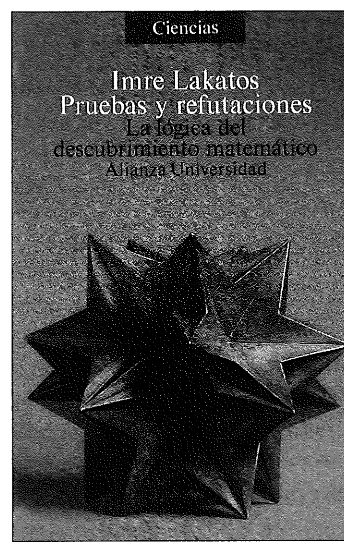
SUMA 30
febrero 1999

Un ataque al formalismo

PRUEBAS Y REFUTACIONES. La lógica del descubrimiento matemático
Imre Lakatos
Alianza Universidad
Madrid, 1978, 1982 y 1986
ISBN: 84-206-2206-0
páginas
(Primera edición en inglés, como una serie de artículos, en el British Journal for Philosophy of Science, en 1963)



No es *Pruebas y Refutaciones* (P y R) un texto fácil. Lakatos es un escritor duro, matiza hasta el extremo, y los temas sobre los que escribe no son precisamente triviales. El libro deja huella, provoca y fuerza el pensamiento de quien lo lee y es muy difícil de abarcar en su totalidad. A pesar de ser un texto de historia y filosofía internas de las matemáticas, resulta interdisciplinar (conceptual, metodológica y culturalmente) en su interinidad. Esta interdisciplinariedad choca con el corto positivismo que impregnó nuestras matemáticas universitarias; el libro resulta así un vendaval de aire fresco que requiere calma y tiempo para ser controlado inteligentemente. Me fiaré, pues, de la memoria como guía de mis comentarios, en lugar de recurrir a una somera revisión apresurada del libro. Lo que seleccione será lo que de momento me ha sido finalmente útil, y en

RECENSIONES

cualquier caso será representativo de mi particular lectura, necesariamente provisional, de *Pruebas y refutaciones*[1].

I

Estamos ante una obra refinada y exquisita. El primer acercamiento produce una sensación de plenitud cultural, de entusiasmo ante la poderosa demostración del amplio bagaje intelectual del autor. Un bagaje matemático, filosófico, histórico, político y sociológico. Cualquier libro aporta pistas sobre la personalidad del escritor: P y R descubre un Lakatos riguroso, polemista infatigable, ácido, irrespetuoso e irónico. No me resisto a incluir algunos (deliciosos) párrafos que justifiquen los tres últimos adjetivos:

- Uno se pregunta cuándo «El autor confiesa su ignorancia en el dominio x» sustituirá al eufemismo «el autor da por supuesta la familiaridad con el dominio x»: sin duda tan sólo cuando se reconozca que el conocimiento carece de fundamentos. (nota n.° 63)

- Gamma: ¿Entonces, es un contraejemplo una crítica?

  Maestro: Ciertamente. Las conjeturas ignoran desagrados y sospechas pero no pueden ignorar los contraejemplos.

  Zeta [aparte]: Obviamente, las conjeturas son muy distintas de quienes las representan. (pág. 27)

- Matthiessen posee una notable confianza en su método de convertir contraejemplos revolucionarios en burgueses ejemplos eulerianos bien ajustados. (nota n.° 48)

Esta tercera cita muestra el empleo irónico de una terminología política izquierdista que se puede encontrar en otros pasajes del libro:

> Esta formulación matizada recibe en el segundo artículo un curioso giro imperialista. (nota n.° 6)

Pero la ironía es sólo aparente. La acusación de imperialista al deductivismo es coherente con el pensamiento del autor y el final de la nota n.° 68 indica que Lakatos utiliza de forma ingeniosa, productiva, provocadora y muy atractiva las analogías entre el campo de la política y el campo de la ciencia:

> La analogía entre ideologías políticas y teorías científicas es, por tanto, mucho más estrecha de lo que normalmente se cree: las ideologías políticas, que pueden comenzar discutiéndose (y quizá aceptándose tan sólo bajo presión), pueden convertirse en conocimiento básico incuestionable en una sola generación: los críticos se olvidan (quizá se ejecutan) hasta que una revolución vindica sus objeciones.

Me extiendo en aspectos secundarios porque motivaron mi curiosidad por las circunstancias personales del autor. No resulta fácil encontrar datos biográficos sobre Lakatos (1922-1974) (los libros sobre filosofía de la ciencia suelen ser publicaciones extremadamente serias). Recojo algunos de los que aportan Davis y Hersh[2]:

Licenciado en física, matemáticas y filosofía. Su madre y su abuela murieron en Auschwitz. Después de la guerra fue comunista activo, llegando a ocupar un alto cargo en el Ministerio de educación de su país (Hungría). Detenido en 1950 cumplió tres años de cárcel. Tras la sublevación de 1956 huyó a Inglaterra donde bajo la influencia de Popper y Polya desarrolló su obra.

Cualquier libro aporta pistas sobre la personalidad del escritor: Pruebas y Refutaciones descubre un Lakatos riguroso, polemista infatigable, ácido, irrespetuoso e irónico.

1 Una divulgación clara de la aportación de *Pruebas y refutaciones* a la forma de entender las matemáticas puede verse en Davis y Hersh: *Experiencia matemática*, MEC y Labor, 1988.

2 Obra citada.

3 Thomas S. Kuhn: «Notas sobre Lakatos». Recogido en Imre Lakatos: *Historia de la Ciencia y sus reconstrucciones racionales*, Tecnos, 1974, 1982, 1987 y 1993.

II

Pruebas y refutaciones es un libro sobre historia de las matemáticas. Una historia exclusivamente interna que pretende una reconstrucción racional del proceso de conjeturas, pruebas y refutaciones que a lo largo del siglo XIX discute la validez de la inicial conjetura ingenua de Euler sobre la relación entre vértices, caras y aristas de un poliedro, lo que nos permite asistir al cruce de ideas que está en los orígenes de la Topología. Pero la historia de Lakatos no es una narración ni un análisis estructural sino una obra de teatro, representada en este caso por un profesor y sus alumnos (una clase más bien aventajada, como reconoce el propio Lakatos) que son quienes escenifican en un tiempo limitado la discusión.

Se ha criticado duramente a Lakatos por su modelo de historia de la ciencia como reconstrucción racional del pasado. Desde luego que cualquier obra histórica, de cualquier escuela, lo es en la medida en que es un producto intelectual, pero Lakatos parece optar por ordenar y encorsetar el pasado en la rigidez de un desarrollo argumental al servicio de su modelo explicativo de la génesis del conocimiento matemático. La «historia real» (esa que ya no existe) «resuena», como dice Lakatos, en las notas a pie de página, aportando al espectador o espectadora información adicional (así descubrimos, por ejemplo, en la interesante nota n.° 1, que Descartes ya había intuido la conjetura de Euler) o recordándole que no está ante una simple obra de ficción, que los argumentos de los actores lo fueron en su momento de Cauchy, Hessen, Lhuilier o Gergonne.

Una novela o una obra de teatro históricas reinventan el pasado, pero ello no impide su aceptación por la crítica. Se da por supuesto que el género, por su propia naturaleza, tiene derecho a recurrir a estas licencias. Ocurre que la historia y la filosofía de la ciencia tienen pretensiones dogmáticas: intentan en sus trabajos definir el camino de las futuras investigaciones. La crítica (los críticos a la postre pretenden lo mismo) se hace entonces más dura. Recojo aquí una interesante objeción de Kuhn[3]:

«La historia ha de ser reconstruida sin violentar los datos disponibles por causa de la selección e interpretación. Sólo si se emplean estos y otros criterios internos del oficio de historiador, las conclusiones de la investigación histórica podrán contradecir y cambiar la posición filosófica con la que el historiador empezara. Lo que me inquieta del ensayo de Lakatos es que excluye todos estos criterios, privando así a la historia de toda función filosófica».

III

Los manuales más divulgados de historia de las matemáticas presentan la creación matemática como producto de mentes geniales aparentemente desconectadas del resto de los mortales. Si una determinada época resulta especialmente fructífera en este tipo de genios, se habla entonces del espíritu de dicha colectividad o de la sociedad en que viven. El espíritu de los pueblos se llega a convertir en ocasiones en el dato objetivo desde el que se justifica la evolución de la historia. Es raro encontrar enfoques más progresistas como el que desarrolla en algunos párrafos de su sencillo pero profundo librito Lucio Lombardo Radice[4], una bonita síntesis de historia interna y externa, donde sin llegar a establecer conexiones fuertes, de tipo determinista, entre la evolución de la sociedad y la de las matemáticas resalta el paralelismo de los caminos seguidos por las dos en los siglos posteriores al Renacimiento.

Aceptar que una historia social está necesariamente ligada al externalismo supone obviar opciones tan enriquecedoras como la de P y R. Me atrevería a interpretar esta obra como un ejemplo de historia social interna. Crelle, Matthiessen, Jonquières, Poinsot, Lhuilier, Gergonne, Baltzer, Grunert, Bérard, Hessel, Heis, Eschweiler, Becker, etc., me resultaban totalmente desconocidos antes de P y R. Lakatos está citando, sin duda, a matemáticos del XIX de nivel alto pero no habituales en los textos de historia. No tuvieron la intuición original del teorema ni han quedado como autores de algún final transitorio, pero sus aportaciones, sus dudas, sus conjeturas y contraejemplos, sus conservadurismos o sus cambios de enfoque, fueron etapas claves en el proceso. Al enfrentar sus líneas de pensamiento, Lakatos está mostrando la historia como una creación colectiva.

IV

Desde la construcción axiomática de Euclides, las matemáticas (más bien habría que decir la geometría) gozaron de una consideración especial dentro de las ciencias. Ni siquiera el ataque del empirismo a las pretensiones de certeza de la ciencia llegó a poner en cuestión este baluarte último de seguridad. Los resultados de *Los Elementos* seguirían siendo válidos, se ha afirmado en infinidad de ocasiones, aunque el mundo fuera de otra manera. Así hasta el XIX, en que la aparición de las geometrías no euclídeas (un final inesperado para lo que inicialmente era sólo un pequeño ajuste motivado por esa vieja pretensión de perfeccionismo a ultranza (se buscaba, se busca, satisfacción, seguridad, convicción plena)) provoca una crisis aguda de inseguridad (se dice crisis de fundamentos) que desemboca en el cambio de siglo en el formalismo y el logicismo. Puesto que la geometría no era fiable se recurrió sucesivamente a la aritmética y a la teoría de conjuntos, pero los perseguidores de certezas infalibles[5] continuaron implacables su labor crítica. Así, paradoja tras paradoja hasta llegar al terreno seguro de un mero juego simbólico vacío de contenido y sostenido por las reglas de la Lógica. Como bien advierte Lakatos (el alumno Kapa en P y R) «si quiere usted que las matemáticas tengan sentido, ha de abandonar usted la certeza. Si quiere usted certeza elimine el significado». O también[6]: «La Lógica tal vez *explique* la matemática, pero no puede *probarla*».

La deshumanización de las Matemáticas. Al igual que en Arte, el paradigma matemático del siglo XX ha estado guiado por la abstracción. (En nuestro caso, la abstracción como programa en el reino de la abstracción. Es decir, la abstracción de la abstracción). Pero mientras algunos artistas sostuvieron que este era el camino para una comunicación más intensa, las matemáticas se encerraron en el elitismo de la forma que se justifica a sí misma. ¿Cómo pudimos llegar a aceptarlo en nuestros años de Universidad?[7] En cualquier caso no fuimos los únicos. Todavía hoy muchas personas piensan las matemáticas como el único reducto de certeza absoluta, aunque para ello deba ser inevitablemente vacío.

V

Pruebas y refutaciones es un libro sobre filosofía de la ciencia (de las matemáticas) cuya finalidad, declarada en la introducción, es desarrollar un fuerte ataque al formalismo, «el último eslabón de una larga cadena de filosofías *dogmáticas* de las matemáticas». Para Lakatos, las matemáticas «no se desarrollan mediante un monótono aumento del número de teoremas indubitablemente establecidos, sino mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones», y como ejemplo de la validez de su planteamiento escenifica el desarrollo de la conjetura de Euler. Es cierto que en la historia real las cosas no suceden linealmente, como en el teatro de Lakatos, pero ello no es un dato en contra. Lo que interesa es que «la incesante mejora de las conjeturas, la especulación y la crítica» ocurrieron y ocurren realmente.

Sin ánimo de ser exhaustivo resaltaré algunas sorpresas y algunos conceptos útiles recogidos a lo largo del apasionante proceso que se describe en el libro.

Pruebas y refutaciones es un libro sobre filosofía de la ciencia (de las matemáticas) cuya finalidad, declarada en la introducción, es desarrollar un fuerte ataque al formalismo, «el último eslabón de una larga cadena de filosofías dogmáticas de las matemáticas».

4 *La matemática de Pitágoras a Newton*, Ed. Laia, Barcelona, 1983.

5 Me pregunto últimamente si no hay algo patológico en todo esto. Escuchemos a Bertrand Russell: «Necesitaba la certidumbre en idéntica forma en que la gente necesita la fe religiosa» (citado por Davis y Hersh en *Experiencia matemática*).

6 «Regresión infinita y fundamentos de la matemática». Recogido en Imre Lakatos: *Matemáticas, ciencia y epistemología*, Alianza Universidad, 1981 y 1987.

7 Pregunto cómo pudimos porque era claro que el cuerpo no lo aceptaba. Sin duda debió funcionar una especie de sublimación, una forma de contrarrestar un cierto complejo de inferioridad. Me refiero a los mortales, claro. Porque bourbakistas convencidos, haberlos, los había y desde luego «haylos».

• *Prueba*. Para mí era equivalente a demostración. Es cierto que esta segunda palabra es más contundente pero la expresión «queda probado el teorema» se emplea habitualmente en el sentido de que ya no quedan dudas sobre su validez. Para Lakatos, «prueba» es «un experimento mental (o "cuasi-experimento") que sugiere una descomposición de la conjetura inicial en subconjeturas o lemas, incorporándola así a un cuerpo de conocimiento tal vez muy lejano».

Veamos como ejemplo tres de los posibles enfoques para probar el teorema de Pitágoras: mediante puzzles diversos, a partir del teorema del cateto, o a partir de las propiedades de las operaciones de los vectores libres del plano o del espacio. En los dos últimos casos estamos incorporando la conjetura sobre la relación entre los lados de un triángulo rectángulo a cuerpos de conocimiento cada vez más lejanos del inicial en que fue formulada. ¿Tenemos entonces tres demostraciones del teorema? No, tenemos tres pruebas.

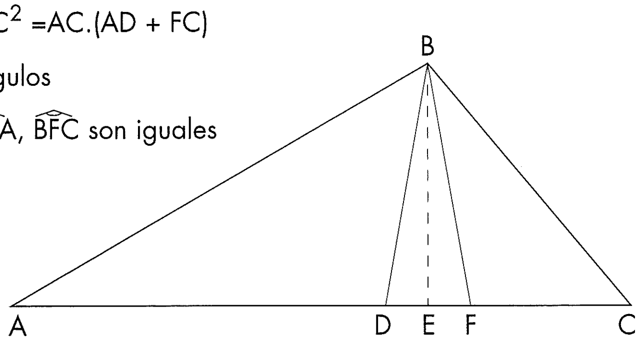
• *Análisis de la prueba*. Proceso creativo necesario para encontrar caminos que permitan superar las dificultades planteadas por los contraejemplos. La otra opción (entran ganas de escribir «la única que nos vendieron», pero no está claro que vendieran siquiera esto) es la modificación ingenua de la conjetura. Las pruebas, enorme sorpresa, no siempre prueban lo que pretendían probar. No es grave que una prueba sea refutada.

La descomposición de la conjetura mediante la prueba supone la aceptación implícita del «entorno ambiental» (el cuerpo de conocimiento) en que se despliega la conjetura, pero este puede ser discutido por la crítica por inadecuado, obsoleto, restrictivo o excesivamente amplio. ¿Reconocemos a Pitágoras en el teorema del coseno o en la expresión $ds^2 = du^2 + 2 \cos\omega \, du \, dv + dv^2$ para la distancia entre dos puntos opuestos de una célula de una retícula de Chébyshev? Sí, ciertamente al generalizar en este caso hemos cambiado de nombre el teorema después de haber establecido zonas de seguridad inapelables, pero ¿invalida esto el hecho de la revisión permanente como sistema de avance, como metodología para la construcción del conocimiento matemático? ¿Qué impulsa a Tabit ibn Qurra a generalizar el mismo teorema de Pitágoras en otra dirección sino ese afán de revisión del contexto en el que se encajaba la conjetura inicial?

$AB^2 + BC^2 = AC.(AD + FC)$

si los ángulos

$\widehat{ABC}$, $\widehat{BDA}$, $\widehat{BFC}$ son iguales



Lakatos parece reducir la motivación del avance en la creación de conocimiento matemático al simple juego intelectual (aunque el resultado sea mucho más que eso).

VI

Escribir es una excelente manera de pensar. Entusiasmado por la lectura, acuciado por su problemática, no intuí entonces las consecuencias de la propuesta de P y R. Lakatos parece reducir la motivación del avance en la creación de conocimiento matemático al simple juego intelectual (aunque el resultado sea mucho más que eso). Y en ocasiones puede ser así: probablemente ibn Qurra, traductor de *Los Elementos* al árabe, fue motivado en su generalización por la demostración que Euclides da del teorema de Pitágoras; la discusión sobre la conjetura de Euler puede haber sido igualmente un tema incontaminado de cuestiones prácticas; pero las matemáticas se ven cuestionadas en muchas ocasiones por problemas prácticos o experimentales y P y R sugiere un proceso creativo desde la torre de marfil. En este sentido falsea la historia.

VII

Abrevio la particular selección de términos que empecé hace dos apartados.

• *Contraejemplos locales*. Atacan a la prueba, no a la conjetura.

• *Contraejemplos globales*. Atacan directamente a la conjetura pero no a la prueba. Curiosamente son más fáciles de solventar que los locales. Los contraejemplos pueden ser locales y no globales, globales y no locales o las dos cosas a la vez.

• *Conjeturar ingenuo*. Probablemente el único camino cuando no se sabe qué hacer. Estéril a poco sutil que sea la situación. A pesar de ello es lamentable que los niños y niñas no sean educados desde Primaria en la sana costumbre de establecer conexiones en cuanto dispongan de algunos datos para ello.

• *Deducción euclídea*. Se sabe de antemano lo que se va a demostrar. No produce conocimiento nuevo. Es una forma de presentación de resultados, no un método de creación. Los libros están llenos de simples comprobaciones que pasan por demostraciones.

• *Conjeturar deductivamente*. Proceso deductivo en el que el conocimiento que se alcanza se obtiene al final. No es necesario cerrar el círculo como cuando se parte de un proceso inductivo. Ejemplo sencillo: la expresión que aporta el número de cerillas necesarias para completar *n* cuadrados en hilera puede obtenerse por una inducción, analizando una tabla de datos que relacione el número de cuadrados y el número de cerillas, lo que obliga a analizar posteriormente la estructura de la construcción para tener garantías de no haber dado un salto en falso (hasta aquí el manido modelo inducción-deducción), o directamente por este análisis (conjeturar deductivo).

• *Exclusión de monstruos.* Procedimiento habitual, muy tosco, empleado en múltiples actividades humanas. Es especialmente estéril. Un ejemplo cercano que permite observar la exclusión de monstruos como método conservador de defensa ante lo desconocido es el bonito juego sugerido por la original propuesta de Fielker[8] para generalizar el concepto de polígono al aceptar el reto de localizar un polígono de 2,5 lados. Una reconstrucción racional típicamente lakatosiana, en este caso con una finalidad didáctica y sin pretensión histórica. Pero un polígono de 2,5 lados es un monstruo, aunque termine apareciendo en escena la estrella pitagórica, y algunas personas se ofenden cuando se les plantea la propuesta de Fielker.

VIII

¿Puede alguien seguir pensando después de P y R que en matemáticas se crea encadenando mecánicamente definiciones-teoremas-corolarios? La sombra del formalismo y del deductivismo es alargada[9]. ¿Por qué son más divulgadas las citas de Russell aludiendo a la naturaleza formalista de las matemáticas que aquellas en las que su fe entra en crisis? En 1955 ya se habían escrito opiniones como las de Mostowski[10]: «El resultado de Gödel y otros resultados negativos confirman el aserto de la filosofía materialista de que la matemática es, en última instancia, una ciencia natural, que sus nociones y métodos tienen sus raíces en la experiencia y que los intentos de establecer los fundamentos de la matemática sin tener en cuenta su origen en las ciencias naturales están condenados al fracaso».

Por primera vez en 2500 años se ha propuesto una consideración diferente para las matemáticas. Ya no son el reducto siempre resistente del deductivismo. Para Lakatos las matemáticas son una ciencia cuasi-empírica[11]: «a lo sumo está bien corroborada, pero es siempre conjetural». Una de las consecuencias es la falibilidad. Ni siquiera cuando el alumno que en P y R hace suyo el programa euclídeo, Epsilon, presenta su versión del teorema de Euler («Si los espacio circuito y los espacios circuito limitantes coinciden, el número de dimensiones del espacio 0-cadena menos el número de dimensiones del espacio 1-cadena más el número de dimensiones del espacio 2-cadena es igual a 2») se habla de demostración sino de prueba. ¿Dónde queda la demostración? Más bien habría que hablar de permanente ajuste de pruebas en un proceso que sin embargo no puede plantearse indefinido a corto plazo si se quieren evitar riesgos como la esterilidad o la superficialidad. La demostración quedaría como prueba indiscutida en recintos de seguridad ya superados.

¿Puede alguien seguir pensando después de Pruebas y Refutaciones que en matemáticas se crea encadenando mecánicamente definiciones-teoremas-corolarios?

IX

Amin Maalouf hace decir a Omar Jayyam en su novela *Samarcanda*: «¿Sabes lo que me fascina de las ciencias? Que encuentro en ellas la suprema poesía: con las matemáticas el vértigo embriagador de los números; con la astronomía, el enigmático susurro del Universo. Pero ¡por favor, que no me hablen de la verdad!». Si se ha tenido ocasión de leer los *Rubaiyyat* de Jayyam se comprenderá que Maalouf no ha traicionado su pensamiento. Llegamos entonces a una perogrullada: la personal concepción que se tenga de las matemáticas es resultado de la ideología y de la psicología de cada cual. Pero precisamente este carácter de perogrullada hace más incomprensible la pretensión dogmática mantenida imperturbablemente a lo largo de la Historia. ¿Cómo ha sido posible, por ejemplo, la continuidad de la ilusión del origen puramente intelectual (un mero afán de perfeccionismo teórico) del conjunto de axiomas elegido por Euclides, al margen por completo de las dificultades materiales derivadas del manejo de los incómodos compases griegos?

X

Lakatos comenta al final de P y R un último argumento defensivo de los partidarios del estilo deductivista: la dificultad que entrañaría una presentación alternativa (de tipo heurístico, centrada en la metodología y no en la Lógica) de los textos de matemáticas. La contestación es evidente: hay que intentarlo. El dogmatismo de Dieudonné muestra hasta qué punto puede haber ideología subyacente en la toma de postura sobre esta cuestión. Llega a hablar de «la absoluta necesidad impuesta sobre todo matemático que se preocupe por la integridad intelectual» de presentar sus razonamientos en forma axiomática[12].

Vayamos a las fuentes y revisemos la demostración que da Euclides del teorema de Pitágoras. ¿Algo que objetar a un proceso deductivo tan rígidamente estructurado? Depende de lo que busquemos. ¿Por qué hace Euclides lo que hace? ¿Por qué esa altanería de no declarar expresamente la idea heurística que le ha permitido construir su encorsetada argumentación? ¿Por qué no nos dice que ésta ha sido posible porque previamente había intuido que los cuadrados AGFB y ACKH tienen la misma superficie que los rectángulos BQLD y QLEC?

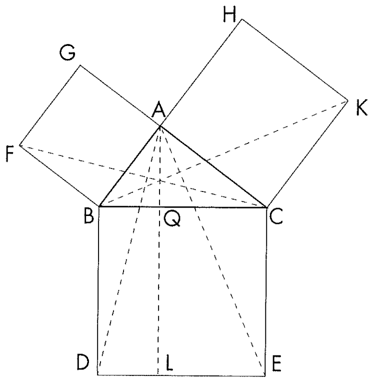
8 Véase el artículo «Parasoles» en *Rompiendo las cadenas de Euclides*, una hermosa recopilación editada por el MEC en 1987.

9 Incluso las notas de los editores de P y R tienen en ocasiones el aspecto de una reprobación de las opiniones de Lakatos.

10 Recogida en la obra citada en la nota 6.

11 El término es complejo. La interpretación intuitiva primera (son empíricas pero no tanto, sólo un poco) es empobrecedora. Para las características que Lakatos adjudica a una ciencia cuasi-empírica, véase el interesante artículo «¿Existe un renacimiento del empirismo en la reciente filosofía de la matemática?», recogido en el libro reseñado en la nota 6.

12 Citado por Lakatos en P y R (pág. 17).



XI

P y R es un libro con unas implicaciones didácticas evidentes. Y no sólo porque su desarrollo ocurra en una clase ideal sino también por su contenido mismo. El deductivismo inspira el 90% de las clases de matemáticas en todos los niveles educativos, si no claramente en cuanto a que la exposición de contenidos siga el rígido modelo teorema-demostración-corolario sí en lo que supone de mera transmisión de un saber ya establecido sin participación de sus receptores, y P y R lo critica severamente por su inadecuación como modelo explicativo de la génesis del conocimiento matemático pero también por sus consecuencias didácticas:

> El enfoque deductivista esconde la lucha y oculta la aventura. [...] el resultado final se exalta al estado de infalibilidad sagrada. (pág. 166)
>
> Aún no se ha constatado suficientemente que la educación matemática y científica actual es un semillero de autoritarismo, siendo el peor enemigo del pensamiento crítico e independiente. Mientras que en matemáticas este autoritarismo sigue el patrón deductivista, en la ciencia opera mediante el patrón inductivista. (nota 39. pág. 166)

Un buen ejemplo de «clase lakatosiana» de Primaria o Secundaria lo proporcionan los diálogos que recoge Fielker en sus artículos[13].

XII

Las aportaciones de mayor interés que la didáctica puede recibir de la historia de las matemáticas proceden de la historia interna. El conocimiento de la génesis de los conceptos es básico para darles sentido más allá del oficial juego vacío de contenido.

> Es una vergüenza de la presente educación matemática que los estudiantes puedan citar exactamente las diferentes definiciones de las integrales de Cauchy, Riemann, Lebesgue, etc., sin conocer cuáles eran los problemas que trataban de resolver o cuáles eran los problemas en cuyo proceso de solución se descubrieron. (nota 203)

Pruebas y Refutaciones es un libro con unas implicaciones didácticas evidentes.

XIII

La Resolución de Problemas ofrece un camino para la creatividad en clase de matemáticas (por cierto que fue Polya quien sugirió a Lakatos la conjetura de Euler como tema para su investigación). La lectura de P y R permite mejorar la observación y el análisis de los procesos mentales que tienen lugar en el aula.

XIV

El mundo es afortunadamente complejo. Lo que para mí es una concepción progresista y refrescante de las matemáticas es sostenida por un autor como Lakatos muy conservador en su valoración de las relaciones entre ciencia y sociedad. Para él, «la ciencia, como tal, no tiene ninguna responsabilidad social»[14]. Una defensa tan radical de la autonomía de la ciencia es probablemente coherente con el internalismo de P y R, pero me resisto a establecer una relación determinista. Me gusta P y R y no veo por qué tiene que estar necesariamente asociado su enfoque con una ideología conservadora.

XV

Si puedo generalizar a partir de mi personal evolución, me atrevería a decir que *Pruebas y refutaciones* ha sido un libro mítico para muchas personas que estudiamos matemáticas en los años setenta. Un libro diferente que se deseaba leer pero no se leía. Por mi parte, he necesitado un largo período de tiempo antes de sentirme fuerte para atacar su lectura. Ha sido fundamental para ello el haber tomado contacto con la Resolución de Problemas. P y R es un libro sobre la génesis del conocimiento matemático, sobre la creación en matemáticas. Si no se ha tenido ocasión de hacer matemáticas (¿nos ofrecieron oportunidades en la Universidad? ¿nos lo exigieron?) difícilmente se comprenderán los procesos que describe. Por otra parte, una clase de Secundaria puede ser (debería serlo) un excelente lugar para observar cómo se hacen matemáticas individual y colectivamente. A partir de toda esta experiencia acumulada empezó a ser posible la lectura de P y R. Los problemas que lo hacían mítico eran míos (nuestros). Primero había que recuperarse del estéril período formalista universitario.

Ángel Ramírez

13 Por ejemplo, en el delicioso librito que editó la Generalitat Valenciana: *Usando las calculadoras con niños de diez años.*

14 Véase el artículo «La responsabilidad social de la ciencia» en la obra citada en la nota 6. Un texto complejo, que merece la pena ser leído detenidamente (la frase que he recogido va seguida de otra en la que asigna a la sociedad la tarea de controlar a la ciencia), en el que llega a justificar sin traba alguna la investigación científica con fines militares. Sus opiniones me parecen explicables a la luz de su experiencia política.