SUMA 30
febrero 1999, pp. 97-102

El uso didáctico del Cabri: implicaciones

Liliana Siñeriz
Raquel Santinelli

SUMA 30
febrero 1999, pp. 97-102

El uso didáctico del Cabri: implicaciones

Liliana Siñeriz
Raquel Santinelli

Se presentan algunas actividades tratadas en el aula con alumnos de segundo año de enseñanza secundaria (14-15 años) utilizando el software CABRI GEOMÈTRE, se describen los procedimientos de resolución de los alumnos surgidos a

DAMOS CUENTA aquí de algunas cuestiones didácticas surgidas en la implementación de una secuencia de enseñanza, donde usamos el CABRI para introducir y trabajar conceptos de geometría elemental. La experiencia se realizó durante 7 meses, bajo la modalidad taller, con 20 alumnos de segundo año (14-15 años) de una escuela secundaria de San Carlos de Bariloche, provincia de Río Negro, Argentina. El uso del CABRI permite plantear situaciones que pueden ser ejemplificadas y modificadas dinámicamente. Esta particularidad facilita la realización en la enseñanza secundaria de algunas actividades propias del método matemático: explorar, observar, comparar, analizar, conjeturar, relacionar, verificar, generalizar, etc.

El objetivo principal de este taller fue iniciar a los alumnos en la «actividad matemática» presentándoles situaciones que les permitían tanto conjeturar definiciones y propiedades a través de la observación de características invariantes de los objetos geométricos, como hacer verificaciones y construcciones sencillas donde se aplicaban los conceptos geométricos introducidos. El enfoque didáctico estuvo orientado permanentemente a lograr que los alumnos llegaran a distinguir la diferencia entre construcciones aproximadas y construcciones exactas, objetos «que cumplen aproximadamente» y objetos «que cumplen exactamente» con las características planteadas en un problema.

Para lograr estos objetivos se diseñó una secuencia de mediatriz, bisectriz, altura, criterios de congruencia de triángulos, circunferencia, recta tangente a una circunferencia, circunferencias concéntricas, secantes, tangentes; construcciones de ángulos congruentes y de triángulos usando los criterios de congruencia, circunferencia dado el radio y rectas paralelas usando regla y escuadra.

Para la realización de las actividades los alumnos siempre trabajaron en parejas con posterior discusión general y puesta en común de resultados.

Describiremos en lo que sigue algunas de las actividades propuestas y la forma de trabajo utilizada no sólo para aprovechar didácticamente las bondades del software, sino incluso para sacar partido de algunas de sus limitaciones. Durante el desarrollo del taller se registraron algunas resoluciones realizadas en clase, lo que nos permite reproducir los procedimientos enfocando las estrategias y dificultades surgidas.

Construcciones aproximadas y construcciones exactas

La siguiente actividad fue planteada en la segunda clase, después de haber visto los comandos básicos creación de punto, recta y círculo básico, segmento, recta y círculo por dos puntos, construcción de punto sobre objeto e intersección de objetos:

> *Hallar el centro del círculo básico sin usar el comando existente en el menú.*

Algunos procedimientos de resolución presentados por los alumnos fueron:

Procedimiento 1: Se toma un círculo básico y dos puntos a y b sobre objeto en el círculo. Se crea y mide el segmento definido por los dos puntos (cuerda $\overline{ab}$) y se desplaza uno de los puntos hasta obtener la cuerda máxima. Luego se toma su punto medio.

Procedimiento 2: Se toma un círculo básico y dos puntos a y b sobre objeto en el círculo. Se crea y mide el segmento definido por los dos puntos (cuerda $\overline{ab}$) y se desplaza uno de los puntos hasta obtener la cuerda máxima. Se toma un punto x sobre objeto en la cuerda. Se crean y miden los dos segmentos $\overline{ax}$ y $\overline{xb}$, y se desplaza x hasta obtener igual medida en ambos segmentos.

Procedimiento 3: Se toma un círculo básico y dos puntos a y b sobre objeto en el círculo. Se crea y mide el segmento definido por los dos puntos (cuerda $\overline{ab}$) y se desplaza uno de los puntos hasta obtener la cuerda máxima. De la misma manera se repite este procedimiento con otros dos puntos c y d del círculo, obteniéndose otra cuerda máxima $\overline{cd}$. Se crea el punto intersección de ambas cuerdas (con el comando existente o por aproximación).

...la forma de trabajo utilizada no sólo para aprovechar didácticamente las bondades del software, sino incluso para sacar partido de algunas de sus limitaciones.

Luego de la discusión de los distintos procedimientos, se pidió a los alumnos que verificaran la posición del centro obtenido usando el comando del menú para observar la aproximación lograda.

De la consideración de los procedimientos también surgió que fijando uno de los extremos, la imprecisión de la medida provista por el programa permite obtener una familia de cuerdas «máximas». Dependiendo del tamaño del círculo, el ángulo entre dos cuerdas «máximas» $\overline{ab}$ y $\overline{ab'}$ puede variar de 4° a 30°. Esto fue utilizado para poner de manifiesto que la diferencia entre construcción aproximada y construcción exacta a veces puede ser notable, dependiendo de la naturaleza del instrumento de medición usado. Se rescató entonces la idea de que sólo una construcción exacta resuelve eficientemente el problema, y se señaló que su realización sería retomada más adelante, cuando dispusieran de más conocimientos geométricos.

La siguiente actividad fue propuesta después de trabajar con los comandos de construcción de rectas paralelas y perpendiculares, punto medio y simétrico de un punto:

> *Construir un cuadrado dado el lado.*

En general se utilizaron lados verticales y horizontales (segmentos que aparecen en pantalla «sin escaleras») lo cual de alguna manera asegura, según el caso, perpendicularidad y paralelismo. Esto motivó que luego se les planteara la construcción de un cuadrado en posición oblicua. En la mayoría de los casos, la congruencia de segmentos se verificó midiendo los mismos.

Los siguientes son algunos procedimientos de resolución realizados por distintas parejas de alumnos. El símbolo □ junto a los segmentos y el arco en los ángulos significa que han sido medidos con la opción correspondiente del menú.

Procedimiento 1: Se dibuja un cuadrilátero cualquiera y se lo deforma hasta lograr un aparente cuadrado de lados verticales y horizontales. No se verificó la medida de lados ni de ángulos.

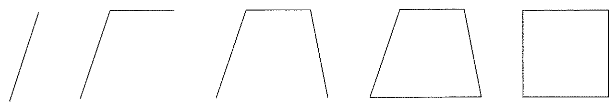


Figura 1

Cuando se les pidió un cuadrado en posición oblicua, aparecieron las alternativas siguientes:

a) Repitieron el mismo procedimiento, sin medir lados ni ángulos.

b) No midieron los lados pero aparentemente eran congruentes, y midieron un par de ángulos opuestos modificándolos hasta lograr que fueran rectos. No verificaron si los ángulos restantes eran rectos. En la discusión general, quedó claro que así lo infirieron.

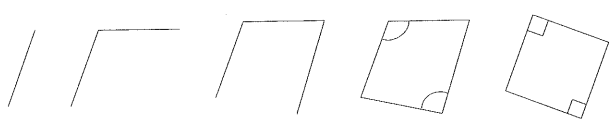


Figura 2

Procedimiento 2: Se dibuja un segmento vertical, luego otro horizontal, y así sucesivamente hasta lograr un cuadrilátero que aparentemente es un cuadrado. Se miden los lados para asegurar que sean congruentes. No se verifica que los ángulos sean rectos.

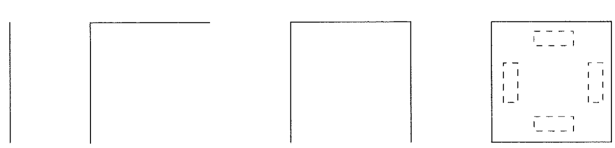


Figura 3

Cuando se les pidió un cuadrado en posición oblicua, dibujaron, a partir de un lado oblicuo, un cuadrilátero con los lados aproximadamente perpendiculares. Midieron los lados, pero no los ángulos. (Dibujaron un rombo que aparentemente era un cuadrado).

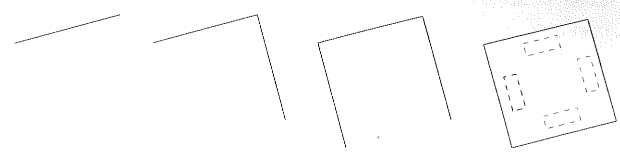


Figura 4

Procedimiento 3: Se dibuja un segmento vertical, luego, a partir de cada extremo, se dibuja un segmento horizontal, y por último se unen los dos extremos que quedan libres. Se miden los lados y los ángulos y se van modificando hasta lograr el cuadrado.

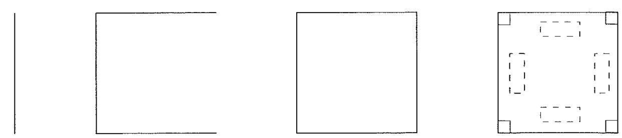


Figura 5

Cuando se les pidió un cuadrado en posición oblicua, repitieron el mismo procedimiento a partir de un primer lado oblicuo.

Procedimiento 4: Se traza una recta A por dos puntos *a* y *b*, tratando de que sea horizontal. Se traza una recta B básica también horizontal y se ubica un punto *x* sobre la misma. Se traza una recta C por los puntos *a* y *x*, moviendo *x* para que C quede vertical. Se traza por *b* una recta D paralela a C. Por último, se crea un punto *d*, intersección de B y D. No se miden lados ni ángulos.

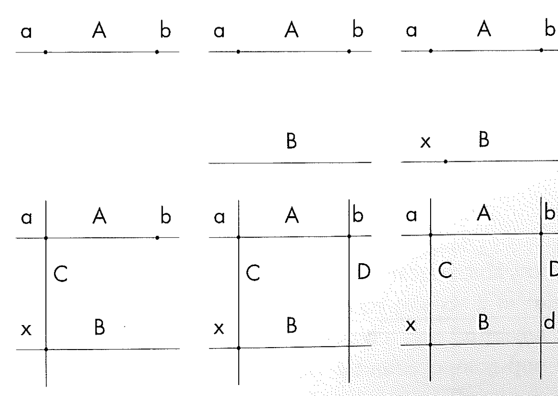


Figura 6

Cuando se les pidió un cuadrado en posición oblicua, repitieron el mismo procedimiento a partir de una primera recta oblicua, y midieron el ángulo hasta obtener el ángulo recto.

Procedimiento 5: Se traza una recta R no horizontal por los puntos *a* y *b*. Se traza una recta P paralela a R por un punto exterior *p*. Se hallan los simétricos *a'* y *b'* de *a* y *b* con respecto a P. Se definen y completan los lados del rectángulo *aa'bb'*. Se mueve *a* hasta que $\overline{ab}$ sea congruente con $\overline{bb'}$.

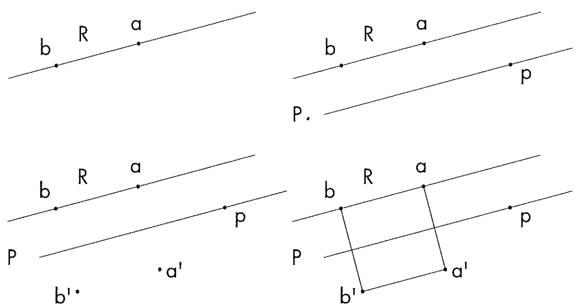


Figura 7

Al realizar la discusión de los procedimientos se vio que la mayoría de las construcciones eran aproximadas, y que el procedimiento 5 a lo sumo llegaba a la construcción exacta de un rectángulo Por eso se les planteó *la construcción de un cuadrado de lado dado, de tal manera que al mover cualquiera de los vértices, la figura cambiara de tamaño pero siguiera siendo un cuadrado.* Con unas pocas indicaciones, una pareja de alumnos que ya había hecho la construcción exacta del rectángulo, logró el siguiente procedimiento:

Procedimiento 6: Se traza una recta R horizontal por los puntos *a* y *b*. Se toma como lado del cuadrado el segmento $\overline{ab}$. Por *a* se traza una recta P perpendicular a $\overline{ab}$. Se traza un círculo de centro *a* y radio $\overline{ab}$. Se ubican las intersecciones *c*, *e* y *d* del círculo con las rectas R y P. Se traza el cuadrado *bced*.

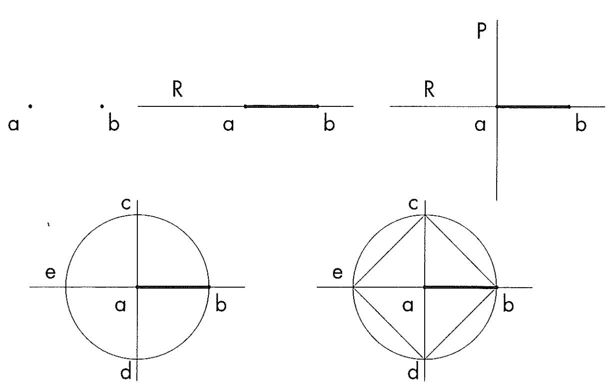


Figura 8

Se les hizo notar que el problema pedía la construcción de un cuadrado de lado dado $\overline{ab}$. Entonces lo resolvieron hallando el simétrico *a'* de *a* respecto de la diagonal $\overline{db}$ obteniendo el cuadrado *aba'd*.

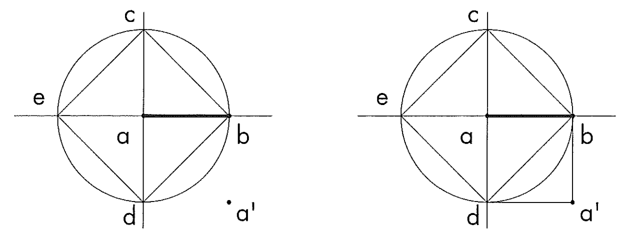


Figura 9

Al abordar el tema «distancia de un punto a una recta» pretendíamos que los alumnos conjeturaran la definición, a partir del uso del CABRI.

Conjeturas de definiciones y propiedades

Al abordar el tema «distancia de un punto a una recta» pretendíamos que los alumnos conjeturaran la definición, a partir del uso del CABRI. En una primera instancia pensamos plantear a los alumnos el siguiente problema:

Dados el punto p y la recta R, ¿cuál es la distancia del punto a la recta?

Nuestra hipótesis de trabajo era que los alumnos trazarían varios segmentos desde un punto dado *p* a distintos puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la recta y que medirían estos segmentos, o que trazarían un solo segmento $\overline{px}$, con *x* punto sobre objeto en la recta, obteniendo distintas medidas para $\overline{px}$ al desplazar *x*; pensamos que se verían ante la necesidad de seleccionar una de tales medidas, que el criterio más evidente sería elegir la menor, y que, por último, observarían que la longitud mínima corresponde al segmento de perpendicular entre el punto *p* y la recta dada.

Sin embargo, las características del software hacen que no sea posible determinar un único segmento de longitud mínima. En realidad se tiene una familia de segmentos de «longitud mínima», incluido el perpendicular, contenida en un ángulo de vértice *p* de casi 5°. No se puede por lo tanto concluir de aquí que el segmento de longitud mínima entre el punto *p* y la recta R es necesariamente el que se encuentra sobre la perpendicular a R que pasa por *p*. Esta dificultad, que podía convertirse en un obstáculo didáctico en el proceso de aprendizaje, nos llevó a modificar el diseño de clase y a motivar la definición de distancia a través de un ejemplo en la pizarra. La discusión con los alumnos permitió que éstos conjeturaran que la distancia está dada por la medida del segmento de longitud mínima entre el punto y la recta, y que observaran que dicho segmento se encuentra sobre la perpendicular. Una vez enunciada la definición, se les planteó el siguiente problema para resolver usando CABRI:

> *Hallar un punto p que se encuentre a una distancia igual a 6 cm de la recta dada R. ¿Es el único punto que está a esa distancia? Explicarlo.*

Los distintos procedimientos empleados para resolver la primera parte del problema fueron los siguientes:

Procedimiento 1: (Este procedimiento fue usado por la mayoría de los alumnos). Se traza una recta R horizontal y un punto *p* fuera de ella. Luego se toma un punto *x* sobre objeto en la recta (o un punto *x* aproximadamente sobre la recta) y se define el segmento $\overline{xp}$. Se modifica la posición de *x* y de *p* hasta que se consigue un segmento vertical de 6 cm.

La discusión con los alumnos permitió que éstos conjeturaran que la distancia está dada por la medida del segmento de longitud mínima entre el punto y la recta, y que observaran que dicho segmento se encuentra sobre la perpendicular.

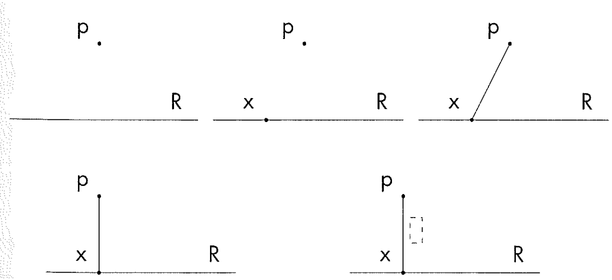


Figura 10

La ausencia de «escaleras» en la recta R y en el segmento $\overline{xp}$ asegura su perpendicularidad, pero esta condición no está explicitada sino usada intuitivamente. En una instancia posterior, cuando se les propuso el mismo problema partiendo de una recta R oblicua, se evidenció que la perpendicularidad no era considerada como parte necesaria de la definición, ya que en la mayoría de los procedimientos no apareció ni el trazado de la perpendicular usando el comando disponible en el menú ni la medición del ángulo.

Procedimiento 2: (Este procedimiento, que explicita la perpendicularidad, fue presentado por una sola pareja de alumnos). Se toma una recta R oblicua, por dos puntos *a* y *b*. Se traza una perpendicular P a R por *a*. Se toma un punto *p* sobre la recta P. Se define y se mide el segmento $\overline{ap}$ y se mueve *p* hasta obtener la medida de 6 cm.

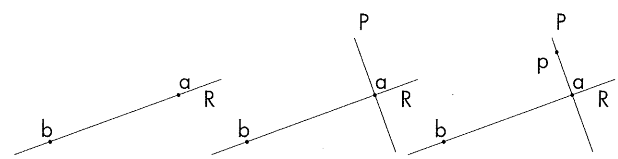


Figura 11

Procedimiento 3: (Esta construcción que también explicita la perpendicularidad, fue hecha por sólo una pareja que primero había realizado el procedimiento 1). Se toma una recta R oblicua por dos puntos *a* y *b*, y un punto *p* fuera de ella. Se crea y mide el segmento *ap*. Se marca y mide el ángulo *bâp*. Se mueve *p* hasta lograr la medida de 6 cm y el ángulo *bâp* recto.

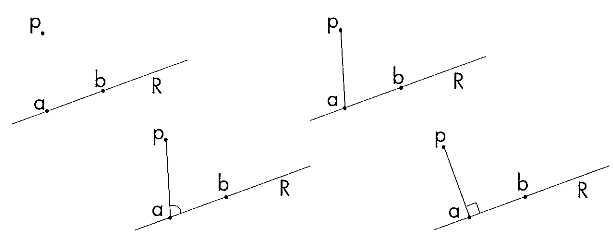


Figura 12

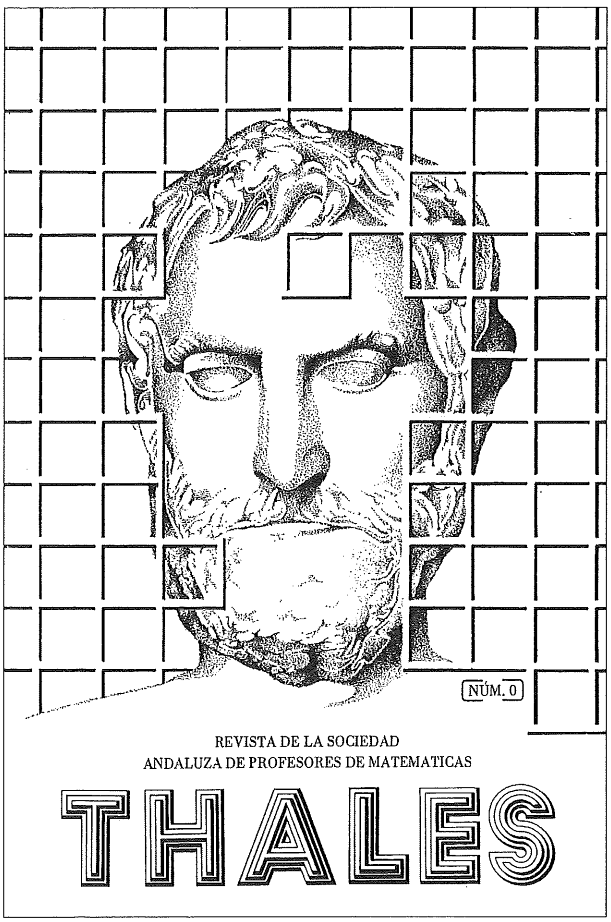
La segunda parte del problema fue respondida con las siguientes expresiones: «hay infinitos puntos a la misma distancia», «existen millones de puntos con la misma distancia respecto a la recta», «hay infinitos puntos que forman una recta paralela a la primera».

Conclusiones

El trabajo desarrollado en el taller nos ha mostrado que es posible «hacer matemática» en el nivel secundario, y que el CABRI es una herramienta de gran potencial didáctico cuyo uso implica, sin embargo, un cuidadoso análisis de sus posibilidades.

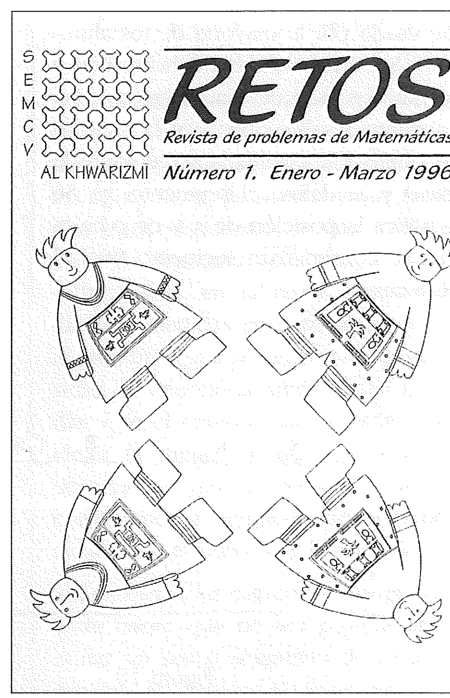
Si bien en algunos casos fue posible utilizar las imprecisiones de medida inherentes al programa, para resaltar la necesidad de recurrir a las construcciones exactas, en otros casos esta dificultad debió ser tenida en cuenta para no introducir un obstáculo didáctico. No siempre la medida sirve para conjeturar definiciones y propiedades, tal como se puede observar en el ejemplo anterior sobre el concepto de distancia de un punto a una recta. Por razones de espacio no desarrollaremos aquí otros ejemplos. Sólo mencionaremos que esta dificultad también se puso de manifiesto al trabajar la composición de simetrías axiales secantes y tratar de conjeturar la relación entre el ángulo de rotación del movimiento resultante con el ángulo entre los ejes de simetría. En este caso el margen de error imposibilitó que los alumnos dedujeran que el ángulo de rotación es el doble del ángulo formado por los ejes.

Liliana Siñeriz
Raquel Santinelli
Departamento de Matemática.
Centro Regional
Universitario Bariloche.
Universidad Nacional
del Comahue
(Argentina)



Thales

Núm. 0



Retos

Número 1

Enero-Marzo
1996