SUMA 30
febrero 1999, pp. 5-25

El Cours d'Analyse *de Cauchy*

F. Javier Pérez-Fernández
Antonio Aizpuru

ARTÍCULOS

En este artículo presentamos un estudio contextualizado del *Cours d'Analyse* de Cauchy, analizando su significado e importancia. Prestamos especial atención al grado de elaboración teórica de límites, continuidad, series, números reales y funciones y series complejas, relacionando las aportaciones de Cauchy con el nivel conceptual anterior a esta obra.

* Nuestro agradecimiento al Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, por las facilidades proporcionadas para la consulta de los originales señalados en las referencias con (ROA).

EN JUNIO DE 1821 se publicaba el libro *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. 1er Partie. Analyse Algebrique* de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), una obra de fundamental trascendencia en la construcción del análisis moderno. Cauchy usa el concepto de límite como la base sobre la que construirá todo el análisis: continuidad de funciones, convergencia de series, derivada e integral; creando un sistema lógicamente fundamentado, fuertemente interconectado, dirigido por el rigor.

Ya que nuestro propósito es analizar el *Cours d'Analyse*, nos centraremos en los aspectos estrictamente necesarios para entender las aportaciones, la originalidad, la importancia y la influencia en el desarrollo posterior del análisis, de esta obra.

En la sección que sigue a esta introducción presentamos una vista panorámica del *Cours* indicando someramente los temas principales que aparecen en cada Capítulo y Apéndice (titulado por él como Notas), con la intención de proporcionar, aunque sólo sea muy por encima, una imagen de conjunto de la obra.

Las cinco secciones siguientes constituyen la parte principal de este trabajo, en ellas abordaremos lo que a nuestro juicio, en uno u otro sentido, son las contribuciones más importantes de la misma. Dedicaremos una sección a cada uno de los siguientes temas: límite, continuidad, la teoría de series, los números reales y, finalmente, las funciones y series complejas. En cada una de ellas desbrozaremos, dentro de los límites que tenemos respecto del número de páginas de este trabajo, las aportaciones de Cauchy.

Finalizaremos con una sección de conclusiones.

En el tratamiento de los diversos temas seremos escrupulosamente fieles a los argumentos de Cauchy, aunque en algún caso usemos, en aras de la simplicidad, la notación actual. No obstante, las reproducciones textuales del original las distinguiremos entrecomillándolas o bien en cuerpo de letra más pequeño. Cuando en alguna de estas citas sea necesaria alguna aclaración, a algún término de la misma, aparecerá ésta entre corchetes.

Cuando una cita no haga referencia directa a un determinado autor y obra, se entenderá que se refiere al *Cours* de Cauchy, por lo que para su exacta determinación nos basta indicar, entre paréntesis, el número de la página del original, que siempre estará referida a la primera edición.

Hechas estas aclaraciones, seguidamente vamos a efectuar algunas precisiones de tipo preliminar, sobre el trabajo que nos ocupa.

En la introducción (págs. ij a v) dice

> En cuanto a los métodos, he buscado darles todo el rigor que se exige en geometría, sin recurrir para nada a las razones provenientes de la generalización del álgebra. Las razones de esta índole, aunque bastante comúnmente admitidas, sobre todo en el paso de las series convergentes a las divergentes, y de las cantidades reales a las expresiones imaginarias, no pueden ser consideradas, eso me parece, más que como inducciones propias para hacer presentir algunas veces la verdad, pero que están poco de acuerdo con la exactitud tan alabada de las ciencias matemáticas. Se debe así mismo observar que ellas tienden a hacer atribuir a las fórmulas algebraicas una extensión indefinida, mientras que, en la realidad, la mayor parte de estas fórmulas subsisten únicamente bajo ciertas condiciones, y para ciertos valores de las cantidades que ellas comprenden. [...] Es verdad que, para permanecer constantemente fiel a estos principios, me he visto forzado a admitir proposiciones que puede ser que parezcan un poco duras a primera vista. Por ejemplo, he enunciado en el capítulo VI, que *una serie divergente no tiene suma*; [...] Pero aquellos que leyeran mi obra reconocerán, eso espero, que las proposiciones de esta naturaleza, entrañan la acertada necesidad de poner más precisión en las teorías, y de aportar restricciones útiles a asertos demasiados amplios, volviendo en beneficio del análisis, y proporcionando varios sujetos de investigación que no son sin importancia. Así, antes de efectuar la suma de cualquier serie, he debido examinar en qué casos las series pueden ser sumadas, o, en otros términos, cuáles son las condiciones de su convergencia; y yo he, en este tema, establecido reglas generales que me parecen merecer alguna atención.

Este breve extracto de la Introducción del *Cour d'Analyse* nos indica claramente el deseo de Cauchy de cimentar sólidamente el análisis de principios del siglo XIX.

Se han considerado diversas razones por las cuales surge la necesidad de rigorizar el cálculo infinitesimal (cf. Grabiner, 1981), algunas internas o estrictamente matemáticas y otras vinculadas a consideraciones sobre el desarrollo social. De la mano de la Revolución Industrial se van creando paulatinamente, en los distintos países europeos, escuelas técnicas para la formación de ingenieros; se extiende la enseñanza y aumenta el interés social por las ciencias.

Se han considerado diversas razones por las cuales surge la necesidad de rigorizar el cálculo infinitesimal, algunas internas o estrictamente matemáticas y otras vinculadas a consideraciones sobre el desarrollo social.

Algunos autores han visto precisamente en las necesidades de la enseñanza una de las razones del proceso de rigorización; según esta opinión, la necesidad de explicar a un público creciente los métodos y técnicas del análisis habría llevado a un proceso de clarificación de los conceptos y principios y consecuentemente de rigorización. En palabras de J. V. Grabiner (1981, pág. 25) «Los fundamentos del cálculo parecen así ser vistos más como una tarea filosófica o pedagógica que matemática».

En nuestra opinión ésta no sería una de las razones, desde luego no en el caso de Cauchy. Precisamente su deseo de presentar desde una óptica rigurosa el análisis que explicaba en la *École Polytechnique* le produjo serios enfrentamientos y más de un disgusto con alumnos, colegas y dirección del centro, como a continuación brevemente comentaremos.

La Introducción del *Cours* empieza con estas palabras

> Algunas personas, que han querido guiar bien mis primeros pasos en la carrera de las ciencias, y entre las que citaré con reconocimiento a los señores *Laplace* y *Poisson*, habiéndome testimoniado el deseo de verme publicar el Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, me he decidido a poner este Cours por escrito para mayor utilidad de los alumnos. De él he ofrecido aquí la primera parte conocida bajo el nombre de *Analyse algébrique*, y en la que trato sucesivamente diversas especies de funciones reales o imaginarias, de series convergentes o divergentes, de la resolución de ecuaciones, y de la descomposición de fracciones racionales.

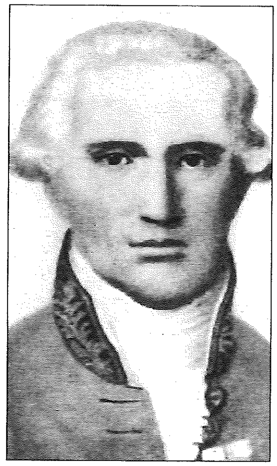
Efectivamente el libro nace como un texto dirigido a los alumnos de la *École Polytechnique*. Pero la obra tiene un origen mucho más controvertido de lo que ha simple vista pudiera deducirse de las palabras de Cauchy.

La *École Polytechnique* nacía en 1794, de la mano de la Revolución y con la decidida intervención de Gaspar Monge (1746-1818), para dar respuesta a las necesidades de formación de ingenieros que el desarrollo científico y tecnológico requerían. Pronto se convirtió en un punto de referencia y en modelo de todas las escuelas técnicas superiores que se instauraron por toda Europa a medida que la Revolución Industrial se hacía presente, de una u otra forma, en los distintos países, llegando a ser el centro científico más importante del mundo. Nombres ilustres como Monge, Lagrange, Laplace, Ampère, Poncelet, Cauchy,... trabajaron allí.

El monárquico Cauchy que se había formado como ingeniero en la *École Polytechnique*, después de un breve ejercicio de esta profesión en Cherburgo, y tras la caída de Napoleón, una vez que las condiciones políticas le eran más favorables[1], llegó a ser profesor de aquella prestigiosa institución en 1816.

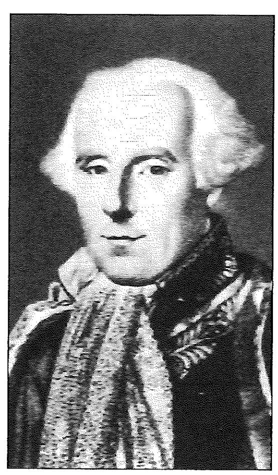
Su preocupación por presentar la disciplina lógica y rigurosamente estructurada le lleva a la modificación de los programas oficiales. El tiempo disponible para desarrollar su propio programa le conduce al cambio de la dinámica de las clases (caracterizadas hasta entonces por la abundancia de ejercicios prácticos) y al de orientación (hasta ese momento, fundamentalmente práctica). Por otra parte, en aquellos años el *Conseil d'Instruction de la École* consideraba que el enfoque adecuado para la enseñanza del cálculo descansaba sobre los infinitesimales y no sobre el concepto de límite cuya aplicabilidad estimaba difícil y que Cauchy había tomado como pieza angular de la construcción del cálculo. Todo ello provocó una reacción desfavorable a sus innovaciones tanto entre los profesores como entre los alumnos.

Algunos colegas, en particular Arago profesor de análisis aplicado, le censuraban por la distorsionada preparación que los alumnos recibían, lo que provocaba que éstos tuvieran lagunas en cuestiones primordiales. En la polémica



Monge

Lagrange



Laplace

Augustin-Louis Cauchy

interviene la dirección de la *École* y el *Conseil* posicionándose en contra de Cauchy. Él anuncia, en 1820, al *Conseil* la próxima aparición de la primera parte de su curso de análisis, como respuesta a las intenciones de aquél por controlar el contenido de su programa.

En 1821 Cauchy es víctima de un abucheo en clase por algunos estudiantes. Desde la dirección del centro se consideró que también Cauchy era responsable de lo ocurrido por su inadecuada adaptación a las necesidades de la mayoría de sus alumnos. El tema tuvo singular trascendencia llegando hasta el Ministerio del Interior, pero sobre todo tuvo una fundamental repercusión interna. Tras reiteradas peticiones del *Conseil*, Cauchy inicia la redacción de resúmenes de sus lecciones, abandonando definitivamente el *Cours d'Analyse* del que sólo se publicaría la primera parte mencionada. En 1823 aparece su *Résumé des Leçons données a l'École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal*; en el prólogo Cauchy (1899*a*) dice: «Esta obra, emprendida bajo la demanda del *Conseil d'instruction* de la *École royale polytechnique*, ofrece el resumen de las Lecciones que he dado en esta *École* sobre cálculo infinitesimal.»

No obstante, advierte de la singularidad de su trabajo respecto de otras obras del mismo género, añadiendo: «Mi objetivo principal ha sido conciliar el rigor, del que he hecho una ley para mí en mi *Cours d'Analyse*, con la simplicidad que resulta de la consideración directa de cantidades infinitamente pequeñas.»

1 La biografía de Cauchy puede consultarse en Belhoste (1991), en Valson (1868) y en Wussing y Arnold (1989).

Estos datos nos revelan que Cauchy entendía que era necesario establecer sobre principios firmes el análisis y no motivado por necesidades pedagógicas, sino precisamente a pesar de ellas. Por otra parte, a ningún profesor se le escapa que es más difícil, con los principiantes, hilar fino, entrar en la sutileza de los conceptos y métodos, que pasar por ellos por encima enfatizando los buenos resultados que las técnicas en cuestión proporcionan en ejercicios prácticos.

Son pues, a nuestro juicio, otras las razones que impulsan la fundamentación del cálculo, muchas de ellas tratadas en la obra señalada (Grabiner, 1981).

Desde sus inicios, en la segunda mitad del siglo XVII, hasta principios del siglo XIX tuvo lugar un desarrollo vertiginoso del cálculo infinitesimal y de sus métodos, con una enorme producción matemática que daba respuesta a variados problemas de tipo físico. La validez de los métodos y de las soluciones estaban refrendados por la propia naturaleza del problema resuelto, ordinariamente de lo que hoy denominaríamos de carácter aplicado.

Sin embargo, desde el mismo origen del cálculo se conocía la debilidad lógica de sus fundamentos. El uso de infinitésimos, en la base de la obra de Leibniz (1646-1716), conducía a que dos cantidades que se diferenciasen en un infinitésimo debían considerarse iguales, produciéndose una situación lógica insostenible, dado que dos cantidades distintas a la vez eran iguales. El cálculo de fluxiones de Newton (1643-1727) se fundamentaba en las razones de cantidades evanescentes, que no eran ni finitas, ni infinitamente pequeñas y cuya oscuridad planteaba así mismo dudas sobre el rigor de la teoría.

Paralelamente la teoría de series se desarrollaba como una herramienta básica para abordar los problemas de cuadratura. Pronto ésta conduciría a situaciones paradójicas, que evidenciaban la debilidad científica de los métodos, aunque bien es cierto que los resultados, globalmente, parecían incuestionables.

No obstante, puesto que, en uno y otro caso, se obtenían soluciones que de alguna forma se evidenciaban como correctas, aun cuando no se podían justificar los conceptos usados, los razonamientos se admitían, pues, en algún sentido, habrían de ser correctos.

Esta confusa situación provocó un paulatino y lento proceso tendente a aclarar los fundamentos. Producto del mismo es el concepto de límite, sobre el que descansa todo el análisis moderno. Puede verse una evolución de este concepto en Durán (1996) y en Pérez (1998).

Sin entrar en los antecedentes de la matemática griega, el concepto de límite aparece, en 1687, de forma inequívoca, de la mano de Newton en la obra *Philosophia naturalis principia mathematica* (Los principios matemáticos de la

Leibniz

Newton

filosofía natural). En particular en el Lema I de la sección I del Libro I (Newton, 1760, pág. 62) aparece lo que podríamos reinterpretar en terminología actual como: dadas dos sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$, si tomado un $\varepsilon > 0$ para un n suficientemente grande cuya existencia depende de ε, se tiene que $|a_n - b_n| < \varepsilon$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

D'Alembert (1717-1783) establece una definición bastante precisa (D'Alembert, 1767, pág. 437): «Se dice que una magnitud es el *límite* de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse a la primera más cerca que una magnitud dada, por pequeña que se la pueda suponer, no obstante sin que la magnitud que se aproxime, pueda jamás sobrepasar a la magnitud a la que ella se aproxima; de manera que la diferencia de semejante cantidad a su *límite* es absolutamente inasignable.»

Aparece aquí el concepto de límite como supremo o ínfimo de sucesiones monótonas.

L'Huilier (1750-1840) añade a la idea de D'Alembert la no necesidad de la monotonía para el límite y la introducción de la notación lim (cf., por ejemplo, Bottazzini, 1986; Grattan-Guinnes, 1984; Montucla, 1799-1802). Posteriormente Lacroix (1765-1843) avanza en la misma idea, estableciendo que el límite se puede alcanzar y una primera aproximación al concepto de límite lateral de una función en un punto (cf. Lacroix, 1810, Tomo I, págs. 13 y 14).

Bolzano (1781-1848) hace contribuciones especialmente importantes sobre variados aspectos y, particularmente, sobre los conceptos de convergencia y continuidad en 1817. Pero su obra, pasó prácticamente inadvertida para la mayoría de los matemáticos contemporáneos, por lo que no tuvo repercusión sensible en la evolución de los conceptos matemáticos durante la primera mitad del siglo XIX. Sobre las aportaciones de Bolzano y su comparación con las análogas de Cauchy se ha escrito mucho, siendo de particular interés el artículo de Grattan-Guinnes (1970) y la contestación de Freudenthal (1970-71).

Sin entrar en la polémica Bolzano *versus* Cauchy, lo que no cabe duda es que la obra de Cauchy tiene una enorme influencia (como consecuencia de su posición científica y del papel hegemónico de las matemáticas francesas en aquella época), que se traduce en la aparición de otros libros de texto fuertemente inspirados en su obra y, también, en la apreciación del rigor y en la forma de hacer matemáticas de un buen número de importantes matemáticos del siglo XIX.

Descripción general de la obra

El libro consta de 576 páginas y se compone de unos preliminares, doce capítulos y nueve apéndices titulados como notas.

El libro consta de 576 páginas y se compone de unos preliminares, doce capítulos y nueve apéndices titulados como notas.

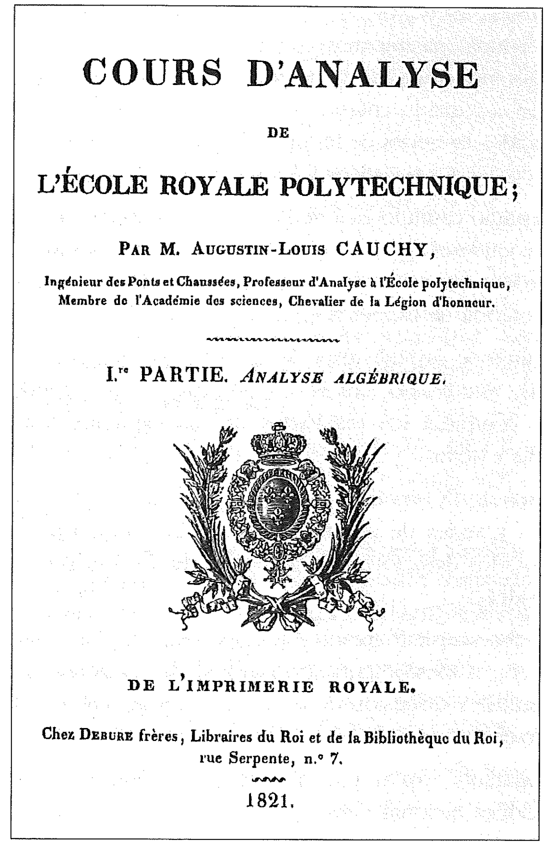
En los preliminares establece el punto de partida del trabajo. Indica qué ha de entenderse por número, cantidad, variable, límite e infinitésimo. Aporta algunas consideraciones sobre el campo numérico y establece implícitamente el concepto de límite de oscilación.

El capítulo I está dedicado al concepto de función y a la clasificación de funciones.

El segundo capítulo está dedicado a límites y continuidad. Trata sobre infinitésimos y sus órdenes y propiedades. Define función continua, establece la continuidad de las funciones elementales y el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas, también trata sobre la continuidad de funciones reales de varias variables y finalmente dedica un epígrafe entero a la indeterminación de límites.

El capítulo III trata sobre las funciones simétricas, alternadas y homogéneas.

El capítulo cuarto está dedicado a la interpolación, obteniendo la fórmula del polinomio interpolador de Lagrange. Efectúa algunas aplicaciones con un fuerte significado combinatorio.



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

1821.

El quinto capítulo trata sobre la determinación de funciones continuas de una variable que verifican ciertas condiciones, estudiando cuatro tipo de ecuaciones funcionales: $\Phi(x+y)=\Phi(x)+\Phi(y)$, $\Phi(x+y)=\Phi(x)\cdot\Phi(y)$, $\Phi(xy)=\Phi(x)+\Phi(y)$, $\Phi(xy)=\Phi(x)\cdot\Phi(y)$; obteniendo, respectivamente, como soluciones: $\Phi(x)=ax$, $\Phi(x)=A^x$, $\Phi(x)=a\log_A x$ y $\Phi(x)=x^a$, donde a es una constante arbitraria y A una constante positiva arbitraria. Tras la resolución, dice Cauchy (pág. 113): «Se debe de ello [de las cuatro soluciones señaladas] concluir que hay una gran diferencia entre las cuestiones en que se trata de calcular los valores desconocidos de ciertas cantidades, y las cuestiones en las que se propone descubrir la naturaleza desconocida de ciertas funciones según propiedades dadas. En efecto, en el primer caso, los valores de las cantidades desconocidas se encuentran finalmente expresados por medio de otras cantidades conocidas y determinadas, mientras que en el segundo caso las funciones desconocidas pueden, como se ve aquí, admitir en su expresión constantes arbitrarias». La segunda de estas ecuaciones será usada en el capítulo siguiente para estudiar la serie binomial.

El capítulo VI es uno de los de mayor importancia, con él nace una teoría rigurosa de series, y está dedicado al estudio de éstas y de las series de potencias, en el caso real. Es sin duda una auténtica joya dentro de la construcción del análisis moderno. Tras la definición de convergencia y establecer el llamado criterio de Cauchy, estudia en epígrafes separados las series de términos no negativos, las de términos positivos y negativos y las series de potencias.

El séptimo capítulo está dedicado al estudio de los números complejos y sus operaciones, proporcionando una novedosa exposición estructurada, sistemática y rigurosa de la teoría de números complejos.

El siguiente capítulo está dedicado a las funciones complejas, estudiando límites, continuidad y extendiendo al caso complejo los resultados de los capítulos tercero, cuarto y quinto.

El capítulo IX está dedicado a las series de términos complejos y series de potencias de variable compleja, obteniendo los desarrollos de potencias de las funciones elementales.

El décimo capítulo trata sobre el teorema Fundamental del Álgebra, la descomposición factorial de un polinomio, y el estudio y discusión de las ecuaciones de tercer y cuarto grado.

El siguiente capítulo trata sobre la descomposición de fracciones racionales en suma de fracciones con numerador constante (un tema de especial importancia para la integración), para lo que necesitaba de los resultados del capítulo precedente.

El último capítulo versa sobre las series recurrentes de términos reales o complejos y su relación con las fracciones racionales.

De las nueve notas, la primera y la segunda están dedicadas al estudio del campo numérico, la relación de orden y el tratamiento de las desigualdades mediante un singular y hábil uso de una teoría de medias entre números.

La nota tercera estudia la resolución numérica de ecuaciones. Estableciendo algunos resultados sobre raíces de ecuaciones $f(x)=0$, con $f(x)$ continua. Para el caso de ecuaciones polinómicas, estudia la determinación del número de raíces reales y el cálculo aproximado de sus valores, mediante el proceso de: 1) eliminación de las raíces múltiples, 2) acotación de las raíces reales, 3) separación de las raíces, mediante el estudio del signo y 4) obtención de los valores aproximados de las raíces. Trata el método de Newton y finaliza con un teorema que generaliza la *regla de Descartes* relativa a la determinación del número de raíces positivas o negativas que aparecen en una ecuación polinómica de grado arbitrario.

La nota IV está dedicada al desarrollo de una función alternada. La quinta la dedica a la fórmula del polinomio interpolador de Lagrange, que resulta un caso particular de la interpolación mediante una función racional.

De las nueve notas, la primera y la segunda están dedicadas al estudio del campo numérico, la relación de orden y el tratamiento de las desigualdades mediante un singular y hábil uso de una teoría de medias entre números.

La nota VI, con el título «De los números figurados» trata sobre los coeficientes de los desarrollos de los binomios de la forma $(1+x)^m$, con $m \in \mathbb{Z}^-$ y su relación con los números combinatorios.

La siguiente nota está dedicada al estudio de series dobles. La nota VIII a desarrollos de expresiones trigonométricas y la última a productos infinitos.

El concepto de límite

Es conveniente antes que nada aclarar la terminología de Cauchy en algunos puntos relativos, en primer lugar, al uso de las palabras *número* y *cantidad*, en segundo lugar, al uso de la expresión *valor numérico*, y finalmente al significado de la palabra *variable*.

En las páginas 1 y 2 del *Cours* dice: «Nosotros tomaremos siempre la denominación de *números* en el sentido con el que se la emplea en aritmética, haciendo nacer los números de la medida absoluta de las magnitudes; y aplicaremos únicamente la denominación *cantidades* para las cantidades *reales positivas* o *negativas*, es decir, para los números precedidos de los signos + o –. [...] Llamaremos *valor numérico de una cantidad* al número que tiene por base». Es decir, un *número* es un número positivo, una *cantidad* un número real cualquiera y el *valor numérico de una cantidad* el valor absoluto del número real en cuestión. Más adelante volveremos sobre este punto, para estudiar la concepción subyacente del campo numérico real en el *Cours*.

En la página 4 dice: «Se llama cantidad *variable* aquella que recibe sucesivamente varios valores diferentes unos de otros».

Hechas estas precisiones pasamos a detallar el concepto de límite en la obra de Cauchy.

En los *Preliminares*, página 4, Cauchy da la siguiente definición de límite

> Cuando los valores sucesivamente atribuidos a una variable dada se aproximan indefinidamente a un

> valor fijo, de tal manera que acaban por diferir de él tan poco como se quiera, este último se llama el *límite* de todos los otros.

A partir de aquí define el concepto de infinitésimo, que aparece por primera vez en el libro en la página 4 y luego retoma en la página 26 en estos términos

> Se dice que una cantidad variable llega a ser *infinitamente pequeña*, cuando su valor numérico [valor absoluto] decrece indefinidamente de manera que converge hacia el límite cero.

Que podemos interpretar para una sucesión $(a_n)_n$ de números reales (los diversos valores de la «cantidad variable») como aquella que tiene límite cero, tal como hoy decimos. Y hemos de observar que lo que Cauchy entiende por límite cero se corresponde con nuestra definición actual.

El concepto de límite infinito aparece (pág. 5) de la siguiente manera

> Cuando los valores numéricos [valores absolutos] sucesivos de una misma variable crecen cada vez más, de manera que sobrepasan todo número dado, se dice que esta variable tiene por límite el *infinito positivo*, indicado por el signo ∞, si se trata de una variable positiva, y el *infinito negativo*, indicado por la notación $-\infty$, si se trata de una variable negativa. Los infinitos positivos y negativos son designados conjuntamente bajo el nombre de *cantidades infinitas*.

Definición que podemos interpretar para una sucesión $(a_n)_n$ exactamente en los términos actuales. Cualquiera que sea el número $M > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica que $|a_n| > M$.

En la página 27 añade «Se dice que una cantidad variable llega a ser *infinitamente grande*, cuando su valor numérico [valor absoluto] crece indefinidamente de manera que converge al límite ∞».

Al efectuar, en la página 26, la distinción entre «decrecimiento constante» (en términos de una sucesión, cuando decrece monótonamente, aunque pueda haber límite no nulo) y «decrecimiento indefinido» (cuando el límite es cero, aunque pueda no ser monótona) pone como uno de los ejemplos la sucesión

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \ldots$$

indicando que no decrece constantemente pues

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{3} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{3} - \frac{1}{6} > 0$$

pero la sucesión decrece indefinidamente pues tiene límite cero; con ello encontramos, como ya lo hizo Lacroix (Lacroix, 1810, Tomo I, pág. 14), la separación entre la monotonía y la convergencia.

Introduce, en la página 13, la notación *lim.* para el límite, como ya lo había hecho L'Huilier, cuando «converge hacia un límite fijo». Y añade

> Algunas veces, mientras que una o varias variables convergen hacia límites fijos, una expresión compuesta por estas variables converge a la vez hacia varios límites diferentes unos de otros[2]. Indicaremos entonces uno cualquiera de estos límites, con la ayuda de dobles paréntesis colocados a continuación de la abreviación *lim.*, de forma que rodee a la expresión que se considere.

Esta aparentemente chocante frase, es aclarada inmediatamente con unos ejemplos. Dice que, cuando $x \to 0$,

> lim.(sin.x) = 0; mientras que la expresión lim.((1/x)) admite dos valores, a saber, $+\infty$, $-\infty$, y lim.((sin.1/x)) una infinidad de valores comprendidos entre los límites -1 y $+1$.

El tercero de los ejemplos nos indica que Cauchy está considerando aquí lo que hoy llamamos límites de oscilación. La introducción de este concepto, no definido explícitamente pero sí identificado, resulta absolutamente novedosa, pues si bien Gauss anteriormente había llegado a la noción de límite inferior y superior de una sucesión, su trabajo no se había publicado.

El tercero de los ejemplos nos indica que Cauchy está considerando aquí lo que hoy llamamos límites de oscilación. La introducción de este concepto, no definido explícitamente pero sí identificado, resulta absolutamente novedosa, pues si bien Gauss (1777-1855) anteriormente había llegado a la noción de límite inferior y superior de una sucesión (cf., por ejemplo, Dieudonné, 1978, Tomo I, pág. 337), su trabajo no se había publicado.

En el segundo de los ejemplos está considerando los límites laterales

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

que también habían sido ya considerados por Lacroix (Lacroix 1810, Tomo I, pág. 14).

El capítulo II del *Cours* termina con el estudio, entre las páginas 48 a la 69, de límites indeterminados y, en particular, estableciendo los siguientes criterios:

1) Si existe

$$\lim_{x \to \infty} (f(x+1) - f(x)) = k$$

entonces existe y vale *k*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

2 El subrayado es nuestro.

2) Si f(x) > 0, para valores muy grandes de x, y existe

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = k$$

entonces existe y vale k

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{1/x}$$

Cuando la variable x es entera obtiene:

3) Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right) = k$$

entonces existe y vale k

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

4) Si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$$

entonces existe y vale k

$$\lim_{n\to\infty} \left(a_n\right)^{1/n}$$

Utiliza los límites para el estudio del crecimiento de funciones; así aplicando el primer criterio, concluye que la función $\log_A x$, para A > 1, crece más lentamente que x, mientras que A^x crece mucho más rápidamente.

En la demostración de 1) podemos observar cómo la idea de límite, aunque la definición no sea de *tipo aritmético* como la actual, es inequívocamente clara y precisa. Suponiendo que k tiene un valor finito, dice (págs. 48 y 49)

> designemos por ε un número tan pequeño como se quiera. Puesto que valores crecientes de x hacen converger la diferencia f(x+1) – f(x) hacia el límite k, se podrá dar al número h un valor bastante considerable para que, siendo x igual o superior a h, la diferencia en cuestión esté constantemente comprendida entre los límites k–ε, k+ε.

Esto no es sino la exacta aplicación de la definición *aritmética* de límite finito en el infinito. En la misma demostración, más adelante (pág. 50), dice

> Por consiguiente, la razón f(x)/x tendrá por límite una cantidad comprendida entre k–ε y k+ε. Debiendo subsistir esta conclusión, cualquiera que sea la pequeñez del número ε, resultando de ello que el límite en cuestión será precisamente la cantidad k. En otros términos, se tendrá lim.f(x)/x = k.

que no es sino reconocer, en la expresión de tipo aritmética «para todo ε > 0 se tiene que

$$\left|\frac{f(x)}{x} - k\right| < \varepsilon$$

para x suficientemente grande», el concepto de límite finito en el infinito.

Éstas y otras aplicaciones aritméticas de la definición de límite presentes en los trabajos de Cauchy, como por ejemplo en la demostración del Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial, nos permite decir sin exageración alguna, que Cauchy es el primero que utiliza una definición de límite del tipo ε, δ; es decir, la actual.

Para el caso de k = ∞, en las páginas 50 y 51, dice

> Designando entonces por H un número tan grande como se quiera, se podrá siempre atribuir al número h un valor bastante considerable, para que x siendo igual o superior a h, la diferencia f(x+1) – f(x), que converge hacia el límite ∞, llega a ser constantemente superior a H;

más adelante (pág. 51) añade

> El límite de la razón f(x)/x será pues superior al número H, por grande que sea. Este límite superior a todo número asignable no puede ser más que el infinito positivo.

que es nuevamente la correcta interpretación *aritmética* del concepto de límite infinito.

Argumentaciones de la misma índole usa para la demostración del criterio 2) (páginas 54 a 56). Éstas y otras aplicaciones aritméticas de la definición de límite presentes en los trabajos de Cauchy, como por ejemplo en la demostración del Teorema del Valor Medio del cálculo diferencial (Cauchy, 1899*a*, pág. 44), nos permite decir sin exageración alguna, que Cauchy es el primero que utiliza una definición de límite del tipo ε, δ; es decir, la actual.

Tratando sobre las diversas indeterminaciones considera

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$

obteniendo que

$$\cos\alpha < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} < 1$$

tomando límites concluye que

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

haciendo uso implícito como algo evidente de un resultado que no ha sido probado, pero cuya demostración sólo requiere usar la definición ε, δ de límite.

El concepto de función continua

Durante el siglo XVIII el concepto de función estuvo sometido a más de una disputa. La idea de una función como aquella que viene expresada por una sola expresión analítica se vio insuficiente al estudiar las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales. Las fronteras entre continuidad, propiedad del valor intermedio, expresión mediante una sola fórmula, continuidad uniforme y diferenciabilidad estaban lejos de ser claras. Cauchy[3] identifica el aspecto esencial de la continuidad, y además formula una definición en términos de continuidad mediante sucesiones que resultará tremendamente operativa en la demostración de teoremas.

Cauchy define la continuidad, en la página 34, partiendo del concepto de límite, de la siguiente forma

> Sea f(x) una función de la variable *x*, y supongamos que, para cada valor de *x* intermedio entre dos límites dados [perteneciente a un intervalo], esta función admite constantemente un valor único y finito. Si, partiendo de un valor de x comprendido entre estos límites, se atribuye a la variable *x* un crecimiento infinitamente pequeño α, la función recibirá como crecimiento la diferencia f(x+α) – f(x), que dependerá al mismo tiempo de la nueva variable α y del valor de *x*. En este supuesto, la función f(x) será, entre los dos límites asignados a la variable *x*, función *continua* de esta variable, si, para cada valor de *x* intermedio[4] entre estos límites, el valor numérico [valor absoluto] de la diferencia f(x+α) – f(x) decrece indefinidamente con el de α. En otros términos, *la función f(x) permanecerá continua con respecto a x entre los límites dados, si, entre estos límites, un crecimiento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un crecimiento infinitamente pequeño de la propia función.*

Cauchy identifica el aspecto esencial de la continuidad, y además formula una definición en términos de continuidad mediante sucesiones que resultará tremendamente operativa en la demostración de teoremas.

Aunque la redacción resulta confusa, pues habla de continuidad en un intervalo a la vez que de continuidad en un punto, el subrayado nos permite interpretar que está considerando *x* fijo y que si para cada *x* fijo se verifica la condición enunciada (continuidad en un punto), entonces la función es continua en el intervalo. Así, f(x) es continua en (a, b) si, para cada valor considerado fijo $x \in (a, b)$, para $\alpha \to 0$ se sigue que $|f(x+\alpha) - f(x)| \to 0$; o en otros términos:

Sea dado $x \in (a, b)$. Si fijado $\varepsilon > 0$, para cada sucesión $(a_n)_n$, con $a_n \to 0$ (y, por tanto, $x + a_n \to x$), se sigue que $|f(x+a_n) - f(x)| \to 0$, y ello ocurre con los distintos $x \in (a, b)$, entonces f(x) se dice continua en (a, b).

Así tendríamos nuestra definición actual de continuidad mediante sucesiones. Cauchy deja clara y abundante constancia de que esta interpretación nuestra es acertada. Veamos algunos ejemplos de lo que decimos:

1) Tras la definición (pág. 35) pone como ejemplo la continuidad de la función *senx* indicando que «el valor numérico [valor absoluto] de sen(α/2), y por consiguiente el de la diferencia sen(x+α) – senx = 2sen(α/2)cos(x+α/2), decrece indefinidamente con el de α, cualquiera que sea por otra parte el valor finito que se le atribuya a *x*»; es decir, cuando $\alpha \to 0$ se tiene que $|\mathrm{sen}(x+\alpha) - \mathrm{sen}x| \to 0$, ocurriendo esto para cada *x* real, por lo que *sen x* es continua en todo $\mathbb{R}$.

2) En el Capítulo V aborda la determinación de las funciones Φ continuas, tales que $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$, obteniendo que necesariamente la función es de la forma $\Phi(x) = ax$, con *a* un número real fijo cualquiera. En el proceso de demostración prueba que

$$\Phi\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = \frac{m}{n}\Phi(\alpha)$$

para m/n racional y α una constante positiva; a continuación considera un número real cualquiera μ y una sucesión de racionales convergente a μ y dice (pág. 107) «y pasando a los límites, se encontrará $\Phi(\mu\alpha) = \mu\Phi(\alpha)$».

Análogo razonamiento utiliza para la ecuación funcional $\Phi(x + y) = \Phi(x)\Phi(y)$, con Φ(x) continua. Del mismo modo al considerar el problema análogo en el caso de una función continua $\varpi(x) = \Phi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$ con valores complejos (pág. 267), aplica la definición de continuidad por sucesiones a las funciones Φ(x), χ(x), sen x y cos x.

3) En la segunda demostración que hace del Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas[5] en la Nota III (pág. 462), construye dos sucesiones

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \text{ y } X, X', X'', \ldots$$

creciente y decreciente, respectivamente, con límite común *a* y dice: «Puesto que la función f(x) es continua desde $x=x_0$ hasta x=X, los términos generales de las sucesiones siguientes,

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \&c\ldots, f(X), f(X'), f(X''), \&c$$

convergerán igualmente hacia el límite común f(a)».

3 Así como también Bolzano.

4 Los subrayados son nuestros.

5 Da una primera demostración, en la página 44, de carácter geométrico, apoyándose en la imagen intuitiva de gráfica de una función continua.

4) También en la Nota III, enuncia dos bellísimos teoremas (págs. 464 a la 469) sobre la determinación de la menor y de la mayor de las raíces, en un intervalo dado $[x_0, X]$, de una ecuación $f(x) = 0$, con $f(x)$ continua. En el transcurso de la demostración hace uso (pág. 467) de la definición de continuidad por sucesiones.

5) En la Nota IX, al definir la convergencia del producto infinito

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$$

con $u_n > -1$ (pág. 561), parte de que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\log(1+u_n)$$

sea convergente, de suma *s*, de donde tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(\prod_{i=0}^{n}(1+u_i)\right)=s$$

concluyendo [de la continuidad de log x] que

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=0}^{n}(1+u_i)=e^s$$

Al generalizar la continuidad para funciones de varias variables (pág. 37) dice

> Sea ahora $f(x, y, z,...)$ una función de varias variables $x, y, z,...$; y supongamos que, en el entorno de valores particulares $X, Y, Z,...$ atribuidos a estas variables, $f(x, y, z,...)$ sea a la vez función continua de *x*, función continua de *y*, función continua de *z*, &c. Se probará fácilmente que, si se designa por $\alpha, \varsigma, \gamma, ...$ cantidades infinitamente pequeñas, y si se atribuye a $x, y, z,...$ los valores $X, Y, Z,...$, o valores muy próximos, la diferencia
>
> $$f(x+\alpha, y+\varsigma, z+\gamma,...) - f(x, y, z,...)$$
>
> será también infinitamente pequeña.

Para lo que razona sustancialmente de la siguiente forma: si

$$\lim_{\alpha\to 0} f(x+\alpha, y, z, \ldots) = f(x, y, z, \ldots)$$

$$\lim_{\varsigma\to 0} f(x+\alpha, y+\varsigma, z, \ldots) = f(x+\alpha, y, z, \ldots)$$

$$\lim_{\gamma\to 0} f(x+\alpha, y+\varsigma, z+\gamma, \ldots) = f(x+\alpha, y+\varsigma, z, \ldots)$$

entonces

$$\lim_{(\alpha,\varsigma,\gamma,\ldots)\to(0,0,0,\ldots)} f(x+\alpha, y+\varsigma, z+\gamma, \ldots) = f(x, y, z, \ldots)$$

Es decir, afirma erróneamente que si la función $f(x, y, z,...)$ es continua respecto de cada una de las variables, separadamente, entonces la función es continua globalmente respecto de todas las variables, sosteniendo la falacia sobre el falso argumento de que la existencia de los límites reiterados garantiza la existencia del límite de la función.

Aquí se evidencia como aún no se ha afinado suficientemente el concepto de continuidad. La validez del resultado para funciones uniformemente continuas respecto de cada variable pone de relieve la falta de precisión en el concepto de continuidad, que sólo se producirá mucho después con la aparición del concepto de continuidad uniforme, en 1870, de la mano de Heine (1821-1881) y una vez que la *aritmetización* del análisis es una realidad.

...es a Cauchy a quien hay que considerar el fundador de la teoría de convergencia de series, por ser el que realiza el primer planteamiento sistemático, extensivo y en profundidad del tema, incluyendo la enunciación y demostración de numerosos criterios de convergencia.

La teoría de series

También sobre el concepto de límite construye la teoría de series, siendo el primero en apreciar que el tratamiento de las series debía basarse en el estudio de la convergencia de la sucesión de sumas parciales. Su tratamiento constituye toda una teoría de la convergencia. A este respecto el *Cours* es el primer estudio general de la convergencia de series.

Ciertamente tanto Gauss, como Lacroix (1810), como Fourier (1768-1843) (Fourier, 1878) se habían preocupado por el análisis previo de la convergencia de las series. Gauss en 1813 (ver, por ejemplo, Dieudonné, 1978) publicó una memoria sobre la serie hipergeométrica en la que por primera vez se efectúa un estudio riguroso de la convergencia de una serie, pero en un caso concreto. No obstante es a Cauchy a quien hay que considerar el fundador de la teoría de convergencia de series, por ser el que realiza el primer planteamiento sistemático, extensivo y en profundidad del tema, incluyendo la enunciación y demostración de numerosos criterios de convergencia. Este último hecho significa un profundo cambio respecto al tratamiento dado con anterioridad a la cuestión. En efecto, lo que Cauchy hace con sus criterios es establecer condiciones suficientes de convergencia, bajo ciertas hipótesis, independientemente de la expresión concreta del término general de la serie y sin conocer el valor de la suma de ésta.

Inicia el capítulo VI definiendo una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

y que ésta es convergente si existe el límite de sus sumas parciales y es finito

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

donde

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

también define la divergencia: «si, mientras que *n* crece indefinidamente, la suma s_n no se aproxima a ningún límite fijo, la serie será *divergente*, y no tendrá suma».

Enuncia (págs. 125 y 126), en los términos siguientes, el conocido criterio de Cauchy:

> es necesario y suficiente que, para valores infinitamente grandes del número *n*, las sumas s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, &c... difieran del límite *s*, y por consiguiente entre ellas, cantidades infinitamente pequeñas. [...] por lo que para que la serie sea convergente, es necesario que el término general decrezca indefinidamente, mientras que *n* aumenta; pero esta condición no es suficiente, es preciso aún que [...] las sumas de cantidades u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, &c... tomadas, a partir de la primera, en tal número que se quiera, terminen por obtener constantemente valores numéricos [en valor absoluto] inferiores a todo límite asignable. Recíprocamente, cuando estas diversas condiciones son verificadas, la convergencia de la serie está asegurada.

Hoy enunciamos este criterio *aritméticamente*: la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

es convergente si y sólo si para cada número real $\varepsilon > 0$ existe un entero n_0, tal que para cada $n \geq n_0$ se tiene que $|s_{n+r} - s_n| < \varepsilon$, cualquiera que sea el entero $r \geq 1$.

Cauchy hace uso implícitamente de la convergencia uniforme, concepto que por cierto no existía entonces y que tardaría aún varias décadas en fraguarse. Cauchy, al enunciar el teorema, tenía en la cabeza funciones desarrollables en series de potencias.

Cauchy probó la condición necesaria, pero no la suficiente (sobre este tema volveremos más tarde al estudiar su concepción del campo numérico). Utilizó el criterio para probar la divergencia de la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

y la determinación de la convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Seguidamente inicia un razonamiento erróneo en la página 130 que le lleva a concluir, entre las páginas 131 y 132, el famoso teorema sobre la continuidad de la suma de una serie de funciones continuas puntualmente convergente. Textualmente dice:

> 1.^{er} TEOREMA. Cuando los diferentes términos de la serie (1) [la serie en cuestión] son funciones de una misma variable *x*, continuas con respecto a esta variable en el entorno de un valor particular para el que la serie es convergente, la suma *s* de la serie es también, en el entorno de este valor particular, función continua de *x*.

Cauchy hace uso implícitamente de la convergencia uniforme, concepto que por cierto no existía entonces y que tardaría aún varias décadas en fraguarse. Cauchy, al enunciar el teorema, tenía en la cabeza funciones desarrollables en series de potencias. El propio ejemplo que pone tras el teorema así lo corrobora, éste es la función 1/(1–x) suma de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

que es continua en el intervalo (-1, 1) de convergencia de la serie. Claro, que hoy sabemos que la convergencia puntual y la convergencia uniforme, de una serie de potencias, coinciden para valores de la variable pertenecientes a cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en el intervalo de convergencia de la serie.

Cauchy reconoció su error en un trabajo publicado en *Comptes Rendus, T. XXXVI*, pág. 454 el 14 de marzo de 1853, y titulado *Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites donnés.* Dice (Cauchy 1900, págs. 30 y 31):

> Estableciendo, en mi *Analyse algébrique*, las reglas generales relativas a la convergencia de series, yo he, además, enunciado el teorema siguiente:

[reproduce el texto del teorema].

Como lo han hecho notar los señores Bouquet y Briot[6], el teorema se verifica para las series ordenadas según las potencias ascendentes de una variable. Pero, para otras series, no puede admitirse sin restricciones. Así, por ejemplo, es verdaderamente cierto que la serie

$$\sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \frac{\sin 3x}{3}, \ldots \tag{2}$$

siempre convergente para valores reales de *x*, tiene por suma una función de *x* que es continua, mientras que *x*, supuesta real, varía, en el entorno de un valor distinto de un múltiplo $\pm 2n\pi$ de la circunferencia 2π, y que se reduce, en particular, a $(\pi-x)/2$, entre los límites $x=0$, $x=2\pi$. Pero, en estos mismos límites, la suma *s* de la serie (2) llega a ser discontinua, y esta suma, considerada como función de la variable real *x*, adquiere, en lugar del valor $+\pi/2$ o $-\pi/2$, dado por la fórmula $s=(\pi-x)/2$, el valor *singular* $s=0$, que vuelve a ocurrir cuando se supone $x=\pm 2n\pi$, siendo *n* un número entero cualquiera.

Añade (Cauchy, 1900, págs. 31 y 32): «es fácil ver como se debe modificar el enunciado del teorema, para que no tenga lugar ninguna excepción»; introduciendo en el referido enunciado las condiciones de la convergencia uniforme de la serie, aunque no identifica el concepto como tal.

El concepto de convergencia uniforme no sería definitivamente aclarado hasta Weierstrass (1815-1897) (cf. Dugac, 1973).

Pero volvamos al *Cours* de Cauchy. Uno de los elementos más novedosos, como ya se ha dicho, lo constituye el establecimiento de diversos criterios de convergencia. En la página 132 inicia la exposición de éstos para series de términos positivos

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

con $u_n > 0$.

El primero de ellos es el criterio de la raíz, pero en su formulación vuelve a aparecer una interesante expresión:

Investigad el límite o los límites hacia los que converge, mientras que *n* crece indefinidamente, la expresión $(u_n)^{1/n}$; y designad por *k* el más grande de estos límites[7], o, en otros términos, el límite de los valores más grandes de la expresión en cuestión. La serie (1) será convergente, si se tiene que $k < 1$, y divergente, si se tiene que $k > 1$.

Cuando habla de «los límites» se está refiriendo a límites de oscilación y «el más grande de estos límites» podemos interpretarlo como el límite superior de $(u_n)^{1/n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup (u_n)^{1/n}$$

Con lo cual introduce, aunque él no le dé ninguna denominación específica ni lo resalte, el concepto de límite superior de una sucesión.

...introduce, aunque él no le dé ninguna denominación específica ni lo resalte, el concepto de límite superior de una sucesión.

Otros criterios, expresados en lenguaje actual, son:

1) El del cociente: si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$$

se tiene que si $k < 1$ la serie converge y si $k > 1$ la serie diverge.

2) El de condensación: dadas las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2^n-1}$$

siendo $(u_n)_n$ decreciente y convergente a 0, entonces ambas series convergen o divergen simultáneamente.

3) Para series armónicas generalizadas: como corolario del teorema anterior determina que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\mu}}$$

será convergente si $\mu > 1$ y divergente si $\mu \leq 1$.

4) De los logaritmos: si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a u_n}{\log_a (1/n)} = h$$

se tiene que si $h > 1$ la serie converge y si $h < 1$ la serie diverge.

A continuación establece que si

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = s \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n = s'$$

son series de términos positivos, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = s + s'$$

Y prueba, por vez primera, (pág. 141) que el llamado *producto de Cauchy* de dos series de términos positivos convergentes es una serie convergente con suma el producto de las sumas de las series *factores*. La serie producto es la que tiene por término general

$$u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0.$$

En el siguiente epígrafe del mismo capítulo, titulado *De las series que comprenden términos positivos y términos negativos*, introduce (pág. 142) el con-

6 Resulta curioso que no menciones a Abel (1802-1829) quien en un artículo titulado *Recherches sur la série...* (Abel, 1900, págs. 219-250), indicaba mediante un contraejemplo la invalidez del teorema.

7 Los subrayados son nuestros.

cepto de *convergencia absoluta*, probando que la convergencia absoluta implica la convergencia; y ello le permitirá efectuar, por primera vez, un tratamiento riguroso de las series de términos arbitrarios.

Enuncia los criterios de la raíz y del cociente para las series de valores absolutos, obteniendo el criterio de Leibniz para series alternadas, que lo utiliza para proporcionar ejemplos de series que son convergentes, pero no absolutamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\mu}}$$

tal que $0 < \mu \leq 1$, con lo que separa ambos conceptos de convergencia.

Mientras que extiende el resultado anterior para la suma de series de términos positivos, para el producto de Cauchy de dos series demuestra la convergencia del mismo al producto de las sumas de las dos series, cuando las dos[8] series son absolutamente convergentes (Teorema 6, epígrafe 3, capítulo VI, págs. 147 a 149). Y no sólo esto, sino que proporciona el primer ejemplo de series convergentes (pero no absolutamente) cuyo producto es una serie divergente; en efecto, considera las dos series factores iguales a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

que es convergente, pero el producto

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-j}\sqrt{j+1}} \right)$$

no converge, como puede verse sin más que tener en cuenta el criterio de Cauchy y que

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n-j}\sqrt{j+1}} \geq \frac{2n+2}{n+2}$$

Cuando aborda las series de potencias establece el siguiente teorema (pág. 151):

> 1.^er^ TEOREMA. Sea *A* el límite hacia el cual converge, para valores crecientes de *n*, la raíz n-ésima de los valores numéricos [valores absolutos] más grandes de a_n. La serie (1)
>
> $$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right]$$
>
> será convergente para todos los valores de *x* comprendidos entre los límites $x=-1/A$, $x=+1/A$, y divergente para todos los valores de *x* situados fuera de estos límites.

lo que nos da como radio de convergencia $R = 1/A$, pudiendo deducirse de los resultados de Cauchy que

$$A = \lim_{n\to\infty} \sup \left(|a_n|\right)^{1/n}$$

conocido hoy como fórmula de Hadamard (1865-1963). Esta fórmula será expresada explícitamente más adelante al considerar las series complejas.

Considera la suma y el producto de series de potencias, probando que si para un mismo valor de *x* las series son absolutamente convergentes, entonces el producto será convergente y tendrá por suma el producto de las sumas de las series factores.

Prueba (págs. 162 a 164), aunque apelando al «teorema» erróneo relativo a la suma de una serie de funciones continuas, que la función que expresa el desarrollo en serie de potencias (dentro del intervalo de convergencia) es una función continua y que el desarrollo en serie de potencias de una función continua es único.

En la página 164 inicia el estudio del desarrollo en serie de potencias de la serie binomial $(1 + x)^{\mu}$, para $\mu \in \mathbb{R}$ arbitrario, obteniendo su desarrollo, pero con un argumento no estrictamente correcto[9] (haciendo uso de los resultados sobre ecuaciones funcionales del capítulo V y del famoso «teorema» sobre la suma de una serie de funciones continuas). Partiendo de este resultado obtiene el número e como límite, los desarrollos en serie de e^x, $\ln(1 + x)$, A^x y $\log_A(1 + x)$, para $A > 0$.

En la Nota VII, como ya se ha indicado, vuelve al estudio de series, en este caso de series dobles, siendo ésta una doble sucesión indefinida, escrita como matriz infinita

$$\begin{array}{cccc} u_0, & u_1, & u_2, & \dots \\ u'_0, & u'_1, & u'_2, & \dots \\ u''_0, & u''_1, & u''_2, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

con término general $u_n^{(m)}$ y cuya suma parcial genérica $s_n^{(m)}$ es la suma del cuadro

$$\begin{array}{ccccc} u_0, & u_1, & u_2, & \dots & u_{n-1} \\ u'_0, & u'_1, & u'_2, & \dots & u'_{n-1} \\ u''_0, & u''_1, & u''_2, & \dots & u''_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_0^{(m-1)} & u_1^{(m-1)} & u_2^{(m-1)} & \dots & u_{n-1}^{(m-1)} \end{array}$$

que denota por (2).

Enuncia los criterios de la raíz y del cociente para las series de valores absolutos, obteniendo el criterio de Leibniz para series alternadas, que lo utiliza para proporcionar ejemplos de series que son convergentes, pero no absolutamente...

8 En 1875 F. Mertens (1840-1927) probó que sólo es necesario exigir la convergencia absoluta de una de las dos series, permaneciendo la otra convergente.

9 La primera verificación completa de la serie binomial fue dada por Abel en 1826.

Define la convergencia del siguiente modo (pág. 538):

> Si la suma de los términos restantes tomados en tal orden y en tal número como se quiera llega a ser infinitamente pequeña para valores infinitamente grandes de *m* y de *n*, es claro que la suma $s_n^{(m)}$, y todas aquellas que se podrían deducir de ella añadiéndole a $s_n^{(m)}$ algunos de los términos excluidos del cuadro número (2), convergerán, para valores crecientes de *m* y de *n*, hacia un límite fijo *s*. En este caso, se dirá que la serie (1) [la serie doble] es *convergente*, y que ella tiene por *suma* el límite *s*. En caso contrario, la serie (1) será *divergente*, y no tendrá suma.

En la misma página añade erróneamente que si la serie doble es convergente entonces las series de cada fila y de cada columna son convergentes. Comete el error de confundir el paso al límite haciendo tender simultáneamente (m, n) a infinito, con hacer crecer indefinidamente primero un índice (m) y luego el otro (n). Sobre este falso resultado, suma cada fila y cada columna obteniendo dos nuevas series: la serie cuyos términos son las sumas por filas

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n,\ \sum_{n=0}^{\infty} u'_n,\ \sum_{n=0}^{\infty} u''_n, \ldots$$

que denota por (3), y la serie cuyos términos son las sumas por columnas

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_0^{(m)},\ \sum_{m=0}^{\infty} u_1^{(m)},\ \sum_{m=0}^{\infty} u_2^{(m)}, \ldots$$

que denota por (4). De aquí infiere (pág. 539) que si la serie doble es convergente con suma *s*, entonces las series (3) y (4) serán también convergentes y ambas con suma *s*; teorema que es falso. Basta considerar la serie doble

2	−1/2	1/3	1/4	1/5	…
0	−3/2	−1/3	−1/4	−1/5	…
1/2	−1/2	0	0	0	…
1/6	−1/6	0	0	0	…
…	…	…	…	…	…

donde las dos primeras columnas son convergentes por serlo la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

y las dos primeras filas son divergentes, por serlo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

y, sin embargo, la serie doble converge pues $s_n^{(m)} = 0$ para $n \geq 2$ y $m \geq 2$. No obstante, el resultando es correcto si la serie doble es de términos no negativos.

Luego establece (Teorema 2, pág. 541) que si las series de cada fila son absolutamente convergentes y la serie (3) de sumas de filas es absolutamente convergente, entonces: 1) todas las series verticales (columnas) son convergentes y 2) la serie (4) de sumas de columnas es también convergente y su suma es la misma que la suma de la serie (3). Resultado que es cierto, aunque él parte de uno primero, ya comentado, que es falso.

Como aplicación, obtiene el teorema del producto de series (simples) absolutamente convergentes (Teorema 6, epígrafe 3, capítulo VI) ya mencionado, mediante una demostración considerablemente más simplificada, partiendo de la distribución

$$\begin{array}{ccccc} u_0v_0 & u_1v_0 & u_2v_0 & u_3v_0 & \cdots \\ & u_0v_1 & u_1v_1 & u_2v_1 & \cdots \\ & & u_0v_2 & u_1v_2 & \cdots \\ & & & u_0v_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

del hecho de que las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

son absolutamente convergentes y del Teorema 2 de la página 541, arriba comentado.

Otro uso que hace de los resultados anteriores es obtener el desarrollo en serie de arc sen x y ln (1 + x).

Los resultados sobre series complejas y series recurrentes los comentaremos más adelante.

En la obra de Cauchy no hay una construcción de los sucesivos campos numéricos, ni una explícita formulación de las propiedades definitorias del conjunto de los números reales. No obstante, sí aparece en el Cours una primera aproximación, por cierto considerablemente buena…

Concepción de los números reales

En la obra de Cauchy no hay una construcción de los sucesivos campos numéricos, ni una explícita formulación de las propiedades definitorias del conjunto de los números reales. No obstante, sí aparece en el *Cours* una primera aproximación, por cierto considerablemente buena, a este tema, al que Cauchy dedica gran parte de los Preliminares, las Notas I y II y, como veremos, la completitud de $\mathbb{R}$ aparecerá subyacente en diversos lugares.

Como ya hemos indicado, Cauchy entiende un número como la medida absoluta de una magnitud y una cantidad como un número precedido del signo + o del signo –. Tras enunciar la regla de los signos realiza una serie de definiciones defectuosas para la suma, la diferencia, el producto y el cociente, primero para números y a partir de ahí, y haciendo uso de la regla de los signos, para cantidades.

Una vez «definida» la suma de dos números formula (págs. 406 y 407), como axioma, una propiedad que engloba conjuntamente a las propiedades conmutativa y asociativa de la suma

> No se demuestra, pero se admite como evidente, que *la suma de varios números es la misma en cualquier orden que se las añada.* Esto es un axioma fundamental sobre el que reposan la aritmética, el álgebra, y todas las ciencias de cálculo.

Luego hará observar que esta propiedad la verifican la suma y el producto de cantidades cualesquiera.

Las definiciones de las operaciones descansan sobre el sentido de éstas en el caso de los números naturales, lo que le lleva a efectuar distinciones acerca de la naturaleza de los números para entender el significado, en cada caso, de la operación. Y es aquí donde encontramos una primera aproximación muy interesante a la construcción de $\mathbb{R}$ a partir del conjunto de las sucesiones de números racionales que son de Cauchy. Así, define el producto de dos números A y B, cuando B es irracional como

$$\lim_{n\to\infty} A\,b_n = A \cdot B$$

siendo $(b_n)_n$ una sucesión de números racionales convergente a *B*. Observemos que básicamente aquí está presente la definición actual del producto de números reales; pero hay algunos inconvenientes: en primer lugar parte de la existencia del número irracional sin haberlo definido (aunque esta existencia era dada por conocida), en segundo lugar da como obvio que cualquiera que sea la sucesión de

Las definiciones de las operaciones descansan sobre el sentido de éstas en el caso de los números naturales, lo que le lleva a efectuar distinciones acerca de la naturaleza de los números para entender el significado, en cada caso, de la operación.

aproximaciones racionales $(b_n)_n$ de B, la sucesión $(Ab_n)_n$ convergerá siempre al mismo límite. Enuncia la propiedad distributiva.

Define después la potenciación y la radicación, como antes, primero para números y, a partir de ahí, luego para cantidades. Así (págs. 414 y 415) para dos números *A* y *B*, viene dada de la forma siguiente: 1) si $B \in \mathbb{N}$, $A^B = A \cdot A \cdots A$, B veces; 2) si $B = m/n \in \mathbb{Q}$, se trata de buscar un número *X* tal que i) $A = X \cdots X$ *n* veces y ii) $X \cdots X$ *m* veces nos dará A^B (la cuestión es ¿existe un tal número X?); 3) si B es irracional, toma una sucesión de aproximaciones racionales $(b_n)_n \subseteq \mathbb{Q}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} b_n = B$$

y entonces

$$A^B = \lim_{n\to\infty} A^{b_n}$$

Hoy podemos seguir exactamente el mismo procedimiento, pero completando ciertas lagunas: tendríamos que definir 1) por recurrencia, luego demostrar la existencia de un único número real X tal que $X^n = A$ en 2) y, finalmente, probar la unicidad en 3), independientemente de la sucesión elegida, y lo que es más importante haber resuelto previamente la existencia del irracional *B* que Cauchy no ha definido.

En la página 422 inicia el estudio de exponenciales y logaritmos. Sobre la base de la definición y las propiedades de las potencias, obtiene diversas propiedades de los logaritmos.

Para dos cantidades *a* y *b* define $a > b$ cuando $a-b$ es positivo (pág. 438). A partir de aquí obtiene diversas propiedades relativas a la estructura de orden de $\mathbb{R}$, entre las que no figuran, tal vez por ser evidentes para Cauchy, las propiedades de tricotomía y triangular. Es interesante notar que ya en los Preliminares y luego en la Nota II Cauchy trata extensamente el concepto de media de varias cantidades, respecto del que obtiene numerosos resultados y que le servirán para probar un buen número de teoremas, como, por ejemplo, aquellos ya señalados sobre indeterminación de límites (págs. 49 y 54), evitando acudir al uso de desigualdades. Podemos leer (pág. 14) «Se llama *media* de varias cantidades dadas una nueva cantidad comprendida entre la más pequeña y la más grande de las que se consideran. Después de esta definición, es claro que existe una infinidad de medias entre varias cantidades desiguales» y denota una media entre varias cantidades a, a', a'',... mediante M(a, a', a'',...). Hoy estableceríamos con más precisión que $\inf\{a, a', a'',...\} \leq M(a, a', a'',...) \leq \sup\{a, a', a'', ...\}$.

Al considerar el valor numérico [valor absoluto] de una media entre varias cantidades dadas, apoyándose en los resultados obtenidos anteriormente sobre medias, concluye que

$$M(|a|,|a'|,|a''|,\ldots)=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}}{\sqrt{n}}$$

y señala que las expresiones de la forma

$$\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}$$

«sirven para determinar longitudes medidas en línea recta y áreas de superficies planas, por medio de sus proyecciones ortogonales». Y obtiene (pág. 455) como «importante teorema» relativo a este tipo de expresión el siguiente:

> 16.º TEOREMA. Sean $a, a', a'', \ldots, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ dos sucesiones de cantidades, y supongamos que cada una de estas sucesiones comprende un número de *n* términos. Si las razones a/α, a'/α', a''/α', &c... no son todas iguales entre ellas, la suma $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots$ será inferior al producto
>
> $$\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots}$$
>
> de suerte que se tendrá
>
> $$\text{val. num. } (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots) <$$
>
> $$< \sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots}$$

Obsérvese que $\bar{a} = (a, a', a'', \ldots)$, $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots) \in \mathbb{R}^n$ y que la condición de que las fracciones a/α, a'/α', a''/α'', etc. no son todas iguales entre ellas nos dice que $\bar{a}$ y $\bar{\alpha}$ no son linealmente dependientes. Finalmente

$$|(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots)| < \sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}\cdot\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots}$$

se puede expresar como $|\,\bar{a}\cdot\bar{\alpha}\,| < \|\,\bar{a}\,\|\,\|\,\bar{\alpha}\,\|$. Es decir, estamos ante la conocida desigualdad de Cauchy-Schwarz[10] que se convierte en igualdad si y sólo si $\bar{a}$ y $\bar{\alpha}$ son linealmente dependientes, como Cauchy indica en un Escolio que sigue (págs. 456 y 457).

Los resultados referidos configuran una aproximación, ciertamente incompleta, a la estructura del cuerpo ordenado de los números reales. Una propiedad básica nos falta para que la concepción de Cauchy de los reales sea parecida a la actual. Nos referimos a la completitud.

Es cierto, que en ninguna parte aparece una formulación de tal principio, pero es también verdad que la completitud de los reales aparece de forma implícita en numerosas ocasiones. Así, por ejemplo:

1) Cuando considera sin demostrar (pág. 126) que siendo la sucesión de sumas parciales de una serie «de Cauchy», entonces la serie es convergente.

2) Cuando considera, como algo evidente, que una sucesión monótona acotada es convergente. Como sabemos la existencia de un tal límite garantiza la completitud de $\mathbb{R}$.

Ello ocurre, por ejemplo:

Los números complejos tienen una historia de antigua presencia tolerada, no sin recelos, vinculada inicialmente al estudio de ecuaciones algebraicas. Su incomprensión fue una constante, lo que no era óbice para su manipulación cuando resultaba imprescindible, siempre sobre la base de la extensión de las operaciones con los reales.

10 Schwarz (1843-1921).

11 El subrayado es nuestro.

i) En la demostración del Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (pág. 462), al afirmar que las sucesiones monótonas $x_0, x_1, x_2, \ldots$ y X, X', X'',..., respectivamente creciente y decreciente, y acotadas tienen límite.

ii) En la demostración del teorema anteriormente aludido sobre la determinación de la menor de las raíces de una ecuación $f(x) = 0$ en un intervalo $[x_0, X]$, con $f(x)$ continua, cuando dice (pág. 467): «$x_0, x_1, x_2, \ldots$ formarán una serie [sucesión] donde el término general x_n, creciendo constantemente con *n*, sin poder jamás sobrepasar la raíz *a*, convergerá necesariamente[11] hacia un límite igual o inferior a esta raíz.»

iii) Cada vez que aplica el criterio de comparación para series de términos positivos, como algo obvio. Así, por ejemplo, en el criterio de la raíz (pág. 133), o en el criterio de los logaritmos (pág. 137).

3) Al considerar que las sucesiones acotadas de números reales tienen límite superior de oscilación; que como sabemos implica la completitud de $\mathbb{R}$. Este es el caso del criterio de la raíz para series de términos positivos. Obviamente Cauchy está considerando implícitamente este hecho cuando en el enunciado (pág. 132) dice: «Buscad el límite o los límites hacia los que converge, mientras que *n* crece indefinidamente, la expresión $(u_n^{1/n})_n$; y designad por *k* el más grande de estos límites».

Funciones y series complejas

Los números complejos tienen una historia de antigua presencia tolerada, no sin recelos, vinculada inicialmente al estudio de ecuaciones algebraicas. Su incomprensión fue una constante, lo que no era óbice para su manipulación cuando resultaba imprescindible, siempre sobre la base de la extensión de las operaciones con los reales. De la mano de Euler (1707-1783) y D'Alembert las operaciones algebraicas y trascendentes con números complejos proporcionaban al conjunto de los complejos el carácter de un sistema cerrado. Ellos y otros destacados matemáticos como Laplace (1749-1827), entre otros, efectúan diversas e importantes contribuciones en los inicios de lo que llegará a ser la construcción de la teoría de funciones de variable compleja. No menos importante son las contribuciones de Gauss, entre ellas la primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra en 1799. Pero se puede considerar a Cauchy como el auténtico fundador de la teoría de funciones de variable compleja, dándole unidad, sistematización, rigor conceptual y proporcionando muchas e importantes contribuciones. Su trabajo de 1814 (no publicado hasta 1827) *Memoire sur la théorie des intégrales definies* es el primero significativo en la línea apuntada, luego vendrá el *Cours*, pero serán trabajos posteriores los auténticamente importantes en este tema (ver a este respecto, por ejemplo, Dieudonné, 1978).

En el *Cours* Cauchy presenta de forma sistemática las operaciones con números complejos y sobre todo efectúa un estudio muy importante y novedoso sobre la convergencia de series de potencias complejas. En lo que sigue nos referiremos exclusivamente al objeto de este trabajo, es decir al contenido del *Cours*.

Cauchy entiende los números complejos (a los que se refiere como números imaginarios) como una extensión simbólica de carácter algebraico, carente de significado. Así al multiplicar $\cos a + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} a$ por $\cos b + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} b$ como si de dos expresiones algebraicas se tratase obtiene $\cos (a+b) + \sqrt{-1}\,\operatorname{sen} (a+b)$ y dice (pág. 175) «Las tres expresiones que encierra la ecuación precedente, a saber, [...] [las anteriores] son tres expresiones simbólicas que no se pueden interpretar según las convenciones generalmente establecidas, y no representan nada real. Se las ha denominado por esta razón expresiones imaginarias». De este modo Cauchy usará «imaginario» al referirse a «complejo» y $\sqrt{-1}$ en lugar de *i*.

...se puede considerar a Cauchy como el auténtico fundador de la teoría de funciones de variable compleja, dándole unidad, sistematización, rigor conceptual y proporcionando muchas e importantes contribuciones.

Define qué es un número complejo, la igualdad de dos de ellos, las operaciones suma, diferencia, producto, potencia y radicación, en forma binómica y, tras obtener la expresión módulo-argumental, nuevamente el producto, el cociente, la potencia y la radicación. Usa los resultados anteriores para obtener diversas fórmulas trigonométricas.

Al inicio del capítulo VIII (pág. 240) define una variable compleja como la compuesta por dos variables reales en la forma $u + v\sqrt{-1}$. Si u y v convergen, respectivamente, hacia U y V, entonces $u + v\sqrt{-1}$ convergerá a $U + V\sqrt{-1}$.

Define (pág. 247) «función imaginaria» [función compleja] como aquella que puede expresarse en la forma $\Phi(x) + \chi(x)\sqrt{-1}$, siendo $\Phi(x)$ y $\chi(x)$ funciones reales de variable real. Análogamente, para varias variables considera $\Phi(x, y, z,...) + \chi(x, y, z, ...)\sqrt{-1}$, siendo las funciones componentes funciones reales de varias variables reales. De este modo realmente está considerando funciones reales de valores complejos; ciertamente ello le permitiría tener las funciones de variable compleja en la forma $\Phi(x, y) + \chi(x, y)\sqrt{-1}$, considerando un complejo z como un par de reales (x, y).

Después hace un desarrollo paralelo al realizado para el caso real. Efectúa una clasificación de las funciones complejas en explícitas e implícitas, etc.; define un infinitésimo complejo $\alpha + \zeta\sqrt{-1}$ como la «variable» que converge a cero «lo que supone que en la expresión dada la parte real y el coeficiente de $\sqrt{-1}$ converjan al mismo tiempo hacia este límite». Establece que la condición necesaria y suficiente para ello es que el módulo $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \zeta^2}$ sea un infinitésimo. Define la continuidad a partir de la continuidad de $\Phi(x)$ y de $\chi(x)$. Su camino de extensión de los resultados del caso real le llevan a generalizar (pág. 251) el «teorema» erróneo de la continuidad de funciones de varias variables a partir de la continuidad respecto de cada una de las variables separadamente. También extiende los resultados del capítulo III sobre funciones simétricas, alternadas y homogéneas al caso complejo, mediante la consideración de que las funciones reales Φ y χ lo son ambas. Entre las páginas 254 a 273 extiende al caso complejo los resultados sobre polinomios obtenidos en el capítulo IV y los relativos a la determinación de funciones continuas que verifican determinadas propiedades del capítulo V.

Cauchy define (pág. 274) una serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n + q_n\sqrt{-1}\right)$$

compleja [«serie imaginaria»] a partir de las dos series reales

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q_n$$

y la convergencia, en el camino usual, a partir del límite de la sucesión de sumas parciales

$$\sum_{n=0}^{k}\left(p_n + q_n\sqrt{-1}\right)$$

resultando que la serie compleja es convergente si y sólo si lo son las dos series reales componentes. Considera como ejemplo el caso de una serie de potencias compleja y a partir de aquí, remitiendo a las series reales componentes y usando para ellas el famoso «teorema» incorrecto sobre la continuidad de la suma de una serie de funciones reales continuas, nuevamente se equivoca y afirma (pág. 279) que la suma de una serie convergente de funciones continuas complejas es también una función continua; teorema, que como sabemos hoy, es incorrecto si no se exige la convergencia uniforme de la serie.

A continuación considera

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\left(\cos\theta_n + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta_n\right)$$

siendo ρ_n y θ_n el módulo y el argumento del enésimo término de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(p_n + q_n\sqrt{-1}\right)$$

Demuestra entonces (pág. 280) que esta serie es convergente si

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(\rho_n\right)^{1/n} < 1$$

y divergente si el límite superior es mayor que 1. Luego (pág. 282) establece que si existe

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} = k$$

entonces existe y vale k el

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(\rho_n\right)^{1/n}$$

Establece la convergencia de la suma de series complejas, y la del producto cuando las series de los módulos son convergentes.

En la página 285 inicia el estudio de series de potencias complejas, con coeficientes reales

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

Si $x = z(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\theta)$, con z y θ reales, la serie anterior puede escribirse como

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\left(\cos n\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,n\theta\right)$$

que denota mediante (3). Siendo

$$A = \lim_{n\to\infty}\sup\left(|a_n|\right)^{1/n}$$

concluye que

...nuevamente se equivoca y afirma que la suma de una serie convergente de funciones continuas complejas es también una función continua; teorema, que como sabemos hoy, es incorrecto si no se exige la convergencia uniforme de la serie.

1.^{er} Teorema. La serie (3) es convergente para todos los valores de z comprendidos entre los límites $z=-1/A$ y $z=1/A$, y divergente para todos los valores de z situados fuera de los mismos límites. En otros términos, la serie (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

es convergente o divergente según que el módulo de la expresión imaginaria x es inferior o superior a $1/A$.

Apareciendo de este modo explícitamente la conocida fórmula llamada de Hadamard. Después establece que si existe

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left(|a_n|\right)^{1/n}$$

existe y coincide con aquél.

Concluye como corolario (pág. 287) que «si la serie (1)

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

es convergente para un cierto valor real de la variable x, ella permanecerá convergente para todo valor imaginario donde este valor real sería, excepto el signo, el módulo. Por consiguiente, si la serie (1) es convergente para todos los valores reales de la variable x, ella permanecerá convergente, cualquiera que sea el valor imaginario [complejo] que se le atribuya a esta variable».

Por extensión de los resultados del caso real concluye que la suma de las series de potencias convergentes es convergente y su suma es el resultado de sumar la suma de ambas series. Del mismo modo si las series de los módulos son convergentes, entonces la serie producto es convergente.

Estudia luego la serie binómica. A partir del estudio de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\left(\cos n\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,n\theta\right)$$

con z y θ reales (págs. 298 a 301) obtiene, separando las partes real e imaginaria, que las funciones *cos z* y *sen z* son desarrollables en series de potencias para cualquier valor de z. Extiende y define, sobre la base del referido corolario de la página 287, el desarrollo en serie de potencias de e^x, con $x \in \mathbb{C}$, y que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ (pág. 302). Del estudio de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}\left(\cos n\theta + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\, n\theta\right)$$

obtiene el desarrollo en serie de *arc tg z* para $|z| \le 1$. Y de este último desarrollo obtiene $\pi/4$ como la suma de una serie.

Por extensión del caso real obtiene los desarrollos de A^x, *sen x* y *cos x*, con x complejo. Usando ahora que $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$ (págs. 310 y 311) deduce que para $x = \alpha + \varsigma\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ se tiene que

Comprueba que los desarrollos en series de potencias de las fracciones racionales resultan ser series recurrentes.

$$\begin{aligned}
A^x &= A^\alpha\left(\cos(\varsigma \ln A) + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}(\varsigma \ln A)\right)\\
\mathrm{sen}\, x &= \frac{e^\varsigma + e^{-\varsigma}}{2}\mathrm{sen}\,\alpha + \frac{e^\varsigma - e^{-\varsigma}}{2}\cos\alpha\sqrt{-1}\\
\cos x &= \frac{e^\varsigma + e^{-\varsigma}}{2}\cos\alpha - \frac{e^\varsigma - e^{-\varsigma}}{2}\mathrm{sen}\,\alpha\sqrt{-1}
\end{aligned}$$

A continuación define el logaritmo complejo y obtiene la expresión de $\log_A x$, con $x \in \mathbb{C}$. Para finalizar el capítulo IX obtiene los valores de los arcosenos y arcocosenos para valores complejos.

En la página 389, primera del capítulo XII, define las series recurrentes en los términos siguientes «Una serie a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n, &c..., ordenada siguiendo las potencias ascendentes y enteras de la variable x, es llamada *recurrente*, cuando en esta serie, considerada a partir de un término dado, el coeficiente de una potencia cualquiera de la variable se expresa como función lineal de los coeficientes de las potencias inferiores tomada en número fijo; de suerte que es suficiente *recurrir* a los valores de estos últimos coeficientes para deducir de ellos aquél que se busca». Pudiendo ser los valores de los a_n y de x reales o complejos.

A partir de los resultados, de los capítulos VI y IX, sobre series concluye que la serie recurrente será convergente si

$$\lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{\left(|a_n|\right)^{1/n}} < 1$$

y divergente si es mayor que 1. Es interesante resaltar que aparece aquí, aunque no se defina explícitamente, el concepto de límite inferior, bajo la forma del «el más pequeño de los límites».

Comprueba que los desarrollos en series de potencias de las fracciones racionales resultan ser series recurrentes. Luego prueba que si una serie de potencias es convergente y recurrente, entonces su suma es una fracción racional.

Finalmente nos referiremos a la demostración que da (págs. 331 a 339) del Teorema Fundamental del Álgebra y que enuncia así:

> 1.er TEOREMA. Cualesquiera que sean los valores reales o valores imaginarios de las constantes a_0, a_1, ..., a_n, la ecuación (1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$, en la cual n designa un número entero igual o superior a la unidad, tiene siempre raíces reales o imaginarias.

Recordemos que este teorema había sido demostrado por primera vez en 1799 por Gauss, que llegó a dar hasta cuatro demostraciones del mismo. Su historia se remonta a Girard (1595-1632), y juegan un papel destacado Euler, D'Alembert[12], Lagrange (1736-1813) y Laplace. Una información pormenorizada del tema puede consultarse en Petrova (1974), Gilain (1991) y Pla (1992).

Aunque la demostración de Cauchy está en la línea de las ideas principales de D'Alembert y del artículo «Réflexions sur la nouvelle theorie d'analyse», de 1814, de Argand (1768-1822), y que como él dice «la demostración precedente del teorema 1.°, aunque diferente en varios puntos de la que ha dado el Sr. Legendre [*Theorie des Nombres*, I.er Part. $ XIV], está basada sobre los mismos principios», tiene sobre todo el interés de aparecer en un libro de texto que tuvo una importantísisima influencia en el desarrollo del análisis en el siglo XIX.

La línea de la demostración es como sigue. Designando el polinomio por f(x) y llamando $x = u + v\sqrt{-1}$ puede escribir la ecuación en la forma $\Phi(u, v) + \sqrt{-1}\chi(u, v) = 0$. Considera la función que podríamos llamar módulo al cuadrado $F(u,v) = [\Phi(u, v)]^2 + [\chi(u, v)]^2$. Se trata ahora de probar que existe un mínimo de F(u,v), sea éste A, que se alcanza para $u=u_0$ y $v=v_0$. Después considera $u = u_0+\alpha h$ y $v=v_0+\alpha k$, designando α una cantidad infinitamente pequeña y h y k dos cantidades finitas; entonces f(u,v) es una función compleja de $\alpha(h + k\sqrt{-1})$ y desarrollando f en serie de potencias de $\alpha(h + k\sqrt{-1})$ obtiene los desarrollos de $\Phi(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k)$ y de $\chi(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k)$ y, por consiguiente, de $F(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k)$. Puesto que $F(u_0+\alpha h, v_0+\alpha k) - F(u_0,v_0) \ge 0$, y su signo es el de la potencia de α de menor

12 Se considera que D'Alembert es el primero que proporcionó una tentativa seria de demostración del teorema, válida salvo por algunas lagunas.

grado en el desarrollo, concluye que debe ser $A = 0$, siendo así que para (u_0, v_0) se tiene que $f(u_0, v_0) = 0$ y consecuentemente $f(x_0) = 0$, siendo $x_0 = u_0 + v_0\sqrt{-1}$.

La demostración tiene un fallo o una laguna desde la perspectiva del rigor y es cuando «prueba» que F(u,v) tiene al menos un mínimo. Él parte de que

$$\lim_{(u,v)\to\infty} F(u,v) = \infty$$

siendo F(u,v) una función entera, y por tanto continua, y no negativa; de ello entonces se deduce que existe (u_0, v_0) tal que $F(u_0, v_0) = A$ es un mínimo. Textualmente dice: «Además, como la ecuación (4) $[F(u,v) = [\Phi(u,v)]^2 + [\chi(u,v)]^2]$ da para F(u,v) una función entera y por consiguiente una función continua de las variables u y v, es claro que F(u,v), variando con ellas por grados insensibles, y no pudiendo bajar por debajo de cero, alcanzará una o varias veces un cierto límite inferior que no rebasará jamás». Pero este argumento, que para Cauchy resulta evidente, necesita rigurosamente acudir a un razonamiento de continuidad de la función F(u,v) sobre un compacto, lo que desde luego estaba fuera del alcance de Cauchy.

Conclusiones

El *Cours d'Analyse* es la primera obra en la construcción rigurosa del análisis tal y como hoy lo entendemos, escrita en un estilo claro y ameno. Sin duda Cauchy parte de múltiples contribuciones anteriores a esta obra, pero él supo no sólo ver sino, lo que es más importante, construir todo el edificio del análisis desde el concepto de límite, produciendo un sistema coherente y cohesionado donde las distintas técnicas y conceptos cobraron un nuevo significado.

Identifica las propiedades esenciales de los distintos conceptos, los incorpora a las definiciones y los convierte en instrumentos útiles para refinadas demostraciones.

Junto a todo ello, lo que de por sí ya justificaría la presencia de esta obra entre las más distinguidas de todas las matemáticas, Cauchy introduce numerosos avances respecto de las matemáticas de sus antecesores y contemporáneos. Así, entre otros, volvemos a resaltar:

1) No sólo entiende el significado crucial del concepto de límite, sino que además lo usa, por primera vez, en forma aritmética en diversas demostraciones, obteniendo así una potente herramienta. Define en términos de límite los infinitésimos, cuestión esencial en el proceso de rigorización. Identifica y usa con acierto los conceptos de límites de oscilación, límite superior e inferior.

2) Introduce el concepto de continuidad a través de sucesiones, lo que se convierte en un poderoso instrumento del análisis.

El Cours d'Analyse es la primera obra en la construcción rigurosa del análisis tal y como hoy lo entendemos, escrita en un estilo claro y ameno. Sin duda Cauchy parte de múltiples contribuciones anteriores a esta obra, pero él supo no sólo ver sino, lo que es más importante, construir todo el edificio del análisis desde el concepto de límite, produciendo un sistema coherente y cohesionado donde las distintas técnicas y conceptos cobraron un nuevo significado.

3) Proporciona la primera exposición rigurosa de la teoría de series. Generaliza algunos criterios sólo conocidos para casos particulares (como el del cociente) e introduce otros nuevos; pero sobre todos les da a estos tal generalidad que los convierte en una pieza esencial para el estudio de series. Identifica el concepto de convergencia absoluta y lo separa del de convergencia, siendo el primero que observa la importancia de la convergencia absoluta en el estudio de series de términos cualesquiera. Es el primero que proporciona teoremas rigurosamente probados sobre producto de series y el primero que obtiene la fórmula para la determinación del radio de convergencia de una serie de potencias.

4) En esta obra hay una aproximación muy buena a lo que es el actual tratamiento de los números reales; la existencia previa de los irracionales (obvia para Cauchy y sus contemporáneos) impedía la construcción de los mismos a partir de sucesiones de racionales, pero es justo reconocer que subyacen los elementos básicos para tal tarea, como por ejemplo la definición de operaciones con irracionales a partir de sucesiones de racionales que convergen a los mismos. La compatibilidad de la relación de orden con las operaciones aritméticas son observadas como necesarias por Cauchy. Finalmente, la completitud está presente en múltiples ocasiones y en situaciones diferentes; y si bien es cierto que no hay una identificación de su importancia y, tal vez precisamente por ello, la completitud de los números reales es observada, en sus distintas manifestaciones, como obvia.

5) Introduce sistemática y rigurosamente el tratamiento de la variable compleja. Extiende los resultados del campo real al estudio de series de términos complejos y de series de potencias complejas, efectuan-

do un estudio secuenciado de las funciones complejas elementales.

También aparecen algunas lagunas y algunos errores, producto del aún incipiente camino de clarificación conceptual que se desarrollaría a lo largo de todo el siglo XIX. Pero, incluso en estos errores está también el origen de esa necesaria clarificación y el avance de la profundización conceptual.

Por todo ello y por la notable influencia que ejerció, el *Cours d'Analyse* es sin ningún género de dudas una de las obras esenciales en la construcción del análisis moderno. Y junto con el *Résumé* y las *Leçons sur le calcul différentiel* de 1829 (Cauchy, 1899*b*), forma una trilogía de libros de texto que revolucionaron los fundamentos del análisis.

Por todo ello y por la notable influencia que ejerció, el Cours d'Analyse es sin ningún género de dudas una de las obras esenciales en la construcción del análisis moderno.

Referencias

ABEL, N. H. (1881): *Oeuvres complètes*, Christiania. (ROA).

BELHOSTE, B. (1991): *Augustin-Louis Cauchy, A Biography*, Spinger-Verlag, New York.

BOTTAZZINI, U. (1986): *The higher Calculus: A history of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, Spinger-Verlag, New York.

CAUCHY, A. L. (1821): *Cours d'Analyse*, París. (ROA). Hay una edición facsimilar editada por la SAEM «Thales», Sevilla, 1996.

CAUCHY, A. L. (1899*a*): *Résumé des Leçons données a L'École Royale Polytechnique, sur Le Calcul Infinitesimal*, París, 1823; en *Oeuvres Complètes, II^E Série, Tome IV*, París. (ROA).

CAUCHY, A. L. (1899*b*): *Leçons sur le calcul différentiel*, París, 1829; en *Oeuvres Complètes, II^E Série, Tome IV*, París. (ROA).

CAUCHY, A. L. (1900): *Oeuvres Complètes, I^RE Série, Tome XII*, París. (ROA).

D'ALEMBERT, J. R. (1767): *Encyclopédie ou dictionnaire raissonné des sciences, des arts et des métiers*, Tome 9, segunda edición, París. (ROA).

DIEUDONNÉ, J. (ed.) (1978): *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, Hermann, París.

DUGAC, P. (1973): «Eléments d'analyse de Karl Weierstrass», *Archive for Histotry of Exact Sciences*, 10, 41-176.

DURÁN, A. J. (1996): *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*, Alianza Editorial, Madrid.

FOURIER, J. (1878): *The analytical theory of heat,* University Press, Cambridge. (ROA).

FREUDENTHAL, H. (1970-71): «Did Cauchy Plagiarize Bolzano?», *Archive for History of Exact Science*, 7, 375-392.

GILAIN, C. (1991): «Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul integral», *Archive for History of Exact Sciences*, 42 (2), 91-136.

GRABINER, J. V. (1981): *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*, The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge (Massachusetts).

GRATTAN-GUINNES, I. (1984): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910*, Alianza Editorial, Madrid.

GRATTAN-GUINNES, I. (1970): «Bolzano, Cauchy and the "New Analysis" of the Early Nineteenth Century», *Archive for History of Exact Sciences*, 6, 372-400.

LACROIX, S. F. (1810-1819): *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, París. (ROA).

MONTUCLA, J. E. (1799-1802): *Histoire des Mathématiques*, París. (ROA). (Se conserva también en el ROA la primera edición de 1758, que consta de dos volúmenes y abarca hasta el S. XVII. La edición reseñada es realmente un trabajo ampliado, en cuatro volúmenes, en el que se detallan más los contenidos anteriores y se incluye el S. XVIII. Tras la muerte de Montucla, la tarea fue terminada por el astrónomo J. J. de La Lande, quien será responsable del contenido de la obra desde la página 337 del tercer volumen, con la supervisión de Lacroix en los artículos estrictamente matemáticos).

NEWTON, I. (1760): *Philosophiae Naturalis principia mathematica*, Coloniae. (ROA).

PÉREZ, J. (1998): «Algunas reflexiones desde la historia de las matemáticas: el caso de la evolución del concepto de límite», Conferencia pronunciada en las VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, Jaén. (Por aparecer).

PLA I CARRERA, J. (1992): «The Fundamental Theorem of Algebra before Carl Friedrich Gauss», *Publications Matemàtiques*, 36, 879-911.

PETROVA, S. S. (1974): «Sur l'Histoire des démonstrations analytiques du théorème fondamental de l'algèbre», *Historia Mathematica*, 1, 255-261.

VALSON, C. A. (1868): *La Vie et les Travaux du Baron Cauchy*, Gauthier-Villars, París. (Reimpresión de 1.970 en Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard. París).

WUSSING, H. y ARNOLD, W. (1989): *Biografías de grandes matemáticos*, Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

F. Javier Pérez-Fernández
Antonio Aizpuru
Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Xavier Vilella Miró
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Fidela Velázquez
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Francisco Aguiar Clavijo
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Tomás Ortega
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez
CPR de Santander. C./ Peña Herbosa, 29. 39003-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA