y primaria.
7. Enseñanza de las matemáticas en la universidad.
8. Formación del profesorado de Matemáticas.
9. Matemáticas en la ESO y el Bachillerato.
10. Matemáticas recreativas.

*Actividades de animación matemática*

- Exposición en el Museo Provincial de Lugo sobre Matemáticas y Ciencias en Galicia.
- Muestra de software y vídeos didácticos.
- Exposición de libros y material didáctico.
- Concurso de Fotografía Matemática. Concurso de Software para Matemáticas. Concurso de actividades innovadoras con calculadoras. Bases en:

http://www.cesga.es/cefocop_lugo/jaem

Con motivo del Xacobeo 99, están programadas rutas por el Camino de Santiago, incluyendo una visita a Santiago de Compostela.

## Presentación de Comunicaciones y Paneles

La presentación de comunicaciones y paneles deberá realizarse antes del día *30 de marzo de 1999*, enviando la ficha correspondiente, debidamente cumplimentada, junto con un breve resumen (10 líneas a doble espacio en formato DIN A-4) de su contenido y estructura. Con objeto de poder agrupar los trabajos presentados de acuerdo con su posible afinidad temática, cada uno de ellos debe acompañarse con las palabras clave que mejor lo identifiquen, a modo de ejemplo indicamos:

- Título de la comunicación o panel.
- Objetivo general del trabajo (formación inicial del profesorado, formación permanente, aprendizaje, currículo...).
- Nivel educativo: primaria, secundaria, universidad...
- Temas específicos que aborda: trabajos prácticos, resolución de problemas, evaluación...
- Naturaleza de la aportación: estudio teórico, experimental, revisión bibliográfica...

El trabajo completo se deberá remitir antes del 30 de abril de 1999 y no debe ocupar más de 5 DIN A-4 a doble espacio. Se recomienda enviarlo junto con un disquete usando los procesadores de texto Microsoft Word o WordPerfect para PC.

*IX JAEM*
*Lugo*
*Septiembre 1999*

*Organiza:*
*ENCIGA*

*Convoca:*
*FESPM*

Los gráficos se deben enviar en formato TIFF o EPS, indicando su colocación en el texto o bien ya insertado en el mismo.

## Cuotas de inscripción

| | Antes del 30-4-99 | Después del 30-4-99 |
|---|---|---|
| Socios de la FESPM | 9.000 pts. | 13.000 pts |
| No socios | 16.000 pts. | 21.000 pts. |
| Estudiantes | 4.000 pts. | 6.000 pts. |

Fecha límite: 30 de junio de 1999.

Asistencia limitada a 800 personas.

Anulaciones: Sólo serán atendidas aquellas solicitudes de reembolso de inscripción realizadas antes del 30 de junio de 1999.

## Inscripción

Enviar talón nominativo o transferencia bancaria a:

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, IX JAEM

Caixa Galicia

c/c 2091 0103 01 3040007246

## Alojamiento

Pueden gestionarse directamente o a través de

Hemisferios Viajes S.L. (Estación de Autobuses 2ª planta. 27002 Lugo. Telf. 982 25 45 45. Fax: 982 23 13 07).

E-mail: hemisferios.viajes@teleline.es

## Secretaría Técnica

CEFOCOP de Lugo

Att.: JAEM

Rúa Dr. Yáñez Rebolo, 31. 27004 Lugo

Telf. 982 25 10 68 / 982 25 09 12

Fax: 982 25 11 26

Correo electrónico:

cflugo@teleline.es

# NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

# BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

**Tarifa**

| | Suscripción anual | Número suelto |
|---|---|---|
| Particulares | 3.500 pts. | 1.700 pts. |
| Centros | 5.000 pts. | 1.700 pts. |
| Europa | $40 USA | $14 USA |
| América y resto del mundo | $50 USA | $17 USA |

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Dirección: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Tno.: . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Población: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . CP: . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Provincia/país . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . CIF/NIF: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.º ______ (3 números)

☐ N.ºs sueltos: ______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

---

Nombre y apellidos: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

Banco/Caja . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Agencia n.º: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Dirección: . . . . . . . . . . . . . . .
Población: . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . Provincia: . . . . . . . . . . . . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM