

SUMA 30

febrero 1999, pp. 121-123

La mar de silencio

Miquel Albertí Palmer

ANOCHE no me sentía nada bien. Justo después de cenar, y a pesar de la juerga que se estaba montando, decidí acostarme. Si me hubiese quedado tampoco hubiera participado en la diversión, tan solo les habría agitado la fiesta. Por suerte las cosas cambian y también acaba lo que parece interminable. Los malos acompañantes de estos últimos días han huido: ya no me duelen ni el estómago ni la cabeza y la diarrea ha desaparecido. Hice bien en comer poco. Ahora, a punto de clarear pero bien espabilado, ¡lo nunca visto!, me siento como nuevo. Y el paisaje que contemplan mis ojos hace que todo me parezca ¿idílico?, ¿tópico?, ¿ficticio?, ¿irreal?, ¿onírico?, ¿mentira? No, no es mentira. La realidad vuelve a superar a la ficción que la imaginación sugiere, pero si a menudo es eso lo que nos hace dudar de que lo vivido sea real, ahora es precisamente esto lo que me permite asegurar que no sueño. Tampoco puedo ser la víctima de un espejismo porque es imposible que el mar quieto y silencioso de dunas rosadas que se extiende hasta el horizonte, mire donde mire, lo sea. Uno puede padecerlos en el desierto: charcos de agua cristalina, bosques de palmeras que cobijan un oasis, montones de terrones que anuncian un poblado, y muchos otros. ¡Pero el desierto entero no puede ser un espejismo de sí mismo!

Antes de que todos se levanten me voy a dar una vuelta por las dunas. Quiero pasearme solo por la arena. En seguida me sorprende su finura. Es mucho más blanda de lo que me había imaginado y caminar sobre ella no resulta cosa fácil: me hundo hasta las rodillas. El color rosado que ahora tiene no será el mismo dentro de un rato. A lo largo del día pasará por una infinidad de tonalidades. Leyendo el tiempo en cada uno de sus cromatismos los tuareg convierten su mar en un inmenso reloj de color, no de arena.

Tras relatar la experiencia vivida al pasearme por las dunas del desierto marroquí siento la imposibilidad de contar cantidades finitas de granos de arena. Me doy cuenta de que en este ámbito sólo vale el dicho: *o todo o nada*. Para contar me bastan las cifras 0, 1, ∞ . ¿Cómo definir pues una suma y un producto en este conjunto que sean coherentes tanto con la suma y producto corrientes como con las ideas de nulidad, finitud e infinitud que sugieren los símbolos 0, 1 e ∞ ? Al intentarlo veo que la coherencia está reñida con la lógica usual: he aquí el trampolín para indagar.

MISCELÁNEA

Me habré alejado unos doscientos metros de las jaimas, pero aún no he perdido de vista sus estandartes. Unos pasos más y me quedaré completamente solo en medio de las olas. ¿Sabré nadar?

Sentado en tierra cojo un puñado de arena. Fina y fría como un líquido, forma una pequeña cascada cuando se me escurre entre los dedos. Pero no fluye toda, muchos granos se me quedan pegados en la mano, alojados entre las dunas de mis huellas dactilares: transformados allí en rocas gigantescas.

Imposible contarlos. Demasiados y demasiado pequeños. Entonces si no puedo contar los que se me han quedado pegados, ¿cuántos había cogido?, ¿cuántos veo de un vistazo?, ¿cuántos forman una duna?, ¿cuántos hay en todo el desierto? No sólo es imposible contarlos, sino nombrarlos, ¿qué número se necesita pronunciar?, ¿diez millones?, ¿un millón de millones?, ¿infinito? Quizá sí, pero sé que aunque son muchos los que hay tampoco son infinitos porque el desierto es limitado. Ciertamente es que ocupa un espacio enorme y que cada uno de los granos que lo llenan es microscópico, diminuto, muy poca cosa, pero al fin y al cabo alguna cosa es. Por tanto, a pesar de ser muchísimos, serán finitos. Un número brutal e inimaginable.

El vocablo *desierto* sugiere a la vez ideas contrarias como *nada* e *inmensidad*, *vacio* y *plenitud*, *nulidad* e *infinitud*. ¿Estoy seguro de que son contrarias? ¿Qué se puede contar en el desierto? Me refiero a los desiertos de arena como éste, no aquellos en que uno puede ver un cactus aquí, una piedra allí, unos matorrales más allá. No, en el desierto-desierto uno tiene pronto la impresión de que si quiere contar alguna cosa los números no le servirán de gran ayuda o, dicho de otra manera, con pocos tendrá suficiente. Sin árboles ni piedras ni animales que contar, sólo arena, el sol y, de vez en cuando, la luna, uno se da cuenta de que hay bastante con utilizar tres cardinales. Se puede contar *ningún grano*, *un grano*, *muchos granos*, como hacía la gente de la prehistoria. Y si cambias de tema puedes decir *un sol*, *una luna*, *un cielo*; o bien: *ninguna luna*, *ningún sol*. De la única cosa que hay muchos es de granos de arena y son tantos que sólo puedes hablar de ninguno, de uno o de todos, la infinidad. Hace falta una paciencia casi infinita para contar una cantidad finita. No hay término medio. Luego para contar me bastan las cifras 0, 1 y ∞ . ¿Cómo puedo calcular con ellas? ¿Qué representa cada una? Si interpreto 0 como la nada; 1 como lo finito; y ∞ , como lo infinito, entonces para sumar puedo pensar que:

$$\text{nada} + \text{nada} = \text{nada}$$

$$\text{finito} + \text{finito} = \text{finito}$$

$$\text{infinito} + \text{infinito} = \text{infinito}$$

$$\text{finito} + \text{infinito} = \text{infinito}$$

Imposible contarlos. Demasiados y demasiado pequeños. Entonces si no puedo contar los que se me han quedado pegados, ¿cuántos había cogido?, ¿cuántos veo de un vistazo?, ¿cuántos forman una duna?, ¿cuántos hay en todo el desierto? No sólo es imposible contarlos, sino nombrarlos...

para construir la tabla de sumar:

+	0	1	∞
0	0	1	∞
1	1	1	∞
∞	∞	∞	∞

y, de la misma forma, la de multiplicar:

$$\text{nada} \cdot \text{nada} = \text{nada}$$

$$\text{finito} \cdot \text{finito} = \text{finito}$$

$$\text{finito} \cdot \text{nada} = \text{nada}$$

$$\text{infinito} \cdot \text{infinito} = \text{infinito}$$

$$\text{infinito} \cdot \text{finito} = \text{infinito}$$

$$\text{infinito} \cdot \text{nada} = ?$$

¿Cómo definir el último producto? Este es uno de los casos de indeterminación del álgebra de límites. Tal vez no vendría mal decir:

$$\text{infinito} \cdot \text{nada} = \text{finito}$$

·	0	1	∞
0	0	0	1
1	0	1	∞
∞	1	∞	∞

Ahora bien, ¿hasta qué punto son coherentes estas tablas? ¿Se comportan como la suma y el producto corrientes? La suma así definida es asociativa, conmutativa y tiene elemento neutro: el 0, pero no nos permite restar porque ni 1 ni ∞ tienen simétrico. Si queremos que funcione como la suma de números enteros habrá que añadir los simétricos de 1 y de ∞ : -1 y $-\infty$. Entonces tendremos más problemas. ¿Qué será $\infty - \infty$? Veamos qué pasa diciendo $\infty - \infty = 0$:

+	$-\infty$	-1	0	1	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
-1	$-\infty$	-1	-1	0	∞
0	$-\infty$	-1	0	1	∞
1	$-\infty$	0	1	1	∞
∞	0	∞	∞	∞	∞

Todo elemento tiene simétrico, hay neutro y se cumple la propiedad con-

mutativa (como puede apreciarse en la simetría diagonal de la tabla), pero esta suma tampoco funciona como la de los números enteros porque no es asociativa:

$$1 + (\infty - \infty) = 1 + 0 = 1$$

$$(1 + \infty) - \infty = \infty - \infty = 0$$

Quizás el problema es que se han de cambiar algunas operaciones. ¿Quién sabe si diciendo $\infty - \infty = 1$ se arreglaría todo? Estúdiense varias opciones y también qué pasaría con el producto en caso de añadir a su tabla los elementos -1 y $-\infty$.

Curiosamente desaparecen los problemas al alejarnos de lo que antes nos parecía lo más razonable:

+	0	1	∞
0	0	1	∞
1	1	∞	0
∞	∞	0	1

·	0	1	∞
0	0	0	0
1	0	1	∞
∞	0	∞	1

Estas tablas, aunque se nos antojen ilógicas, funcionan porque se comportan como la suma y el producto ordinarios: el conjunto $\{0, 1, \infty\}$ con la suma y producto definidos en ellas tiene estructura de cuerpo conmutativo: ambas operaciones son asociativas, conmutativas,

¿Son lógicas estas operaciones?

[...]

¿Es que a veces algo ilógico resulta razonable?

[...]

¿A quién se le ocurre pensar en estas tonterías?

tienen elemento neutro (0) y elemento unidad (1), todo elemento admite simétrico y, si es diferente de cero, inverso. Bajo un punto de vista estructural funcionan porque han heredado los rasgos del gran cuerpo (\mathbb{R} , +, ·), pero por otra parte son absurdas:

$$\text{infinito} + \text{finito} = \text{nada} !!$$

$$\text{infinito} + \text{infinito} = \text{finito} !!$$

$$\text{finito} + \text{finito} = \text{infinito} !!$$

$$\text{infinito} \cdot \text{infinito} = \text{finito} !!$$

¿Son lógicas estas operaciones? Sí, y prueba de ello es que se ajustan a una estructura lógica, pero no nos lo parecen porque *nuestra lógica*, aquella a la que estamos acostumbrados, es otra. ¿Son razonables por el hecho de ajustarse a un determinado tipo de estructura? ¿Es que a veces algo *ilógico* resulta razonable? ¿No eran *lógico* y *razonable* conceptos sinónimos? ¿A quién se le ocurriría sumar y multiplicar siguiendo estas leyes? ¿No es la búsqueda de coherencia estructural la que ahora nos ha llevado a un absurdo? ¿No es esto contradictorio? ¿A quién se le ocurre pensar en estas tonterías?

Había pensado llevarme una botella llena de arena rosada, un puñado de desierto que me hiciera revivir y creerme que de verdad me había paseado por sus olas de polvo, pero si lo hubiera hecho así siempre me habría preguntado cuántos granos contenía. Por eso decidí llevarme sólo uno. Un único grano de todos los que forman el desierto. ¿Se puede elegir sólo uno de entre tantos? Tarea difícil. Lo mío me costó tomarlo entre los que el sudor había pegado a mis huellas dactilares y esconderlo en un pliegue de papel. Después de ducharme limpié la ropa y los zapatos, suelas incluidas, de cualquier polvareda. No quería llevarme ningún otro.

Ahora lo tengo aquí, en casa. Es mi grano de arena de recuerdo *al* y *del* Sáhara. Sin par a pesar de sus lejanos e incontables compañeros. Casi un punto matemático. Mío. Único. Chiquitín.

Miquel Albertí

IES Pau Vila

Sabadell (Barcelona)

Cacumen
Año I - núm. 1
febrero
1983



EL CAZADOR DE DRAGONES

(Relacionado con el Editorial)

Había una vez, hace muchos años, en un país remoto, un ciudadano que después de una profunda reflexión decidió dedicarse profesionalmente a cazador de dragones.

Para ello, se preparó concienzudamente. Buscó toda la bibliografía existente sobre el tema, la estudió en profundidad, construyó las armas y artefactos que en ella se describían y después de tres o cuatro años pensó que ya estaba suficientemente capacitado para cazar dragones y se dedicó a buscarlos por todos los sitios para poder cazarlos.

Y aquí le surgió el problema: no encontró dragones por ninguna parte, con lo que pensó que había malgastado tiempo y esfuerzo y entró en un estado depresivo bastante agudo. Hasta que encontró a un amigo suyo, que casualmente era matemático, y le contó toda la historia, a lo que éste le respondió:

– Esto que te ocurre no es ningún problema. Tienes una solución muy fácil: ¡Pon una academia y enseña a matar dragones!

X OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

2.º ESO

Albacete

25-29 junio 1999

Organiza: Sociedad Castellano-Manchega
de Profesores de Matemáticas

Convoca: Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas