SUMA 30
febrero 1999, pp. 111-120

Mosaicos. Movimientos en el plano

Antonio Bermejo Fuertes

IDEAS Y RECURSOS

En el artículo se muestran unos materiales con los que se invita al profesorado a compartir, en el departamento de Matemáticas, el estudio y resolución de algunos problemas concretos del currículo del 2.° ciclo de la ESO, que hacen referencia a formas poligonales y a movimientos en el plano. Se trata de aportar ideas concretas que puedan ser de inmediata aplicación en la práctica. Además, el análisis de materiales, llevado a cabo por un grupo de profesores, es la mejor garantía de investigación y de reflexión sobre su uso, pudiendo servir, por una parte, como referencia para una posterior elaboración propia y, por otra, más importante, para posibilitar una reflexión sobre la práctica diaria en el aula.

EN LA LOGSE se insiste una y otra vez en que disponemos de un currículo abierto; es decir, un proyecto, un plan de acción en el que no todo está decidido, sino que hay muchas decisiones que deberán ser tomadas por el equipo de profesores de cada centro, en primer lugar, y después y, como consecuencia de ello, por el profesor en cada aula. Estas decisiones, como es lógico, se irán viendo reflejadas en la práctica diaria; de lo que se deriva la importancia de organizarla coherentemente y, en consecuencia, también los materiales que vayamos a utilizar.

Los profesores tenemos que ser conscientes de que establecer la labor diaria del aula (lo que quiere decir, determinar claramente qué queremos que nuestros alumnos aprendan y mediante qué actividades intentaremos que se consiga este aprendizaje) no se puede dejar a la intuición ni a la simple imitación del libro de texto; y aunque el uso de este material sigue siendo prioritario en las aulas, es importante que no sea el único referente curricular.

Por materiales curriculares podemos entender todos aquellos recursos que ayudan al profesorado a adoptar decisiones en el proceso de enseñanza/aprendizaje. Su utilización, como ya se ha indicado anteriormente, necesita de unos acuerdos previos, primero en el claustro, y después en el seminario o departamento, que permitan dar coherencia a la actividad educativa del centro. Su función no es, por tanto, definir para el profesorado las intenciones educativas (ya que éstas tienen que fijarse previamente mediante los Proyectos del Centro), sino ayudarle a llevarlas a la práctica. Por este motivo no se deberían aplicar sin más materiales ya elaborados por otras personas, siendo fundamental que, previamente a su utilización, los profesores de cada centro reflexionen sobre la posible validez de cara a su centro y a sus alumnos, estudien los fundamentos de cada propuesta, los valoren y, posteriormente, decidan sobre su uso inmediato o posible modificación.

Además de los libros de texto, es conveniente contar con materiales diversos, de distintas características (guías didácticas, ejemplos de programaciones, ejemplos de actividades, trabajos elaborados por alumnos, libros de consulta, cuadernos de trabajo, etc.) que, utilizados de una forma flexible, permitan adecuarse al contexto, a las características de los alumnos, a los objetivos, a los contenidos y al enfoque metodológico que el centro haya adoptado.

Un tema muy actual en los medios educativos es distinguir entre lo que es útil de aprender y lo que es deseable de enseñar,... lo extraordinariamente inútil es aquello no adecuado ni al nivel ni a la capacidad del que aprende (Claudi Alsina, 1987).

En este proceso es importante una autoformación del profesor, centrada, prioritariamente, en la reflexión sobre la propia práctica educativa, buscando la forma de que los alumnos estén más motivados y trabajen con mayor entusiasmo. Esto sólo se consigue ensayando, planteando situaciones de aprendizaje distintas, buscando respuestas nuevas a los problemas cotidianos que se presentan en el aula. Además, este proceso es mucho más fértil cuando se realiza con los demás compañeros del centro, a través de un trabajo en equipo, lo que propicia un enriquecimiento mutuo mediante un trabajo compartido en el que se pueden discutir y coordinar acciones, planificando la práctica educativa en común y siendo capaces de llegar a tomar decisiones que respondan a criterios consensuados.

El material que se presenta a continuación se encuadra en el Bloque 3.° «Representación y organización en el espacio» de la Educación Secundaria Obligatoria. Está pensado para el 2.° ciclo, y puede ser útil como un primer paso para entrar en el estudio de la Geometría. Es un tema que puede considerarse muy motivador para los alumnos ya que los conceptos geométricos aquí elaborados son accesibles para cualquier alumno del ciclo 14 a 16 años; además para empezar a trabajar se necesita muy poca información y no es difícil ir encontrando resultados parciales, en los que cada alumno, de acuerdo con sus posibilidades, interviene con mayor o menor profundidad.

Los objetivos que se deben conseguir, su concreción en el aula (objetivos didácticos), así como los contenidos que hay que enseñar para alcanzar dichos objetivos, se explicitan en el cuadro 1.

En el cuadro 2 se presenta un mapa conceptual con contenidos conceptuales. Estos mapas son modelos que sirven para representar conceptos y las relaciones que se dan entre ellos. Su elaboración potencia el pensamiento reflexivo, la creatividad y el espíritu crítico. Asimismo, favorecen el pensamiento divergente al permitir interrogarnos sobre las propiedades de un concepto: qué es, para qué sirve, cómo funciona, dónde está... Cuando son discutidos y construidos en grupo ayudan a compartir significados.

Su uso, aunque presenta en un principio ciertas dificultades y son precisas ciertas técnicas para su elaboración, permiten, en compensación, estructurar de manera clara y precisa todos los con-

Objetivos
- Resolver problemas de clasificación, trazado o combinación de formas poligonales.
- Saber trazar y clasificar mosaicos y decoraciones del plano.
- Apreciar las cualidades estéticas, creativas y geométricas inherentes a las decoraciones artísticas del plano basadas en repeticiones.
- Utilizar las isometrías, analizando su potencial generador en las formas geométricas.

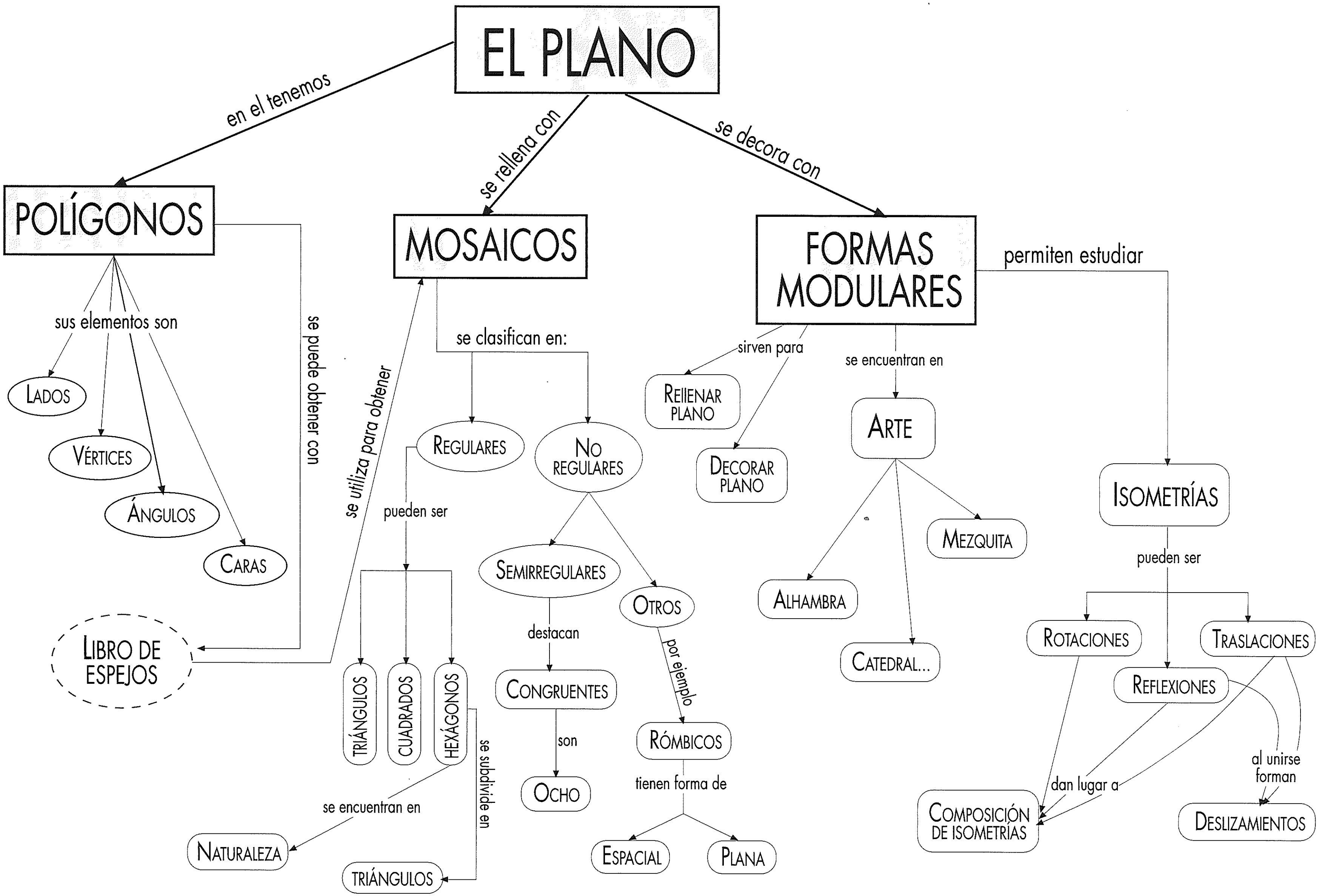
Objetivos didácticos
- Desarrollar estrategias de búsqueda de figuras que rellenen el plano.
- Utilizar correctamente el libro de espejos en la obtención de mosaicos.
- Describir la obtención de «mosaicos especiales».
- Obtener transformaciones de figuras planas a partir de diseños o creaciones artísticas.
- Identificar las isometrías o movimientos del plano, sabiendo utilizarlos y comprendiendo sus propiedades fundamentales.
- Confiar en las propias capacidades para percibir las construcciones planas.

Contenidos conceptuales
- Mosaicos. Mosaicos regulares.
- Retículas regulares que rellenan el plano: triangular, cuadrada y hexagonal.
- La retícula rómbica.
- Mosaicos semirregulares.
- Mosaicos semirregulares congruentes. Los ocho modelos.
- Isometrías básicas: simetrías, traslaciones y rotaciones o giros.
- Composición de isometrías básicas.

Contenidos procedimentales
- Manejo de figuras planas para la comprobación de conjeturas.
- Uso del libro de espejos para la obtención de mosaicos.
- Confección de la red triangular, cuadrada y hexagonal.
- Construcción de figuras planas a partir de una dada utilizando los movimientos.
- Comprobación de propiedades que caracterizan los mosaicos utilizando movimientos.

Contenidos actitudinales
- Apreciar la belleza derivada de la repetición rítmica geométricamente de motivos planos.
- Valoración de las cualidades artísticas de los mosaicos y de su uso reiterado a lo largo de la historia del arte.
- Curiosidad e interés por investigar sobre configuraciones y formas generadas dinámicamente.
- Flexibilidad para enfrentarse a situaciones geométricas desde distintos puntos de vista.
- Valoración del trabajo coperativo en equipo.

Cuadro 1


EL PLANO
en el tenemos
se rellena con
se decora con
POLÍGONOS
sus elementos son
LADOS
VÉRTICES
ÁNGULOS
CARAS
se puede obtener con
LIBRO DE ESPEJOS
se utiliza para obtener
MOSAICOS
se clasifican en:
REGULARES
pueden ser
TRIÁNGULOS
CUADRADOS
HEXÁGONOS
se encuentran en
NATURALEZA
se subdivide en
TRIÁNGULOS
NO REGULARES
SEMIRREGULARES
destacan
CONGRUENTES
son
OCHO
OTROS
por ejemplo
RÓMBICOS
tienen forma de
ESPACIAL
PLANA
FORMAS MODULARES
sirven para
RELLENAR PLANO
DECORAR PLANO
se encuentran en
ARTE
ALHAMBRA
CATEDRAL...
MEZQUITA
permiten estudiar
ISOMETRÍAS
pueden ser
ROTACIONES
REFLEXIONES
TRASLACIONES
dan lugar a
COMPOSICIÓN DE ISOMETRÍAS
al unirse forman
DESLIZAMIENTOS

Cuadro 2

tenidos, de ahí el que puedan considerarse como instrumentos muy efectivos para presentar relaciones que de otro modo sería complicado explicitar.

Como actividad práctica se propone al lector hacer un mapa conceptual con los contenidos procedimentales y actitudinales del cuadro 1, y relacionarlos con los correspondientes contenidos conceptuales del cuadro 2.

En cuanto a las orientaciones didácticas, la dinámica que se propone es la de realizar las distintas partes de la actividad (acciones) de una forma personal, que después dé lugar a una discusión y trabajo en grupo, y a una posterior puesta en común de conclusiones de toda la clase; esto último con el fin de propiciar un diálogo participativo de todos los alumnos, que permita completar las acciones y profundizar en aquellos aspectos que el profesor estime más oportunos.

Finalmente, es preciso recordar que las actividades no son procedimientos (estos son contenidos, algo que hay que aprender), sino un vehículo para que se aprendan esos y otros contenidos. En las que siguen, en primer lugar aparece una breve introducción para proponerse a continuación el desarrollo de una acción concreta. Dichas acciones cumplen alguna de las premisas siguientes, donde se intentan recoger las características más importantes que deberían cumplir todo tipo de actividades:

1. *Deben posibilitar descubrir propiedades*: se da una información por dibujos y el alumno tiene que encontrar las figuras o transformaciones objeto de estudio. Por ejemplo, la acción 1.
2. *Han de potenciar el pensamiento creativo*: cualquier situación problemática es preciso abordarla haciendo uso de todas las técnicas disponibles (medir, construir, dibujar...), mostrando disposición a interrogarse ante cualquier situación, formulando hipótesis y comprobándolas experimentalmente. Por ejemplo, la acción 3.
3. *Deben propiciar que se generen aplicaciones*: se trata de realizar dibujos o esquemas a partir de un modelo abierto y flexible dado, con el fin de generar algo nuevo relacionado con el tema objeto de estudio. Por ejemplo, la acción 4.
4. *Han de permitir resolver situaciones problemáticas planteadas*: en este sentido, es importante tener en cuenta que toda actividad ha de generar en primer lugar desequilibrio, y después asimilación y acomodación de los nuevos conceptos. Por ejemplo, la acción 2.

Mosaicos

N.P.P. (Nota para el profesor).- Deseamos encontrar los mosaicos regulares y la condición que han de cumplir los ángulos interiores de los polígonos regulares que los determinan. La forma en que se presentan estas primeras actividades es abierta; el profesor no indica la solución correcta, sino que ayuda a sus alumnos a analizar las soluciones intermedias, a que adopten criterios de clasificación, a que desarrollen su capacidad de iniciativa e investigación. De esta forma la dinámica de trabajo que se propone es la del profesor facilitador, cooperador con el alumno, que interviene sólo cuando es necesario, estimulando la colaboración y la discusión entre sus alumnos.

...la dinámica de trabajo que se propone es la del profesor facilitador, cooperador con el alumno, que interviene sólo cuando es necesario, estimulando la colaboración y la discusión entre sus alumnos.

Acción 1

Los suelos y paredes de muchos edificios poseen formas decorativas formadas por combinaciones geométricas que solemos llamar mosaicos. Aquí tienes un ejemplo.

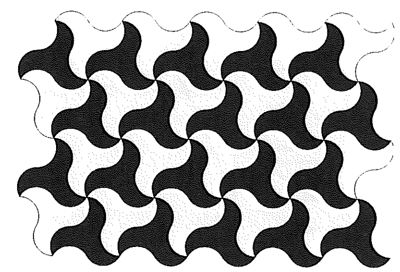


Figura 1

Puedes ver que las piezas no dejan huecos ni se superponen unas sobre otras.

Si el mosaico está formado por polígonos regulares, todos del mismo tamaño, se denomina *regular*.

Contesta a la siguiente pregunta valiéndote sólo de dibujos: ¿Se puede embaldosar el plano sólo con cuadrados? Supón, para ello, que el plano no tiene límites ni formas fijas, que los cuadrados son todos iguales y que el embaldosado se realiza haciendo coincidir los lados completos.

N.P.P.- En esta acción se pretende que el alumno trabaje únicamente con la vista. Es decir, no puede utilizar ninguna herramienta, ni siquiera lápiz y papel. La técnica que hay que emplear consiste en observar detenidamente un cuadrado, imaginar qué ocurrirá si colocamos a su lado otros cuadrados, yuxtapuestos unos a otros y, si de esta forma, seríamos capaces de rellenar el plano. En realidad muy probablemente la solución al ejercicio se encuentre a nuestros pies, en el suelo del aula que ocupamos, que estará formada, muy posiblemente, por baldosas cuadradas todas iguales. En este sentido hay que destacar que la manipulación de objetos y la visualización de imágenes ayuda a comprender enormemente ciertas situaciones; más aún, el grado de visualización que puede alcanzar un alumno depende, en gran medida, de dicha manipulación y de la construcción de formas. Posteriormente a este primer momento, en el que el alumno investiga a través de la experimentación y la observación, vendrá un segundo paso de formalización, estableciéndose las propiedades esenciales que verifican los mosaicos regulares. Así para Pérez Gómez (1995) «La visualización juega un papel importante en el proceso de aprendizaje del alumno... La creación de imágenes mentales es irreemplazable en todo pensamiento, ya que constituyen el recurso para promover la actividad intelectual que sirve de intermediario entre la memoria permanente del alumno y la experiencia directa, es decir, entre el mundo real y el mundo interior».

Acción 2

En las condiciones anteriores: ¿se puede embaldosar el plano con sólo triángulos equiláteros? ¿Y con pentágonos regulares? ¿Y con hexágonos regulares?

Recorta varios polígonos iguales, y compruébalo. En el caso del cuadrado podrás verificar ahora si la respuesta que has dado en la actividad anterior es la adecuada.

Acción 3

La acción 1 también la puedes resolver de una forma muy sencilla utilizando el libro de espejos ¿cómo?

Este libro es muy sencillo de construir. Basta tomar dos espejos de 10 x 10 cm y unirlos por uno de sus bordes con cinta adhesiva, de manera que las superficies reflectantes queden hacia el interior.

El libro de espejos es una herramienta muy útil para el estudio de los polígonos, de sus elementos más característicos; así como para el estudio de sus medidas. Asimismo también nos puede servir para el tratamiento manipulativo del concepto de simetría y para identificar regularidade en figuras geométricas, formas de la naturaleza, dibujos...

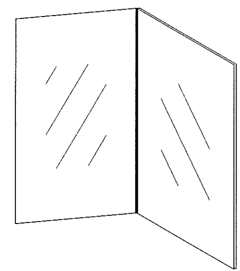


Figura 2

Si colocamos las dos hojas del libro sobre dos lados consecutivos del cuadrado ¿qué ocurre? Repite esta operación para el resto de polígonos de la acción 2.

N.P.P.- En estas primeras acciones hemos tratado de desarrollar estrategias de búsqueda de figuras que rellenen el plano. El libro de espejos es una herramienta muy útil para el estudio de los polígonos, de sus elementos más característicos; así como para el estudio de sus medidas. Asimismo también nos puede servir para el tratamiento manipulativo del concepto de simetría y para identificar regularidades en figuras geométricas, formas de la naturaleza, dibujos...

Acción 4

Ya sabemos que el cuadrado rellena el plano, siendo necesario cuatro de ellos para dar una vuelta completa alrededor de un punto.

En la figura 3 aparece dibujado el ángulo interior del cuadrado. ¿Cuál es su valor? ¿Qué relación existe con el giro completo? Vamos a comprobar que esta misma relación también la ha de cumplir cualquier polígono regular que rellene el plano. De entrada verifícalo para los polígonos solución que hayas obtenido en la acción 2.

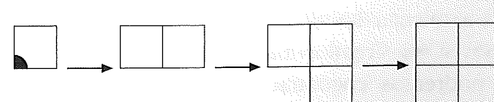


Figura 3

N.P.P.- Tras la primera fase manipulativa de las tres primeras acciones, en ésta se pretende que el alumno comience a formalizar la construcción de los mosaicos regulares; es decir, ha de averiguar por qué unos polígonos regulares cumplen la condición pedida y otros no. Todo ello nos llevará a buscar los divisores de 360 que son a su vez ángulos interiores de polígonos regulares; posteriormente relacionaremos esta idea con el concepto de giro, en el sentido de que, partiendo de uno cualquiera de los vértices del polígono y girando una amplitud igual a su ángulo interior un número exacto de veces, podemos volver al punto de partida.

Acción 5

En las acciones anteriores has comprobado que entre los polígonos regulares de 3 a 6 lados, hay varios que rellenan el plano. Se trata ahora de buscar entre el resto de polígonos regulares. En primer lugar, por triangulación buscamos una fórmula que nos permita calcular el valor del ángulo interior de cualquier polígono regular.

Polígono	*N.° de lados*	*N.° de triángulos*	*Suma ángulos interiores*	*Valor de cada ángulo interior*
Triángulo	3	1	1 x 180	180/3 = 60°
Cuadrado	4	2	2 x 180	360/4 = 90°
Pentágono	5			
Hexágono	6			
Polígono de n lados	n			

Completa la tabla y contesta: ¿Qué polígono regular tiene el ángulo interior más pequeño? ¿Cuál es su valor? ¿Y cuál tiene el más grande y qué valor tiene?

N.P.P.- El proceso de triangulación, consiste en descomponer el polígono de partida en el menor número posible de triángulos; para ello basta trazar diagonales desde un vértice. En el caso de *n* lados es preciso utilizar el lenguaje algebraico; se trata de hacer una conjetura y después comprobar si la propiedad es válida para todos los casos. En este sentido, reconocer relaciones y regularidades, así como saber generar ejemplos para poner a prueba una conjetura, son estrategias muy interesantes para realizar generalizaciones.

...reconocer relaciones y regularidades, así como saber generar ejemplos para poner a prueba una conjetura, son estrategias muy interesantes para realizar generalizaciones.

Acción 6

Vamos a calcular los divisores de 360; después comprobaremos si son ángulos interiores de polígonos regulares y así podremos encontrar los polígonos regulares que rellenan el plano.

En primer lugar descomponemos 360 en factores primos. ¿Cuántos divisores tiene?

$$(1+2+2^2+2^3)\cdot(1+3+3^2)\cdot(1+5)$$

	1	2	2^2	2^3
3				
3^2				
5				

Figura 4

Observa la secuencia de la figura 4; todos los sumandos del resultado son divisores de 360. ¿Por qué? ¿Cuántos son?

Una forma cómoda de obtenerlos se consigue colocándolos adecuadamente en esta tabla. Complétala y obtén los 24 divisores. De acuerdo con lo indicado anteriormente, sólo cuatro pueden ser ángulos de polígonos regulares. ¿Por qué?

Comprueba después si, además, esos cuatro valores corresponden al ángulo interior de un polígono regular (utiliza la tabla de la acción 5) y verifica que sólo tres lo hacen.

Acción 7

El rombo no es un polígono regular, sin embargo es un modelo muy empleado en pavimentos de mosaicos. Comprueba que rellena el plano.

Juega con el rombo, construye varios iguales y comprueba después que colocados convenientemente dan la impresión de una red de cubos escalonados.

N.P.P.- En esta actividad el alumno puede diferenciar entre moverse en el plano (observando hexágonos), o hacerlo en el espacio (viendo cubos apilados). En este sentido la Geometría ofrece numerosas posibilidades para desarrollar la percepción e intuición espacial. El estudio de formas y tamaño de objetos en el espacio, de su dirección, orientación y perspectiva, son aspectos que permiten desarrollar la capacidad de observación, la comprensión de relaciones espaciales y la representación de objetos en el espacio.

Acción 8

Comprueba que un hexágono regular puede descomponerse en tres rombos; por ello, el rombo es un submúltiplo de la red hexagonal. Pero a la vez es un múltiplo de la red triangular ¿por qué?

Mosaicos semirregulares

Acción 9

Los mosaicos *semirregulares* se obtienen empleando varias clases de polígonos regulares, con la condición de que sean del mismo tamaño los de cada clase y que unos y otros tengan los lados de igual longitud.

Por ejemplo, con octógonos y cuadrados se puede construir uno de ellos. Este mosaico también puede obtenerse a partir de un octógono y el libro de espejos. ¿Cómo?

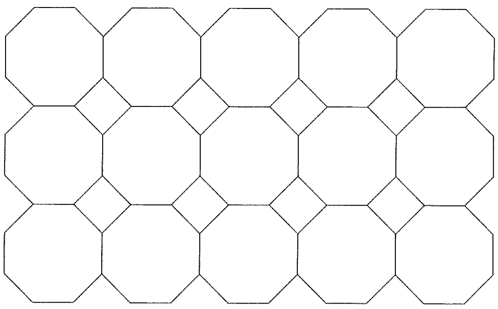


Figura 5

Acción 10

Uniendo hexágonos por un vértice de forma horizontal, y por un lado, de forma vertical, y rellenando los «huecos» con triángulos, tenemos otro mosaico semirregular. Recorta hexágonos y triángulos equiláteros, con lados de igual longitud, e intenta obtenerlo.

Acción 11

Hay numerosos mosaicos semirregulares, pero en cambio son muy pocos los que cumplen la condición de que en todos los vértices del mosaico se encuentren los mismos polígonos y en el mismo orden (mosaicos congruentes). Así, el mosaico de la acción 9 es congruente; sin embargo, el de la acción anterior no. ¿Por qué?

Hay numerosos mosaicos semirregulares, pero en cambio son muy pocos los que cumplen la condición de que en todos los vértices del mosaico se encuentren los mismos polígonos y en el mismo orden (mosaicos congruentes).

Acción 12

Recorta polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8 y 12 lados, de tal modo que todos tengan el mismo lado. Construye con ellos mosaicos semirregulares. ¿Cuáles son congruentes? Intenta encontrar los ocho mosaicos semirregulares congruentes.

N.P.P.- Tras una primera fase de búsqueda más o menos aleatoria (semejante a la realizada para los regulares), se pasará a un estudio sistemático, para lo cual se podrán seguir los pasos que se indican a continuación. Ahora bien, esta primera fase se considera básica ya que, entre otras cosas, permitirá que el alumno reflexione sobre la dificultad del problema planteado, al mismo tiempo que podrá investigar sobre aspectos muy concretos que después le orientarán hacia la solución de una forma más rápida, como por ejemplo lo son, el número mínimo y máximo de polígonos regulares que pueden concurrir en un vértice cualquiera del mosaico, o sobre la clase de polígonos que pueden ser éstos.

Paso 1.° Teniendo en cuenta la tabla de la acción 5, estudiar todos los posibles mosaicos cuando son tres los polígonos que confluyen por vértice. A este estudio se le puede dar un tratamiento algebraico a través de las siguientes ecuaciones:

a) $2X + Y = 360$ o $X + Y + Z = 360$; siendo X, Y, Z ángulos interiores de polígonos regulares. Así en la primera se van dando valores a X (60, 90, 108...) y se va calculando Y (teniendo en cuenta que basta estudiar los casos en que $Y > X$). ¿Por qué?

b) En el caso de que las incógnitas sean el número de lados, las ecuaciones a resolver serían: $1/X + 1/X + 1/Y = 1/2$ o $1/X + 1/Y + 1/Z = 1/2$. ¿Por qué?

Nota.- Si uno de los tres polígonos tiene un número impar de lados, esto obliga a que los polígonos que le rodean no sean distintos en lados consecutivos, lo que simplifica bastante la búsqueda, ya que sólo es preciso hacerlo entre los polígonos con un número par de lados.

Paso 2.° Hacer lo mismo para cuatro o cinco polígonos por vértice. ¿Por qué no es preciso hacerlo para seis o más?

Nota.- En el caso de cuatro polígonos, una de las ecuaciones es $2X + 2Y = 360$ con $Y > X$; aquí se abren muchos interrogantes, como por ejemplo ¿qué representan las incógnitas?; ¿por qué sólo hay dos?; ¿por qué $Y > X$?... E incluso simplificando y dando valores a X se obtiene rápidamente un mosaico semirregular formado por dos triángulos y dos hexágonos en cada vértice, que colocados adecuadamente hacen que el mosaico sea congruente. En el caso de cinco polígonos, al ser un número impar, ocurre como en el caso de tres, por lo que se simplifica bastante la búsqueda.

Movimientos en el plano

En las acciones anteriores hemos intentado llegar a saber trazar y clasificar mosaicos y decoraciones del plano a partir de figuras planas. Nos centramos ahora en los movimientos en el plano.

Si tomamos los mosaicos regulares, al ser todas las piezas iguales, podemos suponer que una pieza genera otra vecina mediante distintos tipos de movimientos. En la figura 6 aparece un mosaico regular formado por triángulos equiláteros.

El paso del triángulo 1 al 2, le llamamos *traslación*; mediante este movimiento conseguimos que los triángulos se recubran a sí mismos de forma que el ornamento de partida, el mosaico regular, no haya cambiado.

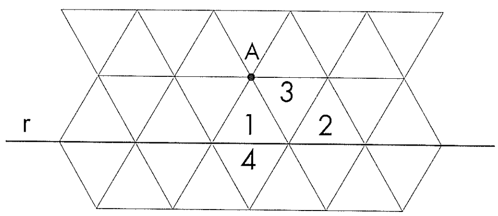


Figura 6

Lo mismo ocurre con otros dos movimientos más: así el paso del triángulo 1 al 3, lo logramos al girar el 1.° alrededor del punto A, un ánglo de 60°; le llamamos *rotación*; el punto A se llama *centro* del giro. Finalmente, el paso del 1 al 4, le llamamos *reflexión* sobre la línea *r*, que se denomina *eje de simetría*. Traslación, rotación y reflexión son tres movimientos mediante los cuales puede hacerse coincidir una figura consigo misma.

Acción 13

El mosaico de la figura 7 está formado a partir de un módulo plano: «el hueso» (polígono nazarí muy usual en la Alhambra de Granada). Tiene como polígono base un cuadrado, y se ha obtenido a partir de dicho polígono mediante el principio que rige en los módulos planos (variar la forma manteniendo su superficie). Se trata de investigar sobre el menor motivo, es decir, la menor porción del diseño, que mediante traslaciones da lugar a todo el conjunto.

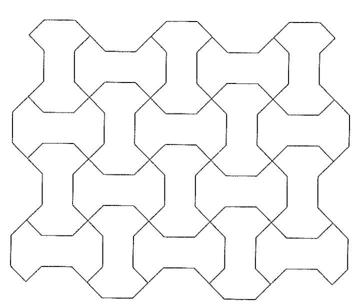


Figura 7

N.P.P.- Aparte de las características puramente matemáticas de este polígono nazarí (p.e. es un polígono cóncavo, tiene cuatro ángulos interiores rectos...), posee la «propiedad» de crear belleza. Los matemáticos del Islam fueron maestros en este campo, así en sus trabajos en la Alhambra podemos observar que no se limitaron a llenar el plano con simples polígonos, sino que, a partir de diseños básicos, fueron capaces de conseguir composiciones de gran atractivo y armonía.

Si nos olvidamos de sus colores (es decir, fijándonos solamente en el fondo y en el diseño en sí) estos mosaicos (Alhambra, Mezquita de Córdoba...) son un material muy atractivo y útil para estudiar las isometrías en el plano y sus composiciones.

Acción 14

Observa los mosaicos de la figura 8 (se deben al artista holandés Escher). Buscar motivos mínimos que generen todo el conjunto por traslaciones. Si se utilizan además otros movimientos o una composición de los mismos ¿pueden reducirse dichos módulos básicos?

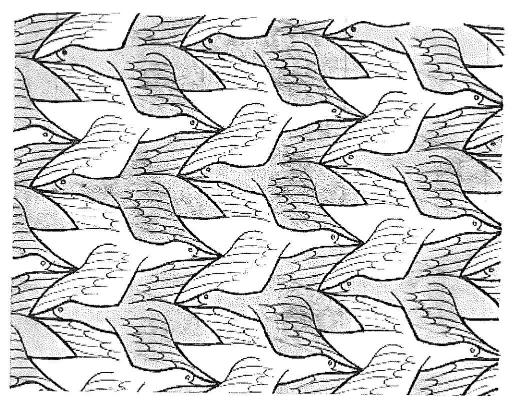
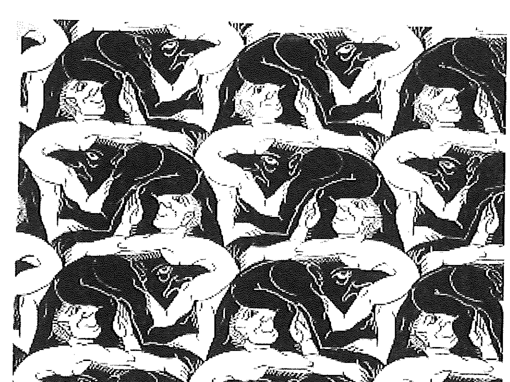


Figura 8



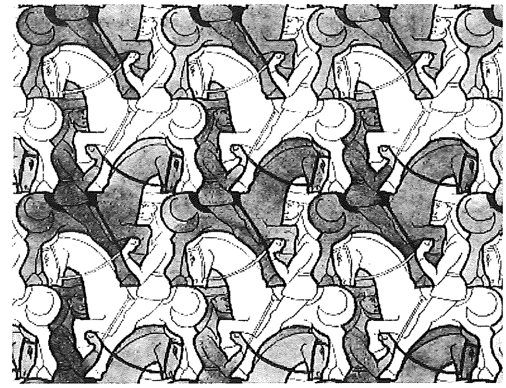
N.P.P.- El propio Escher fue un gran estudioso de la Alhambra. La diferencia de sus mosaicos con respecto a los de aquella, reside en que Escher los dotó de vida propia a través de animales y plantas; aunque esta incorporación de seres vivos le obligó a utilizar, en algunos casos, geometrías no euclídeas.

Por otro lado las posibilidades que ofrece cada mosaico son múltiples. Así, partiendo de que los giros o rotaciones quedan determinados al conocer el centro del giro y el ángulo (teniendo en cuenta que su sentido positivo es el contrario a las agujas del reloj) y observando de nuevo un mosaico cualquiera, como por ejemplo el de la acción 13, surgen múltiples preguntas: tomando uno cualquiera de los «huesos», determinar el ángulo y el centro que genera a cada uno de los huesos adyacentes. En alguno de estos casos, bien porque cambie el valor del ángulo, bien porque varíe el centro del giro ¿es posible más de una solución?

La visualización juega de nuevo un papel determinante en el proceso de trabajo con los alumnos. Si tomamos un único «hueso» y colocamos un espejo sobre una línea de puntos que lo divida justamente por la mitad, surge de forma natural la idea de reflexión como movimiento del plano que deja invariante la figura. Ahora bien, este hecho es válido sólo en sentido euclídeo (se conservan las distancias y los ángulos, aunque para éstos se inviertan sus sentidos), ya que aunque la figura obtenida parezca la misma que la de partida, sus puntos interiores ocupan ahora una posición diferente y los únicos puntos que no modifican su posición son los que se encuentran sobre el propio eje. En el caso de la rotación (movimiento del plano que conserva las distancias y los ángulos) el único punto invariante es el centro del giro.

Acción 15

Observa la figura 9 (también son dos mosaicos de Escher). ¿Qué transformaciones necesitas para componer todo el mosaico? Busca en cada caso el motivo mínimo. ¿Es posible, sin tener en cuenta la diferencia de colores, obtener todo el mosaico a partir de un solo elemento básico: «jinete y caballo», u, «hombrecillo», respectivamente?



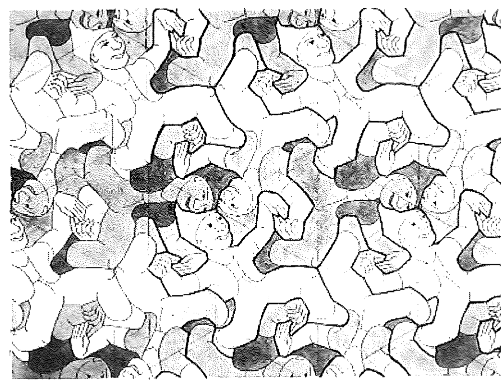


Figura 9

N.P.P.- De nuevo se pueden plantear múltiples preguntas, incluso en un sentido inverso, por ejemplo «indica dos hombrecillos de forma que se pueda llevar uno sobre otro haciendo primero un giro y después una traslación».

Alguna composición de movimientos como por ejemplo «la simetría con deslizamiento», que es poco intuitiva y, en consecuencia, difícil de asimilar, podemos observarla más fácilmente en el mosaico de los jinetes. En este caso, un caballero blanco, tiene que moverse en la tercera dimensión para poder cubrir a uno negro; es decir, ha de dejar el plano, ser colocado al revés y a continuación ser deslizado para poder cubrir a uno negro.

Finalmente es preciso comentar que el trabajo en el aula se puede ampliar hasta intentar objetivos más ambiciosos, por ejemplo reconocer que la composición de isometrías lleva siempre a una de las cuatro isometrías distintas: reflexión o simetría, rotación o giro, traslación y deslizamiento (simetría con traslación); o bien, comprobar que el conjunto de movimientos que aplican una figura en sí misma es un grupo con la composición de movimientos.

En definitiva, los mosaicos permiten acercar la matemática al mundo real, los alumnos, partiendo de un planteamiento experimental e intuitivo, y a través de la visualización, representación y experimentación, pueden analizar y resolver situaciones artísticas, en las que se realza, más que las figuras geométricas que las determinan, el con-

...los mosaicos permiten acercar la matemática al mundo real, los alumnos, partiendo de un planteamiento experimental e intuitivo, y a través de la visualización, representación y experimentación, pueden analizar y resolver situaciones artísticas...

cepto de transformación geométrica y su composición. Se puede relacionar así Arte y Geometría. Y todo ello, pudiendo poner en práctica la tan traída frase de que «El aspecto formativo cobra fuerza frente al informativo. Los procesos de pensamiento son tan importantes como los productos finales del mismo».

Bibliografía

ALSINA, C., C. BURGUÉS y J. M. FORTUNY (1987): *Invitación a la didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C., R. PÉREZ y C. RUIZ (1989): *Simetría dinámica*, Síntesis, Madrid.

BERMEJO, A. (1995): «Materiales didácticos. Decorando el plano», *Sigma*, n.° 17, 95-114.

BRUNO ERNST (1989): *El espejo mágico de M.C. Escher*, Taco, Berlín.

GARCÍA, J. y C. BERTRÁN (1984): *Geometría y experiencias*, Alhambra, Madrid.

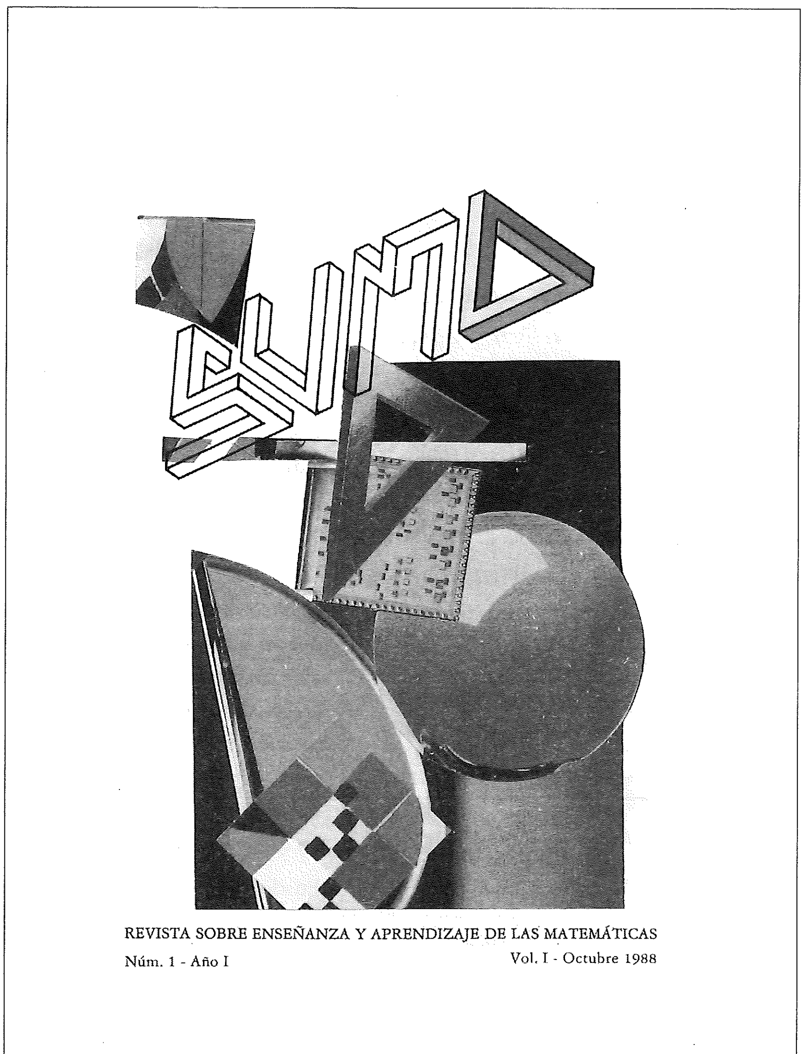
GRUPO CERO (1984): *De 12 a 16, un proyecto de currículum de Matemáticas*, Mestral, Valencia.

MEC (1995): *Guía de Recursos Didácticos. Matemáticas. ESO*, MEC, Madrid.

PÉREZ, R. (1994): «Construir la Geometría», *Uno*, n.° 2.

PÉREZ, R. y J. RUIZ (1995): «Visiones matemáticas de la Alhambra. El color», *Epsilon*, monográfico sobre la Alhambra.

Antonio Bermejo
Centro de Profesores
y Recursos de Astorga (León)
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas



SUMA

Núm. 1 - Año I

Octubre
1988