SUMA 30
febrero 1999, pp. 77-87

El «contexto natural». Influencia de la lengua natural en las respuestas a las pruebas de matemáticas*

Bruno D'Amore
Berta Martini

En este trabajo se estudia la influencia y el papel de un aspecto del contexto exterior producido por elecciones de tipo lingüístico. Cuando el lenguaje escogido es de tipo coloquial, las primeras preguntas son informales, sobre aspectos extraescolares, y la discusión numérica atañe a N, hablamos de contexto natural. Este contexto parece inducir, en el sujeto sometido a la prueba, la convicción implícita de que debería contestar según modelos intuitivos, que dependen de la competencia que adquirió en los primeros niveles de escolarización o de modelos ingenuos. También examinamos el problema de la conciencia de los alumnos en situaciones de dificultad.

* Trabajo realizado con la subvención del C.N.R. (Consejo Nacional de la Investigación) (contrato número 96.00216. CT01).

ARTÍCULOS

Traducción: Francisco Vecino Rubio

Uso de la lengua natural en Matemáticas

En un trabajo nuestro anterior (D'Amore y Martini, 1997), que recomendamos leer como introducción a éste, se alude al problema del uso de la lengua natural en el ámbito matemático.

No se trata ciertamente de un argumento despreciable: investigaciones de los últimos 15 años sobre el uso de la lengua natural en el aula, en las clases de matemáticas, nos inducen a pensar que las modalidades lingüísticas, conforme a las que se desarrolla la comunicación, son de fundamental importancia en el análisis de los comportamientos y de las respuestas de los alumnos. (Como referencias bibliográficas señalamos: Laborde, 1982; Maier, 1993; D'Amore, 1994 y Laborde, 1995, pero la literatura al respecto es vastísima)[1].

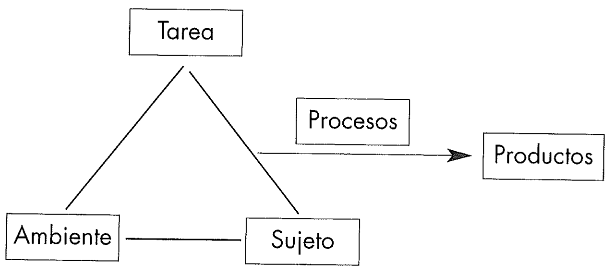
Aquí nos ocuparemos específicamente, sin embargo, sólo del uso de la lengua natural en un caso particular, es decir en la elaboración de pruebas y en la consiguiente tipología de las respuestas que los alumnos proporcionan, introduciendo como variables de carácter *redaccional* y *ambiental* justamente el lenguaje usado y el ambiente creado, a propósito, con preguntas de diversa índole (matemática y extramatemática).

El contexto natural

Con frecuencia, cuando se habla de «contexto», se hace en el sentido que le da Lester (1980), en el ámbito del *problem solving*, y ello se refiere a las condiciones ambientales en las que se encuentra actuando el potencial resolutor: ambiente físico, psicológico y social. Se trata, pues, tanto de factores externos como de factores inherentes a la tarea.

Estudios posteriores de Lesh (1981 y 1985) y Cobb (1988) han aportado mayor claridad a este delicado argumento, evidenciando cada vez más lo que debe entenderse por «contexto interno» y qué relaciones hay entre las dos formas, más bien mezcladas, de contexto (interno y externo).

D'Amore y Zan (1996) proponen un esquema, obtenido sintetizando a Kilpatrick (1975) y Lester (1980), en el que se evidencian los factores y las relaciones entre factores, en la actividad de *problem solving*:



Entre los diversos factores que determinan el funcionamiento de los distintos aspectos de ese «triángulo» a la izquierda del esquema, los de carácter lingüístico de ningún modo han sido olvidados o infravalorados por la investigación internacional; sin embargo, nos parece poco analizada la cuestión que delineamos ahora mismo, de forma rápida, pero que retomaremos detalladamente en el curso de este trabajo. Nos cuestionamos la relación que existe entre:

- El lenguaje usado en la redacción de una prueba (por tanto, dentro de la «tarea»).
- El contexto que se produce (influencia de la «tarea» y del «ambiente» –creado a propósito por quien escribe la prueba– sobre el «sujeto»).
- El ambiente cognitivo en el que el resolutor piensa buscar la respuesta (influencia del «ambiente cognitivo en que el resolutor busca las respuestas» sobre el «sujeto»).
- La respuesta producida (que implica el «sujeto», los «procesos» y, por tanto, el «producto»).

Los problemas que hemos estudiado explícitamente (D'Amore y Martini, 1997), son el clásico de Schoenfeld de «el autobus y los soldados» y el nuestro sobre «coches y niños», que son estructuralmente semejantes aunque ambos se expresan en un lenguaje muy simple, natural, muy cercano al coloquial[2].

Desde ese punto de vista, no deberían surgir diferencias importantes inducidas por registros diversos o por distintas modalidades lingüísticas.

Sin embargo, el hecho de que se hable de objetos más cercanos a las costumbres de los sujetos examinados (coches –y no autobuses del ejercito–, niños –y no soldados–, escuela –y no campo de instrucción–), influye sobre el hecho de que el contexto evocado por el segundo problema haga el mismo lenguaje descriptivo mucho más cercano al natural, y no sólo por los números menores que se emplean en ese segundo problema (en efecto se ha evidenciado explicitamente este hecho, una vez tras otra, en las respuestas de los sujetos entrevistados, como han demostrado D'Amore y Martini –1997–): el alumno sometido a esa prueba declara que imagina mejor la escena (los motivos se describen en el artículo citado) y que «no tiene necesidad de hacer operaciones».

...juega un papel esencial, en la tipología del comportamiento del resolutor en el momento de dar la respuesta (escrita en la prueba, oral en las entrevistas), algo que describiremos a continuación y que llamaremos contexto natural, *inducido por los términos y por los objetos evocados.*

Para nosotros, juega un papel esencial, en la tipología del comportamiento del resolutor en el momento de dar la respuesta (escrita en la prueba, oral en las entrevistas), algo que describiremos a continuación y que llamaremos contexto natural, inducido por los términos y por los objetos evocados.

Sobre el papel del contexto natural no habíamos realizado pruebas específicas con ocasión de la proposición del doble problema: autobús y soldados contra coches y niños, y, por tanto, hemos decidido hacerlas ahora.

De forma preliminar, describiremos de forma explícita el concepto que proponemos: el de *contexto natural.* El uso de la lengua común, con preguntas que incumben a hechos aritméticos en que intervienen sólo *números naturales* y hechos extra-escolares, sobre argumentos agradables y bien conocidos por nuestros sujetos, crea un contexto de espera (y por tanto de respuesta) que llamaremos contexto natural, una especie de ambiente mental de referencia, en que se coloca el resolutor al buscar las respuestas a las preguntas de la prueba.

Opinamos que, para construir una prueba capaz de crear un contexto natural, se deben elegir de forma cuidadosa y oportuna las primeras preguntas y adoptar también un lenguaje de tipo coloquial en las preguntas siguientes, incluso si hacen referencia a cuestiones matemáticas. Y viceversa, se

1 Revisten un interés específico, en este campo, los estudios sobre los distintos registros representativos, ya que éstos no sólo proporcionan diversos significantes de un mismo significado sino que, de hecho, vehiculan toda una serie de informaciones y de modalidades interpretativas de extraordinaria relevancia; véase Duval (1993) y D'Amore (1997).

2 Para comodidad del lector, aportamos aquí los textos de los problemas a que nos referimos. Problema de Schoenfeld del autobús y los soldados: «Un autobús del ejército transporta 36 soldados. Si se tiene que transportar a 1.128 soldados al campo de instrucción, ¿cuántos autobuses se necesitan?». Problema de los coches y de los niños: «Un automóvil transporta 4 niños. Si se debe llevar a 6 niños a la escuela, ¿cuántos coches se necesitan?».

puede evitar esto planteando, desde las primeras preguntas, problemas sobre hechos matemáticos que no tengan en cuenta hechos extra-matemáticos o exclusivamente los números naturales, y que en cambio evoquen un ámbito de respuesta, típicamente escolar.

Primera hipótesis de la investigación

En nuestra opinión, la creación de un contexto natural y el empujón (implícito) consiguiente para responder a las preguntas de una prueba, en tal contexto, rebaja el nivel del umbral crítico y el de referencia cognitiva, en la que aquel que debe responder a las preguntas busca argumentos para su respuesta.

El sujeto busca, entonces, las respuestas apropiadas en ambientes cognitivos ingenuos, en modelos matemáticos de la realidad de bajo pérfil cognitivo, inducidos eventualmente por sus experiencias cognitivas (en matemáticas) adquiridas en los primeros años de escolaridad.

Por ejemplo, en lo referente a los sistemas numéricos, dentro del contexto natural prevalecen y se usan los modelos intuitivos de número natural y de las operaciones que implican sólo números naturales y prevalecen, también, referencias a interpretaciones ingenuas de la realidad en términos de números naturales, incluso allí donde serían más significativos y oportunos otros sistemás numéricos.

Pero, ¿existe o no ese contexto natural? Nuestra hipótesis es que existe; discutiremos más adelante la pertinencia de esta hipótesis.

Una primera prueba para verificar la incidencia del contexto natural en las respuestas

Se trataba, pues, de crear una prueba con preguntas relativas a hechos extra-matemáticos (sobre argumentos conocidos y agradables para el alumno) y números naturales, en lenguaje coloquial (incluso a costa de no ser rigurosos desde un punto de vista formal).

Por ejemplo, en lo referente a los sistemas numéricos, dentro del contexto natural *prevalecen y se usan los modelos intuitivos de número natural y de las operaciones que implican sólo números naturales y prevalecen, también, referencias a interpretaciones ingenuas de la realidad en términos de números naturales...*

3 La contribución de muchos profesores de la escuela media superior ha sido determinante para la buena aplicación de la experiencia. Les agradecemos su colaboración, antes de la bibliografía.

Con tal propósito, y después de algunas pruebas preliminares, hemos elegido la siguiente batería de 3 preguntas, en este orden:

- P1. Escribe la suma de los números que forman tu fecha de nacimiento.

  [Por ejemplo si naciste el 28 de septiembre de 1978, la suma es 2+8+0+9+1+9+7+8=44].
- P2. Escribe el título de la última película que has visto (en el cine o en la TV).
- P3. Escribe el nombre de tu cantante preferido.

En ese punto, incluimos una pregunta, no rigurosa formalmente, pero que se expresaba en lengua coloquial y que reclamaba, pues, por su propia forma lingüística, el contexto natural inducido implícitamente, según nuestra opinión, por las tres primeras preguntas:

- P4. ¿Cuál es el número más pequeño del mundo?

La pregunta P4 se da ciertamente con una formulación ambigua; pero nuestro objetivo era precisamente evaluar la modalidad de la respuesta y sus distintos géneros.

(En lo que sigue, llamaremos prueba T1 a la constituida por las cuatro preguntas, P1-P4).

Como explicaremos mejor, a continuación, esa prueba escrita iba seguida de entrevistas.

En pruebas preliminares y más bien informales hechas a estudiantes de distintos niveles (media inferior, primer año de Institutos Profesionales, V de Liceo Clásico Experimental, en Italia)[3], a profesores (elementales, en Italia; de Instituto Profesional, en Suiza), a estudiantes universitarios del IV curso de la licenciatura en Matemáticas (en Salónica, Grecia), habíamos obtenido muchas respuestas «Cero». Queríamos verificar la incidencia real de esa respuesta y sus causas, pero en un contexto de investigación empírica.

Tras esas pruebas preliminares, muy útiles para poner a punto las preguntas de las pruebas, y a las que no nos referiremos aquí, pasamos a las pruebas propiamente dichas, con el test T1. Nos ha parecido útil hacer tales pruebas a estudiantes de la superior, vistos el sentido de las preguntas y las hipótesis que se hacían en él. Por tanto se llevó a cabo la experiencia en dos clases de II superior, en Bologna [una en un Instituto de Arte y la otra en un Itc (Instituto Técnico Comercial, escuela para contables)] y en dos clases de V superior, en S. Lazzaro di Savena (Bologna) [una de Itis (Instituto Técnico Industrial Estatal, escuela para jefes técnicos) y la otra de Itc].

Más adelante describiremos las modalidades y resultados de esta prueba sobre T1 (incluidas las entrevistas).

Más allá de la indagación, tal como se ha delineado, parecía además muy interesante, en este caso específico, ver qué tipo de respuesta se daría a la pregunta P4, siempre que no se tratase de «Cero». Veremos que ello es efectivamente interesante. Puede resultar curioso señalar que la respuesta a la pregunta P4, en las pruebas preliminares con estudiantes universitarios y del último año de la superior, ha sido, con una cierta preponderancia en las escuelas con mayores contenidos de carácter matemático, el «número» «$-\infty$». Por tanto, este «objeto» se considera como un número entero propiamente dicho[4]. Respuestas como «no existe» o similares han sido más bien escasas en las pruebas preliminares.

Asimismo hablaremos de las modalidades aplicadas y proporcionaremos los resultados (obtenidos por escrito o a través de entrevistas) de esta indagación.

Naturalmente era necesario hacer una contraprueba obvia.

La pregunta que, en efecto, surge espontánea es: ¿es cierto que una eventual respuesta «Cero» está ligada al contexto natural creado con las tres primeras preguntas del test? ¿No existirán otros motivos?

Se trataba, pues, de idear otra prueba en que las primeras preguntas creasen un ambiente, por así decirlo, no-natural, es decir que no implicase sólo números naturales y hechos extra-matemáticos, de forma que la pregunta (ex P4) sobre «el número más pequeño del mundo» se expresase en lenguaje más formal, adecuándose a las competencias matemáticas del alumno, propias de la escuela secundaria.

Concebimos entonces el test siguiente (que llamaremos a continuación T2):

- P5. Encuentra tres ejemplos de números reales que satisfagan esta desigualdad:

$$-\frac{5}{2} < x < +\frac{2}{3}$$

- P6. Resuelve la siguiente ecuación en $\mathbb{R}$:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

- P7. ¿Cuál es el número x, tal que x es menor que y, para cada y?

en el que P5 y P6 sólo persiguen el objetivo de contextualizar el test, en ambiente típicamente disciplinar, y P7 es una traducción un poco más formal de la P4 en un lenguaje no coloquial.

Una segunda prueba para verificar la incidencia del contexto natural en las respuestas

Muchas de las respuestas a T1, dadas por escrito o en las entrevistas, hacían intervenir el infinito, de manera más o menos explícita. No sólo: surgían a menudo, incluso sin darse cuenta, las dos posiciones filosóficas clásicas a propósito del infinito: potencial y actual (Arrigo y D'Amore, 1993).

Nos preguntamos entonces si las respuestas a P4 se veían condicionadas por el ámbito muy particular en que nos habíamos colocado. Es decir, si no era el contexto natural el causante de las respuestas o si, en todo caso, no era el único.

Había que hacer otra prueba, sobre un argumento que no implicase esta difícil noción. Y también debía hacerse doble: una vez creando el contexto natural y otra vez no creándolo.

Elegimos entonces la siguiente batería de preguntas (que llamaremos de ahora en adelante T3), de las cuales las tres primeras podían, en nuestra opinión, crear un contexto natural para la cuarta:

- P1, P2, P3 (las mismas de T1).
- P8. ¿Existe un número cuyo cuadrado sea 5?

Seleccionamos a continuación la siguiente batería de preguntas (que llamaremos T4), con el criterio acostumbrado: no se crea un contexto natural con las primeras (es más, se introduce desde el inicio en un contexto típicamente disciplinar) y la última ha de ser la misma P8 del test T3 (contexto natural), pero formulada en un lenguaje (un poco) más formal:

- P5, P6 (las mismas usadas anteriormente en T2).
- P9. ¿Existe un número x tal que $x^2 = 5$?

Más abajo hablaremos de las modalidades seguidas y daremos los resultados de esta prueba.

La gestión de las situaciones incoherentes. Segunda hipótesis de la investigación

Al realizar la prueba T1, hemos examinado una variante. Supongamos que a las preguntas P1-P4, en contexto natu-

Se trataba, pues, de idear otra prueba en que las primeras preguntas creasen un ambiente, por así decirlo, no-natural, es decir que no implicase sólo números naturales y hechos extra-matemáticos...

4 Sobre tal interpretación concuerdan además Shama y Movshovitz-Hadar (1994).

ral, siga una pregunta P10 en que se considere la existencia de números negativos, por ejemplo:

- P10. ¿Es mayor –3 o +2?

Nótese que P10 también se expresa en una forma lingüística coloquial y que por ello surgen dudas sobre su impecabilidad... Sin embargo, en ella se prueba la competencia del estudiante sobre el hecho de la existencia de los números negativos (y entonces la respuesta «Cero» no constituye la respuesta pertinente a la pregunta sobre el número más pequeño del mundo...).

Si un estudiante, de acuerdo con el contexto natural, ha respondido «Cero» a P4, ¿qué hara cuando tenga que responder a P10, recordando la existencia de los números negativos?

Con mayor precisión, nos preguntábamos:

1. Si a la pregunta P4 el estudiante responde «Cero» y a la P10 responde «+2», ¿volverá a la P4 para corregir la respuesta «Cero»? ¿En qué modo? ¿O bien deja «Cero» como respuesta a P4 y «+2» a P10? ¿Se da cuenta o no de la contradicción? ¿En qué medida influye en ello el contexto natural y en qué medida la coherencia dentro del test?
2. Si se intercambian el orden de P10 y P4, ¿el sujeto seguirá respondiendo «Cero» a la P4 o dará otras respuestas? Es decir, si las preguntas P1, P2 y P3 crean un contexto natural, ¿la precedencia de la P10 sobre la P4 lo destruye?

Es necesario precisar que otras investigaciones, consideradas ya clásicas, han sacado a la luz el hecho de que los estudiantes *desbechan la capacidad de poner de manifiesto elementos conflictuales y reconocerlos contemporáneamente como tales* (véase Stavy, y Berkovitz, 1980 y Hart, 1981).

Otras investigaciones han probado que la percepción de muchos elementos en conflicto no se vive como una situación problemática por parte del estudiante, sino como una situación completamente aceptable. Es decir: las incoherencias no determinan ilicitud; véase Schoenfeld (1985) y Tirosh (1990).

...mientras en matemáticas *la coherencia del sistema es un hecho central y se es consciente de su papel determinante, eso no vale para la situación* didáctica*; en el caso particular del infinito...*

Es más, mientras *en matemáticas* la coherencia del sistema es un hecho central y se es consciente de su papel determinante, eso no vale para la situación *didáctica*; en el caso particular del infinito; véase Tsamir y Tirosh (1997).

Nuestra hipótesis es que se confirmarán los resultados de las investigaciones antes citadas, incluso en un caso tan explícito y evidente como el que hemos propuesto. Ello nos parece ligado al hecho de que los estudiantes no están suficientemente interesados en la *gestión de la coherencia* (ni local, ni global) del sistema y del lenguaje que están aprendiendo a manejar.

Como atenuante parcial de la gravedad de esta conclusión eventual, si se llega a probar, puede actuar quizás una clausula implícita del contrato didáctico que podría no consentir o no empujar a la revisión de las respuestas propias, una vez dadas; es decir que llevaría a interpretar las respuestas aisladas como si fuesen independientes entre sí y no pertenecientes a una situación global.

Más tarde hablaremos de las modalidades de aplicación, daremos los resultados de la prueba y discutiremos sobre la validez de nuestra hipótesis.

Para comodidad del lector, recogemos en el siguiente cuadro los test en que se basan las pruebas:

P1.	Escribe la suma de los números que forman tu fecha de nacimiento. [Por ejemplo si naciste el 28 de septiembre de 1978, la suma es 2+8+0+9+1+9+7+8=44].
P2.	Escribe el título de la última película que has visto (en el cine o en la TV).
P3.	Escribe el nombre de tu cantante preferido.
P4.	¿Cuál es el número más pequeño del mundo?
P5.	Encuentra tres ejemplos de números reales que satisfagan esta desigualdad: $-5/2 < x < +2/3$.
P6.	Resuelve la siguiente ecuación en $\mathbb{R}$: $x^2 - 4x + 4 = 0$
P7.	¿Cuál es el número x, tal que x es menor que y, para cada y?
P8.	¿Existe un número cuyo cuadrado sea 5?
P9.	¿Existe un número x tal que $x^2=5$?
P10.	¿Es mayor –3 o +2?

T1: P1-P2-P3-P4

T2: P5-P6-P7

T3: P1-P2-P3-P8

T4: P5-P6-P9

$T1^1$: P1-P2-P3-P4-P10

$T1^2$: P1-P2-P3-P10-P4

Modalidades y resultados de las pruebas

Modalidades y resultados de la prueba T1 (con entrevistas)

Hemos aplicado la prueba T1 en dos clases de II (una de un Instituto de Arte; otra de Itc) y en dos clases de V (una de Itis; otra de Itc)[5].

A cada alumno se le daba un cuadernillo de 4 folios, formato A4, grapados en la parte superior izquierda; en cada folio se reflejaba una sola pregunta (por orden: P1-P2-P3-P4), con un cuadro grande vacío. Pedíamos a los estudiantes que no hojeasen los folios, que escribiesen su nombre (sin apellido) en el primer folio, que trabajasen en silencio, que no se intercambiasen informaciones, que respondiesen con absoluta tranquilidad y sinceridad, asegurándoles que el resultado de la prueba no se pasaría a sus profesores (los cuales nos dejaron solos con los estudiantes, como prueba de lo anterior).

Cuando dijimos «¡podéis empezar!», los estudiantes respondieron por escrito a la pregunta P1 en el primer folio. Pasados uno o dos minutos, sólo cuando lo ordenamos pudieron responder a la P2. Y así sucesivamente hasta llegar a la P4. Al finalizar recogimos el cuadernillo. Por lo que la totalidad de la prueba escrita duraba de 5 a 8 minutos. El profesor volvía a entrar, nosotros mirábamos inmediatamente sólo las respuestas a P4 y elegíamos los estudiantes para las entrevistas. Los alumnos elegidos, uno cada vez, venían a un aula cercana en la que se desarrollaba la entrevista individual. Se pedía al profesor que vigilase para que no se diese un cambio de informaciones entre los que volvían de la entrevista y los que salían para realizarla.

En este apartado, nos interesa ver cuántos estudiantes respondían a la pregunta P4, de forma que hubiese intervenido el contexto natural; obviamente no examinamos las respuestas a P1-P2-P3 que, recordamos, servían sólo para crear, en nuestra opinión, tal contexto natural.

Aun siendo casi siempre «Cero» la respuesta obtenida por escrito, se dio una gran variedad de respuestas si consideramos también las entrevistas; sólo poquísimos estudiantes responden de forma impecable, por ejemplo: «Para cada número pequeño, existe siempre otro más pequeño» (se trata de un estudiante de II Ist. de Arte, que firma con pseudónimo). Pero sobre la tipología de las respuestas, volveremos más adelante, con una gran riqueza de contestaciones particulares.

Antes de seguir, nos interesa evidenciar que hubo casos de respuestas ingenuas que, si bien no eran «Cero» (respuesta tomada por nosotros como prototipo de quien entra sin saberlo en el *contexto natural*), parecen ligadas justamente a tal contexto, confirmando su existencia. Se trata por ejemplo de las respuestas «1» (en las entrevistas: «porque cero no es un número», y eso aparece varias veces) y respuestas que revelan modalidades de medida. Como ejemplo, tenemos la respuesta «0,1» de Carlotta que, por escrito, no dice casi nada (incluso porque podría interpretarse como dos respuestas distinta, «0» y «1», separadas por una coma); y en la entrevista, la estudiante la justifica como: «la medida más pequeña posible».

...interesa evidenciar que ha habido casos de respuestas ingenuas que, si bien no eran «Cero» (respuesta tomada por nosotros como prototipo de quien entra sin saberlo en el contexto natural), parecen ligadas justamente a tal contexto, confirmando su existencia.

Por tanto, sea la respuesta «0» como la «1» o la «0,1», u otras análogas, se pueden adscribir, creemos, a la influencia del contexto natural.

Sin embargo, por corrección, dejaremos en adelante separadas las dos tipologías de respuesta.

Indicaremos, a continuación, con c el porcentaje de las respuestas «Cero» y con $c.n.$ el porcentaje de respuestas que parece se deban al contexto natural, según lo dicho anteriormente. Obviamente, $c.n. \geq c$, dada la inclusión de las respuestas «Cero» entre las debidas al ingreso en el contexto natural. (Se sobreentiende que redondearemos siempre los resultados hasta la unidad más próxima).

He aquí una tabla con los resultados en porcentajes:

	c	*c.n.*
II Inst. de Arte	50	70
II ITC	34	34
V ITIS	40	40
V ITC	37	37

Se nota enseguida que una respuesta distinta de «Cero», pero igualmente ligada al contexto natural, se da sólo en el Instituto de Arte; la mayor familiaridad con las matemáticas en los otros Institutos permite menos... divagaciones. Como veremos, cuando analicemos detalladamente la tipología de las respuestas, en las clases de V, sobre todo, se difunde la respuesta prevista por nosotros:«$-\infty$».

5 Recordamos que en Italia los estudiantes de I superior tienen (normalmente) una edad de 14-15 años, los de II 15-16 años y así sucesivamente.

Examinemos ahora las entrevistas para dar algún detalle más.

II de Instituto de Arte

Casi todos los estudiantes entrevistados confiesan que la primera respuesta intuitiva que les viene a la mente, de forma espontánea, es «Cero»; de ellos algunos escriben efectivamente «Cero» o «0» (Ilaria explica que su «0» es la traducción matemática de la respuesta «Nada» que se le ha ocurrido); otros escriben respuestas distintas como «1» o «–1», pero la explicación nos la proporcionan Angelo, Fabrizio y Matteo que explican que no podían escribir «Cero» porque «no se trata de un número». El –1 se piensa como «algo muy pequeño» y no como una unidad negativa.

Todo ello parece confirmar el ingreso en un contexto natural.

II Itc

Muchos estudiantes declaran haber pensado enseguida y espontáneamente en «Cero»; pero han reflexionado y han escrito cosas diversas [tenemos un «–número infinito» (el «–» es un signo de «negativo») tenemos un «–0» (idem), algún «No sé»,...].

V Itis

Aquí la casuística es muy simple ya que la clase se divide en dos respuestas: el 40% escribe «Cero» y el 60% escribe «–∞». De los estudiantes que dan la segunda respuesta, hay muchos que admiten a –∞ como « un número», como «el número más pequeño», etc.

> *Algunas entrevistas permiten descubrir el contraste interno entre «la primera respuesta que me ha venido a la mente» y la sucesiva reflexión dentro del cognitivo matemático. Otras entrevistas muestran, con claridad, la búsqueda de números que se explican teniendo en cuenta el contexto natural.*

Algunas entrevistas, sin embargo, permiten descubrir el contraste interno entre «la primera respuesta que se me ha ocurrido» y la sucesiva reflexión dentro del conocimiento matemático. Otras entrevistas muestran, con claridad, la búsqueda de números que se explican teniendo en cuenta el contexto natural. Por ejemplo, Giacomo dice: «He pensado en el número que vale menos». Por tanto, esta respuesta que se da cerca del 60% de los alumnos y que parece ser, para ellos, matemáticamente impecable, es a menudo el fruto de una reflexión crítica... que, tal vez, puede incluso considerarse a la inversa. Por ejemplo, Davide escribe «–∞» pero confesando a viva voz que no está muy convencido porque «quizás era más apropiado decir algo cercano al cero. No sé». También Ermanno y otros confiesan haber pensado en cero y haber escrito después la otra respuesta. Para concluir, entre las justificaciones de la respuesta «Cero» he aquí la de Giampiero: «Pensé en cero porque no es nada y no hay nada menos de nada».

Nos parece que, en este caso también, el contexto natural juega un papel esencial y notable, más allá de lo que parece por las respuestas escritas a las que hemos hecho referencia en la tabla anterior.

V Itc

Aquí hay estudiantes que no responden (hecho más bien raro, en general). Lo podemos tomar como una señal de dificultad, como veremos en breve. Uno sólo responde «–∞»; se trata evidentemente de una respuesta sacada de no se sabe dónde, ni de qué otras fuentes de conocimiento o de comunicación. Muchos estudiantes confiesan, incluso los que no han respondido «Cero», haber pensado, en primera instancia, en cero. Tenemos además a un estudiante que declara haber pensado en los «Submúltiplos del cero», a una estudiante en «Submúltiplos de 1» (Stefania), otra en «Algo no tangible» (Michela, que en el escrito lo había dejado en blanco porque no sabía qué responder); un estudiante declara: «He pensado en algo tan pequeño que no se puede escribir y después se me ha pasado el tiempo. Si hubiese tenido tiempo habría escrito: un número infinitesimal» (Carlo, que lo había dejado en blanco).

También, en este caso, nos parece que la influencia del contexto natural es manifiesta. Se nota siempre una especie de lucha entre la primera respuesta que acude a la mente (la mayor parte de las veces «Nada» o «Cero»), justificada, según nuestra opinión, por la hipótesis del contexto natural, y lo que después la competencia obliga a reelaborar o escribir.

Modalidades y resultados de la prueba T2

La prueba T2 se ha realizado solo en un Itis, con dos clases de II y dos de V.

En las II, la respuesta de tipo *c.n.* (que comprende tanto la respuesta «Cero», como cualquier otra «ingenua», asimilable a cero) se obtiene en un 25% de los casos. En la tabla del apartado anterior, teníamos al contrario un 70% (Instituto de Arte) y un 34% (II Itc).

En las V, la respuesta de tipo *c.n.* se da en un 0% de los casos, ante los precedentes 40% (Vde Itis) y 37% (Vde Itc).

Parece que se puede afirmar que la respuesta a P4, planteada en contexto natural, lleva a muchos de los alumnos a dar respuestas cuya motivación reside en el ámbito natural (lengua coloquial y números naturales). Ello es tanto más evidente cuanto mayor es el nivel de las clases, como las de V de Itis, en las cuales se han tratado contenidos matemáticos fuertes.

Modalidades y resultados de las pruebas T3 y T4

Las pruebas T3 y T4 se efectuaron también solo en un Itis, en dos clases de II y en dos de V.

En la prueba T3 (contexto natural), el 57% de los estudiantes de II responde no a P8 (lenguaje coloquial) (pensando por lo tanto, sólo en los números naturales) mientras en la prueba T4 (contexto disciplinar no natural), nada menos que el 83% de II responde sí a la P9 (lenguaje disciplinar).

En la prueba T3, el 29% de los estudiantes de V responde no a la P8 (pensando por lo tanto, sólo en los números naturales) mientras el 88% responde sí a la pregunta P9.

Parece que se puede afirmar que es justamente la idea de contexto natural la que conduce hacia respuestas como las vistas, *incluso cuando no están implicadas cuestiones concernientes al infinito matemático.*

Modalidades y resultados de la (contra) prueba $T1^1$ (P4-P10) y $T1^2$ (P10-P4) (con entrevistas)

Describiremos en este apartado las modalidades de ejecución de la (contra)prueba, cuyo objetivo se aclaró ya, y sus resultados.

Recordamos que:

- El test T1 está formado por las cuatro preguntas que habíamos llamado P1-P2-P3-P4 (en que las tres primeras tienen sólo el objetivo de crear un contexto natural).
- La P4 se refiere al «número más pequeño del mundo».
- La P10 es la que compara –3 y +2, siempre escrita en lenguaje natural, muy cercano al coloquial.

Recordemos que hemos indicado con:

- $T1^1$ el test T1 seguido de la pregunta P10 (por tanto $T1^1$ es el test formado con el orden P1-P2-P3-P4-P10).
- $T1^2$ el obtenido de $T1^1$ intercambiando P4 y P10, por tanto formado por P1-P2-P3-P10-P4, en ese orden.

Las modalidades de ejecución de la prueba fueron las ya descritas, sólo que ahora los folios A4 dados a cada alumno eran obviamente 5 y no 4.

La prueba se efectuó en Itc (tres II) y Liceo Científico (dos II y dos V).

Parece que se puede afirmar que es justamente la idea de contexto natural *la que empuja hacia respuestas como las vistas,* incluso cuando no están implicadas cuestiones concernientes al infinito matemático.

Veamos de forma rápida los resultados en el Itc.

Itc, clases de II

En el test $T1^1$, las respuestas de tipo *c.n.* a la P4 fueron el 70%; en el $T1^2$ descienden hasta el 42%. De las entrevistas se obtiene que, especialmente en el $T1^1$, los estudiantes admiten que la respuesta que acude, de forma inmediata, a la mente es «Cero» o, más raramente, «1».

Hacemos notar que *sólo un estudiante*, después de haber leído la P10, regresa a la P4 y borra la primera respuesta («Cero») para sustituirla con «–∞». Frente a esto son muchos los estudiantes que admiten haber relacionado las dos preguntas, pero no haber pensado retornar sobre los propios pasos para modificar la respuesta a P4 después de la exigencia planteada por P10. Lo dice muy explícitamente Elisa: «... pero he decidido dejarlo así». Sobre este punto, ligado sobre todo a la coherencia, volveremos más tarde.

Respecto a las pruebas efectuadas en las clases de II y V de Liceo Científico, hay muchísimas respuestas del tipo: «–∞» (sobre todo en V), «no existe» o similares (sobre todo en V), mientras raramente se encuentran las respuestas «Cero» o «1» (sobre todo en II).

Sin embargo, en las entrevistas, hay muchos estudiantes que, sobre todo en el caso de $T1^1$, admiten haber pensado justamente en «Cero», en «1», en «algo muy cercano a cero» (una de las respuestas por escrito es, desde ese punto de vista, ejemplar: «$0,\overline{0}1$», es decir: el cero despues de la coma se considera periódico).

Sobre la influencia de P10 sobre P4 en $T1^1$, algún estudiante confiesa haber relacionado las dos preguntas pero no haber sentido la necesidad de volver sobre sus pasos.

Sobre la influencia de P10 sobre P4 en $T1^2$, pocos admiten haber tenido la inspiración de responder a P4 a partir de P10, como si eso sucediese de forma implícita.

Sobre los temas estudiados en este apartado, podemos aprovechar también los resultados de algunas pruebas y algunas entrevistas hechas de una manera menos formal en un II del Instituto de Arte, en un II de Itc, en un V de Itis y en dos V de Itc.

II de Instituto de Arte

Sólo Carlotta y Sante admiten que han pensado en una posible relación entre P4 y P10, pero al final Carlotta ($T1^1$) ha preferido dejar las cosas como estaban y ha dejado «Cero»; mientras tanto Sante ($T1^2$), en el momento de responder a P4, se ha dado cuenta de la existencia de números negativos y ha respondido «–0» (el signo quiere decir «menos»), respuesta ya encontrada antes y no tan rara. Todos los demás admiten no haber pensado en el enlace entre las dos preguntas.

II de Itc

Ninguno de los entrevistados declara haber relacionado P4 y P10.

V de Itis

En las entrevistas, aun considerando todas las variantes de la respuesta, que veremos más abajo, parece que muchos estudiantes se han visto influenciados, en $T1^2$, por la pregunta P10 para responder a la P4. Pero casi ninguno lo admite; a la pregunta explícita del entrevistador, responden no haber relacionado las dos cosas. Es como si muchos no fuesen conscientes de ese hecho (probado por vía empírica, como muestran los resultados). Ello confirma lo ya dicho anteriormente.

V de Itc

Las respuestas «Cero» a la P4 en $T1^2$ disminuyen notablemente, mientras los casos de respuestas distintas de «Cero» pero, en cualquier caso ingenuas y ligadas, en nuestra opinión, al contexto natural, incluso crecen. Por las entrevistas, resulta que no muchos estudiantes admiten haber sido influenciados en la respuesta a P4 por la precedente P10, pero resulta obvio, por las tentativas de explicación de sus respuestas (distintas de «Cero») a P4, que se da un evidente estado de confusión... Mientras los alumnos de Itis superan tal estado con sus competencias, respondiendo entonces «–∞», los de Itc no parecen tener a la mano, con la misma desenvoltura, un objeto matemático... similar que resuelva el problema; es por ello que se lanzan a enrevesadas respuestas, interesantes y de una ingenuidad que confirma, una vez más, el conflicto entre:

- El contexto natural creado.
- Las competencias matemáticas.
- El conocimiento del hecho de que, existiendo los números negativos, la respuesta «Cero» no se puede dar.

Se dan respuestas como «0,0...» (Stefania), «es un número neutro y el más cercano a cero es 1» (Federico), «un número comprendido quizás entre –3 y +2» (Elisa) (con evidente influencia de la P10 sobre la P4), y otras.

Por las pruebas efectuadas, por los resultados expuestos, sobre todo gracias a las entrevistas que se han revelado muy significativas (gracias al clima de confianza que se ha instaurado siempre entre entrevistadores y alumnos), pensamos que podemos confirmar la hipótesis hecha acerca del contexto natural.

¿Qué responden los estudiantes a P4, cuando no responden «Cero»?

A esta pregunta ya hemos dado muchos tipos de respuesta; si bien en las respuestas escritas se detecta una amplia gama, es en las entrevistas personales donde se obtiene la máxima variedad de respuestas posibles.

Más allá de «Cero», «–∞» y «1», que son con diferencia las respuestas más frecuentes, hay otras recordadas: «–0», «–1», «bajo cero», «submúltiplos de 1», «submúltiplos de cero», «–100000000000», «0,1», «$0,\overline{01}$», etc.

Ello nos inclina a pensar que, incluso en alumnos de V superior, por tanto muy cerca de la selectividad y a pocos meses de la elección de una facultad universitaria en que proseguir sus estudios, hay una gran confusión sobre el significado de los números y de su escritura.

La respuesta «–∞» la dan, por escrito, muchos estudiantes de los Institutos con un contenido matemático fuerte; pero tal signo se considera a menudo como un número entero propiamente dicho, confirmando lo encontrado por Shama y Movshovitz-Hadar (1994). No sabemos lo que piensan los profesores que usan este símbolo, pero nos parece una actitud más bien peligrosa la asunción (o la aceptación de la misma) de una idea como esa.

El punto esbozado aquí no forma parte de los objetivos de nuestra investigación (ya suficientemente vasta como para no necesitar añadir otros argumentos) y por tanto nos hemos limitado a citar el problema en esas pocas líneas.

Discusión de los resultados, respuestas a las preguntas y verificación de nuestras hipótesis

¿Existe o no el contexto natural?

Por las pruebas efectuadas, por los resultados expuestos, sobre todo gracias a las entrevistas que se han revelado muy significativas (gracias al clima de confianza que se ha instaurado siempre entre entrevistadores y alumnos), pensamos que podemos confirmar la hipótesis hecha acerca del contexto natural. El hecho de formular las primeras preguntas de un test en lenguaje coloquial, de forma que impliquen cuestiones extraescolares con las que se planteen simples problemas con números naturales solamente, parece remitir a un contexto formado por el par: lenguaje coloquial/números naturales; ello hace que el ámbito al que se van a buscar las respuestas, incluso repetidamente, sea el de los modelos intuitivos ingenuos de los primeros años de escolaridad. Eso parece ser cierto en niveles de escolaridad más bien elevados y con fuerte contenido matemático.

Probablemente, dado el interés de la cuestión sugerida aquí, se deberán realizar otras pruebas, en el futuro, para establecer la importancia real de este fenómeno, sus variables y sus límites. Nos parece que constituye un campo de un cierto interés, en el sentido ya apuntado.

Gestión de las situaciones de incoherencia

Nos habíamos planteado algunas preguntas que podemos responder ahora.

Como habíamos visto, sobre todo gracias a las entrevistas, el estudiante sometido a una serie de cuestiones tiene un comportamiento resolutivo «local» y

- no está preparado para
- no se siente autorizado a
- no piensa tener que

retornar sobre sus pasos y modificar una respuesta ya dada, de acuerdo con observaciones e informaciones sucesivas.

Es más, esas informaciones parecen ser un hecho implícito, inconsciente; en efecto el cambio entre P4 y P10 ha ejercido un fuerte peso sobre el tipo de respuesta a P4, pero el estudiante no parece ser consciente de ello.

Pero retornemos al título de este apartado.

No podemos sino confirmar las investigaciones de Stavy y Berkovitz (1980) y Hart (1981) sobre la incapacidad de los alumnos de notar situaciones conflictivas y de vivirlas como tales. Confirmamos además las investigaciones de Schoenfeld (1985) y Tirosh (1990) sobre el hecho de que las incoherencias no constituyen para el estudiante situaciones ilícitas. La investigación de Tsamir y Tirosh (1997) se había centrado en una situación de inconsciencia de la incoherencia, en un caso específico sobre el infinito; nosotros pensamos haberlo extendido a otra situación, con otro caso también concerniente al infinito. Se debe hacer notar, por honestidad, que nos parece que los ejemplos en este campo de indagación sobre cuestiones que conciernen al infinito se deben mirar siempre con cuidado porque las respuestas contradictorias por parte de los estudiantes se hacen difícilmente imputables a algo preciso... Habría pues que proponer ejemplos en campos de investigación de ese género, pero en sectores matemáticos diversos.

...quizás nuestros alumnos terminan por saber gestionar una matemática muy sofisticada pero, ¿se desinteresan de que haya una explícita contradicción entre dos respuestas suyas?

Lo más interesante, para nosotros, no son las respuestas escritas; hemos podido constatar que, a menudo, la respuesta escrita a un test se da de forma rápida y tal vez un poco superficial (con las entrevistas se instauran posibilidades de análisis más profundas). Hemos tenido la fortuna de encontrar muchísimos alumnos con ganas de hablar en la entrevista y con una gran sinceridad. Ha sido en la entrevista cuando hemos tenido la clara demostración de que la respuesta «Cero» a la pregunta P4 y la respuesta «+2» a la P10 se consideran contradictorias (ya que en la primera se olvida la existencia de los números negativos, recordados en la segunda) *sólo después que el entrevistador lo hace notar*; pero ni aún entonces parece notarse ninguna clase de molestia, sorpresa y mucho menos deseos de rectificar, modificando una de las respuestas, a fin de hacer coherente la propia posición personal global. Efectivamente, como había ya dicho certeramente Tirosh (1990), estas situaciones de contradicción parecen no sorprender, desagradar o requerir intervenciones correctoras.

Se trata de una llamada de atención sobre una grave laguna de la didáctica de las matemáticas; quizás nuestros alumnos terminan por saber gestionar una matemática muy sofisticada pero, ¿se desinteresan de que haya una contradicción explícita entre dos de sus respuestas?

Nuestra hipótesis nos parece en cualquier caso confirmada. Sobre todo a través de las entrevistas, confirmamos no sólo el que los estudiantes parecen del todo indiferentes al encontrarse frente a una contradición explícita, sino que nos parece confirmado también el hecho de que no se trata (o, mejor, se trate no sólo) de desinterés, ya que además parece intervenir una especie de clausula del contrato didáctico que parece no consentir o no empujar a la revisión de las respuestas propias, una vez dadas; es decir, que las respuestas simples se interpretan como si fuesen cada una independiente de las demás y no pertenecientes a una situación global.

Ciertamente esto trae a colación la metacognición y la capacidad de control y ello explica por qué hemos ligado, desde el inicio, este trabajo al nuestro precedente (D'Amore-Martini, 1997), al que remitimos para detalles mayores sobre este punto específico.

...parece intervenir una especie de clausula del contrato didáctico que parece no consentir o no empujar a la revisión de las respuestas propias, una vez dadas...

Agradecimientos

Damos las gracias a las profesoras Gabriella Bolognini, Carla Gamberini, Laura Giovannoni, Patrizia Ghidini, Grazia Grassi, Annamaria Lonoce, Elisa Menozzi, Maria Ragagni, Patrizia Ricci, Anna Maria Rossini, Luciana Tampieri, Mara Tullini y Maria Cristina Volta, no sólo por habernos permitido realizar las pruebas en sus clases, en horario lectivo, sino también por darnos la posibilidad de efectuar las pruebas en las clases de otras compañeras.

Bibliografía

ARRIGO, G. y B. D'AMORE (1993): *Infiniti*, Angeli, Milano.

COBB, P. (1988): «Multiple perspectives», *Proceedings ICME VI*, Budapest July-August 1988.

D'AMORE, B. (1994): «Esporre la matematica apppresa: un problema didattico e linguistico», en B. JANNAMORELLI (ed.), *Insegnamento/Apprendimento della matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*, Atti del I Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo 1993, Qualevita, Sulmona. También en *La matematica e la sua didattica*, 3, 1993, 289-301. Una versión ampliada, en alemán: *Journal für Mathematik Didaktik*, 17, 2, 1996, 81-97.

D'AMORE, B. y B. MARTINI (1997): «Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard», *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175. Tambien en: español: *Números* (Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas), 32, 1997, 27-42.

D'AMORE, B. (1997): «Oggetti relazioni e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli», *L'educazione matematica*, enero 1998, en proceso de publicación.

D'AMORE, B. y R. Zan (1996): «Italian Research on Problem Solving 1988-1995», en N. MALARA, M. MENGHINI y M. REGGIANI (eds.): *Italian Research in Mathematics Education: 1988-1995*, Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Quaderni CNR, 136-150. Reeditado en A. GAGATSIS y L. ROGERS (eds.) (1996), *Didactics and history of mathematics*, Thessaloniki, 35-52. Reeditado en una versión más amplia en: *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 300-321.

DUVAL, R. (1993): «Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée», *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

HART, K. (ed.) (1981): *Children's understanding of mathematics*, 11-16, Murray, London.

KILPATRICK, J. (1975): en G. KULM (1984): «The classification of problem solving research variables», en G. A. GOLDIN y C. E. MCCLINTOCK (eds.), *Task variables in mathematical problem solving*, Franklin Inst. Press, Philadelphia (Pennsylvania).

LABORDE, C. (1982): *Langue naturelle et écriture symbolique: deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*, Thèse, Univ. J.Fourier, Grénoble.

LABORDE, C. (1995): «Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica?», en B. JANNAMORELLI (ed.): *Lingue e linguaggi nella pratica didattica,* Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo-aprile 1995, Qualevita, Sulmona, 63-78. Reeditado en *La matematica e la sua didattica*, 2, 1995, 121-135.

LESH, R. (1981): «Applied mathematical problem solving», *Educational Studies in Mathematics*, 12, 235-264.

LESH, R. (1985): «Conceptual analysis of mathematical ideas and problem solving processes», *Proceedings PME IX*, London.

LESTER, F. K. (1980): «Research on Mathematical Problem Solving», en R. SHUMWAY (ed.): *Research in Mathematics Education*, NCTM, Reston (Virginia).

MAIER, H. (1993): «Conflit entre langue mathématique et langue quotidienne pour les élèves», *Cahiers de didactiques des mathématiques*, 3, 86-118. Trad. it. en *La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305.

SCHOENFELD, A. H. (1985): *Mathematical problem solving*, Academic Press, New York.

SHAMA, G. y N. MOVSHOVITZ HADAR (1994): «Is infinity a whole number?», *Actas del XVIII PME*, Lisboa, 265-272.

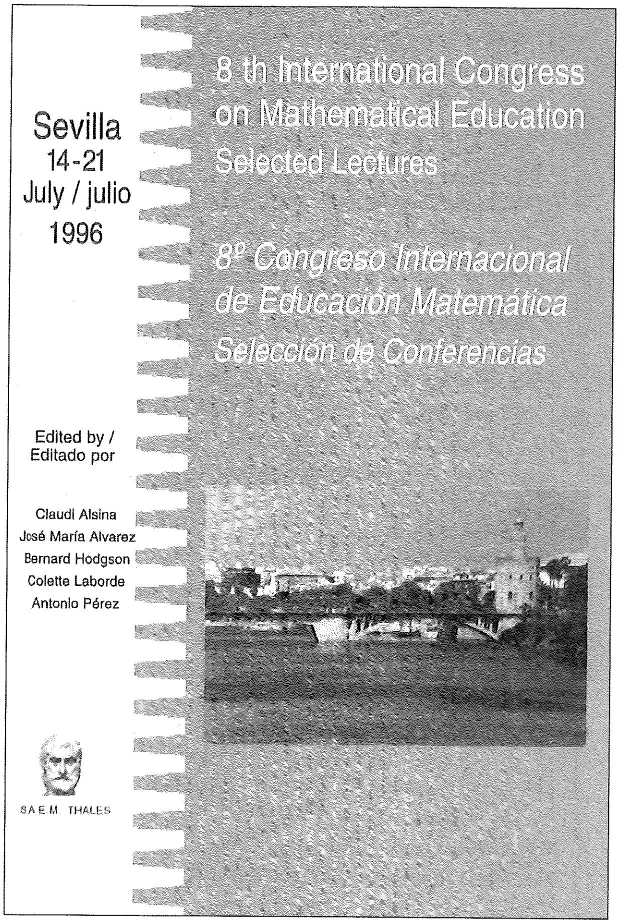
STAVY, R. y B. BERKOVITZ (1980): «Cognitive conflict as a basic for teaching qualitative aspects of the concept of temperature», *Science Education*, 28, 305-313.

TIROSH, D. (1990): «Inconsistencies in students' mathematical costructs», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

TSAMIR, P. y D. Tirosh (1997): «Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito», *La matematica e la sua didattica*, 2, 122-131.

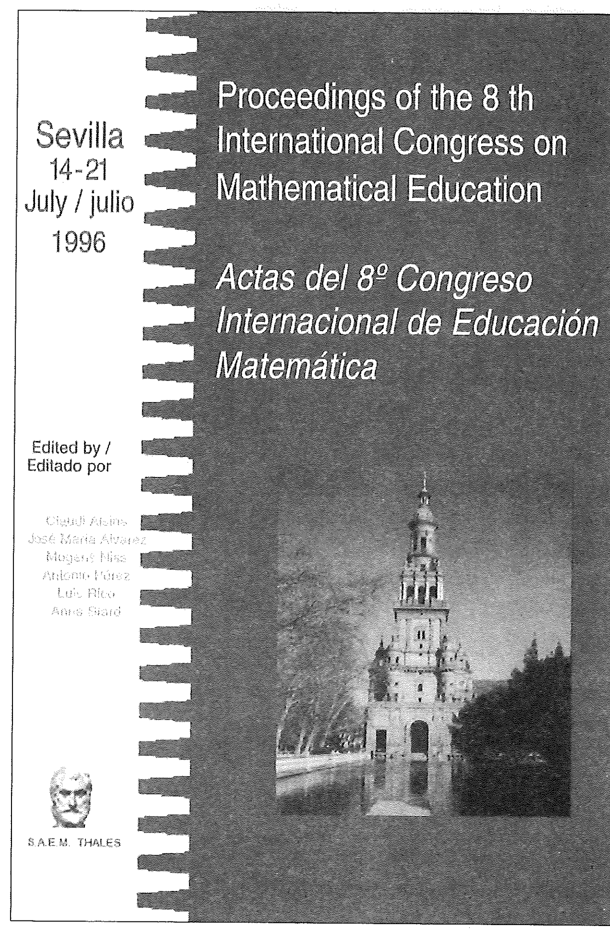
Bruno D'Amore
Berta Martini
Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica.
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES



ICME-8

Sevilla, 1996



Edita: SAEM «Thales»