SUMA 30
febrero 1999, pp. 59-64

Una introducción a las fracciones continuas

Manuel Benito Muñoz
José Javier Escribano Benito

ARTÍCULOS

Se presenta el tema de las fracciones continuas de forma genérica, tratando de mostrar diferentes campos de investigación didáctica relacionados con conceptos básicos de las matemáticas: número real, aproximación racional, sucesiones, límites de sucesiones, recursividad y otros, que sin ser fundamentales en la enseñanza media, permiten desarrollar el razonamiento de nuestros alumnos: fracciones continuas, sucesiones de Brocot, sucesiones de Farey, sucesión de Fibonacci...

COMO es bien sabido, el conjunto de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$ y, por consiguiente, todo número real puede ser aproximado tanto como se desee por números racionales. En este sentido, la generalización en el siglo XVI del uso de las fracciones decimales representó una importante innovación aritmética ya que la utilización de la expresión decimal de los números ofrece la ventaja de homogeneizar los cálculos, pues todas las operaciones se efectúan de forma análoga a las realizadas con números enteros, al tiempo que permite acotar fácilmente los errores de redondeo.

En cambio las fracciones continuas, otra innovación del siglo XVI, permiten expresar los números reales por medio de las fracciones más simples posibles sus *aproximaciones óptimas*[1].

Comparando, por ejemplo, el desarrollo decimal de $\sqrt{2}$ = 1,4142136...

$$d_0 = 1; \quad d_1 = \frac{14}{10}; \quad d_2 = \frac{141}{100}; \quad d_3 = \frac{1414}{1000}; \ldots$$

con los valores de las primeras reducidas de su desarrollo en fracción continua: $\sqrt{2} = [1; \overline{2}]$

$$\frac{p_0}{q_0} = 1; \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2} = 1,5; \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{5} = 1,4; \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{17}{12} = 1,41666; \ldots$$

se observa que estas últimas proporcionan mejor aproximación con fracciones de términos más pequeños. Está propiedad, además de su innegable interés teórico, permite numerosas aplicaciones prácticas que van desde el cálculo de engranajes hasta la informática pues el empleo de aproximaciones óptimas se traduce en computación en una menor ocupación de memoria y una disminución del tiempo de cálculo. La importancia de esta última aplicación ha conseguido que un buen número de matemáticos vuelvan a interesarse[2] por las fracciones continuas y otros temas conexos como las sucesiones de Farey y las sucesiones de Stern-Brocot tan frecuentes en las publicaciones de principios de siglo y que, sin embargo, por el vaivén de las modas habían sido casi olvidados en las investigaciones y en la propia formación de matemáticos y técnicos durante los últimos cuarenta años. Del mismo modo, en los planes de estudios de BUP y FP actualmente a extinguir sólo se contempla, aunque raramente se imparte, el estudio de las fracciones continuas en las ramas técnicas de 4.° FP con un enfoque clásico en la misma línea que sigue, por ejemplo, Rey Pastor (1981). Los diseños curriculares LOGSE de Matemáticas tampoco abordan estos temas pero pensamos que pueden incluirse en los diferentes Talleres de Matemáticas cuyos currículos tienen un carácter abierto, siempre y cuando se presenten de un modo menos formal y más intuitivo. En este trabajo reproducimos de forma muy esquemática una experiencia que hemos realizado en la asignatura de Informática de 3.° de BUP como ejemplo de programación de procedimientos recursivos en LOGO. Pensamos que puede servir igualmente para habituar a los alumnos con los conceptos de número real, aproximaciones racionales y, de una forma más concreta, para introducir las fracciones continuas mediante las sucesiones de Brocot extendidas al intervalo $[0, +\infty)$.

Mediación de fracciones

Si sumamos término a término el numerador y el denominador de dos fracciones no negativas a/b y c/d se obtiene una nueva fracción

$$\frac{a+c}{b+d}$$

comprendida entre ambas llamada *mediación.* Así la mediación de 2/3 y 4/5 es 6/8 = 3/4.

Esta propiedad, que ya era conocida por Arquímedes, fue utilizada por Nicolás Chuquet[3] en 1484 para calcular las aproximaciones sucesivas de $\sqrt{n}$ con $n \le 14$. Su método, aplicado al cálculo de $\sqrt{6}$, era similar al siguiente:

i) La raíz cuadrada de 6 está comprendida entre 2 y 3, por ello se toma, como primera aproximación de $\sqrt{6}$

$$a_1 = \frac{5}{2}$$

donde 5/2 es la mediación de 2/1 y 3/1.

ii) Como $a_1^2 = 25/4$ es mayor que 6, la segunda aproximación es

$$a_2 = \frac{7}{3}$$

donde 7/3 se obtiene por mediación de 2/1 y 5/2.

iii) $a_2^2 < 6$, la tercera aproximación es, por tanto,

$$a_3 = \frac{7+5}{3+2} = \frac{12}{5}$$

Prosiguiendo de esta forma Chuquet obtuvo para $\sqrt{6}$, las aproximaciones:

$$\frac{5}{2};\ \frac{7}{3};\ \frac{12}{5};\ \frac{17}{7};\ \frac{22}{9};\ \frac{27}{11};\ \frac{49}{20};$$

$$\frac{71}{29};\ \frac{120}{49};\ \frac{169}{69};\ \frac{218}{89};\ \frac{267}{109};\ \frac{485}{198}.$$

Un proceso análogo puede seguirse para calcular aproximaciones racionales óptimas de cualquier número real.

Construcción de engranajes

Consideremos un engranaje formado por un par de ruedas dentadas. Si designamos con z_1 y n_1 el número de dientes y la velocidad angular de la rueda conductora, y con z_2 y n_2 los respectivos de la rueda conducida, se verifica la relación

$$z_1 \cdot n_1 = z_2 \cdot n_2$$

donde z_1 y z_2 son dos números enteros y, por tanto, la relación de transmisión

$$i = \frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}$$

es un número racional.

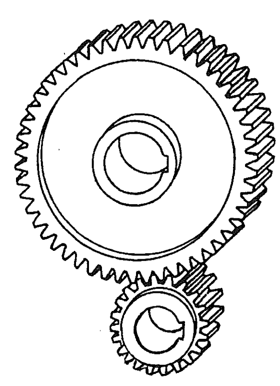


Figura 1. Dos ruedas dentadas acopladas

1 Una fracción irreducible a/b se llama *aproximación óptima de primera especie* de un número real *x*, si no es posible lograr mayor precisión con fracciones de denominador más pequeño. es decir, si se verifica que:

$$\left|x-\frac{c}{d}\right| > \left|x-\frac{a}{b}\right|$$

para toda fracción $c/d \neq a/b$ con denominador $d \le b$.

2 Véanse, por ejemplo, las ponencias presentadas en las últimas *Journées Arithmétiques* celebradas en Limoges en septiembre de 1997.

3 En un texto manuscrito, *Triparty en la sciencia des nombres*, que no fue impreso hasta el siglo XIX. Véase Dickson (1952, p. 350)

En general, para calcular la relación de transmisión de un tren de engranajes formado por dos o más engranajes dispuestos en serie, se utiliza la siguiente fórmula

$$i = \frac{z_1 \cdot z_3 \ldots}{z_2 \cdot z_4 \ldots}$$

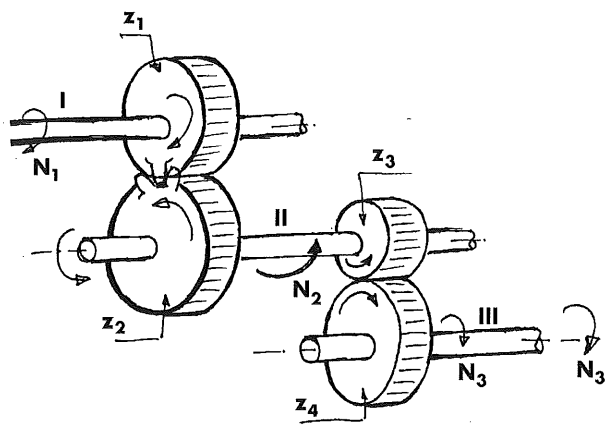


Figura 2. Engranajes

Camus (1699-1768) en su *Cours de Mathématique* (1752) proponía el siguiente ejemplo[4]:

Hallar el número de dientes y láminas de las ruedas y piñones de una máquina que, siendo accionada por un piñón colocado en la rueda horaria, haga que una rueda describa una revolución completa en un año normal que se supone consta de 365 días, 5 horas y 49 minutos.

La relación de transmisión es:

$$i = \frac{12 \cdot 60}{365 \cdot 24 \cdot 60 + 5 \cdot 60 + 49} = \frac{720}{525949}$$

La solución exacta del problema pasaría bien por construir un engranaje simple con 720 dientes en la rueda conductora y 525949 en la conducida, lo que no parece factible, o bien por construir un tren de engranajes lo que no es posible ya que al ser primo el denominador, la fracción no puede expresarse como producto de otras fracciones.

4 Véase Merritt (1950, p. 121).

5 No es necesario establecer un número mínimo ya que siempre es posible encontrar una fracción equivalente multiplicando el numerador y el denominador por un mismo número.

Habrá que buscar, por tanto, una aproximación de la fracción anterior cuyo numerador y denominador sean, por razones técnicas, menores que 100 (engranaje simple) o bien pueda expresarse como producto de fracciones que cumplan esta condición (tren de engranajes). Aplicando el método de Chuquet encontramos las 756 fracciones siguientes:

$$\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ldots\ \frac{1}{731};\ \frac{2}{1461};\ \frac{3}{2191};\ \frac{5}{3652};\ \frac{7}{5113};$$

$$\frac{9}{6574};\ \frac{11}{8035};\ \frac{13}{9496};\ \frac{15}{10957};\ \frac{17}{12418};\ \frac{19}{13879};$$

$$\frac{21}{15340};\ \frac{23}{16801};\ \frac{25}{18262};\ \frac{27}{19723};\ \frac{29}{21184};\ \frac{31}{22645};$$

$$\frac{33}{24106};\ \frac{64}{46751};\ \frac{97}{70857};\ \frac{130}{94963};\ \frac{163}{119069};$$

$$\frac{196}{143175};\ \frac{229}{167281};\ \frac{262}{191387};\ \frac{491}{358668};\ \frac{720}{525949}.$$

Si prescindimos de los primeros valores que ofrecen una aproximación muy pequeña no es posible resolver el problema con un engranaje simple. Para construir un tren de engranajes debemos desechar aquellas fracciones cuyo numerador (denominador) sea un número primo o alguno de sus factores sea mayor que 100. La lista anterior nos queda reducida ahora a tres fracciones:

$$\frac{21}{15340} = \frac{3 \cdot 7}{2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 59}$$

$$\frac{130}{94963} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 13}{11 \cdot 89 \cdot 97}$$

$$\frac{196}{143175} = \frac{2^2 \cdot 7^2}{3 \cdot 5^2 \cdot 23 \cdot 83}$$

La primera no nos sirve y de las diferentes opciones que ofrecen las otras dos, la mejor por razones técnicas y de aproximación (el error cometido es menor de 10^{-10}) es:

$$i = \frac{196}{143175} = \frac{4}{25} \cdot \frac{7}{69} \cdot \frac{7}{83}$$

Esta es justamente la solución propuesta por Camus tras diez páginas de laboriosos cálculos.

Sucesiones de Brocot

Para facilitar estos cálculos el relojero Archille Brocot publicó en 1862 un folleto: *Calcul des rouages par approximation, nouvelle méthode, par Brocot, horloger* que incluía una tabla[6] que comenzaba de un modo similar a la siguiente:

B_0:	$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{0}$
B_1:	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$								$\frac{1}{0}$
B_2:	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$				$\frac{2}{1}$				$\frac{1}{0}$
B_3:	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{2}{1}$		$\frac{3}{1}$		$\frac{1}{0}$
B_4:	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{0}$

Donde cada fila se obtiene copiando la anterior e intercalando, entre cada dos fracciones consecutivas, su mediación.

A cada una de estas filas[7] se le denomina *sucesiones de Brocot de orden n* y está formada por 2^n+1 fracciones irreducibles ordenadas de forma creciente, de modo que si a/b, a'/b' son dos fracciones consecutivas de Brocot, entonces

$$a'b - ab' = 1$$

y si a/b, a'/b', a"/b" son tres fracciones consecutivas de Brocot, se tiene

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a + a''}{b + b''}$$

La comprobación, e incluso la demostración formal de estas propiedades, es muy sencilla[8] como también lo es el estudio de sus simetrías:

Si $0 \leq a/b \leq 1$, se tiene:

$$b_{n,k} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b_{n,2^n-k} = \frac{b}{a}$$

$$b_{n,k} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b_{n,2^{n-1}-k} = \frac{b-a}{b}$$

También resulta interesante comprobar que el valor máximo de los denominadores (numeradores) de la sucesión de orden *n* coincide con el término n-ésimo de la sucesión de Fibonacci[9].

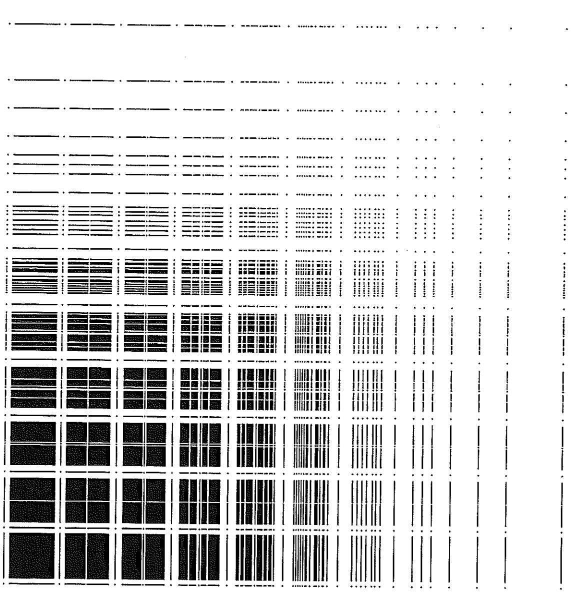


Figura 3. Puntos de $B_{10}xB_{10}$

6 Este tipo de tablas, acompañadas de los desarrollos decimales de sus términos, han sido utilizadas durante muchos años por los técnicos para seleccionar los engranajes más adecuados sin necesidad de repetir el proceso de mediación en cada caso concreto. Véase, por ejemplo, las tablas que aparecen en Merritt (1950).

7 Se trata, como puede observarse, de una generalización de las sucesiones de Farey. En general, se conoce como *sucesión de Farey* de orden *n* al conjunto de las fracciones comprendidas en el intervalo [0, 1] con denominador menor o igual que n, ordenadas de forma creciente. Esta definición puede extenderse al intervalo [0, +∞), tal y como nosotros hemos hecho con las sucesiones de Brocot por razones didácticas.

8 Véase Benito (1998).

9 Se conoce como *sucesión de Fibonacci* a la sucesión: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21;... definida del siguiente modo: $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, para todo $n \geq 2$.

Fracciones continuas

Como hemos visto, el método de Chuquet nos permite asociar a cada número real x > 0 una sucesión de aproximaciones óptimas partiendo de un intervalo inicial que contenga a *x*, sea éste [0, +∞), que convenimos en designar del modo [0/1, 1/0).

Ejemplos:

- Al número 5/3 le asociamos la sucesión de aproximaciones:

  1; 2 3/2; 5/3.

- Al número 17/21 le asignamos:

  1; 1/2; 2/3; 3/4; 4/5; 5/6; 9/11; 13/16; 17/21.

- A 5 le asignamos:

  1; 2; 3; 4; 5.

- A 1/5 le asignamos:

  1; 1/2; 1/3; 1/4; 1/5.

- A $\sqrt{6}$ le asignamos:

  1: 2; 3; 5/2; 7/3; 12/5; 17/7; 22/9; 27/11;...

Las sucesivas aproximaciones pueden obtenerse por mediación o directamente de las tablas de Brocot partiendo del valor 1/1 de B_1 y «avanzando» a derecha o izquierda según proceda en cada caso (figura 4).

Si en lugar de fijarnos en los valores alcanzados almacenamos el «proceso» seguido, obtenemos una sucesión de ceros y unos *–sucesión de signos–*

$$w(x) = \{w_i(x)\}$$

definida del siguiente modo:

$$w_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{1}, \frac{1}{0}\right) \end{cases}$$

Si después de *n* pasos *x* pertenece al intervalo [a/b, a'/b'), entonces,

$$w_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{a}{b}, \frac{a+a'}{b+b'}\right) \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{a+a'}{b+b'}, \frac{a'}{b'}\right) \end{cases}$$

La sucesión correspondiente a un número racional, a/b > 0, tendrá, a partir de un cierto término, todas sus cifras iguales a 0 y, normalmente, omitiremos su escritura.

Ejemplos

$$w\left(\frac{5}{3}\right) = 1011$$

$$w\left(\frac{17}{21}\right) = 011110001$$

$$w(5) = 11111$$

$$w\left(\frac{1}{5}\right) = 00001$$

$$w\left(\sqrt{6}\right) = 11001111001111001111\ldots =$$
$$= 11\overline{001111}$$

Si la sucesión de signos asociada a la fracción a/b > 0 es

$$w\left(\frac{a}{b}\right) = w_1\left(\frac{a}{b}\right) w_2\left(\frac{a}{b}\right) \ldots w_m\left(\frac{a}{b}\right)$$

B_0: $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{0}$

B_1: $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{0}$

B_2: $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{1}{0}$

B_3: $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{1}{0}$

B_4: $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \boxed{\frac{5}{3}} \quad \frac{2}{1} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{1}{0}$

B_5: $\frac{0}{1} \quad \boxed{\frac{1}{5}} \quad \frac{1}{4}$

Figura 4. Sucesión de aproximaciones

se tiene que a/b aparece por primera vez en la tabla de Brocot en la fila *m* y en la columna *k* donde *k* es valor de la expresión anterior tomada como número escrito en base 2.

Ejemplos

El número 5/3 aparece por primera vez en la fila m = 4 y en la columna $k = 1011_{(2} = 1 + 2 + 8 = 11$

Podemos, por último, resumir aún más la información indicando tan sólo el número de unos y de ceros que, en este orden, se van sucediendo alternativamente. Es decir, si la sucesión de signos asociada al número racional a/b > 0 es

$$w\left(\frac{a}{b}\right) = 1\ldots\ldots^{(a_0}\ldots 10\ldots\ldots^{(a_1}\ldots 0\ldots 1\ldots\ldots^{(a_n}\ldots\ldots 1$$

escribimos:

$$\frac{a}{b} = \left[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n\right]$$

expresión que coincide con el desarrollo en fracción continua[10] del número.

Ejemplos

$$\frac{5}{3} = [1;1,2]$$

$$\frac{17}{21} = [0;1,4,3,1]$$

$$5 = [5]$$

$$\frac{1}{5} = [0;4,1]$$

$$\sqrt{6} = [2;2,4,2,4] = \left[2;\overline{2,4}\right]$$

10 El desarrollo formal de la teoría de fracciones continuas puede encontrarse en cualquier libro de Teoría de Números. Por ejemplo, en los citados en la bibliografía: Cilleruelo (1992), Rey Pastor (1981), Hardy (1938) y Beskin (1987). Este último, muy intuitivo, resulta especialmente adecuado para los alumnos de enseñanzas medias.

El proceso inverso, es decir, calcular el número definido por la fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$, puede hacerse de forma recurrente

$$p_0 = a_0,\ p_1 = p_0 a_1 + 1,\ p_{n+1} = a_n p_{n-1} + p_{n-2},\ n \geq 2$$

$$q_0 = 1,\ q_1 = a_1,\ q_{n+1} = a_n q_{n-1} + q_{n-2},\ n \geq 2$$

donde las fracciones

$$\frac{p_0}{q_0} = [a_0] = \frac{a_0}{1}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

......

reciben el nombre de *reducidas* o *convergentes.*

Conclusión

Como se ha indicado en la introducción, hemos presentado el tema de forma genérica tratando tan sólo de mostrar diferentes campos de investigación didáctica relacionados con conceptos básicos de las matemáticas: número real, aproximación racional, sucesiones, límites de sucesiones, recursividad y otros, que sin ser fundamentales en la enseñanza media, permiten desarrollar el razonamiento de nuestros alumnos: fracciones continuas, sucesiones de Brocot, sucesiones de Farey, sucesión de Fibonacci...

Corresponde a cada profesor el determinar qué aspectos y con qué profundidad deben ser abordados de acuerdo con el interés y la capacidad de los alumnos a que estén dirigidos.

Manuel Benito
IES Práxedes Mateo Sagasta
Logroño
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
Pedro Sánchez Ciruelo
José Javier Escribano
IES Valle del Cidacos
Calahorra (La Rioja)

Bibliografía

BENITO, M. y J. J. ESCRIBANO (1998): *Sucesiones de Brocot*, Editorial Santos Ochoa, Logroño.

BESKIN, N. (1987): *Fracciones maravillosas,* Editorial Mir, Lecciones Populares de Matemáticas, Moscú.

BROCOT, A. (1862): *Calcul des rouages par aproximation, nouvelle méthode, par Brocot, horloger,* París.

CILLERUELO, J. y A. CÓRDOBA (1992): *La Teoría de los Números,* Mondadori España, Madrid.

DICKSON, L. (1952): *History of the Theory of Numbers,* Volúmenes I, II y III, Chelsea, New York.

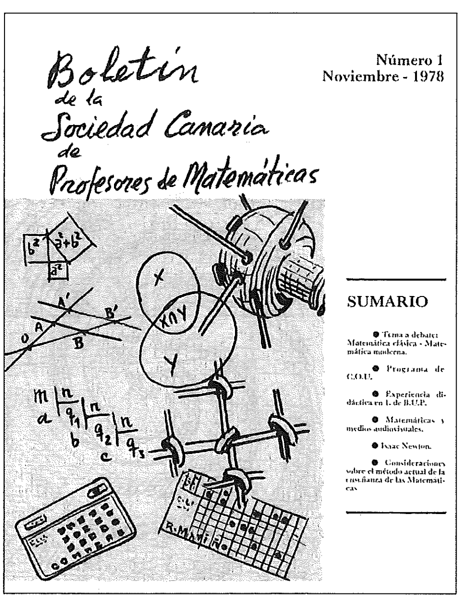
HARDY, G. H. y E. M. WRIGHT (1938): *An Introduction to the Theory of Numbers,* Clarendon Press, Oxford.

LAURIER, E. (1995): *Addition et multiplication par un entier des mots de Christoffel,* Thèse présentée devant l´ Université de Limoges, Limoges.

LUCAS (1981): *Théorie des nombres,* París.

MERRITT, H. E. (1950): *Trenes de engranajes,* Aguilar, Madrid.

REY PASTOR, J. (1981): *Elementos de Análisis Algebraico,* Biblioteca Matemática, Madrid.



Boletín de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas

Número 1

Noviembre 1978

Números

Año I. N.° 1

Abril 1981