SUMA 30
febrero 1999, pp. 27-36

Planteamiento y resolución de problemas: ¿Es relevante Polya para las matemáticas escolares del siglo XXI?*

M.A. (Ken) Clements

ARTÍCULOS

Se describen dos tareas matemáticas enriquecedoras, adecuadas para los últimos cursos de primaria y primeros de secundaria, dándose cinco características que deben tener las tareas «fértiles» de planteamiento y resolución de problemas. En la parte más teórica se discute la conveniencia de conseguir que los alumnos participen en un aprendizaje metacognitivo o reflexivo en matemáticas. Se da una breve perspectiva histórica de algunas de las corrientes a favor y en contra del planteamiento y resolución de problemas. Finalmente, se analizan hasta qué punto el planteamiento de problemas y el uso de «preguntas abiertas» tienen valores educativos especiales.

* Conferencia leída en la Associació d'Ensenyants de Matemàtiques de les Comarques Gironines, celebrada en Girona el 11 de febrero de 1998, con motivo del proyecto TIEM98 patrocinado por el Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans.

Traducción: Julio Sancho

ESTE ARTÍCULO se va haciendo más teórico a medida que va avanzando. Confío en que los profesores que lo lean intenten alguna de las actividades, descritas en la primera sección, en sus propias clases y reflexionen y discutan los principios esbozados en la sección dedicada al «diseño y selección de actividades y el papel del profesor». El resto de las secciones son más teóricas y pueden ser la base para la discusión entre profesores interesados en usar en sus clases una metodología basada en el planteamiento y la resolución de problemas.

Dos actividades matemáticas «enriquecedoras»

En esta sección del artículo se describen dos actividades relevantes curricularmente así como matemática y eductivamente «enriquecedoras». Tienen una estructura similar a muchas otras de las que aparecen en dos volúmenes de actividades matemáticas «ricas» usados por muchos profesores australianos de matemáticas (Lovitt y Clark, 1991). Ninguna de las actividades descritas requiere un equipamiento caro y ambas son adecuadas para clases normales.

¿Qué longitud tiene este trozo de cuerda?

Se reparte a los alumnos de una clase en grupos de cinco y a cada uno de los grupos se le da un trozo de cuerda de unos 10 metros y unas tijeras. Se le dice a cada grupo que tiene diez minutos para cortar un trozo de cuerda cuya longitud sea igual a la altura media del grupo. Además se les dice que, una vez pasados los diez minutos, deberán explicar al resto de la clase el método que han utilizado.

He usado esta actividad muchas veces (tanto con chicos como con adultos) y he observado que los grupos buscan la solución con entusiasmo, a menudo usando métodos bastante físicos y siempre con animadas discusiones. La sesión de «puesta en común» proporciona un foro en el que los grupos exponen lo que han hecho. También permite a todos escuchar las diversas estrategias usadas por los grupos y cada uno puede comparar la eficacia y elegancia de su estrategia con la de otros. El profesor tiene muchas oportunidades de observar las características de las diferentes estrategias sin quitar la autoría a los grupos.

La actividad está claramente relacionada con un concepto importante del currículo del fin de la primaria o el principio de la secundaria en todo el mundo, el «promedio» o media aritmética. El trabajo en grupo, que es un aspecto esencial de la estructura de esta actividad, permite a los alumnos verse envueltos en episodios que probablemente recordarán durante mucho tiempo. Invariablemente se genera una rica discusión matemática tanto durante el trabajo en los grupos como en la «puesta en común». Por ejemplo, alguno de los grupos toma la altura de uno de sus miembros como altura base y usa la cuerda para obtener la suma algebraica de las desviaciones respecto de esa altura base. La cuestión que se suscita entonces es si esa suma algebraica de desviaciones es necesario «dividirla» por 4 o por 5 antes de que la media de desviaciones se «sume» a la altura base. ¡He visto a profesores de matemáticas equivocarse en este punto!

Grupos de profesores que han llevado esta actividad a sus clases han informado de que sus alumnos aprendieron más sobre el concepto de media aritmética que lo que lo hubieran hecho mediante una metodología más tradicional. Los alumnos aprendieron también que, a menudo, hay varias formas de resolver un problema con algunos procedimientos que son más eficientes, o elegantes, que otros. Los profesores que han intentado la actividad en sus clases comentan que el tiempo que ocupa la actividad no es mayor que el que hubiera sido necesario para enseñar el concepto de «media aritmética» de forma más tradicional.

Fracciones en la recta numérica

Esta actividad es adecuada para todos los niveles de primaria. Con alumnos de nueve años es recomendable usar las fracciones 1/3 y después 2/3. Con los alumnos de 10 y 11 años se recomienda usar las fracciones 1/3 y después 2/3. Con los alumnos de 11 a 13 años se recomienda el uso de las fracciones 3/8, 3/5 y 5/6. En la siguiente descripción se usa la fracción 3/8. También se supone que hay una pizarra en el aula y un trozo de cuerda cuya longitud es al menos la anchura de la pizarra. Se necesitarán, además, unas tijeras para cortar la cuerda.

Los alumnos aprendieron también que, a menudo, hay varias formas de resolver un problema con algunos procedimientos que son más eficientes, o elegantes, que otros.

La actividad empieza cuando el profesor escribe en la pizarra el enunciado «Fracciones en la recta numérica». A continuación el profesor dibuja una línea recta que cruce la pizarra y marca el extremo izquierdo con un 0 (cero) y el extremo derecho con un 1 (uno).

Entonces el profesor pide a la clase que imagine en qué lugar de la recta se debería colocar la fracción 3/8. El profesor pide a tres alumnos que salgan a la pizarra y pongan cruces, y las marquen con sus iniciales, en donde crean que está situada 3/8. Luego el profesor propone a los alumnos que voten por la cruz que crean que está más cerca de donde realmente se sitúa 3/8 en la recta numérica. Se recogen y contabilizan los votos cuidando de que cada alumno vote sólo una vez. El profesor puede votar también.

Una vez resumidas las frecuencias de votos, en la pizarra, el profesor pide a otros dos alumnos que salgan a la pizarra y, que trabajando conjuntamente, usen el trozo de cuerda, y las tijeras si es necesario, para averiguar dónde debe localizarse a 3/8 en la recta numérica. Cuando lo hayan hecho deberán explicar al resto de la clase qué es lo que han hecho y por qué. Debe ser posible decidir cuál de las tres estimaciones originales, de la posición de 3/8, es la más correcta.

A continuación, el profesor puede explicar diferentes estrategias para obtener 3/8 usando la cuerda (por ejemplo, estrategias correspondientes a 1/8+1/8+1/8 o 1/4+1/8). El profesor puede también plantear cuestiones tales como ¿dónde cabe esperar que esté 5/8 en la recta numérica? ¿y 3/7?

Diseño y selección de actividades y el papel del profesor

Las anteriores actividades ilustran cinco principios importantes referidos al diseño y selección de actividades y al papel del profesor que trabaja en un entorno de planteamiento y resolución de problemas. Estos principios son:

1. *Una actividad debe ser interesante y adecuada al currículo.* Es evidente que las actividades de planteamiento y resolución de problemas deben ser adecuadas al currículo. Además, y en la medida de lo posible, deben estar directamente relacionadas con los mundos personales de los alumnos y ser interesantes para ellos. Una actividad debe diseñarse de forma que anime a los alumnos a participar en las discusiones que se generen. También deben considerarse los problemas abiertos y libres de metas.
2. *Una actividad debe usar el tiempo eficientemente.* El tiempo necesario para que los alumnos obtengan los resultados apetecidos para una actividad no debe ser significativamente superior del que sería necesario para obtener los mismos resultados usando otras metodologías.
3. *Los alumnos deben desarrollar sus propias estrategias en las respuestas a las actividades.* Transferir la responsabilidad (del profesor/libro de texto al alumno) de una tarea es un ingrediente de vital importancia para toda actividad rica de planteamiento y resolución de problemas. Los alumnos deben aprender que tienen «permiso» e incluso se les anima a generar y expresar a su manera las estrategias que han desarrollado y las respuestas que dan.
4. *Los profesores deben esperar estar ocupados en sus clases.* Los profesores deben tener un papel activo en las clases de planteamiento y resolución de problemas. En particular, deben estar constantemente comprobando que los métodos que adoptan los alumnos no están seriamente desenfocados. Si un grupo no usa una estrategia apropiada el profesor debe guiarles hacia formas más aceptables de pensamiento.
5. *La evaluación debe ser auténtica.* La calidad y extensión del aprendizaje de los alumnos debe ser evaluado mediante actividades auténticamente representativas.

El tiempo necesario para que los alumnos obtengan los resultados apetecidos para una actividad no debe ser significativamente superior del que sería necesario para obtener los mismos resultados usando otras metodologías.

Breve comentario a estos principios

Los dos primeros principios tienen que ver con la necesidad de diseñar y elegir actividades que sean relevantes e interesantes para los alumnos. La elección de actividades de planteamiento y resolución de problemas se suele dejar a los encargados de desarrollar el currículo y a los profesores. Uno de los principales criterios para la selección de actividades debe ser que deben ayudar a los alumnos a alcanzar los objetivos curriculares en el menor tiempo posible.

El tiempo de la clase de matemáticas está estrictamente limitado y, en consecuencia, los profesores deben limitar la inclusión de «actividades interesantes de resolución de problemas» que sólo permiten asegurar que sus alumnos «hacen» resolución de problemas. Cada actividad de planteamiento y resolución de problemas debe estar relacionada con un *contenido u objetivo curricular* específico. En efecto, cuando un profesor decide proponer una actividad determinada debe valorar si es una forma eficiente de usar el tiempo para que los alumnos alcancen un determinado objetivo curricular.

En otras palabras, el profesor de matemáticas siempre debe tener presente que está enseñando *matemáticas* y que tiene como primera responsabilidad ayudar a sus alumnos a que aprendan los contenidos y a alcanzar los objetivos específicos del currículo. Debe esperarse que los alumnos participen *activamente* en las actividades. En este contexto, la palabra activamente se entiende como actividad *mental* y no necesariamente como acción *física*. Por otra parte, hay muchas situaciones en las que es más difícil olvidar lo que el cuerpo hace. Además, es también cierto que las respuestas expresivas y plurales es más probable que unan la estructura mental de una persona con el «mundo real».

En relación al tercer principio, la *transferencia de autoría*, una característica de una buena actividad es que poco después de que un grupo la haya iniciado, sus miembros estén intrínsecamente interesados en lo que están haciendo. Se involucran en la actividad y están ansiosos de obtener una solución que pueda ser identificada como propia. En la definición de las actividades debe quedar claro que los alumnos tienen «permiso» para generar y expresar las soluciones a su manera. Una buena estrategia es que el profesor asigne a cada miembro del grupo un papel particular (p. e. líder, secretario, portavoz, cronometrador). Cada grupo debe desarrollar su propia estrategia, preparar un informe de lo que ha pasado y acordar cómo la explicará, el portavoz del grupo, a toda la clase. El profesor tiene la difícil tarea de aceptar cada estrategia como meritoria, pero, de algún modo, ser particularmente entusiasta con las estrategias y/o soluciones muy eficientes o elegantes.

El cuarto principio se refiere a la *necesidad de que el profesor esté ocupado.* Es necesario que el profesor esté disponible para responder a las preguntas hechas por los grupos, pero debe ir siempre con cuidado para no indicarles que una estrategia es preferible a otra. Además, debe estar siempre alerta con los grupos que no desarrollan una estrategia o que desarrollan estrategias totalmente inadecuadas. Este principio proporciona una respuesta a los que piensan que los profesores en las clases de planteamiento y resolución de problemas simplemente se sientan y animan a los alumnos a «construir matemáticas». Lo cierto es que los profesores tienen la difícil tarea de animar a los grupos a que desarrollen sus propios conocimientos, métodos y conexiones mientras que a la vez se aseguran de que no apliquen estrategias erróneas. En el transcurso de una actividad el profesor debe comprobar que las estrategias y métodos desarrollados en los grupos no están seriamente equivocados. Si, en efecto, detecta estrategias defectuosas es su responsabilidad guiar a los alumnos hacia una dirección más adecuada.

Además, para mantener un control sobre la calidad de las estrategias de los grupos, el profesor debe (a) introducir y clarificar las actividades; (b) registrar los nombres de los alumnos de cada grupo y moverse entre los grupos, anotando contribuciones significativas individuales (en una lista de control); (c) dar a cada grupo tiempo para desarrollar su estrategia y preparar el informe sobre sus actividades que deberá comunicar a toda la clase; (d) conducir las sesiones de puesta en común con toda la clase, para sintetizar las diferentes ideas de los grupos e individuos, subrayando los aspectos importantes y sugiriendo extensiones; y (e) asegurarse de que tras la actividad hay oportunidades para revisar los conceptos clave, las destrezas y aplicaciones.

El quinto principio reconoce que el aprendizaje a través del planteamiento y resolución de problemas debe ser valorado mediante actividades de evaluación que admiten valoración. Es difícil discutir el tópico de que, en las matemáticas escolares, los alumnos valoran lo que es evaluado y que los profesores evalúan lo que valoran. La evaluación del aprendizaje individual debe basarse en su rendimiento efectivo en la actividad y debe relacionarse directamente con contenidos y objetivos específicos.

Por consiguiente, así como las actividades deben admitir respuestas expresivas diversas, también lo deben hacer los medios con los que son evaluados los aprendizajes de los alumnos. Además, como las actividades efectivas de planteamiento y resolución de problemas hacen que los alumnos reflexionen sobre sus estrategias («metaconocimiento») y consideren la calidad de las mismas desde una perspectiva global, cualquier evaluación basada tan sólo en exámenes escritos cuyo contenido sean, sobre todo, preguntas de respuesta corta (incluyendo las de elección múltiple) es improbable que sea genuinamente auténtica. Esto es debido a que estas cuestiones tienden a ser muy concretas y raramente generan reflexión sobre aspectos como la eficacia o elegancia de las estrategias.

[El profesor] debe estar siempre alerta con los grupos que no desarrollan una estrategia o que desarrollan estrategias totalmente inadecuadas. Este principio proporciona una respuesta a los que piensan que los profesores en las clases de planteamiento y resolución de problemas simplemente se sientan y animan a los alumnos a «construir matemáticas».

El resto de este artículo trata cuestiones teóricas que se deben considerar por todos aquellos que estén interesados en impulsar enfoques basados en el planteamiento y resolución de problemas en la educación matemática.

Metacognición y aprendizaje reflexivo

El reconocimiento progresivo entre los educadores matemáticos de la importancia que tiene la habilidad para revisar los propios procesos de pensamiento en el planteamiento y resolución de problemas les obligó a hacerse preguntas sobre lo que ocurre en la mente de los chicos cuando tratan de resolver problemas. Flavell (1987) sugiere que el desarrollo de la metacognición es más fecundo cuando los alumnos desarrollan un sentido de sí mismos como agentes cognitivos y se dan cuenta de que ellos son el centro y la causa de la actividad cognitiva.

De acuerdo con Flavell (1987) el desarrollo metacognitivo puede estimularse con ciertas experiencias, una de las cuales es la práctica. En otras palabras, cuando los alumnos están inmersos en situaciones en las que se usa o estimula el uso de estrategias metacognitivas es más probable que sean capaces de reflexionar sobre la calidad de su propio aprendizaje, sobre lo que saben y lo que podrían llegar a saber. Flavell defiende que involucrar a los alumnos en actividades de planteamiento y resolución de problemas en los que conscientemente reflexionen sobre la estructura de problemas que están creando o tratando de resolver y en los que conscientemente intenten analizar sus propios procesos de resolución es probable que mejore su capacidad para crear y resolver problemas en el futuro. Cuando están implicados cognitivamente en ese tipo de actividades, deciden qué información deben recordar de su memoria y qué posibles relaciones cognitivas pueden ayudarles. También reflexionan sobre la necesidad de nueva información y cómo debe obtenerse. Se formulan y comprueban conjeturas y se exploran vías de resolución de problemas.

Se están empezando a elaborar explicaciones más globales sobre los procesos de planteamiento y resolución de problemas. Por ejemplo, ahora se reconoce que los procesos metacognitivos están influenciados y complementados por factores del lenguaje, del medio social y cultural del aprendizaje y por el uso de imágenes. En los últimos años muchos profesores han animado a sus alumnos a llevar un control de sus procesos de planteamiento y resolución de problemas mediante la anotación regular en diarios. Se basan en que la práctica de hacer anotaciones regulares en el diario exige una reflexión general que puede tener profundos efectos no sólo sobre la comprensión de los alumnos de importantes conceptos matemáticos sino también en su visión de la naturaleza de las matemáticas (ver Mildren, Ellerton y Stephen, 1990; Waywood, 1993). En efecto, durante la segunda mitad de los años ochenta en algunas partes del mundo se ha hecho célebre en la educación matemática el movimiento «escribir en matemáticas» (ver capítulo 5 de Ellerton y Clemens, 1991).

No es fácil, sin embargo, enseñar a los alumnos a expresar por escrito sus reflexiones sobre cómo y por qué han empleado ciertos métodos y estrategias. Se ha intentado implementar programas a gran escala de metacognición en la escuela (uno de los más famosos es el Peel Project que ahora se está aplicando en muchas escuelas de Australia (ver Mitchel y Northfield, 1995). Por lo que se desprende de estos proyectos, se puede asegurar que, sin duda, se puede enseñar a los chicos a reflexionar sobre sus propios procesos de pensamiento y que, si se hace, esto puede ayudar al aprendizaje de formas educativamente importantes.

Génesis de un pensamiento matemático propio en los alumnos en las clases de matemáticas: perspectivas históricas

El fracaso tanto de las matemáticas modernas en los años sesenta (Moon, 1986) como de la vuelta a los fundamentos en los setenta (Clemens y Ellerton, 1996), para generar entornos de calidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, provocó que educadores de todo el mundo considerasen qué debía hacerse. ¿Cómo podría cambiarse el currículo de matemáticas para que estuviera más conectado con la vida diaria y proporcionase mejor preparación a los que desearan continuar posteriores estudios matemáticos? En 1980, en los Estados Unidos, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) afirmó categoricamente en la *An Agenda For Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s* que el mayor cambio al que debían hacer frente las matemáticas escolares era hacer de la resolución de problemas el foco principal de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 1980). En el Reino Unido el *Informe Cockcroft* seguía líneas similares (Cockcroft, 1982).

...la riqueza de los procesos de resolución de problemas en el pensamiento de los chicos levantaba dudas sobre si la inferencia estadística estándar y los paradigmas de la investigación en desarrollo psicológico podrían ser de alguna utilidad en la investigación sobre resolución de problemas.

Tales son las fuerzas del colonialismo que *An Agenda For Action* y el Informe Cockcroft precipitaron en todo el mundo una gran oleada de interés por la resolución de problemas en las matemáticas escolares (Clemens y Ellerton, 1996). Sin embargo, enseguida se hizo evidente que era difícil para los responsables del currículo, profesores e investigadores definir con exactitud en qué constiste un problema matemático o precisar cómo podría diseñarse, implementarse y evaluarse un currículo de matemáticas basado en la resolución de problemas.

Se han hecho numerosas referencias, por los entusiastas de la resolución de problemas, a la heurística genérica, tal como la expuso el matemático George Polya (1973). Sin embargo, los investigadores educativos y profesores encontraron difícil decidir hasta qué punto era factible enseñar las destrezas generales de resolución de problemas en las clases de matemáticas. Además, la riqueza de los procesos de resolución de problemas en el pensamiento de los chicos levantaba dudas sobre si la inferencia estadística estándar y los paradigmas de la investigación en desarrollo psicológico podrían ser de alguna utilidad en la investigación sobre resolución de problemas.

Cuestionamiento de las virtudes de la metodología basada en el planteamiento y resolución de problemas

En los años ochenta y noventa los científicos cognitivos pusieron en duda la confianza de algunos educadores en sus intentos de que los alumnos aprendieran y aplicaran un conjunto de heurísticos generales. Cuando los educadores discuten sobre la importancia de intentar enseñar matemáticas a partir del planteamiento y resolución de problemas es normal oir afirmaciones como «se aprende a resolver problemas resolviendo problemas». Sin embargo, John Sweller (1992) sostiene enérgicamente que los resultados de la investigación no dan soporte a este punto de vista. De acuerdo con Sweller (1992) tan sólo con la práctica del planteamiento y resolución de problemas uno no se hace mejor planteador y resolutor de problemas. Sweller no encontró, ni en la literatura ni en su propia investigación, apoyo para la afirmación de que la enseñanza de heurísticos generales puede ayudar a los chicos a resolver problemas desconocidos.

Sweller (1992) aconsejó a los profesores de matemáticas que no animasen a sus alumnos a seguir los cuatro pasos de Polya (1973) para resolver problemas: (a) entender el problema; (b) elaborar un plan; (c) ejecutar el plan; y (d) examinar la solución obtenidas. Defiende que el rendimiento de los alumnos en resolución de problemas tienemás posibilidades de mejorar si adquieren un gran número de pequeñas y muy específicas estrategias de resolución de problemas asociadas con dominios determinados del conocimiento. Así, por ejemplo, si se enfrenta a un alumno con la actividad «resolver la siguiente ecuación respecto de *x*», los expertos inmediatamente reconocen que lo primero que deben hacer es que denominador del lado izquierdo pase a multiplicar al otro lado. Por el contrario, los novatos necesitan usar una estrategia de significado final para buscar la solución (Larkin, McDermott, Simon y Simon, 1980).

La persona que reconoce inmediatamente el esquema algebraico que hay detrás sabe que la primera cosa que se debe hacer es «multiplicar ambos miembros por *c*». No necesita derrochar tiempo ni esfuerzo cognitivo. Si esta ecuación, u otra parecida, aparece al tratar de resolver un problema cualquiera, entonces no aparecerá ninguna tensión cognitiva en esa persona ya que sabrá qué hacer y podrá dirigir su atención a otros aspectos del problema. Por tanto, si los alumnos no saben cómo transformar ecuaciones, como la del ejemplo anterior, se les debe enseñar a hacerlo. Y según Sweller (1992) una de las formas más eficaces de hacerlo es por el profesor o el autor del libro de texto, presentando ejemplos detallados. Este punto de vista tiene cierto soporte en la literatura sobre la práctica de la enseñanza (Grows, Cooney y Jones, 1988).

Los seis mitos de Sweller

Como se ha dicho más arriba, Sweller (1992) argumenta que la literatura de ciencia cognitiva no apoya la afirmación de que la metodología basada en el planteamiento y resolución de problemas deba usarse en las matemáticas escolares. En otro artículo Sweller (1991) mantiene que hay al menos seis «mitos modernos sobre cognición e instrucción». Presentamos estos «mitos», con las palabras de Sweller, sin más comentarios:

1. La explosión del conocimiento es tal que es imposible enseñar a los alumnos todo lo que necesitan saber ya que la capacidad cognitiva humana es bastante limitada (p. 72).
2. Dado que la cantidad de conocimientos que somos capaces de asimilar está bastante limitada (ver Mito 1) nuestro sistema educativo debe enfatizar no el conocimiento sino más bien el pensamiento y la resolución de problemas. Desde este punto de vista, no debemos agobiar a nuestros alumnos con conocimientos que acabarán pasando de moda o siendo irrelevantes (p. 73).
3. Muchos de los problemas que presentamos a los alumnos son, en realidad, ejercicios rutinarios. Debemos enseñarles cómo resolver problemas reales (p. 75).
4. Debemos enseñar heurística (p. 75).
5. La práctica en la resolución de muchos problemas convencionales es una forma eficaz de ganar destreza en resolución de problemas (p. 76).
6. Los alumnos fracasan al transferir la experiencia adquirida en una actividad de resolución de problemas a otra, ya que carecen de estrategias generales en resolución de problemas (p. 79).

...Sweller (1992) argumenta que la literatura de ciencia cognitiva no apoya la afirmación de que la metodología basada en el planteamiento y resolución de problemas deba usarse en las matemáticas escolares.

Argumentos contra el punto de vista de Sweller

Muchos educadores matemáticos no están de acuerdo con todo lo que Sweller afirma sobre las implicaciones de la investigación en ciencia cognitiva para las matemáticas escolares. Aunque Schoenfeld (1992) no se refiere directamente a los escritos de Sweller deja claro que no acepta totalmente el punto de vista de la ciencia cognitiva. Argumenta que cuando un gran maestro de ajedrez se enfrenta a oponentes de habilidad comparable no sólo cuenta con su compendio de posiciones estándar del ajedrez y las mejores estrategias asociadas, sino que también pone en juego otras estrategias significativas. De forma similar cuando los matemáticos se enfrentan con problemas no rutinarios no sólo usan los posibles conocimientos relacionados sino que también emplean conscientemente un amplia variedad de estrategias. De acuerdo con Schoenfeld (1992):

La sugerencia directa de que la enseñanza matemática debe focalizarse en los esquemas de problemas no acaba de ser bien recibida en la comunidad de educación matemática por una buena razón... Los trabajos sobre procesamiento de la información tienden a centrarse sobre la ejecución y no necesariamente en la comprensión básica que le da soporte. Por lo tanto una confianza en los esquemas en su forma más cruda –«cuando veas estas características en un problema usa este procedimiento»– puede producir manifestaciones superficiales de comportamiento competente. Sin embargo, si la práctica no está asentada en la comprensión de los principios que conducen al procedimiento, puede ser propensa al error y al olvido rápido. Por ello deberían ir con precaución muchos educadores cuando apliquen los hallazgos de la investigación sobre la teoría de esquemas (p. 352).

Este argumento merece atención. Así, por ejemplo, los alumnos de análisis matemático elemental que deben calcular las primitivas de varias funciones dadas tienen ventaja si, inmediatamente, saben que hay unas categorías básicas de funciones y que las primitivas de las funciones de la misma categoría puede abordarse de la misma forma y las de categorías diferentes de formas distintas. Si los estudiantes son capaces de asociar una función dada con una de las categorías conocidas y después recordar el método para buscar su primitiva, entonces probablemente la encontrarán sin demasiada dificultad. Pero esto no implica que sepan más acerca de la naturaleza de las primitivas y de cómo se relacionan la derivada y la integral a través del teorema fundamental del cálculo. Muchos educadores matemáticos se lamentan de que demasiados profesores se han conformado con enseñar a los alumnos «destrezas». Opinan que el siguiente paso es idear estrategias de enseñanza en las que los alumnos planteen y resuelvan problemas y reflexionen sobre lo que están haciendo y han hecho. Los educadores matemáticos tienden a asegurar que si realizan estas actividades más expresivas los alumnos serán capaces de situar las destrezas dentro de los contextos apropiados.

...estoy de acuerdo con el punto de vista de los educadores matemáticos, resumido por Schoenfeld (1992), según el cual se puede aprender a plantear y resolver problemas planteando y resolviendo problemas, siempre que los problemas sean educativamente «enriquecedores». Podemos definir una actividad «enriquecedora» como la que ayuda a los alumnos a construir, sobre las estructuras cognitivas que ya tienen, mediante la unión de proposiciones, imágenes, destrezas, clasificaciones de tipos de problemas y episodios almacenados en su memoria...

Sin embargo, el argumento del último párrafo resulta insuficiente para invalidar los argumentos a favor de los «esquemas» dados por los científicos cognitivos como Sweller. Una conclusión puede ser que las matemáticas escolares no sólo tienen que proporcionar a los alumnos abundante práctica en el reconocimiento de las similitudes y diferencias estructurales en las preguntas, sino también a aprender a enfrentarse con problemas más difíciles, en los que no son obvios los esquemas de ayuda que se deben seguir. Esto quiere decir que los profesores deben intentar ayudar a sus alumnos a plantear e investigar un rango de problemas aparentemente similares pero que, de hecho, tienen diferencias estructurales y requieren diferentes estrategias. Este punto de vista tiene un amplio soporte en la literatura de educación matemática (Clemens y Ellerton, 1991; Krutetskii, 1976).

A pesar de la advertencia de Sweller, estoy de acuerdo con el punto de vista de los educadores matemáticos, resumido por Schoenfeld (1992), según el cual se puede aprender a plantear y resolver problemas planteando y resolviendo problemas, siempre que los problemas sean educativamente «enriquecedores». Podemos definir una actividad «enriquecedora» como la que ayuda a los alumnos a construir, sobre las estructuras cognitivas que ya tienen, mediante la unión de proposiciones, imágenes, destrezas, clasificaciones de tipos de problemas y episodios almacenados en su memoria (Clemens y Del Campo, 1989; Gagne y White, 1978; Golden, 1987). Es importante que las actividades sean tales que los alumnos no sólo puedan generar sus propias estrategias de resolución sino que también sepan compararlas con otras estrategias que reconozcan como eficientes y elegantes.

Incluso Sweller (1992) acepta que la manera de presentar una actividad puede ayudar a los alumnos a resolverla. Defiende el uso de lo que llama «problemas libres de metas» y proporciona como ejemplo una actividad geométrica en la que se les pide a los alumnos que calculen los valores de tantos ángulos como puedan en vez de un único ángulo en particular (pp. 51-53). Pretende que la investigación en los dominios de la geometría, trigonometría y cinemática –mucha de la cual ha sido elaborada por él mismo y sus colegas–, ha mostrado que es posible «favorecer el aprendizaje con los problemas libres de metas» (p. 53).

Algo que la incipiente literatura de investigación, sobre patrones de discurso en clase de matemáticas, deja claro es que los efectos de la clase no sólo influyen en lo que aprenden los alumnos sino también en su visión de la naturaleza de las matemáticas. Así, por ejemplo, Bickmore-Brand (1997) en una reciente tesis doctoral, da cuenta de una investigación sobre los efectos de dos metodologías diferentes para enseñar matemáticas en la última etapa de primaria. Se estudió el caso de dos profesores con diferentes concepciones de la enseñanza de las matemáticas. Uno de ellos centraba su enseñanza en el aprendiz mientras que el otro lo hacía en los contenidos. Mediante observaciones muy detalladas de clases y entrevistas, realizadas durante un periodo de doce meses, se puso de manifiesto que los alumnos de las dos clases desarrollaron diferentes percepciones no sólo sobre las matemáticas que se les habían enseñado sino también del papel que puede jugar en sus vidas.

Un comentario sobre plenteamiento de problemas y preguntas abiertas

Hace más de cincuenta años, Einstein e Insfield (1938) escribieron que «la formulación de un problema es a menudo más esencial que su solución, que puede ser simplemente una cuestión de destreza matemática o experimental» (p. 92). Sostenían que la actividad de producir nuevas cuestiones, nuevas posibilidades, o volver a ver viejas cuestiones desde un nuevo punto de vista «requiere imaginación creativa y marca un avance real en la ciencia» (p. 92) En la misma línea, el «último» Jerome Bruner (1996) ha mantenido que el arte de formular cuestiones sugerentes es sin duda tan difícil como el de dar respuestas correctas.

En el nivel escolar muchos profesores de matemáticas saben que con frecuencia es mucho más difícil para los alumnos proponer incluso cuestiones mundanas que resolverlas. De igual manera, es mucho más difícil para ellos responder de forma múltiple a preguntas abiertas que buscar soluciones para las cuestiones estándar de los libros de texto.

De acuerdo con Ellerton y Clarkson (1996), la dificultad que los adultos experimentan en el planteamiento de problemas y con las preguntas abiertas probablemente es un legado de su época escolar, en particular, de la educación matemática que recibieron en la escuela. Los profesores de matemáticas raramente piden a sus alumnos que propongan problemas y por ello no debe sorprendernos que el planteamiento de problemas que precisen matemáticas significativas (más allá de los simples contextos de compraventa) sea algo que la gente no haya aprendido en las matemáticas escolares (Sullivan, 1995). Respecto a las preguntas abiertas, Ellerton y Clements (1996) sostienen que no son familiares y, por lo tanto, asustan a muchos alumnos. Además, apuntan que cuando se quiere proponer una cuestión no trivial o enfrentarles a preguntas abiertas, los alumnos necesitan localizar la cuestión en sus estructuras cognitivas y reconocer su relación con otros aspectos de las matemáticas.

Por ejemplo, para la pregunta abierta «¿Si un rectángulo tiene un perímetro de 30 unidades cuál puede ser su área?» los alumnos que buscan soluciones múltiples probablemente necesiten responder a cuestiones como «¿qué longitudes pueden tener los lados del rectángulo?», «¿puede el área ser diferente si el perímetro es el mismo?», «¿qué ocurre con el área de un rectángulo largo y fino?», «¿cuál es el área máxima posible?», «¿vuál es el área más pequeña posible?», «¿un cuadrado es también un rectángulo?». Estas cuestiones se les ocurren casi automáticamente a los profesores de matemáticas experimentados, pero para muchos alumnos, que aún están afianzando los conceptos de perímetro y área y las relaciones entre ellos, no son algo natural. Es más, las respuestas múltiples no pueden obtenerse salvo que al menos se propongan algunas de las cuestiones anteriores (u otras semejantes). Y, es precisamente esta afirmación la que revela el nexo que hay entre estos dos tópicos importantes: «plantear problemas» y «preguntas abiertas».

Una de las razones por las que el planteamiento de problemas recibe bastante menos atención que la resolución de problemas, entre los profesores y los educadores matemáticos, es porque es un tema sobre el que no se ha pensado a fondo. Todo el mundo está de acuerdo en que «el planteamiento de problemas es importante». Pero la realidad es que la cultura tradicional asociada con las clases de matemáticas tiene, como componente integral, las cuestiones cerradas que pueden ser resueltas rápidamente y que los alumnos pueden tomar como modelos del tipo de preguntas que es posible que aparezcan en el próximo examen escrito. Stoyanova (1977), en una reciente y rompedora tesis doctoral sobre el planteamiento de problemas en las matemáticas escolares, ha investigado el potencial que tiene el planteamiento de problemas como medio para desarrollar en los alumnos la comprensión de las matemáticas y los procedimientos de resolución de problemas. Argumenta que la incorporación de aspectos relacionados con el planteamiento de problemas en el currículo de matemáticas ha sido obstruida por la ausencia de un marco que ligue la resolución de problemas, el planteamiento de problemas y los currículos de

Se estudió el caso de dos profesores con diferentes concepciones de la enseñanza de las matemáticas. [...] se puso de manifiesto que los alumnos de las dos clases desarrollaron diferentes percepciones no sólo sobre las matemáticas que se les habían enseñado sino también del papel que puede jugar en sus vidas.

matemáticas. Elaboró un programa apropiado adaptando y extendiendo el contenido del programa nacional destinado a trabajar con alumnos con capacidad matemática.

Stonyanova propuso que toda situación de planteamiento de problemas puede clasificarse como libre, semiestructurada o estructurada (Stoyanova y Ellerton, 1996). Una situación de planteamiento de problemas es *libre* cuando se pide a los alumnos que generen un problema a partir de una situación dada, natural o inventada. Así, por ejemplo, Ellerton (1986) pidió a sus alumnos que escribieran una carta a un amigo, que ha estado fuera las últimas tres semanas, y desea saber qué ha pasado en las clases de matemáticas durante ese tiempo. Como parte de sus cartas, se les pide a los alumnos que pongan preguntas como las que se han formulado en clase así como las correspondientes soluciones elaboradas.

Una situación de planteamiento de problemas es *semiestructurada* cuando, una vez explicado un concepto matemático particular, se invita a los alumnos a formular un problema que requiera el uso de dicho concepto. Así por ejemplo, se les puede pedir a alumnos de 13 años: «formular un problema en el que los ángulos rectos sean importantes». Cuestiones tales como «formula tantos problemas como puedas en los que se deba hacer el siguiente cálculo: $3 \times 25 + 15 \div 5 - 4$», también pueden considerarse semiestructuradas (para alumnos de 10 a 12 años de edad).

Una situación de planteamiento de problemas es *estructurada* cuando las actividades de planteamiento de problemas están basadas en un problema particular. Así, por ejemplo, se puede pedir a alumnos de 11 años que calculen el valor de la resta 940 – 586 y, una vez hecho, trabajen en grupos para encontrar tantas restas como puedan que también tengan 354 como resultado. Stonyanova y Ellerton (1996) dan el ejemplo siguiente: «La última noche hubo una fiesta y el timbre del anfitrión sonó 10 veces. La primera vez que sonó el timbre sólo llegó un invitado. Cada vez que el timbre suena después, llegan tres invitados más de los que habían llegado en el anterior timbrazo». Se pide a los alumnos que formulen tantas preguntas como puedan, que usen esta historia como un marco básico. También se les pide que ordenen las preguntas en el orden adecuado.

¿Cuál es el objeto de aprender conocimientos, conceptos y destrezas si uno no puede obtener sin dificultad la combinación necesaria para resolver un problema de la vida real? Es más, ¿cuál es el objeto de tener conocimientos, destrezas y conceptos almacenados en la memoria si uno no puede hacer preguntas en las que se haga uso creativo de lo que tiene almacenado en la memoria?

Un comentario final

Algunos educadores podrían, al leer la sección anterior, estar preocupados porque los estudiantes usen demasiado tiempo explorando la estructura de las cuestiones sin adquirir el conocimiento y destrezas matemáticas que deberían conocer para sobrevivir con dignidad en la vida diaria. Esta es una de las preocupaciones de personas como John Sweller, que mantienen que a no ser que los alumnos aprendan las destrezas y conceptos básicos, hasta el punto de que no ocupen una cantidad significativa de espacio cognitivo en su memoria, siempre tendrán que esforzarse para resolver problemas. Sin embargo, hay muchas investigaciones –a menudo llamadas investigaciones Newman, puesto que usan un protocolo de entrevista desarrollado por M. A. Newman– que han demostrado que, con frecuencia, alumnos que tienen las destrezas necesarias para pasar exámenes escritos de matemáticas, no pueden identificar qué secuencia de operaciones es necesaria para resolver problemas en contextos de la vida real (Clements y Ellerton, 1996; Ellerton y Clarkson, 1996).

¿Cuál es el objeto de aprender conocimientos, conceptos y destrezas si uno no puede obtener sin dificultad la combinación necesaria para resolver un problema de la vida real? Es más, ¿cuál es el objeto de tener conocimientos, destrezas y conceptos almacenados en la memoria si uno no puede hacer preguntas en las que se haga uso creativo de lo que tiene almacenado en la memoria?

Aspectos como los tratados en este artículo deben estimular a los profesores de matemáticas a continuar el desarrollo de sus destrezas para enseñar matemáticas con el enfoque del planteamiento y resolución de problemas.

Bibliografía

BICKMORE-BRAND, J. (1997): *Teachers of mathematics teach mathematics differently: A case study of two teachers*, PhD thesis, Edith Cowan University, Pert (Australia).

BRUNER, J. (1996): *The culture of education*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

CLEMENTS, M. A. y G. DEL CAMPO (1989): «Linking verbal knowledge, visual images, and episodes for mathematical learning», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 25-34.

CLEMENTS, M. A. y N. F. ELLERTON (1991): *Polya, Krutetskii, and the restaurant problem*, Deakin University, Geelong, Victoria.

CLEMENTS, M. A. y N. F. ELLERTON (1996): *Mathematics education research: Past, present and future*, UNESCO, Bangkok.

COCKCROFT, W. H. (Chairman) (1982): *Mathematics counts*, HMSO, London.

EINSTEIN, A. y L. INFIELD (1938): *The evolution of physics*, Simon and Schuster, New York.

ELLERTON, N. F. (1986): «Children's made-up problems-A new perspective on talented mathematicians», *Educational Studies in Mathematics*, 17, 261-271.

ELLERTON, N. F. y P. C. CLARKSON (1996): «Language factors in matllematics teaching and learning», en A. J. BISHOP, K. CLEMENTS, C. KEITEL, J. KILPATRICK, y C. LABORDE (Eds.), *International handbook of mathematics education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 987-1033.

ELLERTON, N. F. y M. A. CLEMENTS (1991): *Language in mathematics: A review of language factors in mathematics learning*, Deakin Univelsity, Geelong, Victoria.

ELLERTON, N. F. y M. A. CLEMENTS (1996): «Researching language factors in mathematics education: The Australasian contribution», en B. ATWEH, K. OWENS, y P. SULLIVAN (Eds.), *Research in mathematics education in Australasia 1992-1995*, Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney, 191-235.

FLAVELL, J. (1987): «Speculations about the nature and development of metacognition», en F. E. WEINERT y R. H. Kluwe (Eds.), *Metacognition, motivation, and understanding*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 21-29.

GAGNE, R. M. y R. T. WHITE (1978): «Memory structures and learning outcomes», *Review of Educational Research*, 48(2), 187-222.

GOLDIN, G. (1987): «Cognitive representational systems for mathematical problem solving», en C. JANVIER (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, Erlbaum, Hillsdale, 125-145.

GROUWS, D. A., T. J. COONEY y D. JONES (Eds.) (1988): *Perspectives on research on effective mathematics teaching*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ.

KRUTETSKII, V. (1976): *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, (Translated by J. TELLER, edited by J. KILPATRICK), University of Chicago Press, Chicago.

LARKIN, J., J. MCDERMOTT, D. SIMON y H. SIMON (1988): «Models of competence in solving physics problems», *Cognitive Science*, 4, 317-348.

LOVITT, C., y D. Clarke (1991): *Mathematics Curriculum Teaching Program activity banks* (2 volumes), Curriculum Corporation, Carlton, Victoria.

MILDREN, J., N. F. ELLERTON y M. STEPHENS (1990): «Children's mathematical writing –A window into cognition, en M. A. CLEMENTS (Ed.), *Whither mathematics*, Mathematical Association of Victoria, Melbourne, 356-363.

MITCHELL, I. J., y J. R. NORTHFIELD (Eds.) (1995): «Dissemination of PEEL to other schools», en J. R. BAIRD y J. R. NORTHFIELD (Eds.), *Learning from the PEEL experience*, Monash University, Melboume, 138-147.

MOON, B. (1976): THE "NEW MATHS" CURRICULUM CONTROVERSY, Falmer Press, Barcombe, East Sussex.

NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) (1980): *An agenda for action: Recomendations for school mathematics of the 1980s*, NCTM, Reston, VA.

Ken Clements
Sultan Hassanal Bolkiah Institute of Education
Universiti Brunei Darussalam
Bandar Seri Begawan, 2028
Negara Brunei Darussalam
e-mail: clements@ubd.edu.bn

POLYA, G. (1973): *How to solve it. A New aspect of mathematical method*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

SAXE, G. B. (1988): «Linking language with mathematics achievement: Problems and prospects», en R. COCKING y J. P. MESTRE (Eds.), *Linguistic and cultural influences on learning mathematics*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ, 47-62.

SCHOENFELD, A. (1992): «Learning to think mathematically: Metacognition and sense making in mathematics», D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*, Macmillan, New York, 334-370.

STOYANOVA, E. (1997): *Extending and exploring students' problem solving via prob/em posing: A study of Years 8 and 9 students involved in Mathematics Challenge and Enrichment Stages of Eluer Enrichment Program for Young Australians*, PhD thesis, Edith Cowall University, Perth (Australia).

STOYANOVA, E. y N. ELLERTON (1996): «A framework for research into students' problem posing in school mathematics», en P. C. CLARKSON (Ed.), *Technology in mathematics education*, Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne, 518-525.

SULLIVAN, P. (1995): «Context-specific, open-ended questions: A problem-solving approach to teaching and learning mathematics», en J. WAKEFIELD y L. VELARDI (Eds.), *Celebrating mathematics learning*, Mathematical Association of Victoria, Melbourne, 176-180.

SWELLER, J. (1991): «Some modern myths of cognition and instruction», en J. B. BRIGGS (Ed.), *Teaching for learning: The view from cognitive psychology*, Australian Council for Educational Research, Melbourne, 71-83.

SWELLER, J. (1992): «Cognitive theories and their implications for mathematics instruction», en G. LEDER (Ed.), *Assessment and learning of mathematics*, Australian Council for Educational Research, Hawthorn, Victoria, 46-62.

WAYWOOD. A. (1993): «A phenomenology of report writing: From "I am" to "I think" through writing», en M. STEPHENS, A. WAYWOOD, D. J. CLARKE, y J. IZARD (Eds.), *Communicating mathematics: Perspectives from classroom practice and current research*, Australian Council for Educational Research, Melbourne, 153-163.