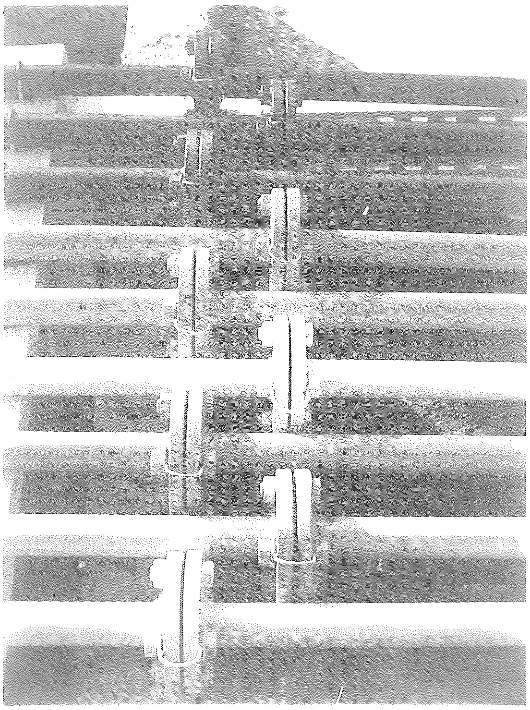
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas   Primavera 1989

PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A., SCPM «Puig Adam», Madrid.
Arias Vílchez, J., SAEM «Thales». I.B. «Auringis», Jaén.
Arrieta Gallastegui, J., Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P., EUPEGB, Cádiz.
Bou García, L., I.B. «Zalaeta», La Coruña.
Benítez Trujillo, F., SAEM «Thales», E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C., Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J., EUPEGB, Santiago de Compostela.
Cancio León, M.ª P., SCPM «Isaac Newton», Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. M.ª, EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A., Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo «Manuel Sacristán», Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J., I.B. «Colmenar Viejo», Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M., SAEM «Thales», I.B. «Padre Poveda», Guadix (Granada).
Díaz Godino, J., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Fernández Sucasas, J., EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. M.ª, Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M., SAEM «Thales», I.B. «Averroes», Córdoba.
García Arribas, C., SAEM «Thales», I.B. «Padre Suárez», Granada.
García Cruz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
García González, E., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
García Cuesta, S., Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M., SAEM «Thales», Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F., SAEM «Thales», EUPEGB, Almería.
Giménez J., EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL, ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA, EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO, Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS, ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO, Escola de Mestres «S. Cugat», Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de, Facultad de Matemáticas, Univers. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
López Gómez, J., SAEM «Thales», I.B. «Luis Cernuda», Sevilla.
Luelmo Verdú, M.ª J., Servicio de Innovación Educativa del MEC, Madrid.
Llinares Ciscar, S., SAEM «Thales», EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A., SAEM «Thales», EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G., Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A., Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P., Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J., Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A., EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L., SAEM «Thales», EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R., SNPM «Tornamira», EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L., SAEM «Thales», I. B. «Emilio Prados», Málaga.
Pérez Fernández, J., SAEM «Thales», IFP «Las Salinas», San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R., SAPM «P. S. Ciruelo», I. B. «Miguel Servet», Zaragoza.
Pérez Jiménez, A., SAEM «Thales», I. B. «Nervión», Sevilla.
Petri Etxeberría, A., SNPM «Tornamira», C.P. «M.ª Ana Sanz», Pamplona.
Puig Espinosa, L., EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Romero Sánchez, J., SAEM «Thales», C.P. «F. García Lorca», Huelva.
Romero Sánchez, S., SAEM «Thales», E.U. Politécnica «La Rábida», Huelva.
Ruiz Garrido, C., SAEM «Thales», Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A., I.B. «San Mateo», Madrid.
Sánchez Cobos, F. T., SAEM «Thales», C.P. «Virgen del Rosario», Jaén.
Santos Hernández, A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA (M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Soto Iborra, F., EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A., SAEM «Thales», C.E. «Blanco White», Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A., SAEM «Thales», I.B. «Trafalgar», Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L., SAEM «Thales», Facultad de Matemáticas, Sevilla.

SUMA 3

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Primavera 1989



Fernando Hernández Rojo

3 Editorial

Artículos

Ideas para la clase

Recursos para el aula

Información

Miscelánea

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas:
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales».
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez.
Apartado 1160. 41080-Sevilla.

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas
«P. Sánchez Ciruelo».
Presidente: Rosa Pérez García.
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza.

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas
«Isaac Newton».
Presidente: Luis Balbuena Castellano.
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife).

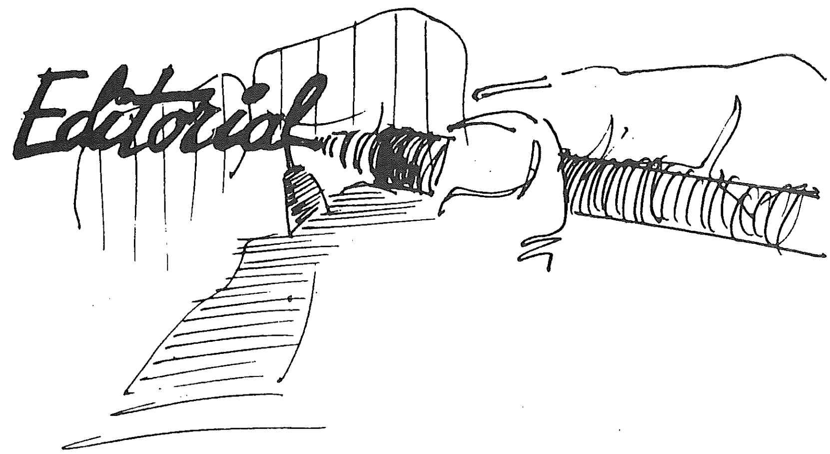
Sociedad Castellonenca de Matemáticas.
Presidente: Charo Nomdedeu.
C/ Mayor, 89. 12001-Castellón.

Depósito legal
Gr. 752-1988

Impresión
GRAFSUR, Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista SUMA
Apdo. 1017. 18080-Granada

Condiciones de suscripción
Particulares: 2.500 PTA (tres números).
Centros: 3.000 PTA (tres números).
Números sueltos: 1.200 PTA.



En el momento actual hay abierto un amplio debate sobre la reforma de las enseñanzas Primaria y Secundaria. Creo que es hora de resaltar el capital humano existente y del que pueden disponer las distintas administraciones educativas en una situación de tal trascendencia.

Existen en el estado español Movimientos de Renovación Pedagógica, Grupos y Sociedades de Profesores de Matemáticas. Entorno a ellos se aglutinan, de modo organizado, miles de profesores que durante muchos años han trabajado en la formación inicial y continuada del profesorado, con una honradez profesional igual a su entusiasmo y, prácticamente, sin medios ni apoyos.

Sus acciones han provocado un estado de opinión favorable para iniciar una reforma del sistema educativo, que lo modernice y supere las muchas limitaciones del actual. Por ello, nos parecería injusto olvidarlos en el debate antes dicho, ya que, éste, bien pudiera haber tenido su origien en ellos.

Más grave sería que las administraciones educativas pensasen desarrollar, por sí solas, todas las actividades necesarias en tan importante proceso. Sería un error de consecuencias previsibles ya que, al menos, hay dos aspectos fundamentales que inciden directamente sobre los profesores:

Primero, el nuevo perfil de profesor, ya apuntado en múltiples documentos oficiales aparecidos sobre diseños curriculares, hay que hacerlo realidad. Si tenemos en cuenta que la edad media del profesorado, actualmente en ejercicio, es baja se desprende que es un buen momento para actuar sobre él.

Segundo, dado que «el factor determinante para que un sistema educativo alcance cotas satisfactorias de calidad radica en el profesorado», es necesario levantar la confianza y el entusiasmo del mismo, convencerle de que es posible cambiar actitudes y métodos, pues con sólo un cambio de contenidos no se modifica todo un sistema educativo.

Por otro lado los cambios no se consiguen sólo con medios económicos, por muchos que éstos sean. Necesitan de animadores cualificados y respetados.

Los Grupos y Sociedades cuentan con gran experiencia, propia y ajena, en el trabajo con profesores. De hecho son quienes han mantenido la preocupación por la formación del profesorado, ofreciendo cursos, seminarios, jornadas, congresos, publicaciones periódicas, etc. que han permitido el acceso de muchos a unos niveles de información e intercambios de experiencias a los que de otro modo no hubiesen tenido acceso. Basándonos en esa experiencia y partiendo de la hipótesis de la validez y consolidación actual de sus trabajos, los Grupos y Sociedades de Profesores pueden ofrecer al sistema educativo una serie de servicios que las administraciones educativas difícilmente pueden cubrir. Los resumimos como sigue:

1. Actuando como asesores/consultores en:
1.1. la elaboración de propuestas generales sobre educación;
1.2. la elaboración de prospectivas sobre diseños curriculares abiertos y flexibles;
1.3. los estudios sobre las necesidades detectadas en el profesorado relacionados, especialmente, con su perfeccionamiento;
1.4. el conocimiento directo de personas y planes que se desarrollan en otros paises.
2. Actuando como «animadores sociales» del cambio:
2.1. ofreciendo al profesorado sus revistas periódicas para el intercambio de experiencias;
2.2. ofreciendo al profesorado sus hemerotecas y centros de documentación en general, mediante boletines de sumarios que le ayudarán en su labor de actualización científica y didáctica;
2.3. siendo sus jornadas, congresos, seminarios, ... un lugar de encuentro para el debate y el contraste de pareceres;
2.4. formando grupos de trabajo que tuvieran como finalidad el estudio de la enseñanza y el aprendizaje en general y de su disciplina en particular;
2.5. ofreciendo, de entre sus miembros, profesores especializados en temas diversos que cuentan no sólo con amplia formación e información sino, además, con el asesoramiento de especialistas cualificados;
2.6. elaborando materiales didácticos que aporten soluciones a problemas nacidos de experiencias e innovaciones educativas;
2.7. fomentando la participación en torneos, concursos, etc., que sirven para popularizar su disciplina a la vez que orientan sobre temas curriculares de actualidad.

Esperamos que tras la consulta, se recoja, en documentos finales, una mención expresa sobre lo que pudiera ser el papel de Grupos y Sociedades en ese futuro próximo de la educación por el que todos hemos apostado.

LUIS BALBUENA CASTELLANO
Vicepresidente de la FESPM

Por un enfoque holístico en la enseñanza de las Matemáticas

Pere Mumbrú i Rodríguez

Resumen

Frecuentemente damos mucha importancia en nuestras aulas al trabajo con problemas y ejercicios rutinarios. De este modo escondemos facetas muy importantes de la actividad matemática.

Sugerimos la conveniencia de un enfoque holístico en la enseñanza de las matemáticas, que nos permita aproximarnos a los métodos vinculados con los aspectos creativos y llegue a producir una imagen más realista de la naturaleza de las matemáticas. Este enfoque puede llevarse a cabo mediante conjuntos estructurados de problemas, de los cuales mostramos algunos ejemplos.

Introducción

En nuestras aulas ponemos demasiado énfasis en el trabajo sobre problemas y ejercicios rutinarios que son coherentes con una «pedagogía de la programación» que se guía por objetivos minuciosos y rígidos en exceso. De este modo escondemos aspectos muy importantes de la actividad matemática y, en cambio, enseñamos sobre todo respuestas automáticas que acaban configurando una imagen distorsionada de la materia. Así, por ejemplo, a los alumnos les parece natural que solamente sea el maestro quien proponga cuestiones o que estas cuestiones tengan una única solución correcta, y consideran que las matemáticas son una colección de definiciones y reglas que hay que memorizar.

Nuestra enseñanza suele también presentar cierta preferencia por los aspectos lógico-verbales de la actividad intelectual frente a los visual-imaginativos. Al distinguir entre componentes visual-imaginativos y lógico-verbales estamos siguiendo la terminología de la escuela soviética [1], pero podríamos hablar de pensamiento lateral y pensamiento lógico como hace De Bono [2], o del hemisferio derecho y del hemisferio izquierdo del cerebro como sugirieron algunos neurólogos de los años sesenta [3], o de los estilos cognitivos basados en imágenes o bien en palabras como prefieren Davis y Hersh [4]. En cualquier caso nos referimos a dos maneras de proceder que, si bien son complementarias, a menudo reciben un tratamiento excluyente. De modo esquemático podemos decir que forman parte de las componentes lógico-verbales: el uso de símbolos abstractos, el lenguaje formalizado, el cálculo, la lógica formal, los procedimientos analíticos y secuenciales... Mientras que formarían parte de las componentes visual-imaginativas: el dominio de las imágenes visuales, los aspectos intuitivos, la capacidad para detectar formas y regularidades, los modos de proceder sintético y holístico... Pues bien, solemos cultivar de manera casi exclusiva las componentes lógico-verbales, relegando a las visual-imaginativas. En cambio, según algunos autores «... los resultados de las investigaciones indican que (...) la mente opera a niveles óptimos cuando las demandas de los procesos cognitivos son de una complejidad suficiente como para activar ambos hemisferios (...) Educativamente esto significa que los problemas repetitivos, simples y sin interés (tales como la mayoría de los cálculos matemáticos), serían comprendidos de manera pobre, con poco beneficio para ambos hemisferios» [3].

La visión que ofrecemos suele ser también esencialmente pasiva. Ciertas habilidades y nociones no son objeto de enseñanza, encontrándose muy poco desarrolladas en los alumnos. Nos referimos, por ejemplo, a saber hacer demostraciones, a la capacidad para reconocer regularidades y estructuras o a la práctica de pequeñas investigaciones. De este modo el alumno medio desconoce el «espíritu matemático», creyendo que aprender matemáticas consiste exclusivamente en ser enseñado primero sobre ciertos métodos estándar, para luego ejercitarse utilizando estos métodos en la resolución de problemas tipo, básicamente mediante la imitación. Las creencias de este tipo están tan enraizadas en ellos que éste será uno de los principales obstáculos para cualquier cambio en el método de trabajo. Si proponemos un nuevo estilo metodológico en clase, deberemos controlar que los alumnos elaboren una nueva imagen de la actividad matemática. Si no, podríamos conseguir un efecto contrario al deseado, aumentando su sentimiento de incapacidad e inseguridad hacia la materia.

Mientras el tratamiento pedagógico de las matemáticas adolece de las deficiencias citadas, la actividad matemática se guía por pautas bien distintas. Para Lakatos [5], las matemáticas como disciplina cultural evolucionan como resultado de la interacción entre las observaciones empíricas y la formalización. La componente empírica es esencial para el proceso deductivo ya que, a menudo, las exploraciones previas determinan la solución deductiva del problema. Y, recíprocamente, la deducción permite descubrimientos inaccesibles a la observación (pensemos, por ejemplo, en la existencia de las curvas sin tangente en ningún punto). Para adecuarse a lo que son las matemáticas, el método de enseñanza ha de ser de naturaleza holística [6], global, contemplando las componentes inductivas y deductivas, las visual-imaginativas y las lógico-verbales, puesto que si los estudiantes no aprenden a dominar todas estas componentes y no aprenden a aprovechar su interacción, no podrán recoger los frutos de sus conocimientos. A nuestro entender la educación matemática, además de proporcionar el dominio de las nociones ya disponibles, ha de favorecer la aproximación a los métodos y a los intrumentos necesarios para la actividad matemática creativa.

Esta aproximación es posible realizarla mediante la presentación de conjuntos estructurados de problemas elementales convenientemente escogidos, cuya resolución no sea trivial, de modo que proporcionen a los alumnos un nuevo paradigma de la actividad matemática.

Escoger estos problemas no es una cuestión fácil en general, pero podemos encontrar contextos inicialmente sencillos, que nos permitan llevar a cabo un trabajo de un nivel muy rico desde el punto de vista matemático. A continuación veremos algunos ejemplos concretos que nos ayudarán a hacer más claro y explícito lo que estamos afirmando.

Buscando cuadrados

Comencemos con una de las cuestiones típicas que se plantean usando un geoplano [7]:

«¿Cuántos cuadrados distintos podemos construir en un geoplano 4 × 4?»

Nos introducimos en el problema con una fase de tanteo experimental que nos permita familiarizarnos con él. Los primeros cuadrados que aparecen son los que podríamos llamar *verticales.*

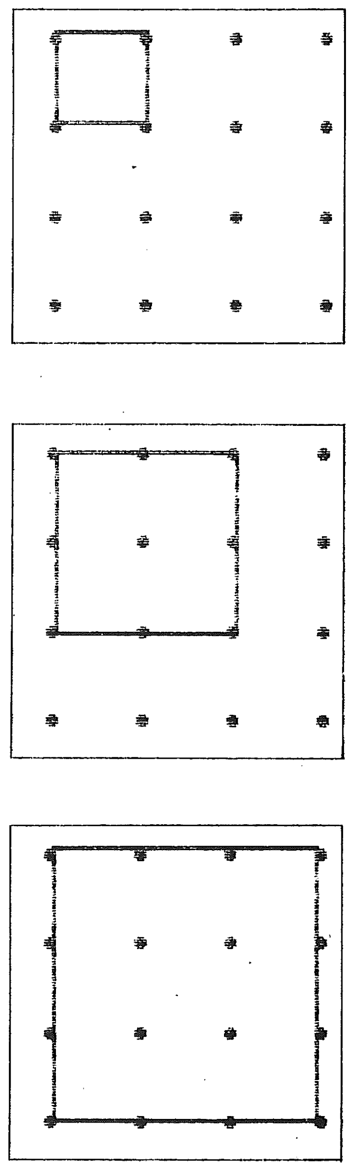


Figura 1

Constatamos en los alumnos unas primeras resistencias a reconocer cuadrados en posición distinta a la de los tres indicados. Éstas son probablemente resultado del aprendizaje condicionado, producido al mostar casi siempre en los ejemplos las figuras en una posición determinada.

Si llamamos su atención respecto al significado de *distintos* (¿cuándo han considerado que dos cuadrados son *distintos*?), llegaremos a explicitar que la igualdad la entendemos en el sentido de congruencia geométrica. De este modo un tipo de cuadrados queda determinado por una longitud, la del lado o la de la diagonal, o por su superficie.

Pero, ¿realmente los tres cuadrados *verticales* son todos los posibles? Todos están convencidos de que debe haber otros y fácilmente descubren los que bautizamos como cuadrados *inclinados*.

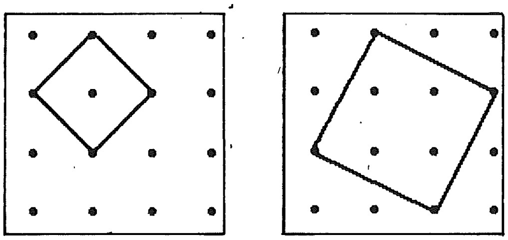


Figura 2

En total hemos obtenido cinco cuadrados; todos creen que no existe ninguno más y no sienten ninguna necesidad de demostrar que estos cinco son los únicos. Para ellos «es evidente». El problema hasta aquí ha resultado muy fácil y *pide un estudio más profundo*. La generalización natural aparece en consecuencia:

«*Si en un geoplano 4 × 4 hay 5 cuadrados distintos, ¿qué ocurrirá en uno n × n?*».

Exploremos los primeros valores:

GEOPLANO	2X2	3X3	4X4	...
NUMERO DE CUADRADOS	1	3	5	

Figura 3

Una conjetura aparece inmediatamente. «En el geoplano 5 × 5 encontraremos 7 cuadrados y, en el $n \times n$, encontraremos $2n - 3$». Insistimos, «¿seguro?». «Si, es evidente.»

Pero al buscar todos los cuadrados en un geoplano 5 × 5, nos aparecen 3 cuadrados nuevos.

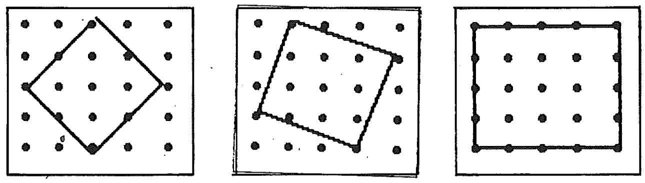


Figura 4

Nuestra conjetura no era buena, debemos buscar otra que se ajuste mejor a los hechos. Ampliamos un poco la tabla experimentalmente:

GEOPLANO	2X2	3X3	4X4	5X5	6X6	7X7	...
NUMERO DE CUADRADOS	1	3	5	8	11	15	...

Figura 5

Aunque algunos parecen encontrar cierto placer en ir tanteando y encontrando nuevos valores, no podemos continuar indefinidamente. Recapitulemos e intentemos sistematizar lo que sabemos hasta ahora.

Un cuadrado queda determinado por su diagonal. Dada una diagonal podemos construir la otra diagonal perpendicular a la primera y obtenemos el cuadrado.

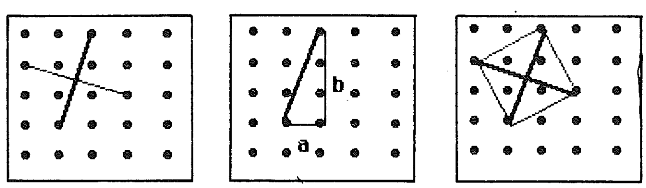


Figura 6

¿Cómo podemos encontrar todas las diagonales? Cada diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y b, siendo a y $b < n$.

(Podemos admitir que a o b son cero). Entonces las posibles diagonales serán las correspondientes a los valores de $(a^2 + b^2)^{1/2}$. El razonamiento nos parece plausible y, en consecuencia, calculamos el número de diagonales con longitudes distintas, que serán las correspondientes a los triángulos rectángulos isósceles, más las combinaciones de n elementos de dos en dos, es decir: $(n - 1) + n \cdot (n - 1)/2 = (n - 1)(n + 2)/2$. Pero si damos valores a n resulta que para un geoplano 2×2 obtendríamos 2 diagonales, para uno 3×3 obtendríamos 5, etc. Estos datos no coinciden con el número de cuadrados indicados en la tabla de la figura 3. ¿Cuál ha sido nuestro error? En el geoplano 2×2 las dos diagonales serían $2^{1/2}$ y 1, pero en cambio sólo podemos construir un cuadrado. De este modo se hacen necesarias más condiciones de compatibilidad sobre los segmentos para que el cuadrado resulte construible.

Nos replanteamos el problema y abandonamos el último punto de vista. Quizá la longitud de los lados, en lugar de las diagonales, nos proporcione una información más útil.

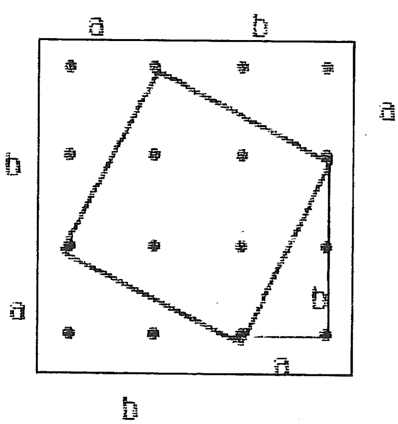


Figura 7

Cada lado también es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y b cuya longitud es entera. La longitud del lado será $(a^2 + b^2)^{1/2}$ y el área del cuadrado resulta $a^2 + b^2$. Cuando a o b son cero, el cuadrado es *vertical.* Así, todo cuadrado en el geoplano queda definido por un par de números (a,b).

¿Existe ahora, de modo parecido a lo que ocurría anteriormente, alguna acotación sobre los posibles valores de a y b? A lo sumo el cuadrado tendrá los vértices en la frontera del geoplano y por lo tanto $a + b < n$. Contemos el número total de posibilidades según sean los valores de a y b. Después de diversos intentos, alguien sugiere un procedimiento «regular».

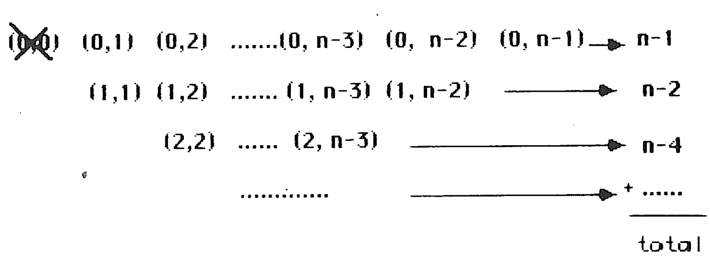


Figura 8

El último valor dependerá de si n es par o impar. En concreto, el número total será $[n(n + 2) - 4]/4$ si n es par y $[(n + 1)^2 - 4]/4$ si n es impar.

Si damos valores, se satisfacen los casos de la tabla indicada en la figura 5. Pero al considerar $n = 8$ surgen nuevas dificultades. Hemos olvidado un detalle importante: puede haber dos cuadrados iguales aunque no correspondan a los mismos valores de a y b. Por ejemplo, los cuadrados (3,4) y (0,5) en un geoplano 8×8 son iguales.

De este modo aparece una nueva cuestión: «*¿cuántas representaciones distintas tiene un entero como suma de cuadrados?*»

Esto nos lleva a considerar un resultado de Teoría de Números [8], cuyo descubrimiento y demostración se alejan notablemente del nivel de dificultad en el que nos estamos moviendo. En concreto la propiedad afirma que: «el número de representaciones de un entero como suma de los cuadrados de dos enteros es cuatro veces la diferencia entre los divisores de n de la forma $4k + 1$ y los de la forma $4k + 3$». En realidad pues, lo que hemos hallado es el número de cuadrados distintos del tipo (a,b) que podemos hacer, considerando que son distintos cuando (a,b) no coincide en ambos.

Pero volvamos a la pregunta inicial. ¿Qué significa estrictamente «construir un cuadrado en un geoplano»? ¿El cuadrado de la figura 9 está construido en un geoplano? [9].

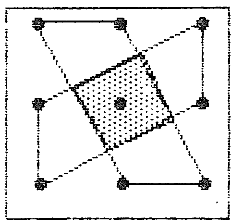


Figura 9

Ya sabemos que una clase de cuadrados queda determinada, de modo equivalente, por su diagonal, su lado o su área.

¿Cuáles son, en este caso, diagonal, área o lado?

Intuitivamente nos parece que el área puede brindarnos el punto de vista más abordable. Para calcular el área del cuadrado indicado, casi todos empezamos utilizando una estrategia de descomposición de figuras.

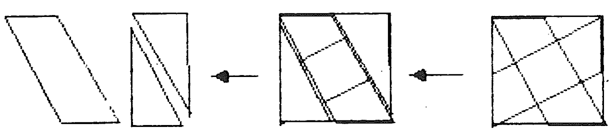


Figura 10

Obtenemos una primera observación: el paralelogramo y el rectángulo resultante tendrán la misma área que, a su vez, coincide con la mitad del área del geoplano. ¿Y a partir de aquí? ¿Estamos en un callejón sin salida?

Persistamos en las descomposiciones. Dos figuras llaman nuestra atención, dos tipos de triángulos rectángulos: unos, los T, que tienen por catetos el lado y la mitad del lado del geoplano, y otros, los t, cuya hipotenusa es la mitad del lado del geoplano.

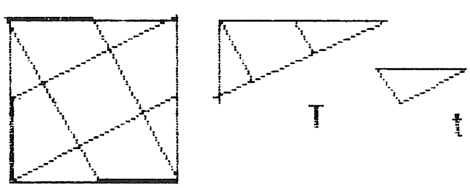


Figura 11

Al ser semejantes estos triángulos deducimos la relación existente entre sus áreas A_T y A_t. En concreto, $A_t/A_T = [(1/2)\ /\ (5/4)^{1/2}]^2 = 1/5$. A partir de este valor podemos calcular, por descomposición de figuras, la relación existente entre el área del geoplano y el área del cuadrado indicado. En particular, $1 - 4A_T + 4A_t = 1 - 4(1/4) + 4(1/5)(1/4) = 1/5$.

Pero, además de este modo de proceder tan analítico, ¿no podemos resolver el problema mediante una aproximación más global? Probemos con un nuevo enfoque. Si dibujamos la situación en un papel cuadriculado de 10×10, podemos calcular las áreas.

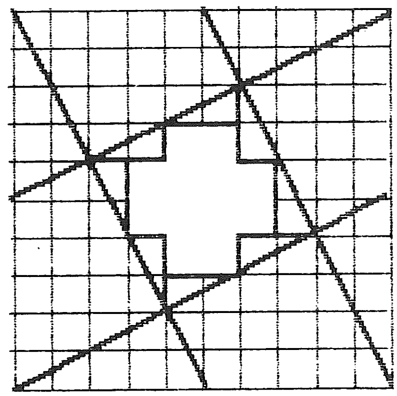


Figura 12

El área de la «cruz» central es 12, más 8 de los ocho triangulos rectángulos hacen un total de 20. Por otra parte, la superficie correspondiente a todo el geoplano sería 100; por lo tanto la superficie buscada es 1/5 del área total.

Pero este método no parece demasiado interesante, da la impresión de excesivamente particular. En efecto, con un cuadrado 12×12 ya no serviría.

La repetición de la figura que estamos considerando nos conduce a un método de resolución absolutamente intuitivo, casi un método «sin palabras».

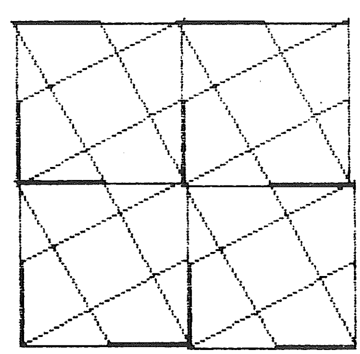


Figura 13

Agrupando convenientemente la partes de la figura implicadas, podemos ver que el cuadrado interior es 1/5 del geoplano.

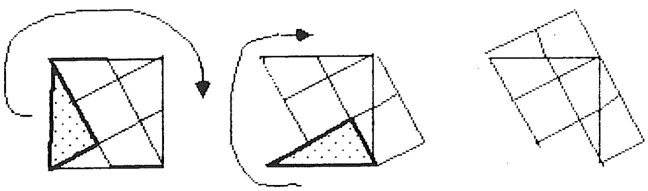


Figura 14

Este resultado lo hemos obtenido cuando trazamos líneas que unen un vértice con el punto medio de uno de los lados opuestos. Pero, *¿qué ocurre en general?*

De modo parecido a lo que dijimos antes, cada lado del cuadrado interior está formado por una línea que quedará caracterizada por dos números enteros positivos a y b, con $a > b$. Estos dos números determinan una dirección en una trama cuadriculada de puntos (un «geoplano infinito»). Observamos también que el otro valor que será relevante es la «distancia» entre las rectas paralelas. Es decir, situaciones como las siguientes serán equivalentes.

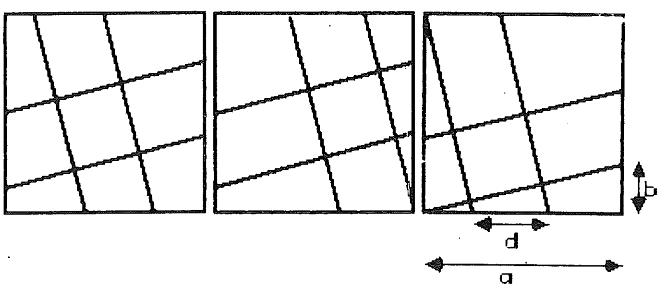


Figura 15

Para fijar ideas, consideremos que dos de las líneas que determinan el cuadrado pasan por los vértices de la izquierda del cuadrado formado por el geoplano $n \times n$, tal como indica el primer dibujo de la figura 15. Consideremos, por ejemplo, una situación de este tipo, con $n = 4$, $a = 3$, $b = 2$ y $d = 1$. Si utilizamos el último método propuesto aparecen dos cuadrados que, mediante un cambio de unidades, resultarán de lado a y lado b, siendo el área buscada $d^2/(a^2 + b^2)$ del total, es decir, $a^2\, d^2/(a^2 + b^2)$.

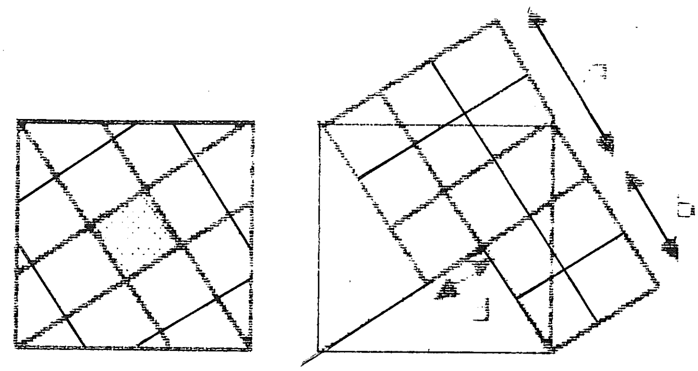


Figura 16

Fijémonos en que esta expresión es válida también para los cuadrados *verticales e inclinados*. Para los *verticales* tendremos $b = 0$ y $d = a$, de donde el área resulta a^2. Mientras que para los *inclinados*, es $b/(d - a) = a/b$ y el área resulta $a^2 + b^2$.

Al abordar el problema anterior mediante la descomposición de figuras, hemos utilizado modelos de papel para representar la situación. Efectuando los pliegues en el papel, surge muy a menudo un error (relacionado quizá con problemas de «lateralidad»), consistente en que uno de los pliegues se hace siguiendo una de las diagonales del cuadrado.

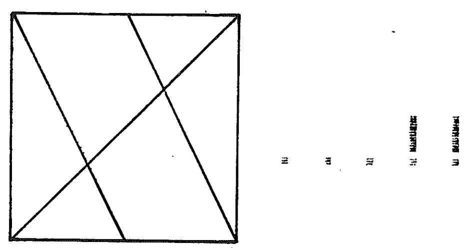
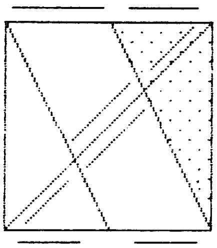


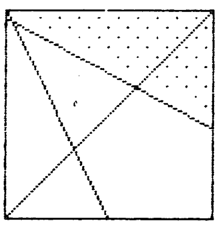
Figura 17

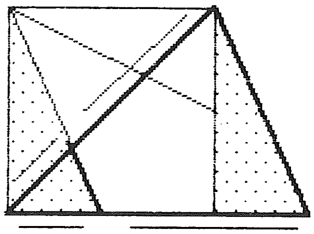
Algunos comentarios espontáneos de los alumnos nos plantean un nuevo problema: «*¿la diagonal queda dividida en tres partes iguales?*».

Surgen diversos tipos de argumentaciones que nos pueden permitir ilustrar desde los enfoques más analíticos hasta los más sintéticos y visuales. Veamos esquemáticamente una muestra de esta variedad de enfoques, agrupando las diferentes soluciones en dos clases, según utilicen la descomposición de superficies o las propiedades que se deducen de la semejanza de figuras planas.



Del Teorema de Tales deducimos que las tres partes son iguales. Y coinciden con la participación que nos interesa.

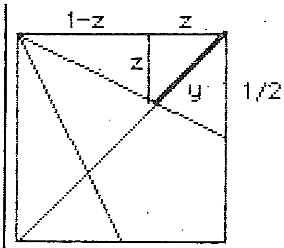




1/3

1/3

Del Teorema de Tales deducimos que una de las partes es 1/3 del total.

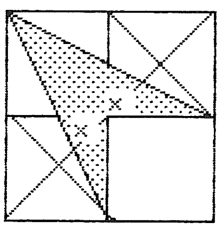


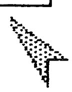
$(1 - z)/1 =$
$= z/(1/2)$

por lo tanto

$y = \sqrt{2}/3$

es la tercera parte de la diagonal.



El área de 

es 1/4 y descompone en suma de áreas:

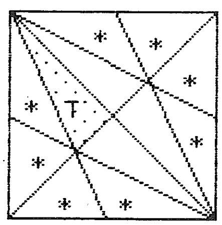
 ++ 

$1/4 = (1/2)(\sqrt{2}/2)$
$(2x) + 2(1/2) \cdot x \cdot$
$\cdot (\sqrt{2}/4)$

Por lo tanto

$2x = \sqrt{2}/3$

2x = √2/3



 descompone en tres triángulos equivalentes

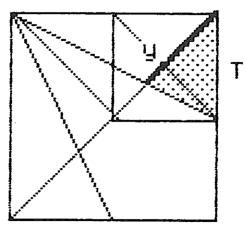
$A_* = 1/3 \cdot 1/4 =$
$= 1/12$

$A_T = (1/4)$
$(1 - 8/12) = 1/12 =$
$= (1/2) \cdot x \cdot (\sqrt{2}/2)$

Por lo tanto

$2x = \sqrt{2}/3$

es la tercera parte



$A_T = (1/2) \cdot y \cdot$
$\cdot (\sqrt{2}/4) = 1/4 -$
$- (1/2) \cdot y \cdot$
$\cdot (\sqrt{2}/2)$

Por lo tanto

$y = \sqrt{2}/3$

es la tercera parte de la diagonal.

A modo de conclusión

Encontrar el equilibrio adecuado en el grado de «dirección» de las actividades que proponemos en las clases de matemáticas es una de las dificultades importantes que aparecen en nuestro camino. Si están demasiado guiadas, las actividades llegarán a producir esencialmente conductas mecánicas; si lo están demasiado poco, producirán un bloqueo, una incapacidad de respuesta a las cuestiones planteadas. El hecho de que una situación resulte poco o muy dirigida, mecánica o adecuada para una investigación, no dependerá solamente las cuestiones planteadas en sí, sino también de una actitud mental del maestro hacia la materia. Actitud que podremos desarrollar en nuestros alumnos si nosotros mismos llegamos a estar impregnados de ella.

Al utilizar técnicas elementales, podemos concentrarnos en las estrategias usadas en la solución de los problemas que estamos considerando. Por lo tanto escogemos las situaciones de modo que, por ejemplo, se favorezca la capacidad de realizar conjeturas, contrastando su certeza y aceptándolas o refutándolas como plausibles o no; se descubran las regularidades matemáticas escondidas en una situación dada; se llegue a apreciar la necesidad de justificar la verdad de las conjeturas efectuadas, realizando las demostraciones al nivel conveniente; se avance en el estudio a través de reformulaciones sucesivas del problema original; etc. [10]. En suma, no se trata de evaluar la capacidad de los alumnos para resolver distintos tipos de problemas, sino de ofrecerles situaciones de aprendizaje en las que puedan aumentar sus habilidades, al tiempo que van adquiriendo una concepción más auténtica de la naturaleza de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

[1] VA. KRUTESKY. «Algunas características del pensamiento en escolares con escasa aptitud para las matemáticas», en Luria, Leontiev y Vigotsky. *Psicología y Pedagogía,* Akal, Madrid, 1979.

[2] E. DE BONO. *El pensamiento Lateral,* Paidós, Barcelona, 1986.

[3] JL. CRESWELL, C. GLIFORD y D. HUFFMAN. «Implications of Right/Left Brain Researh of Mathematics Educators», *School, Science and Math. 88,* 118-131 (1988).

[4] PJ. DAVIS y R. HERSH, *Experiencia Matemática,* MEC-Labor, Barcelona, 1988.

[5] I. LAKATOS, *Pruebas y Refutaciones,* Alianza, Madrid, 1982.

[6] G. GADANIDIS. «Problein Solving: The Third Dimension in Mathematics Teaching», *Math. Theacher. 81,* 16-21 (1988).

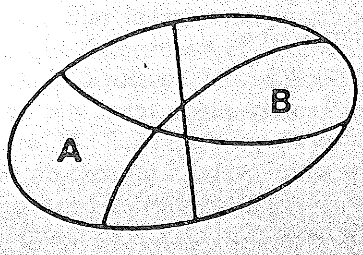
[7] K. HEDGER y D. KENT. «Given Two Points», *Math. Teaching. 84,* 19-21 (1978).

[8] GH. HARDY y EM WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers,* Clarendon Press, Oxford (1.ª ed., 1938) 1988.

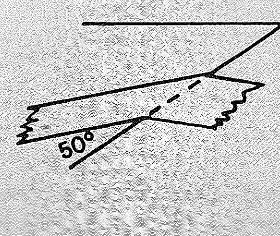
[9] S. CASEY y B. CLEMENS. «The Area of a Square», *Math. Teaching. 85,* 32-35 (1978).

[10] A. GARDINER. «Mathematical Method: does it exist?», *The Mathematical Gazette. 71,* 265-271 (1987).

Si cada una de las líneas divide la superficie del dibujo en dos partes iguales, ¿cuál es mayor, el área A o la B?, ¿o no es posible decirlo?



Una cinta de papel es doblada sobre una arista de un cubo tal y como se muestra en la figura.



El ángulo entre la cinta y la arista sobre una cara es de 50 grados. ¿Cuál será el ángulo entre la arista y la cinta sobre la cara contigua del cubo?

WELLS, D., *Can you solve these?,* Tarquin Publications, 1986.

La analogía en la formación de conceptos

Francisco Hernán
(Grupo Cero)

Hilo para las redes

1. Estoy hablando por teléfono con Londres y arreglamos una cita en un café de la calle... (óigo algo parecido a «lafbra»);

— ¿Cómo dices?

— «Lafbra», esquina a «güelinton».

— Deletréalo, por favor.

— L, de Logroño; O, de Oslo; U, de Universo; G, de Guadalajara, H, de Huesca, B, de Barcelona, O de Oslo...

— Ya lo tengo. Allí nos veremos.

¿Por qué no le he pedido que deletree Guadalajara o Huesca? ¿Por qué ha deletreado la primera palabra y no la segunda? ¿Por qué no le he pedido yo que deletree la segunda?

2. *a)* Encima de la mesa hay una tarjeta (ver figura 1).

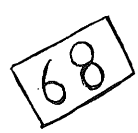


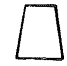
Figura 1

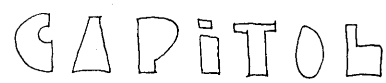
¿Cómo sé si es el número sesenta y ocho o el ochenta y nueve?

b) Si la tarjeta fuese esta otra (ver figura 2).

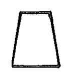
Figura 2

no habría ninguna duda. Es el tres el que determina a los otros dos.

3. ¿Qué es  ?
¿Un trapecio?
¿La primera letra mayúscula del alfabeto?



¿La letra griega «delta»?

«Me he inscrito en un curso de ala  »

Depende. Depende de otras cosas: de los contextos, de otros conceptos, de otros símbolos, de mi historia, de mis gustos, de mis conocimientos.

Resonancia

Los ejemplos precedentes son pretextos o pretextos para algunas afirmaciones que no sabría justificar sino de metáforas y analogías. Pero ¡ay! ni unas ni otras se transfieren por procedimientos lógicos, sino por fragmentos de experiencia compartida entre el emisor y el receptor, que a menudo se comunicarán mejor por un guiño que por una larga explicación.

Porque es una grata cualidad de los seres humanos el que muchas veces tengamos la capacidad de entrar en resonancia con la experiencia de otros y reconocer así que nuestra experiencia es a la vez personal y generalizada [1]. O, dicho con más intimidad: «Sólo adquiere consistencia *real* lo que se reconoce una vez vivido. Primero reposa dentro sin que uno pueda nombrarlo; luego surge de improviso como imagen, y lo que a otros les ocurre se abre paso en uno mismo en forma de recuerdo: entonces es algo real» [2].

A aquella resonancia —y no a su irrefutabilidad— confían su significado las declaraciones que tutelarán el desarrollo de estas páginas y que pueden ser consideradas o bien como punto de partida o bien como punto de llegada —cada uno lo decidirá en virtud de su propia experiencia:

1 Cfr. John MASON: «Only awareness is educable», en *Mathematics Teaching,* septiembre, 1987.
2 Elías CANETTI, *La antorcha al oído,* pág. 123, Muchnick editores, 1985.

El conocimiento no se forma mediante una sucesión de conceptos que se almacenan. El proceso no consiste en adquirir un concepto y luego almacenarlo en la memoria junto a otros. Sino que forma parte del propio hecho de ser un concepto el *modo* de estar almacenado en la memoria. No es un concepto hasta que no está en una *red*, en un mapa, en una estructura. Esta estructura conceptual es tanto más sólida cuanto mayor es el número de sus conexiones. De ahí que un concepto evolucione en la mente y esté en ella más o menos arraigado. Y de ahí también que muchos conceptos estén permanentemente abiertos y no encerrados en una disciplina particular, ni siquiera en las matemáticas, porque los enlaces que les van dando substancia proceden de conocimientos, experiencias, imágenes, creencias, filosofías, que a su vez están en continua renovación, selección y encaje.

Por analogía

La analogía, como tejedora de fragmentos y creadora de conexiones es uno de los principales determinantes del modo de almacenamiento, es decir, de la formación de conceptos.

Eso es al menos lo que se quiere exponer en lo que sigue, tomando un ejemplo como caja de resonancia para la generalización.

a) *Los primeros pasos*

Si a un grupo de personas se le da un montón de fichas de parchís y se pide a cada una que haga con esas fichas lo que quiera, es muy probable que entre las cosas que hagan estén estas: (ver figuras 3 y 4)

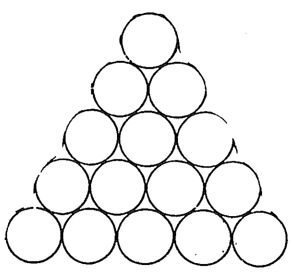


Figura 3

y que perciban aquí triángulos en sucesión descendente

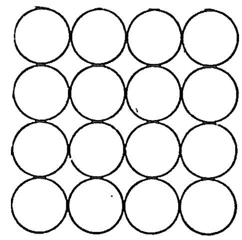


Figura 4

y perciban aquí cuadrados en sucesión expansiva[3]

¿Se pueden asociar *números* a los triángulos sucesivos?

3, 6, 10, 15, 21, 28...

¿Y a los sucesivos cuadrados?

4, 9, 16, 25, 36, 49...

Ahora bien, estos últimos son los cuadrados numéricos, los números cuadrados. Entonces los números 3, 6, 10, 15, 21, 28... adquieren, por analogía, un atributo nuevo: son los *números triangulares.*

¿Habrá, por analogía, *números hexagonales*? ¿Cuáles serán?

Ahora es más difícil formar un hexágono manipulando las fichas, porque su contacto es menos compacto, queda un hueco (ver figura 5)
pero si se coloca una ficha en el hueco todo encaja de manera sencilla (figura 6)

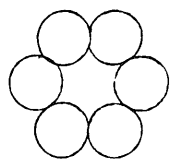


Figura 5

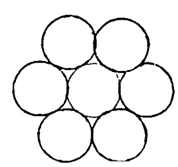


Figura 6

y haciendo nuevas capas de círculos tendremos efectivamente números hexagonales: 1, 7, 19, 37, 61...

(Además no es extravagante empezar por el 1 —el círculo se parece mucho al hexágono— lo cual sugiere que también sería razonable empezar por 1 los números cuadrados y los números triangulares.)

¿Y los números *pentagonales*?

En seguida se ve que algo no funciona. No se puede construir alegremente un pentágono regular con cinco fichas. Por añadidura, una vez hecho, queda un hueco irrellenable. ¿Qué pasa?

Pasa que los pentágonos regulares no compactan el plano por sí solos.

[3] En tan sólo un par de líneas ya hay dos analogías («triángulo» y «cuadrado») y dos metáforas («descendente» y «expansiva»).

Descubrimos o redescubrimos así un soporte geométrico para la analogía y este soporte la fortalece en unos casos y la debilita, al hacer fallar en otros.

b) *Revisión*

Al analizar el proceso se ve que se han estado haciendo analogías a un nivel más profundo: hemos usado el círculo como si fuese un cuadrado, como si fuese un triángulo equilátero, como si fuese un hexágono regular; y ello sin hacerlo explícito.

Es cuando se ha querido hacer ocupar al círculo el lugar de un pentágono regular cuando esta analogía de nivel más profundo ha necesitado de una revisión. Y esta revisión se extiende a la consideración del círculo como pieza para los mosaicos regulares.

En los números triangulares se ha utilizado esta imagen (figura 7)

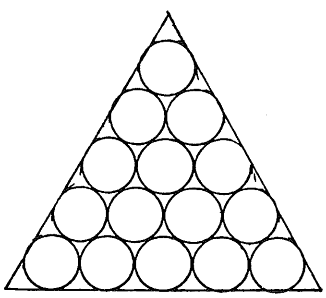


Figura 7

mientras que la imagen de mosaico regular triangular es esta otra (figura 8).

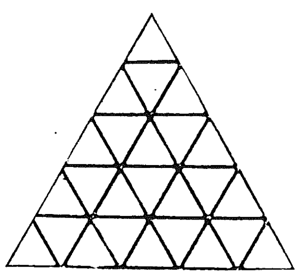


Figura 8

Con lo que, en realidad, los números triangulares tendrían que haber sido 1, 4, 9, 16, 25, 36...

¡Que son los números cuadrados!

Es decir, que los números triangulares no procedían de formar triángulos cada vez mayores, por ampliación, sino que tenían su origen en este otro mosaico triangular (figura 9).

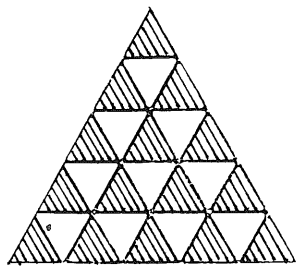


Figura 9

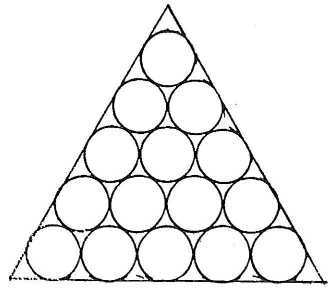


Figura 10

que es plausiblemente análogo a esta otra (figura 10).

Tenemos, pues, recuperados los números triangulares 1, 3, 6, 10, 15..., que provienen de los triángulos negros de la figura 9. Y al recuperarlos nos encontramos con una novedad: los triángulos blancos de la figura 9 vuelven a formar una sucesión de números triangulares,

(los negros)	1,	3,	6,	10,	15,	21 ...
(los blancos)		1,	3,	6,	10,	15 ...

Es decir, que cada número cuadrado es la suma de dos números triangulares:

$$C_n = T_n + T_{n-1}$$

¿Y en los números hexagonales?

Hemos utilizado esta imagen (figura 11)

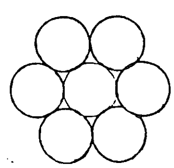


Figura 11

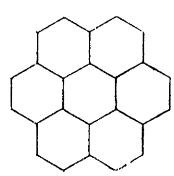


Figura 12

cuando, en verdad, la imagen de mosaico regular hexagonal es ésta (figura 12)

que en sí misma no es un hexágono.

¿Significa esto que hay que abandonar la analogía para los hexágonos?

No, no hay que hacerlo si bajamos a un nivel todavía más profundo: sustituir los hexágonos no por sus círculos circunscritos, sino por sus centros (figura 13).

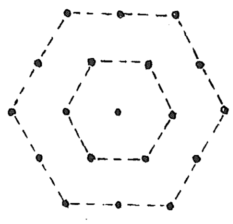


Figura 13

De esta manera podemos lograr de nuevo una visión unitaria, pero reorganizada ahora en torno a puntos y no a círculos.

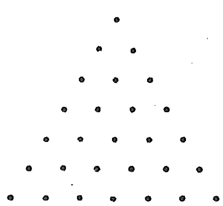


Figura 14

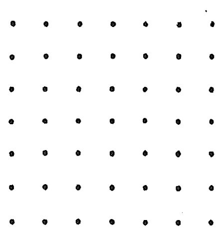


Figura 15

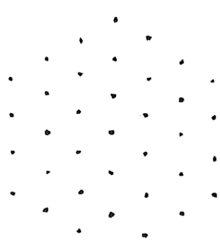


Figura 16

Con las siguientes relaciones numéricas:

$T_1 = 1$

$T_2 = 1 + 2 = 3$

$T_3 = 1 + 2 + 3 = 6$

$T_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

...

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

El n–simo número triangular es la suma de los n primeros números naturales.

$C_1 = 1$

$C_2 = 1 + 3 = 4$

$C_3 = 1 + 3 + 5 = 9$

$C_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

...

$C_n = T_n + T_{n-1} = 2\ T_n - n = n^2$

El n–simo número cuadrado es la suma de los números triangulares n–simo y $(n - 1)$ – simo.

$H_1 = 1$

$H_2 = 1 + 6 = 7$

$H_3 = 1 + 6 + 12 = 19$

$H_4 = 1 + 6 + 12 + 18 = 37$

...

$H_n = ?$

Debería esperarse una relación entre los números hexagonales y los números triangulares, porque un hexágono está compuesto por seis triángulos; y, en efecto, esa relación existe (figura 17).

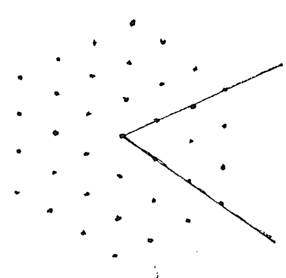


Figura 17

$H_n = 6\ T_n - 6$ veces el radio (porque cada radio se ha contado dos veces) + 1 (que es el del centro)

$= 6(T_n - n) + 1$

$= 3\ n\ (n - 1) + 1$

c) *Extensión*

Tejida la red pueden hacerse tres cosas: c.1) hacer una red de mayor tamaño; c.2) seguir formando nuevos nudos, nuevas relaciones, hacer la red más tupida; c.3) tejer otra red diferente, pasar a otro campo conceptual.

c.1) *Una red de mayor tamaño,* introduciendo una dimensión nueva:

Si hemos explorado los polígonos regulares, una extensión natural serán los poliedros regulares.

Las condiciones de la analogía se agotan ya de entrada para los hexágonos, que no tienen análogos en el espacio. Quedan los cuadrados que llevarán a los cubos. Y quedan los triángulos equiláteros que llevan a los tetraedros regulares. Los cubos llenan el espacio por compactamiento y hay números cúbicos. Pero los tetraedros no llenan el espacio por compactamiento,

cuatro triángulos equiláteros pequeños forman un triángulo grande (figura 18)

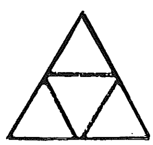


Figura 18

pero cuatro tetraedros regulares pequeños no forman un tetraedro regular grande. Así que no hay números tetraédricos.

Sin embargo, una vez más, eso no significa abandonar el campo, sino solamente abandonar la compacticidad y volver a quedarse con círculos (o con puntos) y sus análogas, las esferas. En ese caso, las figuras 3, 4 y 5 ganan la vertical y nacen los *números piramidales.*

Piramidales triangulares: formados por capas sucesivas ascendentes de números triangulares,

... 21, 15, 10, 6, 3, 1.

Piramidales cuadrados: formados por capas sucesivas ascendentes de números cuadrados,

... 25, 16, 9, 4, 1.

Piramidales hexagonales: formados por capas sucesivas ascendentes de números hexagonales,

... 61, 37, 19, 7, 1 [4].

$$(PT)_n = \sum_{i=1}^{i=n} T_i \qquad (PC)_n = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \qquad (PH)_n = \sum_{i=1}^{i=n} H_i$$

c.2) *Una red más tupida:* transferencias de actividades propias de la estructura interna de una trama plana a la estructura interna de otra.

Si consideramos un tablero de ajedrez (figura 19) [5]

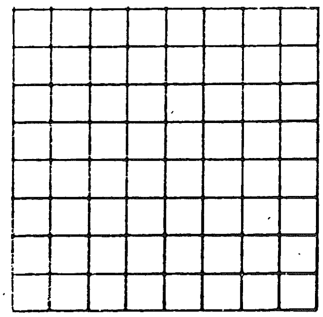


Figura 19

¿pueden concebirse tableros triangulares o hexagonales? ¿Son estos los más razonables? (figuras 20 y 21)

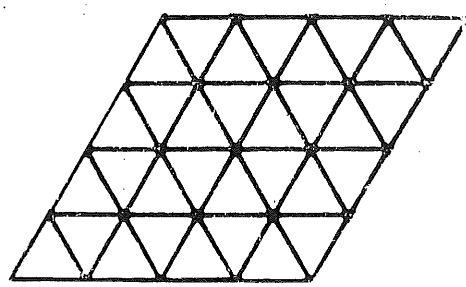


Figura 20

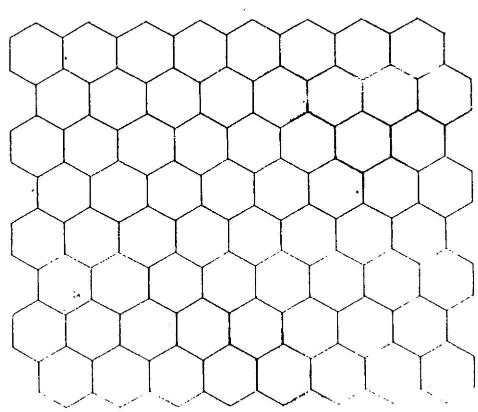


Figura 21

[4] Otra bifurcación de ser aquí tenida en cuenta. Los números piramidales triangulares y cuadrados correponden a apilamientos de esferas como apilamientos de naranjas en un mercado. Pero otros números piramidales hexagonales no se corresponden con ese apilamiento, las naranjas quedarían inestables. Otros números piramidales hexagonales son, pues, posibles.

[5] Esta idea procede de Douglas R. Hofstadter, *Metamagical Themas,* Basic Books, New York, 1985.

¿Cuál sería en cada uno de estos tableros el movimiento análogo al del caballo en el tablero cuadrado?

Hay varias posibilidades (figuras 22 y 23)

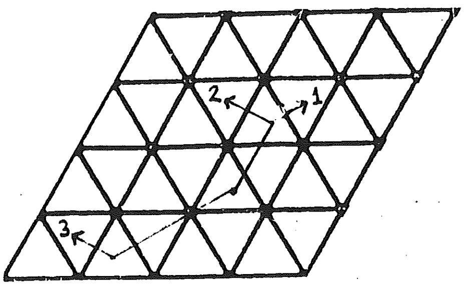


Figura 22

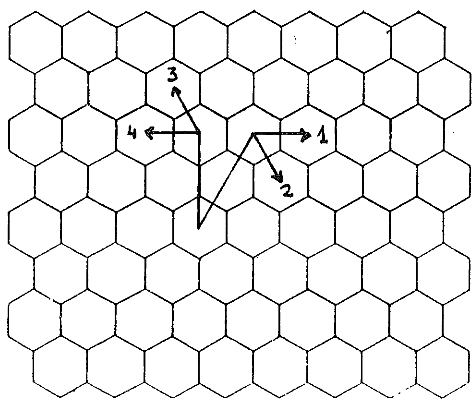


Figura 23

¿Cuál de ellas es la adecuada?

La respuesta es discutible. Pero se introduce un elemento nuevo cuando el objeto inicial, el tablero cuadrado, se define con más precisión; porque a ese tablero le falta una condición esencial en el juego del ajedrez: el tablero debe tener blancos y negros (figura 24) y el caballo cambia, en su movimiento, a una casilla de otro color.

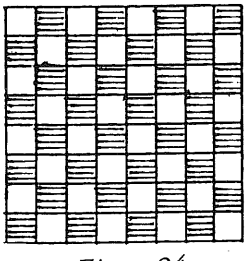


Figura 24

Así que los otros tableros deberán tenerlos también (figura 25).

Los tres movimientos propuestos sirven. ¡Pero se puede ser aún más preciso: en el tablero cuadrado el caballo describe un ángulo recto!

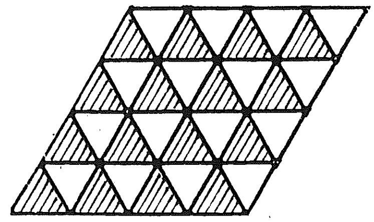


Figura 25

¿Cuál de los tres movimientos cumple esta última condición? Solamente el movimiento 2. ¿Pero es esa la condición análoga en el tablero triangular? ¿No será más bien lo otro, es decir, que un ángulo recto en un tablero cuadrado tenga como análogo un ángulo de 60 grados (o de 150 grados) en un tablero triangular?

En el hexagonal aún hay que ir más al fondo. Cuando se intenta colorearlo de blanco y negro se aprecia que hay otra condición esencial en el tablero cuadrado y es que dos cuadrados del mismo color no pueden estar contiguos, esto es, no pueden tener un lado común. Pero esa condición no se puede cumplir en el hexagonal, salvo que se usen tres colores (figura 26).

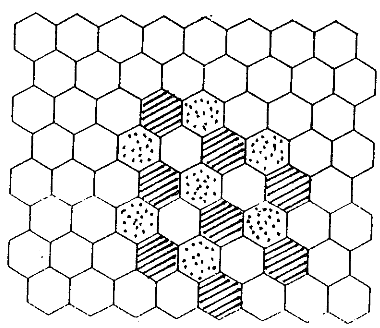


Figura 26

De todas esas condiciones, el movimiento 2 no cumple la del cambio de color; el 4 no cumple la del cambio de ángulo. Quedan, por consiguiente, en pie los movimientos 1 y 3. ¿Cuál de los dos es el «más análogo»?

Y seguramente no se podrá decir hasta que no se consideren los movimientos de las otras piezas del ajedrez: el alfil, la torre, etc. El movimiento del caballo no puede ser considerado aisladamente, sino en relación con los otros, formando una estructura conceptual poblada de conceptos que están en relaciones mutuas que la solidifican.

¿No es así como aprendemos a leer, o como aprendemos a distinguir un arbusto de un árbol? ¿No sabemos mejor lo que es el color verde cuando descubrimos que puede obtenerse con amarillo y azul?

c.3) *Una red en otro campo conceptual*

Las fichas del parchís nos han llevado lejos. Otros materiales, también sencillos, pueden ayudarnos en la creación de analogías. Empleando cubitos encajables de varios colores puede comenzarse de muchas maneras. Por ejemplo, con la siguiente propuesta: hacer una figura parecida a la de la figura 27, donde letras diferentes simbolizan colores diferentes.

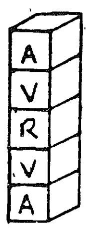
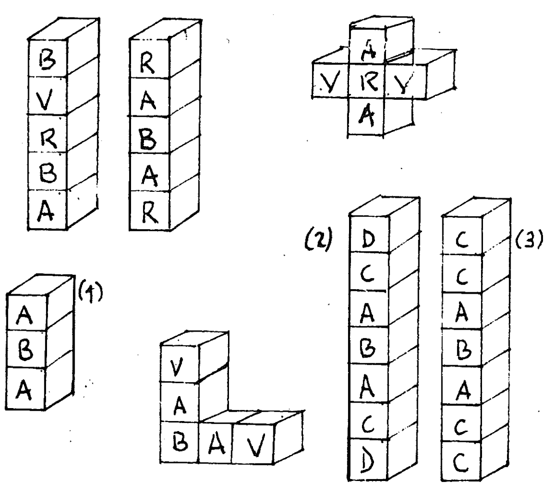


Figura 27

Naturalmente, dependerá de la persona o las personas que lo hagan el que aparezcan unas u otras figuras; pero si es un grupo, la variedad de «resultados» será grande. Esta es una muestra de los producidos por un grupo de profesores durante una sesión de trabajo:



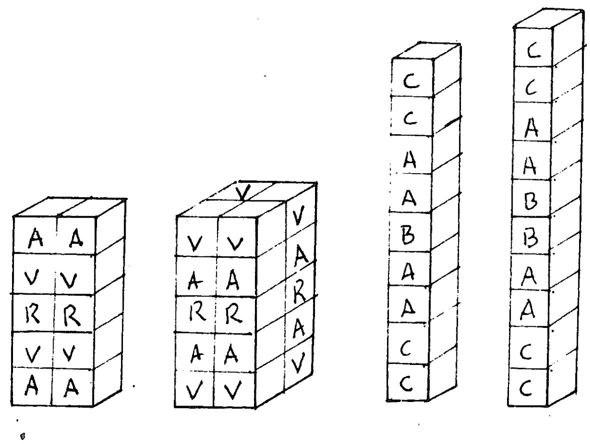


Figura 28

Como se ve, varios conceptos se han puesto en juego: número, color, simetría, tamaño; en unos casos, simultáneamente, en otros casos, no. Lo más interesante es que *en cada uno* de los ejemplos pueden darse razones para proponerlo como parecido al original, y que una vez elegido uno de ellos, o un subconjunto de ellos, la red empezará a formarse. Como ocurre si elegimos (1) y (2) como «buenos» análogos del original; porque entonces se genera una cadena ascendente de 3, 5, 7, 9, 11... cubos en la que, además del número, se está teniendo en cuenta la simetría central en la disposición de los colores. [¿Que pasaría si los «buenos» análogos fuesen (1) y (3)?]

¿Cuál sería el análogo con *un solo cubo*? Parece haber pocas dudas de que tendría que ser ¡un cubo cualquiera! La analogía en cadena descendente ha sido una analogía efectiva. Pero ¿qué habría ocurrido si hubiésemos empezado desde abajo, es decir, si la propuesta inicial hubiese sido:

hacer una figura parecida a ésta ?

¿No sería raro que se construyesen estas figuras ?

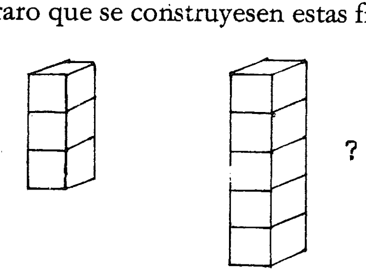


Figura 29

¿No sería más plausible producir figuras como estas otras?

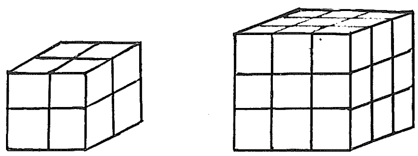
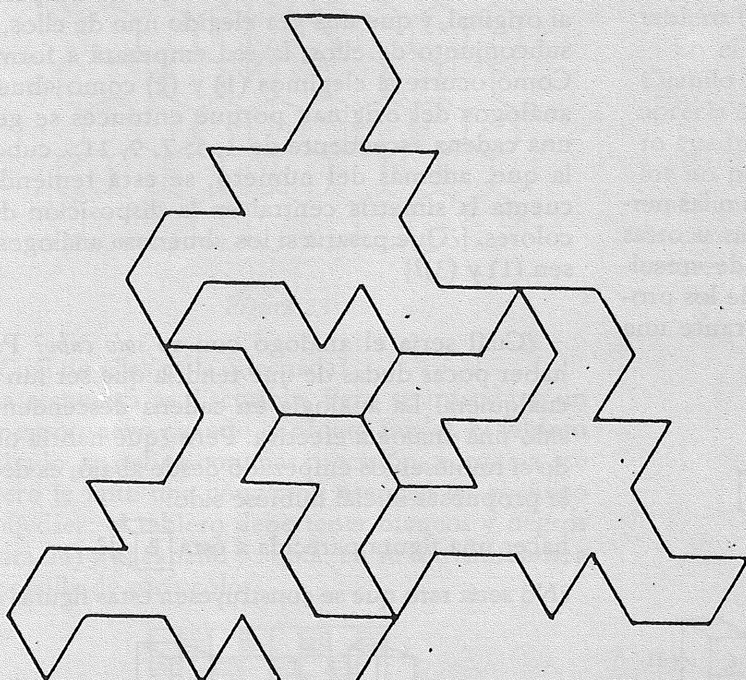


Figura 30

Pero entonces, curiosamente, uno se siente un poco decepcionado; la analogía es excesivamente dura, es casi una igualdad, es poco productiva. Y la razón no es otra que ésta: el motivo inicial B estaba demasiado definido: un cubo blanco; o dicho al revés, la completa información conceptual *aislada* contiene poca información analógica; el campo analógico estaba casi cerrado de antemano.

El lector puede elegir otros más abiertos y seguir el curso que más le guste, que mejor cuadre con sus intereses y sus conocimientos previos. Hacer dinámicos los conceptos. Disfrutar con su capacidad para establecer conexiones entre ellos. Seguro que encontrará resonancia en las experiencias, las imágenes y las analogías establecidas por otros.



¿Puede continuarse en todas direcciones este diseño? ¿Cómo puedes estar seguro de tu respuesta?

El azar y su aprendizaje

Eliseo Borrás Veses y Magda Morata Cubells
(Grupo Cero)

Resumen

Se presentan unas breves pinceladas sobre el importante papel que el azar desempeña en nuestro mundo. De acuerdo con ello, se resalta el esfuerzo que tendríamos que realizar para introducir experiencias acerca del azar en la escuela y se relatan dos de ellas.

1. Las redes del Azar

La naturaleza, el universo, parecen estar en continuo cambio (selección de unas especies a expensas de otras, mutaciones, herencia genética, reacciones químicas, tiempo metereológico ...). El azar es uno de los motores de ese cambio.

Nuestra vida cotidiana está inmersa en un mar de fenómenos aleatorios (accidentes, votaciones, índices de bolsa, loterías ...).

Podría pensarse que es inútil indagar en las posibilidades del futuro, ya que todo lo que ocurra será casual, «por suerte» (¡o «por desgracia»!), y un azar ciego condicionará el porvenir.

Afortunadamente no es así, el azar produce *regularidades* que pueden detectarse:

— al lanzar un dado muchas veces se obtienen las seis caras aproximadamente en igual proporción;

— aunque unas familias tengan más hijos de un sexo que de otro, la proporción de nacimientos de mujeres y hombres es aproximadamente la misma;

— una mutación producida por azar en el código genético de un organismo puede producir otro nuevo, más apto para la vida, más estable;

...

Estas regularidades permiten hacer previsiones y, en algunos casos, nos ayudan a tomar decisiones.

El *azar,* en interacción con una gran variedad de leyes, gobierna el mundo. Si solamente actuaran las leyes, la vida sería determinista, todo podría predecirse antes de que sucediera. Pero el *azar* introduce la sorpresa, hace que algunas veces suceda lo inesperado, modula el determinismo de las leyes y, por su causa, todos los sucesos, en mayor o menor grado, se tiñen de imprevisión. La aventura es posible, lo inesperado puede romper lo habitual...

2. Familiarizarse con el azar

Si se desea que los estudiantes tengan la posibilidad de entender mejor nuestro mundo, es necesario realizar y analizar en la escuela actividades relacionadas con el azar.

Cuando se discute a qué edad sería oportuno que los niños comenzasen a familiarizarse con el azar, suelen aparecer opiniones enfrentadas:

— Tradicionalmente se ha considerado que el azar debe ser presentado en niveles de enseñanza superiores, descartándolo de la enseñanza primaria; esta opinión se refleja, por omisión, en casi todos los libros de texto y sigue siendo sustentada por la mayoría de los profesores. Para algunos, el azar es simplemente una aplicación que carece de entidad matemática. Para otros, el aprendizaje del comportamiento del azar es demasiado difícil para ser presentado en la escuela primaria, ya que se requieren no sólo conocimientos de álgebra booleana de conjuntos, de fracciones y de teoría combinatoria, sino también una gran capacidad para abstraer de la realidad.

— En los últimos años, en la mayoría de las reuniones internacionales sobre educación matemática, se ha defendido con fuerza la opinión de que los niños deben encontrarse con el azar cuanto antes, desde los primeros años escolares. Las razones son precisamente:

* el azar es uno de los elementos más sencillos de cómo matematizar situaciones reales;
* el azar es un componente esencial del mundo moderno;
* las técnicas necesarias para estudiarlo (recuentos, porcentajes y fracciones) no son complicadas;
* hace falta tener experiencias directas sobre el azar antes de tratarlo desde un punto de vista formal.

Nuestra visión del mundo (y de las matemáticas) es eminentemente determinista, ya que la mayor parte de las experiencias que analizamos a lo largo de nuestra vida son de este tipo. Algunos estudios realizados en USA e Inglaterra (como por ejemplo los descritos en *Misconceptions of Probability. From Systematic Errors to Systematics Experiments and Decisions*, J. Michael Shaughnessy, NCTM, 1981, Yearbook) prueban que las falsas intuiciones sobre el azar eran comunes a niños de diversas edades y a adultos. Nuestra experiencia como profesores confirma esta idea; incluso, en algunos casos, los adultos tienen más dificultades que los niños en comprender ciertas situaciones aleatorias.

Por ejemplo, más de una vez se han engrosado las arcas de Hacienda cuando el número premiado en un sorteo de la lotería es muy bajo, ya que nadie quiere comprar los números «que empiezan por ceros», por considerarlos menos probables que los otros.

Parece justificado pensar que este comportamiento indiferenciado de niños, adolescentes y adultos es debido a una carencia continuada en el tiempo de experiencias que hayan hecho posible la construcción de una red conceptual apropiada sobre el azar. Conceptualizaciones iniciales mal formadas persisten con la edad si no hay oportunidad de reelaborarlas; las cosas suelen ser más o menos difíciles según la menor o mayor familiaridad que uno tenga con ellas. Para remediarlo habría que proporcionar a los alumnos la oportunidad de experimentar con situaciones aleatorias desde las primeras etapas, en la escuela. Esto les permitiría desarrollar su intuición sobre el comportamiento del azar y mejorar y ampliar los conceptos que lleva asociados.

3. Dos aproximaciones al azar: La simulación y los juegos

Naturalmente, la presentación de situaciones cuyo análisis esté fuera del alcance del aprendiz es inútil y contraproducente. Afortunadamente hay, al menos, dos métodos de análisis del azar que están al alcance de cualquier aprendiz: la simulación y los juegos.

La *simulación* es uno de los procedimientos más utilizados en la actualidad para estudiar los posibles resultados de una experiencia, aleatoria o no. Suele ser una técnica mucho más barata y, en muchos casos, menos peligrosa que la realización de la experiencia real.

En el caso de los fenómenos de azar basta utilizar materiales tan sencillos como dados, ruletas, bolas, fichas ... o máquinas que generen números aleatorios.

El problema principal, en cada caso, es encontrar la forma de simular la situación propuesta, es decir construir un modelo que la represente, por analogía. Si el modelo es fiel, se podrá usar para predecir lo que ocurrirá en la realidad y estudiar el efecto de posibles cambios. Muchas veces el problema que se plantea podrá ser resuelto teóricamente, sin recurrir a la simulación, pero esa solución no siempre está al alcance de los alumnos ni de los profesores. Además, el proceso de construcción de un modelo incrementa la comprensión necesaria para decidir qué aspectos de la situación son significativos y cuáles no. Una ventaja definitiva de la simulación sobre otros métodos es que está al alcance de todos los alumnos de cualquier nivel.

Los *juegos* actúan como modelos de situaciones muy diversas y suelen ser aceptados con gran interés por los alumnos. El análisis de los resultados y de las reglas del juego, y su posible modificación, es una rica fuente de aprendizaje significativo.

Como siempre, hay un peligro: convertir la simulación y el juego en un ritual sin sentido, abstracto, desconectado del mundo propio del niño, que los haga un instrumento de tortura más para los alumnos.

4. Dos ejemplos

Las dos situaciones que siguen son dos ejemplos de encuentros con el *azar* en dos niveles diferentes:

* *La caza de patos,* en 5.º de EGB.
* *La cueva*, en 8.º de EGB.

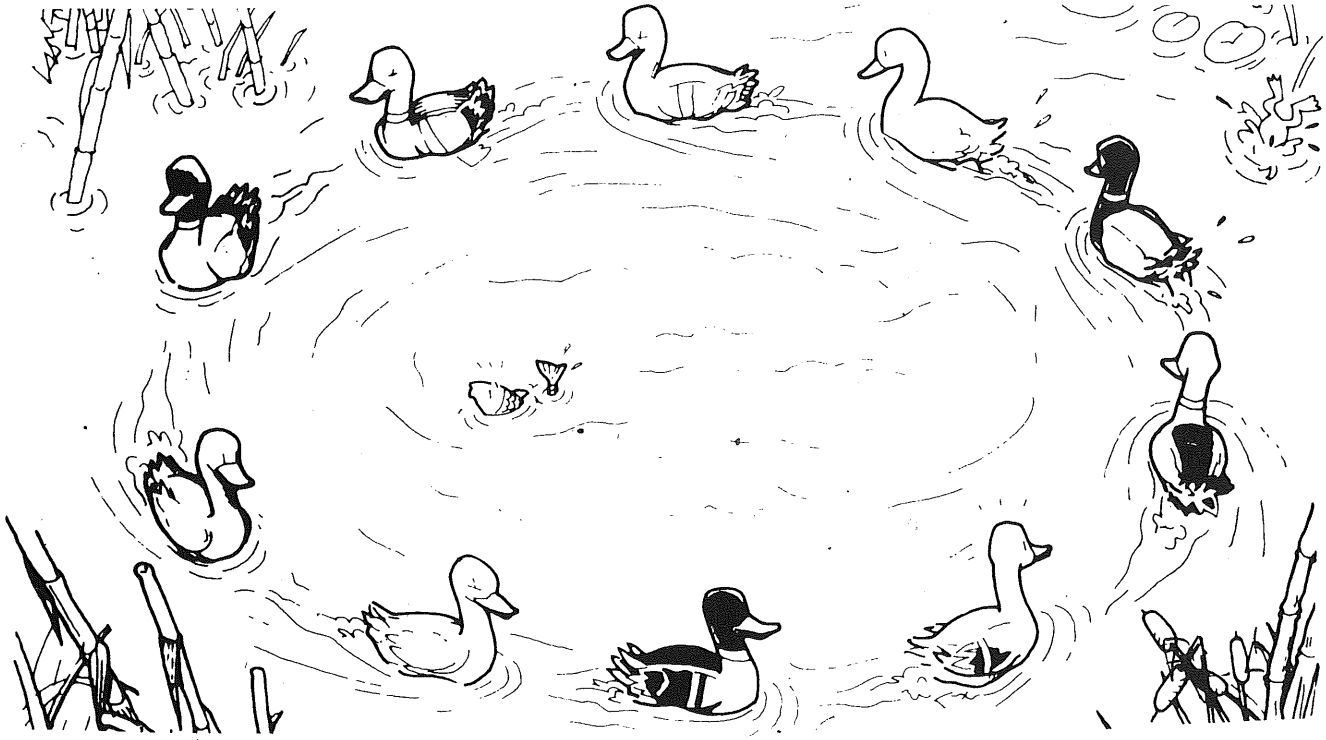
Están basadas en ideas de A. Engel y T. Varga.

En los dos casos aparece una idea central: la reflexión sobre cómo *simular* el problema que se propone es esencial para comprenderlo y resolverlo. La *búsqueda de regularidades* en los resultados de las simulaciones permite *hacer previsiones* bastante ajustadas. En el segundo problema, un análisis teórico posterior, utilizando *diagramas en árbol,* puede llevar a soluciones generales. La propuesta en forma de *juego* acrecienta el interés de los alumnos.

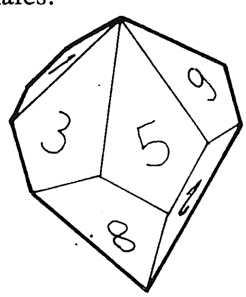
La caza de patos

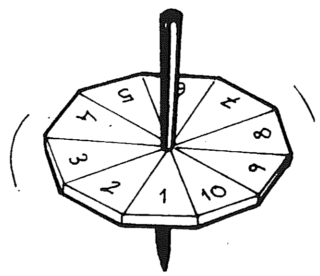
Diez cazadores, estupendos tiradores, van a cazar patos a una laguna. Al rato de llegar, 10 patos se posan sobre el agua. Cada cazador dispara a un pato, todos simultáneamente y todos aciertan; pero ninguno sabe a qué pato apuntan los demás. ¿Cuántos patos sobrevivirán?

Los alumnos están distribuidos por parejas (cada niño jugará por 5 cazadores). Hace falta un tablero con los 10 patos dibujados.



Cada jugador tiene 5 fichas de distinto color que las de su compañero y un dado o una ruleta decimales.





Se necesitan también unas 100 fichas de otro color (por ejemplo, negras) para las apuestas.

Los alumnos son, en este caso, de quinto de EGB.

Para comenzar, se discutió cuál era el número máximo y mínimo de patos supervivientes. Un niño opina que «Como es un juego de suerte, *no es posible saber cuántos patos van a quedar vivos».*

Puesto que los alumnos no tienen una idea clara de lo que puede ocurrir, la profesora decide aplazar la discusión hasta después de haber jugado y propone una nueva cuestión:

¿Cómo simular la caza de los patos?

Profesor: *Tenemos ruletas con los números del 1 al 10 y fichas. ¿Cómo podemos utilizarlas?*

Alumnos: La ruleta nos sirve para disparar.

P: *¿Y cómo haremos los disparos?*

A: *Podemos poner números en los patos.*

P: *¿Qué números pondremos?*

A: *Los mismos que tiene la ruleta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.*

P: *Y ahora ¿qué hacemos?*

A: *Giramos la ruleta. Si sale un 6, eso quiere decir que hemos matado 6 patos.*

A: *Y si sale un 3, que hemos matado 3 patos.*

P: *Pero cada cazador dispara sólo una vez. ¿Cuántos patos puede matar como máximo?*

A: *Uno (muchos niños). Sí porque matar dos pájaros de un tiro ...*

P: *¿Qué quiere decir que salga el número 3?*

A: *Que hemos matado el pato número 3.*

De forma parecida se decide que las fichas sirvan para señalar en el tablero los patos que han sido alcanzados.

Se sortea el orden de juego. Al comenzar a jugar cada niño pronostica el número de patos que sobrevivirán a la caza.

El jugador 1 hace girar la ruleta y pone una de sus fichas sobre el pato cuyo número coincide con el resultado obtenido. El otro jugador hace lo mismo y así van jugando, hasta que han realizado los diez disparos.

Al finalizar una ronda, cada jugador recibe tantas fichas negras como diferencia haya entre su conjetura y el número de patos que sobreviven al juego.

Se juegan varias rondas, por ejemplo 10. Interesa que los niños observen lo que ha pasado en las series anteriores para mejorar sus conjeturas en las partidas siguientes. Para ello es conveniente que recojan los datos en una tabla.

Gana quien al final tenga menos fichas negras.

A los niños les ha gustado el juego. Al terminar las diez series quieren seguir jugando.

Al finalizar las tablas en las que han anotado sus resultados y apuestas se observa que:

— Algunos niños tienden a fijarse al principio sólo en el resultado de la partida anterior, aunque a partir de la sexta serie prácticamente todos apuestan por 3, 4 o 5 patos vivos.

— Desde el comienzo descartan los valores extremos 0, 1, 8 y 9. Muy pocas veces apuestan por el 2 y el 6 (ver tablas de Mar y Carmelina).

Al preguntar a cada grupo, al final, qué apuesta harían si tuvieran que jugar otra vez, todos eligen la moda (el resultado más frecuente) que ha sido 3 ó 4 en la mayor parte de los casos. Aunque ésta es la estrategia ganadora, *nunca pueden tener la seguridad de que van a ganar.*

Se recogen en la pizarra los resultados de todos los grupos y sus conjeturas finales. Entonces todos coinciden en apostar al 3 o al 4, excepto un alumno que se mantiene en su hipótesis inicial: «5 por ser la mitad del número de patos», hipótesis que ha visto confirmada por los resultados de sus 10 series.

Mar

PARTIDA	APUESTA	NUMERO DE PATOS VIVOS	PUNTOS
1	3	4	1
2	4	4	0
3	4	5	1
4	4	1	2
5	4	4	0
6	5	3	2
7	3	3	0
8	3	4	1
9	4	4	0
10	4	3	1
		TOTAL	8

La clase termina con una discusión sobre el significado de la palabra simulación y del concepto de moda.

El valor que predice la teoría (el número medio de patos supervivientes) es:

$$10 \times (9/10)^{10} \simeq 3{,}49$$

Variante: Se puede simplificar el juego con 6 patos y 6 cazadores, usando dados cúbicos. Con los dados la simulación es mucho más rápida que con las ruletas. Esta versión del juego es apropiada para niños más jóvenes.

En este caso, el número medio teórico de patos supervientes es:

$$6 \times (5/6)^{6} \simeq 2.$$

Por otra parte, el juego puede complicarse modificando el número de cazadores o de patos o ambos.

Este problema, propuesto a alumnos de 2.º de BUP y a adultos, fue resuelto de forma similar aunque, en este último caso, se presentaron más dificultades al decir qué procedimientos son válidos para realizar la simulación.

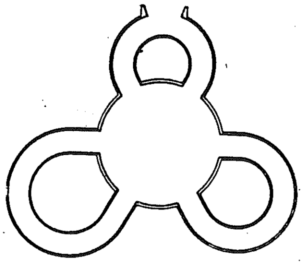
Carmelina

PARTIDA	APUESTA	NUMERO DE PATOS VIVOS	PUNTOS
1	3	3	0
2	4	4	0
3	2	3	1
4	3	4	1
5	4	3	1
6	4	3	1
7	3	4	1
8	4	4	0
9	4	4	0
10	3	3	0
		TOTAL	5

APUESTA 4

La cueva

Veintisiete exploradores están perdidos en una cueva de la que parten tres caminos.



Uno de ellos conduce al exterior en una hora. Los dos restantes no tienen salida: si entran por uno de ellos vuelven a la cueva en 2 días; si lo hacen por otro, vuelven en 3 días.

Como no llevan ninguna luz y la cueva está oscura y llena de obstáculos, eligen, cada vez que hacen un intento de salir, uno de los tres caminos al azar.

Si sólo tienen comida y agua para sobrevivir durante menos de 6 días, ¿cuántos de los 27 exploradores crees que lograrán salir de la cueva?

¿Cuántos se salvarían si hubiese 54 exploradores? ¿Y si hubiese 18?

Si hubiera un número cualquiera de exploradores, ¿qué proporción de ellos crees que se salvaría?

Si tuvieran alimentos para subsistir indefinidamente, ¿crees que se salvarían todos los exploradores?

¿Cuánto tiempo crees que tardaría cada explorador en salir, por término medio?

Se propuso la primera parte de este problema a alumnos de 8.º de EGB.

Los alumnos deciden cómo realizar la simulación:

P: *¿Cómo simular la búsqueda de la salida por los exploradores, usando dados y fichas?*

A: *Numeramos las salidas de la cueva: la primera con los números 1 y 2, la segunda con 3 y 4, la tercera con 5 y 6.*

A: *Se lanza el dado cada vez que un explorador tiene que elegir una salida.*

A: *Las fichas representan a los exploradores. El camino de un explorador no termina hasta que sale libre o muere.*

Los alumnos se agrupan de 3 en 3: cada uno de ellos juega por 9 exploradores, con 9 fichas del mismo color.

Antes de empezar una partida, cada alumno hace una conjetura (apuesta) sobre el número de exploradores que quedarán vivos. En muchos casos, la primera conjetura es un número muy pequeño, aunque muchos coinciden en creer que la mejor apuesta es igual a la mitad del número de exploradores (14 ó 15).

Para anotar lo sucedido a lo largo del juego y sus apuestas, utilizan las siguientes tablas:

explorador nº	recorrido	duración	libre	muerto
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				

nombre	conjetura	resultado	diferencia

Tras haber jugado dos partidas, el profesor pide a los alumnos que establezcan una conjetura común a los tres jugadores.

En la pizarra se recogen los resultados y conjeturas de cada grupo:

GRUPO	PARTIDA		CONJETURA
	PRIMERA	SEGUNDA	
1	19	19	19
2	18	19	16
3	20	22	21
4	14	20	17
5	14	18	15
6	18	20	19
7	14	17	16
8	15	17	16
9	16	20	18
10	18		18

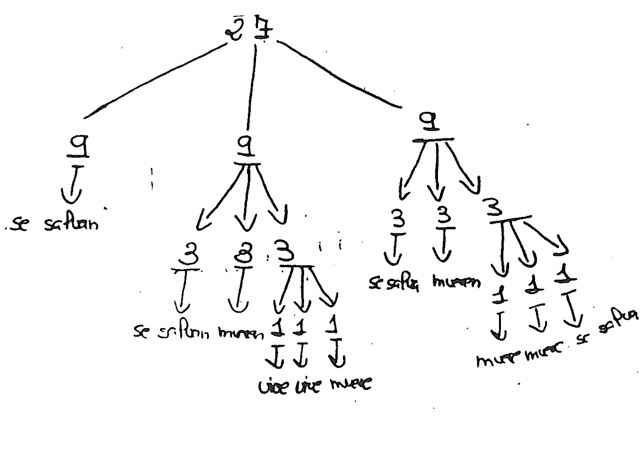
Como se puede comprobar en la tabla anterior, la mayoría calcula la media de sus dos resultados, aunque hay algunas excepciones significativas:

— Los componentes del grupo 3 juegan 3 partidas, obteniendo 20, 17 y 22 exploradores libres respectivamente, pero desechan el resultado 17 «por ser un número impar» y calculan la media de los otros dos.

— En el grupo 2 han obtenido los resultados 18 y 19, pero su conjetura es 16. Al preguntarles la razón, responde uno de ellos: «es mi número».

— La conjetura del grupo 5 es 15, a pesar de que sus resultados son 14 y 18. Siguen pensando, como al principio de la clase, que la mejor apuesta es la mitad del número de exploradores.

— José Ramón, Raul y Vicente, tras jugar una sola partida, establecen su conjetura 18 utilizando el siguiente diagrama:



Al explicar estos últimos al resto de la clase su razonamiento, alguien pregunta:

A: *Pero si hay 3 caminos y los exploradores se mueven al azar, ¿por qué han de ir 9 por cada camino?*

A: *Esa es la resolución lógica.*

P: *¿Cómo podemos tener en cuenta todo el volumen de información que tenemos en la pizarra?*

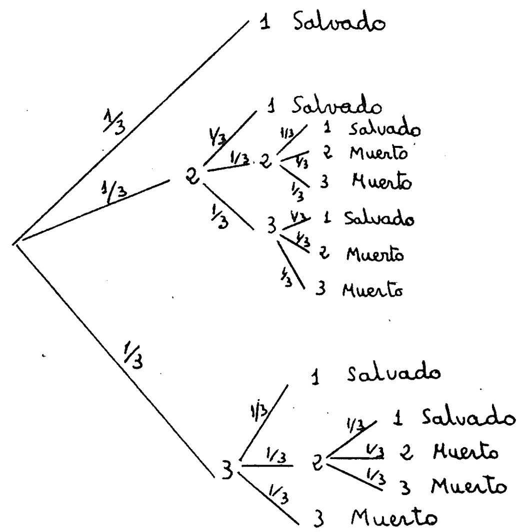
A: *Calculando la media de todos los resultados.*

Se calcula la media de todos los resultados experimentales (17,78) y la de todas las conjeturas (19,1), comparándolas con la predicción teórica (18).

Finalmente se propone a los alumnos que generalicen el problema a cualquier número de exploradores.

Este mismo problema ha sido abordado por alumnos de 1.º de BUP, con más experiencia en situaciones en las que interviene el azar.

Prácticamente todos ellos (algunos sin realizar ninguna simulación previa) razonan de forma análoga a como lo hicieron los tres alumnos de 8.º Un grupo de chicas, tras haber trabajado de esta manera desde el principio, calcula la probabilidad de que un explorador se salve utilizando un diagrama en árbol como el siguiente:



$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Todos generalizan el problema: «si hay n exploradores esperamos que se salven 2/3 de n». Para su total resolución han utilizado dos clases.

Sin embargo, alumnos de otro grupo de 1.º de BUP, sin experiencia previa en situaciones de azar y menos entrenados en la resolución de problemas, tuvieron dificultades similares e incluso mayores que los de 8.º de EGB.

El problema resulta interesante y rico en posibilidades. Al plantearlo con 27 exploradores ($27 = 3^3$) se favorece un razonamiento del tipo del empleado por José Ramón, Raul y Vicente, que puede servir como paso previo a la introducción del ábaco probabilístico (ver capítulo 14 del volumen 2 del libro *Probabilidad y Estadística* de Arthur Engel, Ed. Mestral).

Otra posibilidad, sino se consideran ninguna limitación de tiempo debida a los alimentos o incluso a la edad de los exploradores, es el cálculo de la duración media de los recorridos, que coincide precisamente con la suma de las duraciones de los tres caminos: 5 días y 1 hora.

5. Últimas anotaciones

Al trabajar con estos problemas es posible que surjan algunos de los siguientes conceptos:

— *Simulación* de una experiencia utilizando dados o ruletas.

— Sucesos no equiprobables. Suceso imposible.

— Imposibilidad de predecir con certeza el resultado de una experiencia aleatoria.

— Moda y media aritmética.

— Sesgo de un generador aleatorio y su verificación.

— Pruebas repetidas.

— El azar produce regularidades.

o estrategias:

— Conjetura, verificación y mejora de la conjetura a la vista de los resultados experimentales.

— Confección de una tabla que facilite la recogida de los datos y su análisis.

— Elaboración de un diagrama.

— Búsqueda de regularidades.

— Generalización.

Los ejemplos anteriores pueden ser propuestos a alumnos de diferentes edades y resueltos con técnicas y niveles de abstracción distintos. No es ésta una característica exclusiva de las situaciones en las que interviene el azar, pero si que es más patente aquí que en otros dominios de la matemática.

Para que las conclusiones extraídas de la simulación tengan una cierta fiabilidad, es conveniente que toda la clase colabore para recoger la mayor cantidad de datos posible y que se resuma toda la información en unos pocos parámetros que permitan hacer conjeturas.

La inmersión en situaciones complejas, como las presentadas, es una poderosa fuente de aprendizaje para alumnos y profesores. Éstos descubren las ideas que sus alumnos tienen con respecto al azar y a aquéllos se les brinda la oportunidad, jugando, de ir construyendo y reconstruyendo una red de conocimientos apropiada para navegar por el mar del azar. En cualquier caso, ¡siempre hay sorpresas y lo pasan bien!

Caleb Gattegno (1911-1988)

Carme Burgués

Caleb Gattegno murió en París el pasado verano. Mis conocimientos sobre este educador matemático no son suficientes para atreverme a resumir su obra e influencia en el campo de la enseñanza de las matemáticas, aunque sí para dedicarle un emocionado recuerdo.

Le conocí a principios de los ochenta en Barcelona en el que fue su último viaje a nuestro país. Una escuela de idiomas le había contratado para dar un curso intensivo a los profesores sobre sus métodos para enseñar inglés. Ofrecía además un pase de sus películas de geometría. No se quién ni cómo propagó la información, el caso es que un grupo de personas nos encontrábamos expectantes en un pequeño local ante un hombre que nos ofrecía un material sobre una parte de las matemáticas que todavía no había recuperado su importante papel en la enseñanza escolar.

Las películas eran mudas, sin comicidad ni tan siquiera letras. Sólo los protagonistas principales mostrándose ante nuestros ávidos ojos: círculos, líneas, ángulos... Dibujos animados que sugerían, demostraban, sistematizaban ideas y propiedades. Quedó claro que no debíamos desaprovechar la ocasión de extender tal información y tras una tímida petición... nos concedió su tarde libre en Barcelona con una única condición, mostraría como usar su material sólo si traíamos niños. Nunca he visto la Sala de Actos de la Escuela del Profesorado de Barcelona tan repleta, pensé que aquellos veintitantos alumnos de séptimo de EGB se sentirían cohibidos ante tal número de adultos observándolos. No fue así y el responsable de su interés por analizar y discutir lo que sucedía en la película fue el profesor Gattegno. Ni una sola información salió de sus labios, sólo preguntas en un perfecto castellano y respuestas de los niños en catalán, sin traductores. La comunicación fue perfecta, llegando a tal provocación que los alumnos dialogaban entre ellos discutiendo apreciaciones y enunciando propiedades. Se proyectó diez u once veces el film, después de cada pase la observación se hacía más crítica, se descubrieron los códigos de colores, se distinguió entre unicidad y multiplicidad de posibilidades, llegando a resumir en un par de frases la condición que se mostraba en la película: «Por tres puntos pasa una única circunferencia».

Es la mejor lección que he recibido nunca de como provocar aprendizajes sin precipitarse en dar información que los alumnos pueden conseguir por ellos mismos.

Volví a verle hace unos siete años en Nueva York en que aprovechando un viaje a EEUU le visité para adquirir algunas de sus películas. Lo encontré atareado en confeccionar un programa para enseñar a leer a adultos destinado a Nicaragua.

Rescatar desconocidos pioneros como Cuisenaire o Nicolet difundiendo y completando sus propuestas, sin atribuirse jamás méritos ajenos, ofrecer numerosos trabajos personales basados en reflexiones de una mente crítica y abierta y aceptar los retos tecnológicos mirando siempre hacia el futuro, son hechos que caracterizaron su vida y su obra.

En el último congreso del ICMI en Budapest (agosto 1988) se acuñó un calificativo que englobase a aquellos profesionales que dedicándose a la enseñanza de las matemáticas pretendiesen algo más que una simple instrucción. Para mí, la mejor definición sería: un educador matemático es alguien como Caleb Gattegno.

El concepto de número en preescolar

Luis Carlos Contreras González

Introducción

El presente artículo pretende ser un análisis, desde una perspectiva educativa, de uno de los primeros conceptos aritméticos de los que el niño puede apropiarse.

Desde una óptica constructiva de la educación matemática y siguiendo muy de cerca a autores que se identifican con la Escuela de Ginebra, intentaré conectar las distintas fuentes que aportan información sobre la construcción mental del concepto de número. Es, por tanto, más el trazado de un posible camino a seguir que un pliego elaborado de conclusiones. Si éstas son elaboradas por el lector habremos conseguido alcanzar nuestro objetivo primordial.

Evolución histórica

La historia de un arte o una ciencia es una introducción inherente a su estudio, ya que proporciona una óptica clara y concisa de la manera en que han tenido lugar las innovaciones, constituye una garantía contra errores futuros y rinde homenaje a la humanidad (Collette, 1985).

En nuestro caso, además, proporciona un elemento de análisis para poder descubrir el origen de los conceptos.

Aunque no poseemos documentos escritos que acrediten nuestras afirmaciones, las aportaciones de datos sobre excavaciones y el estudio de civilizaciones en estado primitivo de evolución nos permiten establecer ciertas hipótesis con una cierta fundamentación lógica.

Antes de que existiera un lenguaje capaz de favorecer la comunicación verbal, el hombre primitivo podía observar en la naturaleza fenómenos cuantitativos; un árbol y un bosque, un lobo y una manada de lobos; en definitiva percibía perfectamente la idea de unidad y pluralidad. Es posible que incluso la noción de par que pudo descubrir por la simetría de los elementos de su cuerpo.

Sin embargo era incapaz de abstraer la idea de número; el objeto u objetos observados eran el centro de atención y su desaparición acarreaba una pérdida de conciencia sobre la cantidad. Podríamos decir que, a lo más, había un burdo proceso de correspondencia biunívoca entre el objeto y su recuerdo en la mente del sujeto, proceso que permitía lo que podemos llamar *enumeración*. Si el lector quiere satisfacer su curiosidad, en Collette (1985), se encuentran unos estudios del antropólogo inglés Francis Galton, respecto de una tribu bantú del África sudecuatorial, que ilustran lo anterior.

Gradualmente y, en función de la necesidad de comunicación, extrae la idea de comparación y asocia a cada objeto un signo o una marca, lo que justifica los hallazgos de tarjas sobre huesos en las excavaciones.

No obstante, a pesar de que ello supone un avance desde el punto de vista simbólico, el esquema mental es el mismo aunque ya se advierte un proceso de abstracción que prescinde parcialmente de la naturaleza de los objetos a cuantificar.

Poco a poco, la enumeración de un grupo de objetos deja paso a la *numeración* con la aparición de un lenguaje articulado. El hombre comprende que es preciso matizar la idea de numerosidad; es preciso cuantificar.

Pero esa necesidad la siente cuando el grupo de objetos es grande. En ese sentido, Piaget distingue entre *números perceptivos y números.* Los primeros son aquéllos que proceden de una cantidad cuantitativamente perceptible, como uno, dos, tres, cuatro o cinco objetos. Más allá de cinco es preciso establecer un procedimiento para cuantificar.

Lo curioso de esta posibilidad perceptiva es que no es exclusiva del hombre. Los trabajos del profesor Otto Koehler, de la Universidad de Friburgo, apoyan la tesis de que los animales pueden aprender a contar, en el sentido literal del término, darse cuenta de las diferencias entre colecciones de distinto número de puntos, y llegar a razones sobre la base de diferencias cuantitativas (Collette, 1985).

El análisis de estos ejemplos nos permiten enfatizar que el primer proceso referido está aún lejos de lo que llamamos concepto de número.

El primer paso en la cuantificación es la sustitución de objetos por palabras, pero aún no está totalmente eliminado el soporte material. El observador tiene que abstraer y para ello la etapa decisiva es aquélla en la que es capaz de distinguir entre las ideas de ordinal y cardinal, en definitiva, cuando:

a) La naturaleza de los objetos que se van a contar no desempeña papel alguno en la numeración.

b) El orden en que son observados los objetos no influye en el resultado final.

c) El *último elemento* contado nos da el cardinal de la colección, es decir, cuántos elementos tiene el conjunto que se quiere contar y, en definitiva, nos establece la existencia de un primer elemento, seguido de un segundo, etc...

Resaltamos que en todo este proceso, el símbolo que también evoluciona desde una simple tarja a una palabra o un signo, ocupa un papel totalmente secundario y va condicionado por una necesidad social. Esa misma necesidad y ante el problema de representar grandes cantidades de objetos, da lugar al nacimiento de la idea de agrupamiento que desemboca en el establecimiento de un sistema de numeración.

Este proceso es de una gran belleza y presenta múltiples posibilidades de investigación, pero de momento rebasa los objetivos de este artículo; resaltar, simplemente, que del análisis de este proceso se deducen multitud de implicaciones en cuanto a la naturaleza de los números, sus tipos y la justificación de sus representaciones, que nos permite evaluar la importancia del proceso de simbolización y su lugar en el aprendizaje.

La naturaleza del número

Para comprender la naturaleza del número, nos ayudará la interpretación que hace Kamii (1984, 1986) sobre los estudios epistemológicos de Jean Piaget.

Según Kamii la posición de Piaget es una síntesis de empirismo y racionalismo, pero con un predominio de la tendencia racionalista. Piaget hace notar que la experiencia sensorial por sí sola no llevará nunca al niño a adquirir, por ejemplo, la noción de conservación de cantidades. En ese ejemplo, los sentidos del niño sólo pueden decirle que el líquido es diferente cuando es colocado en distintos recipientes. El pensar en la relación existente entre ambas observaciones requiere un razonamiento.

Según Kamii, Piaget es un interacionista-relativista que cree en la construcción del conocimiento por la interacción entre la experiencia sensorial a través de la acción y el razonamiento u operación indisociables entre sí. Y en esta línea establece tres tipos de conocimiento:

— físico-natural;
— lógico-matemático;
— afectivo-social.

Un pequeño análisis de sus interacciones nos dará una información muy válida sobre la naturaleza del número.

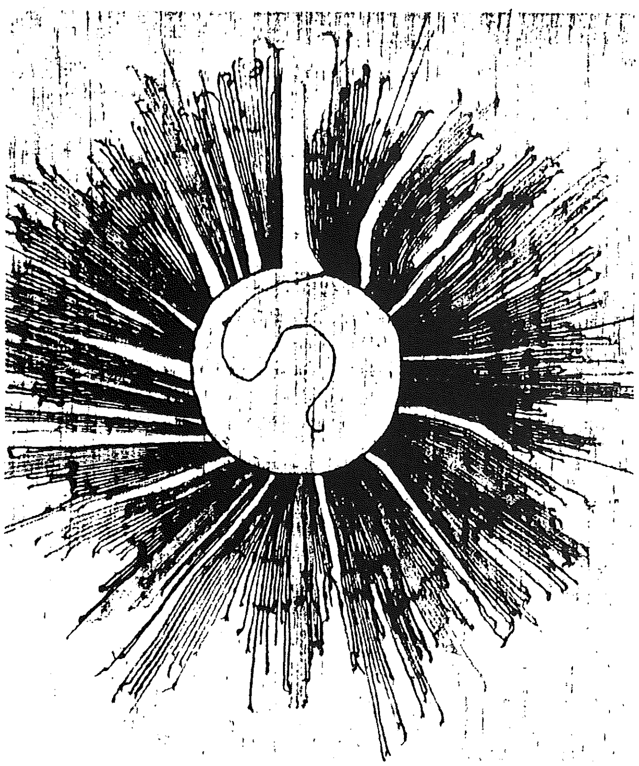
El conocimiento físico es empírico. En una simple observación captamos propiedades observables de los objetos, que están en ellos, como el color, o que ocurre con ellos, como su atracción por la tierra. Pero el posible marco de relaciones comparativas que podemos establecer entre varios objetos no está en ellos; tienen como única procedencia la mente del sujeto. Estas relaciones forman parte del conocimiento lógico-matemático.

El conocimiento afectivo-social es convencional y, en su relación con el número permite definir los numerales. Esta fase, quizá la menos importante en el proceso de abstracción del número suele ser la más enfatizada en la enseñanza clásica, en un error que lleva a identificar las ideas de número y numeral.

Lo anteriormente expuesto pone de manifiesto la ineficacia de la transmisión directa en lo que a conocimientos lógicos-matemáticos se refiere. La asimilación de conceptos como el de número requiere una modificación de las estructuras mentales del individuo, modificación que requiere un determinado grado de madurez y un marco apropiado favorecedor de razonamientos y emisión de juicios propios. Y quizá aquí esté la clave de los problemas de nuestra área.

Kamii afirma que algunas tendencias apuntan que el número es una propiedad de los conjuntos de objetos de la misma forma que el color lo es de los objetos, y en esta línea admiten que los niños abstraen propiedades numéricas a partir de varios conjuntos de la misma forma que abstraen el color y otras propiedades físicas de los objetos.

En la teoría cognitivo-genética se consideran de muy distinta naturaleza la abstracción del color y la del número; para la primera Piaget utiliza el término *abstracción empírica*. El niño se limita a cen-



trarse en una determinada propiedad del objeto ignorando las otras; para la segunda usa el término *abstracción reflexiva o reflexionante,* ésta implica la construcción de relaciones entre los objetos. Se trata de una verdadera construcción en la mente más que centrarse en algo que ya existe en los objetos. No obstante una no puede darse sin la otra. De un lado es necesario un marco lógico-matemático para la abstracción empírica, porque ningún hecho del mundo exterior podría interpretarse si cada hecho fuera un incidente aislado; y de otro para el niño del nivel preoperatorio la abstracción empírica es necesaria para crear su estructura lógico-matemática, ya que sin propiedades reconocibles no podría establecer relaciones, y por tanto, no habría para él una estructura lógica-matemática.

Establecemos, por tanto, que el número como elemento del conocimiento lógico-matemático *se aprende* por abstracción reflexiva al construir el niño relaciones.

Estadios en el aprendizaje del número

Desde el punto de vista didáctico han de conjugarse dos aspectos. De un lado la propia estructura del concepto de número, con las nociones previas que han de asimilarse, y de otro las propias limitaciones del individuo debidas a sus características psicológicas.

Por lo que llevamos de exposición podemos destacar algunas actitudes deseables, como la habilidad para efectuar correspondencias y la capacidad para coordinar las nociones de ordinal y cardinal. Intentaremos, en adelante, dar salida a otras nociones importantes.

«Según Piaget, el número es una síntesis de dos tipos de relaciones que el niño ha de establecer entre los objetos (por abstracción reflexiva). Una es la de *orden* y otra la de *inclusión jerárquica*.» (Kamii, 1984.)

Es fácil observar a un niño en su tendencia a contar los objetos saltándose unos y contando otros más de una vez. Ello pone de manifiesto que no siente la necesidad lógica de colocar los objetos en un orden para asegurarse de que su proceso es correcto.

Pero si la ordenación fuera la única acción que se realizara con los objetos no se podría cuantificar ya que el niño podría considerar uno cada vez en vez de varios al mismo tiempo (Kamii, 1984). Para cuantificar, por tanto, tiene que establecer entre ellos una relación de inclusión jerárquica que le permita además identificar el todo y las partes, y poder imaginar a la vez varias partes y el todo.

Ésta es una de las cuestiones más complicadas para el niño. Puede pensar en el total pero no cuando piensa en una de las partes. Para comparar el todo con las partes tiene que realizar dos acciones mentalmente opuestas al mismo tiempo en un proceso que requiere un pensamiento *reversible.*

Otra idea previa fundamental es la de conservación. Como ya hemos comentado, para el niño de preescolar, la disposición espacial de los objetos determina claramente el total a cuantificar. Un niño que no tiene la estructura mental de número, utiliza lo mejor que se le ocurre para realizar juicios cuantitativos, a saber, el espacio ocupado. Sin embargo cuando ha construido la estructura de número, el espacio ocupado pasa a ser irrelevante.

Aunque los estudios piagetianos pueden considerarse desfasados en el tiempo y hasta se podría pensar en un cambio genético entre «sus alumnos» y los nuestros, para el profesor han de servir de guía sus investigaciones. Han de tenerse en cuenta como

simple referencia y ha de ser el propio maestro quien en función de estudios similares establezca los niveles de desarrollo de sus alumnos.

Desde esta óptica referencial marcaremos tres niveles genéricos: uno que abarca hasta los cuatro o cinco y medio años, un segundo entre los cinco y medio y seis y medio, y otro que se sitúa entre los seis y medio u ocho años, en el que en general se ven asimiladas las nociones anteriores y podemos afirmar que existe estructura mental de número.

Pero, ¿cuál es el nivel de evolución de las nociones básicas en cada uno de estos estadios?, y, ¿qué relación guardan con la propia estructura constructiva del número?

Para el adulto, el número denota una colección de unidades *constantes* independientemente de las operaciones lógicas (de distribución o ubicación) que en su mente son reversibles. Desde el punto de vista constructivo de la materia, este concepto podría dividirse en:

— números de cantidad (cardinales);

— números de contar (ordinales, cuyo primer estadio es la enumeración);

— números de medir (medida, donde la constancia es imprescindible);

— números de calcular (que proporcionan la idea algorítmica).

La ordenación y la cardinación están íntimamente unidas en la mente del sujeto mediante una relación que establece que el elemento n-simo tiene justamente $n - 1$ delante de él.

Respecto de la mente del niño y en relación con los aspectos anteriores, se han diseñado una serie de experimentos tendentes a establecer los niveles evolutivos a los que antes hemos hecho referencia. Un ejemplo de descripción detallada de los mismos, y en la línea de los efectuados por Piaget, se encuentran en Lawrence et al (1982). Como nota básica, resaltar que con pequeñas oscilaciones se observan los tres niveles antes citados; un primero donde hay una ausencia general de comprensión de la noción, un segundo en el que se resuelven situaciones particulares sin generalizar, y un tercero donde las «tareas» [1] son perfectamente resueltas. También nos gustaría añadir que se observa un estrecho lazo de conexiones en los niveles de respuesta a las distintas cuestiones que permiten establecer interrelaciones entre las nociones y análogos niveles de dificultad conceptual que nos recuerda con frecuencia la evolución histórica.

El papel del maestro ante el proceso de enseñanza-aprendizaje del concepto de número

La idea fundamental es que el número no puede enseñarse directamente por transmisión social, ya que no es un conocimiento de tipo convencional. Ha de ser el propio individuo quien lo formalice en su mente, en base a establecer todo tipo de relaciones entre toda clase de objetos. ¿Quiere esto decir que el maestro ha de sentarse cruzado de brazos y esperar, limitándose a proporcionar al niño los materiales adecuados? La respuesta, desde luego, es *no*.

Las mismas investigaciones reseñadas sugieren una gran variedad de actividades que pueden enriquecer la formación. Pero además, diariamente, surgen situaciones en el ámbito escolar y familiar que pueden y deben ser aprovechadas. En este sentido, en Kamii (1984), el lector puede encontrar ejemplos muy significativos.

En el aula, el mismo reparto de objetos, el recuento de una votación; en juegos de interior y exterior, como el juego de los bolos. Este juego, concretamente, sugiere además otra idea. Normalmente el niño no simbolizará una cantidad hasta que no sienta su necesidad, y en cierto sentido este hecho tiene un parangón histórico ya comentado. No cabe duda de que para proclamar el ganador del juego han de anotarse los resultados y probablemente un afán de simplificación conducirá a resultados que, de una forma impositiva, no habríamos conseguido.

[1] PIAGET utiliza el término tarea cuando se refiere a la acción del individuo en determinado experimento.

Citemos, además, muchos materiales que como la balanza númerica nos ayudan a asimilar ideas como la composición y descomposición del número y posteriormente propiedades aritméticas. Pero ante todo enfatizar un marco de *autonomía social, moral e intelectual* como clima óptimo para éstos aprendizajes.

Conclusiones y algunos errores cometidos

Tradicionalmente se ha tenido mucha prisa en que el niño dominara las relaciones aritméticas sin detenerse a pensar en la estructura previa subyacente. En el campo numérico se ha prestado demasiada atención a la simbolización y se ha supuesto una estructura operacional que en la mayoría de los casos estaba ausente. Los mismos padres exigían un dominio de las operaciones y se contentaban con una verborrea numérica carente de una comprensión inteligente.

Se ha trabajado el número como un compartimento estanco privándolo de las propiedades que su propia naturaleza le confieren y desvinculándolo de la realidad física y social. Se ha considerado un niño standard, como una tabla rasa a modelar de una forma sistemática y se han ignorado los rasgos inherentes a la propia evolución humana.

Se suelen trabajar algoritmos y no hábitos de razonamiento, enfatizando resultados y obviando los procesos en una estructura demasiado academicista.

Se ha construido, en definitiva, un edificio débil de cimientos, consiguiendo una situación afectiva de rechazo y una estructura conceptual deficiente, frágil y deformada que ha trabado al alumno en su aprendizaje posterior.

Se ha concedido demasiada poca importancia al aprendizaje en este nivel que hoy consideramos, con toda seguridad, el más importante en la vida del niño.

Para concluir, quisiera resaltar que el *concepto de número* es el resultado de unos procesos mentales que evolucionan paralelamente con unas interrelaciones claras. Este proceso tiene cierto parangón histórico y marca la dinámica a seguir.

El aspecto que parece fundamental es la relación que el sujeto tiene que establecer entre toda clase de objetos y situaciones, que le permite descubrir la realidad por encima de las apariencias observadas mediante procesos de búsqueda experimental con la ayuda de un material perfectamente estructurado al efecto y en base a acciones de manipulación constante.

Bibliografía

BANDET, J. y otros (1968): *Los comienzos del cálculo,* Kapelusz, Buenos Aires.

BEAUVERD, B. (1967): *Antes del cálculo,* Kapelusz, Buenos Aires.

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas,* vol. I, Siglo XXI, Madrid.

CONTRERAS, L. C. (1986). Una experiencia en la elaboración de material didáctico para matemáticas en los primeros niveles. *II Jornadas de Profesores de Matemáticas de Escuelas de Magisterio de Andalucía,* Cádiz.

COPELAND, R. (1984): *How children learn mathematics, Mcmilan,* New York.

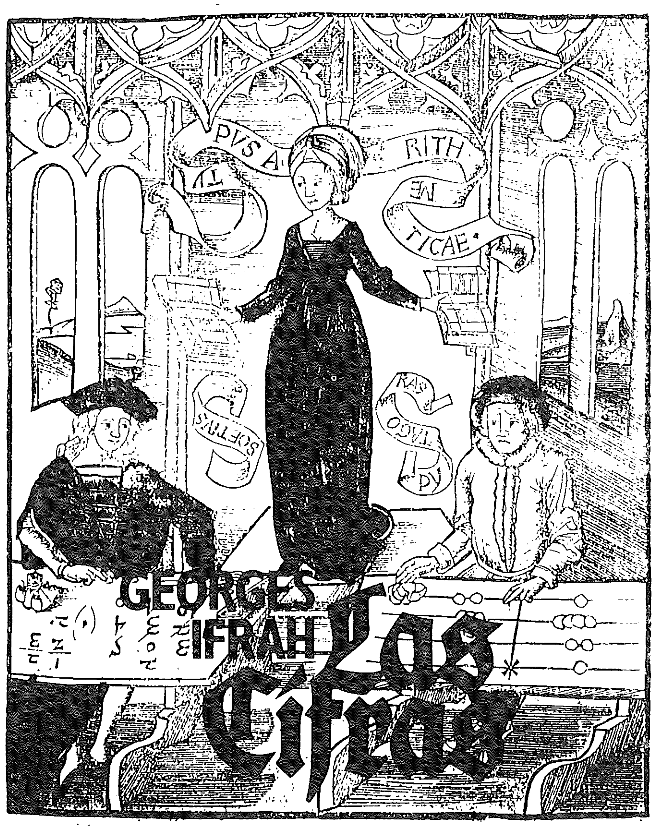
KAMII, C. (1984): *El número en la educación preescolar,* Visor, Madrid.

— (1986): *El niño reiventa la aritmética,* Visor, Madrid.

KAMII, C.; DE VRIES, R. (1985): *La teoría de Piaget y la educación preescolar,* Visor, Madrid.

LAWRENCE, E. y otros (1982): *La comprensión del número y la educación progresiva del niño según Piaget,* Paidós, Barcelona.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. (1975): *Génesis del número en el niño,* Guadalupe, Buenos Aires.



La curiosa historia de ...

Mariano Martínez Pérez

Un excelente consejo pedagógico

«Lisez Euler, lisez Euler;
c'est le maître à tous nous».
P. S. LAPLACE

Leonhard Euler nació el 15 de abril de 1707 en Basel, Suíza, hijo de Paul Euler, pastor protestante (calvinista) y graduado en teología por la Universidad de Basel, donde también había estudiado matemáticas elementales con Jakob Bernoulli. Leonhard Euler estudió por su cuenta durante varios años el difícil libro del «*Algebra*» de Christoff Rudolf (en la vieja edición de Stifel, de 1553), y mientras estudiaba en el Gymnasium local recibió clases particulares de matemáticas. En 1720, tras haber pasado la mayor parte de su infancia en el campo, ingresa Euler en la Facultad de Artes de la Universidad de Basel. Esta Universidad era entonces pequeñísima; ¡poco más de cien estudiantes y diecinueve profesores! En ella enseñaba la matemática elemental Johann Bernoulli, que había ocupado la cátedra a la muerte de su hermano Jakob en 1705. Johann Bernoulli daba, además de sus clases regulares, clases particulares de matemáticas y física más avanzadas para los que así lo deseasen (¡los sueldos de siempre en la enseñanza!).

Euler nos cuenta, en la breve autobiografía que dictó, ya casi completamente ciego, a su hijo mayor, en 1767, al año siguiente de su regreso a San Petersburgo desde Berlín:

> «Pronto encontré la oportunidad de ser presentado a un famoso profesor, llamado Johann Bernoulli...
> ...En realidad él estaba muy ocupado, y así rehusó de plano darme lecciones particulares, pero me dio en cambio consejos más valiosos para comenzar a leer por mi propia cuenta libros de matemáticas más difíciles, y estudiarlos con toda la diligencia que pudiera; si me encontraba con algún obstáculo o dificultad, tenía permiso para visitarle con plena libertad todos los sábados por la tarde, y él me explicaba entonces amablemente todo lo que yo no consiguiera entender... *y éste es, sin duda, el mejor método para tener éxito en el estudio de temas matemáticos.*» (Subrayado mío).

¡Hay que imaginarse al joven Leonhard peleándose duramente a lo largo de toda la semana con las dificultades que se le presentaban en sus estudios matemáticos, para tratar de llegar al sábado con el menor número posible y sólo las más importantes, después de resolver por sí mismo la mayoría de ellas!

Creo que bien vale la pena reflexionar un poco sobre la afirmación que hemos subrayado, tan clara y tan directa, del viejo Euler.

Efectivamente, la enseñanza usual de la matemática viene a consistir en *aclarar dificultades antes de que tales dificultades se le presenten al alumno de una manera natural,* antes de que *las sienta* como *dificultades suyas propias* y no fingidas o simuladas.

Una aclaración o explicación de una dificultad sólo adquiere su sentido por la luz que arroja sobre la región en sombra de *lo que no se consigue entender,* lo cual exige sin remedio, precisamente, *el esfuerzo previo* por entenderlo. Sin él, la aclaración más diáfana carecerá de sentido casi por completo.

Yo estoy convencido de que buena parte de la sensación de fracaso con que se vive amenudo la enseñanza, proviene de incumplir sistemáticamente esta ley pedagógica tan trivial y tan básica, sobre todo en el caso de los niveles de enseñanza razonablemente avanzados, y en la Universidad de una manera muy especial.

La edad, ¿como influye en el rendimiento de Matemáticas en 6.º de EGB?

Andrés Nortes Checa

Introducción

El presente trabajo trata de encontrar cómo influye la edad de los alumnos de 6.º de EGB en su rendimiento en matemáticas. Para ello hemos realizado una investigación, tomando una muestra de 395 alumnos de la provincia de Murcia, recogiendo las calificaciones en matemáticas dadas por sus profesores y sus edades.

A modo de marco conceptual hemos considerado interesante resumir brevemente los aspectos más señalados de los dos períodos establecidos por Piaget que afectan a los alumnos de 6.º de EGB, el de las Operaciones Concretas y el de las Operaciones Formales.

Operaciones Concretas y Operaciones Formales

Piaget en los periodos de desarrollo establece: Período Sensoriomotor (0-2 años). Período de las Operaciones Concretas (2-11 años) y Período de las Operaciones Formales (12-16 años). Dentro del Período de las Operaciones Concretas, establece el Subperíodo Preoperacional (2-7 años) y el Subperíodo de las Operaciones Concretas (7-11 años) y es a éste al que vamos a hacer referencia.

En el Subperíodo de las Operaciones Concretas (7-11) años, Piaget destaca dos niveles: el primero correspondiente a los 7-8 años y el segundo nivel a los 9-10 años.

En el primer nivel, el niño utiliza las relaciones «mayor que» y «menor que», asegurando la reversibilidad; se produce el cierre de las operaciones y, el equilibrio establecido entre la asimilación y la acomodación es la característica fundamental junto a la reversibilidad. Las operaciones que descansan sobre el discontinuo, las semejanzas y las diferencias dan lugar a las operaciones lógico-matemáticas y las que descansan sobre el continuo y los entornos dan lugar a las operaciones infralógicas.

En el segundo nivel (9-10 años) se alcanza el equilibrio general de las operaciones concretas. En las operaciones infralógicas se hace referencia a tres dimensiones y en las operaciones lógicas se afianzan estructuras aditivas y multiplicativas. Como logros causales destacan los cambios de velocidad, la diferencia entre fuerza y movimiento y la horizontalidad en la superficie del agua. El paso a los grupos numéricos con el concepto de número que supone la síntesis de la clase y de la relación asimétrica y la medición como síntesis de las operaciones infralógicas.

En el Período de las Operaciones Formales, denominado también Hipotético-Deductivo, el sujeto se dedica a la construcción de teorías y sistemas, elaborando teorías abstractas con gran facilidad, al contrario que el niño del Período de Operaciones Concretas, cuyo cometido va encaminado a resolver problemas concretos a medida que la realidad los plantea y no generalizando nunca; el conocimiento sobrepasa lo real pasando a lo posible y, de cosas concretas con objetos tangibles pasa a objetos ausentes reemplazados por entes. Las conclusiones las obtiene de hipótesis y no de una observación y son válidas independientemente de la verdad del hecho, siendo las hipótesis proposiciones y su contenido operaciones intraproposicionales.

En el pensamiento concreto, es la representación de una acción posible y en el pensamiento formal es la representación de una representación de acciones posibles, como si, de un pensamiento de segundo orden se tratara. La operación deductiva que conduce de hipótesis a conclusiones, es una operación al cuadrado coordinando dos sistemas de referencia distintos.

En el Período de las Operaciones Formales aparecen los esquemas combinatorio, de proporcionalidad, coordinación de sistemas de referencia, noción de equilibrio mecánico o hidrostático, noción de probabilidad, noción de correlación, compensaciones multiplicativas y formas de conservación que van más allá de la experiencia.

Los contenidos de 6.º de EGB

Reciéntemente hemos realizado un estudio minucioso, como parte de la Tesis Doctoral (Nortes 1988), de los contenidos de 6.º de EGB, y, a la luz de la Teoría de Piaget, hemos deducido que unos son Operaciones Concretas y otros, Operaciones Formales. La mayoría son Operaciones Concretas, pero otros (longitud de la circunferencia, Operaciones con potencias, área de un polígono regular, ...) son Operaciones Formales.

Los alumnos de 6.º de EGB en su mayoría tienen 11-12 años y esto nos indica que 6.º curso —y sus contenidos así nos lo confirman— se encuentra en el paso de las Operaciones Concretas a Formales.

Hacemos esta puntualización porque 6.º curso es un año tremendamente importante si nos atenemos al desarrollo evolutivo de Piaget y justifica el que hayamos considerado este curso para estudiar como influye la edad en el rendimiento de matemáticas.

Análisis experimental

El curso 87/88, realizamos un estudio muestral ante alumnos de 6.º de EGB de la provincia de Murcia, considerando 395 alumnos de los 17.748 matriculados. Para que la muestra resultara representativa se eligieron ocho colegios atendiendo a distintas peculiaridades: de zona urbana y rural, con plan experimental y oficial, de zonas agrícolas e industriales, con un sólo grupo y con varios, etc. Los catorce grupos estudiados se distribuyen de la siguiente forma:

- — 6 grupos corresponden a Murcia capital.
- — 3 grupos tienen plan experimental.
- — 1 grupo es de concentración comarcal.
- — 1 grupo es de colegio concertado.
- — 3 colegios tienen un solo grupo, 4 dos y 1 tres.

En el análisis experimental se han contrastado la normalidad de las variables tanto en el test de la t de Student para la igualdad de medidas como en los análisis de varianza.

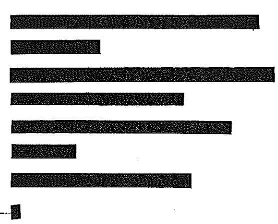
Preguntada la edad y la calificación obtenida en Matemáticas de 6.º en la convocatoria de junio, se obtuvo el siguiente cuadro:

Edad	*Núm. sujetos*	*Min.*	*Máx.*	*Media*	*Des. Tip.*
11	222	3	10	5.698	1.990
12	121	2	10	5.182	2.149
13	38	3	7	3.868	1.212
14	14	3	6	4.214	1.188
Σ	395	2	10	5.314	2.035

Siendo los diagramas de barras por edad:

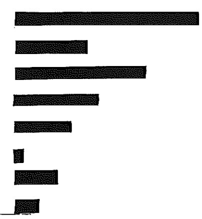
Alumnos de 11 años, $N = 222$

Value	*Count*	*Percent*
3.000	46	20.72
4.000	16	7.21
5.000	51	22.97
6.000	27	12.16
7.000	42	18.92
8.000	10	4.50
9.000	26	12.61
10.000	2	.90



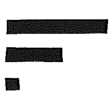
Alumnos de 12 años, $N = 121$

Value	*Count*	*Percent*
2.000	1	.83
3.000	37	30.58
4.000	13	10.74
5.000	27	22.31
6.000	14	11.57
7.000	11	9.09
8.000	3	2.48
9.000	8	6.61
10.000	7	5.79



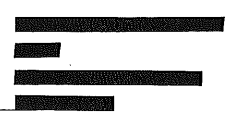
Alumnos de 13 años, $N = 38$

Value	*Count*	*Percent*
3.000	24	63.16
5.000	10	26.32
6.000	3	7.89
7.000	1	2.63



Alumnos de 14 años, $N = 14$

Value	*Count*	*Percent*
3.000	6	42.86
4.000	1	7.14
5.000	5	35.71
6.000	2	14.29



Una revisión de la columna de medias nos indica que los alumnos de 11 y 12 años tienen una nota media de aprobado o suficiente, mientras que los de 13 y 14 años tienen una nota media de suspenso o insuficiente. También es interesante destacar los mínimos y máximos, ya que mientras los alumnos de 11 y 12 años obtienen más calificación comprendida entre 2 y 10, los de 13 y 14 años están entre 3 y 7.

Para analizar si existen diferencias significativas, se efectuó un análisis de la varianza mediante una F de Snédecor, resultando la diferencia *muy significativa* y para conocer a favor de qué edad era esa diferencia significativa se obtuvo el siguiente cuadro:

	13	*12-13*	*13-14*	*12-14*	*12-13-14*
11	MS	MS	MS	S	MS
12	MS	—	S	—	—
11-12	MS	—	MS	—	—
11-12-14	S	—	—	—	—

La diferencia es favorable a los alumnos de edad situados en la columna frente a los de edad situados en la fila. Así encontramos diferencias muy significativas a favor de los alumnos.

de 11 años frente a los de 13 años;
de 12 años frente a los de 13 años;
de 11-12 años frente a los de 13 años;
de 11-12 años frente a los de 13-14 años.

Por edad, los alumnos de 6.º de EGB tienen entre 11 y 12 años, mientras que los alumnos de 13 y 14 años son repetidores. Las medias de los alumnos de 11 y 12 años de suficiente, es decir que pasarán a 7.º, mientras que los alumnos de 13 y 14 años tienen una media de insuficiente y volverán a repetir.

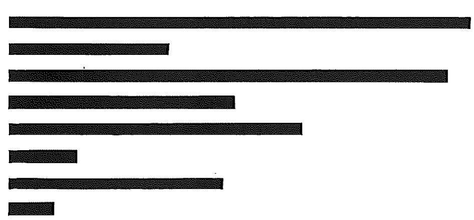
Para corroborar estos resultados, efectuamos otro análisis de varianza, aplicando una t de Student agrupando a los alumnos por edades 11-12 y 13-14 años, siendo la diferencia muy significativa a favor de los de 11-12 años frente a los de 13-14 años. Los estadísticos obtenidos con esta nueva agrupación son:

Edad	*Núm. sujetos*	*Media*	*Desv. Típ.*
11-12	343	5.516	2.059
13-14	52	3.962	1.204
Σ.	395	5.314	2.035

y sus diagramas de barras:

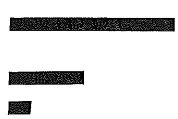
Alumnos de 11 y 12 años, $N = 343$

Value	*Count*	*Percent*
2.000	1	.29
3.000	83	24.20
4.000	29	8.45
5.000	78	22.74
6.000	51	11.95
7.000	53	15.45
8.000	13	3.79
9.000	36	10.50
10.000	9	2.62



Alumnos de 13 y 14 años, $N = 52$

Value	*Count*	*Percent*
3.000	30	57.69
4.000	1	1.92
5.000	15	28.85
6.000	5	9.62
7.000	1	1.92



Conclusión

Por los resultados obtenidos, vemos que los alumnos repetidores (13 y 14 años) van a volver a repetir, mientras que los alumnos que hacen por primera vez 6.º, como media, van a pasar a 7.º, pero ¿por qué repite un alumno en 6.º de EGB?

Hemos mencionado al principio de este artículo que 6.º es un año tremendamente importante por ser de transición de las Operaciones Concretas a las Operaciones Formales y que el sujeto pasa de trabajar con objetos concretos a trabajar con hipótesis, ¿podría incidir este paso de las Operaciones Concretas a las Formales en los resultados de Matemáticas?

La investigación realizada demuestra que un alumno repetidor obtiene peores rendimientos en Matemáticas que un alumno no repetidor y que cuanto mayor es la edad de los alumnos peores resultados obtiene, mientras que parece deducirse de la teoría de Piaget que conforme aumenta la edad su proceso de desarrollo cognitivo introduce al sujeto en un período de Operaciones Formales en donde la abstracción es primordial. Pero esto es así si el sujeto no tiene lagunas de conocimientos y al mismo tiempo tiene adquiridos los esquemas.

Los alumnos repetidores, según nuestra investigación, o no tienen los esquemas adquiridos o tienen lagunas de conocimientos. En el primer caso es cuestión de que los adquiera, pues si el sujeto no tiene ninguna incapacidad manifiesta, tarde o temprano los adquirirá y en el segundo caso, es cuestión de detectar las lagunas de conocimiento e irlas rellenando. Pero ambas cosas no se consiguen con una enseñanza normalizada.

Cuando un alumno repite curso, le vuelven a explicar lo mismo que el año anterior y de la misma manera, no determinando previamente las causas que han motivado la situación. Como generalmente no se establece un análisis de las causas que motivaron el fracaso y no se ponen los medios adecuados para evitarlo, el alumno fracasa y seguirá fracasando.

Cuando un alumno fracasa y repite curso habría que efectuar un análisis de la situación que supusiera:

— Encontrar las causas del fracaso.

— Si es debido a falta de adquisición de los esquemas correspondientes a su desarrollo cognitivo, insistir sobre él hasta que los adquiera.

— Si el fracaso es debido a lagunas de conocimiento detectarlas e irlas rellenando.

Pero todo lo anterior no se consigue con una enseñanza convencional, es preciso potenciar los equipos psicopedagógicos en los colegios, que deben de analizar uno a uno a todos los alumnos en esta situación y poner los medios necesarios a su alcance evitando posteriores fracasos y frustraciones en los alumnos repetidores.

Bibliografía

CASTORINA, J. A. y PALAU, G. (1982): *Introducción a la lógica operatoria de Piaget*, Paidós, Barcelona.

FLAVELL, J. (1979): *La psicología evolutiva de Jean Piaget*, Paidós, Buenos Aires.

INHELDER, B. y PIAGET, J. (1985): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*, Paidós, Buenos Aires.

MEC (1985): *Programas Renovados de la EGB (Ciclo Superior)*, Escuela Española, Madrid.

NORTES CHECA, A. (1985): *Estadística teórica y aplicada*, Santiago Rodríguez, Burgos.

— (1987): *Encuestas y precios*. Síntesis, Madrid.

— (1988): *Tesis Doctoral*, «El paso de las Operaciones Concretas a las Formales: Un análisis en el dominio de las Matemáticas», Universidad de Murcia.

Dos demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras

Vicente Meavilla Seguí

Resumen

En este artículo se presentan dos demostraciones de carácter dinámico-manipulativo mediante las cuales el alumno, orientado por el profesor, puede *descubrir* el teorema de Pitágoras.

La primera demostración ha sido extraída del texto «An introduction to the History of Mathematics» del autor H. Eves, la segunda se debe al matemático árabe Thabit Ibn Qurra, del siglo IX.

1. Un poco de historia

Egipto

Es posible que los antiguos geómetras egipcios (harpedonaptae) construyensen triángulos rectángulos, extendiendo alrededor de tres estacas una cuerda dividida en tres partes, de longitudes respectivas $3k$, $4k$ y $5k$. Si esta suposición fuese cierta, resultaría que los pobladores del Valle del Nilo estuvieron familiarizados —unos 2.000 años a. de C.— con el famoso teorema del triángulo rectángulo, al menos en el caso particular ($3k$, $4k$, $5k$):

El historiador G. J. Allman («Greek Geometry from Thales to Euclid», págs. 29 y 30) se aventura más y opina que los egipcios pudieron ser capaces de demostrar el «teorema de Pitágoras» para el triángulo rectángulo isósceles. Esta hipótesis no resulta improbable, dado que la simple contemplación de un suelo cubierto con baldosas cuadradas congruentes conduce —de forma inmediata— a la conclusión de que el cuadrado construido sobre la hipotenusa de cualquier triángulo rectángulo isósceles es equivalente a los cuadrados construidos sobre sus catetos (ver figura 1).

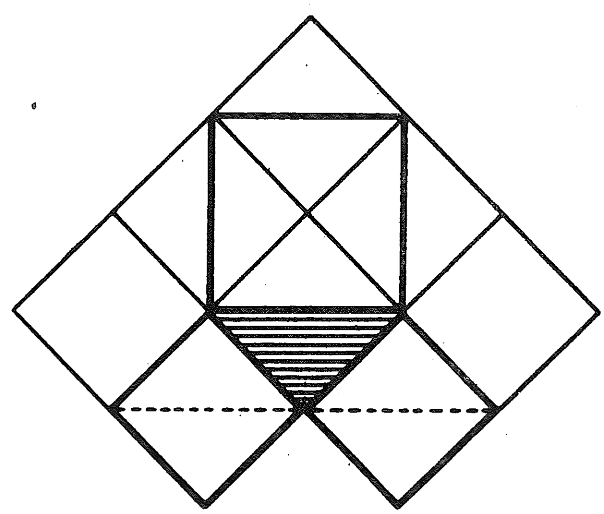


Figura 1

Babilonia

En una pequeña tablilla cuneiforme se representa la figura de un cuadrado con sus dos digonales. Sobre un lado del cuadrado está escrito el número 30 y sobre las diagonales aparecen los números 1.24.51.10 y 42.25.35, expresados en el sistema de numeración sexagesimal babilonio (véase O. Neugebauer: *The Exact Sciences in Antiquity*, págs. 35 y 36).

El significado de estos tres números resulta claro teniendo en cuenta que 1.24.51.10 (= 1,4142129) es una muy buena aproximación de $\sqrt{2}$ y que 42.25.35 (= 42,426388) es aproximadamente igual al resultado que se obtiene al multiplicar 30 por 1.24.51.10.

Por tanto, unos mil años antes del nacimiento de Pitágoras, los matemáticos babilonios eran capaces de calcular la diagonal de un cuadrado en función de su lado. Dicho en otras palabras: los babilonios conocieron el «teorema de los tres cuadrados» muchos siglos antes de que su «pretendido» descubridor viniese al mundo.

India

Además de las civilizaciones egipcia y babilónica, los hindúes también estuvieron al corriente del teorema de Pitágoras.

En efecto, los Sulvasutras o «manuales de la cuerda» (textos en los que se detallan las reglas para la construcción de altares de forma y dimensiones dadas) probablemente fueron escritos entre los años 500 y 200 a. de C. y contienen información matemática que podría remontarse al año 1000 a. de C. Pues bien, en dichos manuales aparecen algunos pasajes que hacen referencia al teorema de Pitágoras y a los «triples pitagóricos» (ternas de números naturales que satisfacen a la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$).

Así, en el Sulvasutra atribuido a Baudhayana, matemático del que desconocemos cualquier dato biográfico, pueden leerse los dos fragmentos siguientes: «La diagonal de un oblongo produce, por construcción de un cuadrado sobre ella, lo que producen por separado la longitud y la anchura».

«Esto se observa en los oblongos cuyos lados son 3 y 4,12 y 5,15 y 8,7 y 24,12 y 35,15 y 36».

La conclusión que puede obstenerse de estos textos es clara: los hindúes posiblemente trabajaron con el teorema de Pitágoras desde el año 1000 a. de C.

A partir de lo expuesto hasta aquí podría decirse, a modo de resumen, que:

a) Los matemáticos de las civilizaciones más antiguas estuvieron familiarizados con el «teorema de los tres cuadrados».

b) Pitágoras no fue ciertamente el descubridor del teorema que lleva su nombre.

¿Cuál fue, pues, la contribución del sabio de Samos a dicho teorema?

Quizá, su demostración.

2. El teorema de Pitágoras en la enseñanza matemática elemental

En el apartado anterior hemos puesto de manifiesto que el teorema de Pitágoras formó parte del bagaje cultural de las civilizaciones más antiguas, en una época en la que la matemática comenzaba a dar sus primeros y vacilantes pasos.

Por tanto, parece apropiado que el famoso «teorema de los tres cuadrados» esté incluido en los programas de la enseñanza matemática de los niveles elementales, en los cuales el alumno —como las antiguas civilizaciones— empieza a caminar por el mundo de la matemática.

Puestas así las cosas, sería deseable que cualquier alumno, una vez concluida su andadura por la EGB, conociera el mensaje geométrico que se encierra en el teorema de Pitágoras. Si además de esto, hubiese sido capaz de *descubrir* alguna de sus numerosas y bellas demostraciones, mucho mejor.

Desgraciadamente, la situación en la que se encuentran los alumnos al finalizar sus estudios de Educación General Básica e incluso al llegar a COU no es ésta. Son capaces de aplicar el teorema pero desconocen su significado.

A las pruebas me remito.

De entre las variopintas respuestas a la pregunta: «Enuncia el teorema de Pitágoras», propuesta a distintos grupos de alumnos de 1.º de BUP al comienzo de cada curso académico, las que se dan con mayor frecuencia absoluta son las siguientes:

1. $a^2 = b^2 + c^2$.
2. $b^2 = c^2 + c^2$.
3. El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Hagamos un brevísimo análisis.

La respuesta 1 es simplemente una igualdad algebraica cuya desconexión con el significado geométrico del teorema de Pitágoras es evidente.

La respuesta 2 es una particularización de la anterior (los dos sumandos del segundo miembro de la igualdad coinciden).

La respuesta 3, quizá la más cercana a la correcta, deja de lado la consideración de las áreas de los cuadrados construidos sobre los tres elementos rectilíneos del triángulo rectángulo.

3. Hacia un cambio metodológico

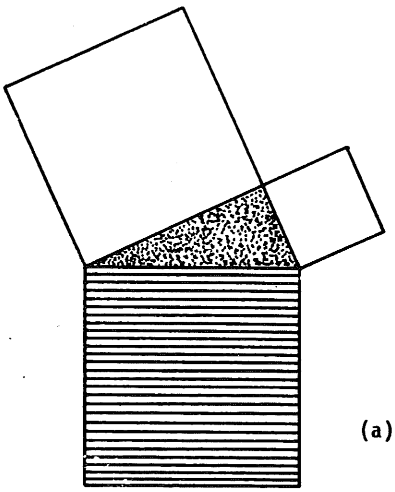
Los errores detectados en la sección precedente, junto con otros muchos que están en el ánimo de todos los enseñantes, aconsejan un cambio de rumbo en la metodología de la enseñanza matemática. Cambio que, sin duda alguna, debe conducir a que el profesor no sea mero transmisor de conocimientos, sino *orientador* de sus alumnos.

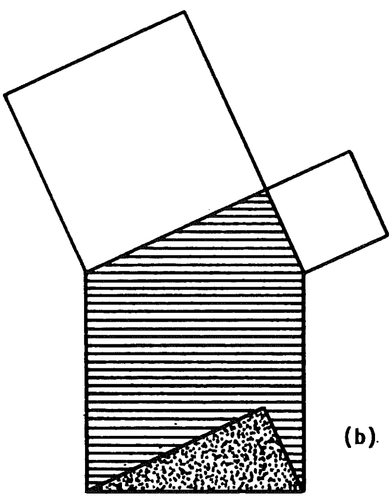
En esta línea presentamos dos actividades, rescatadas de algunos textos de Historia de la Matemática y «puestos al día», mediante los cuales el alumno, convenientemente dirigido por su profesor, puede llegar a *descubrir* el teorema de Pitágoras.

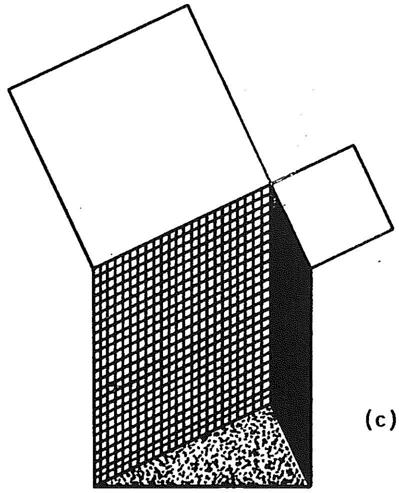
En ambas experiencias (la primera de autor desconocido y la segunda debida al matemático árabe del siglo IX, Thabit Ibn Qurra) solamente ofrecemos una sucesión de figuras en las que determinados «elementos» cambian de forma, se dividen, se desplazan y dan lugar a nuevas configuraciones.

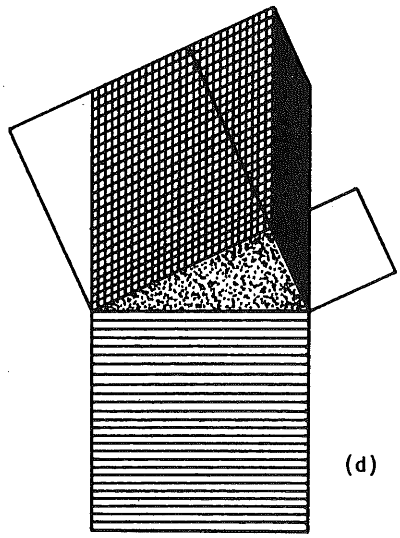
Se trata, pues, de una especie de dibujos animados (muy rudimentarios, por cierto) cuyo estudio e interpretación deben conducir —éste es nuestro deseo— a que el alumno descubra uno de los teoremas geométricos más famosos de la Historia de la Matemática.

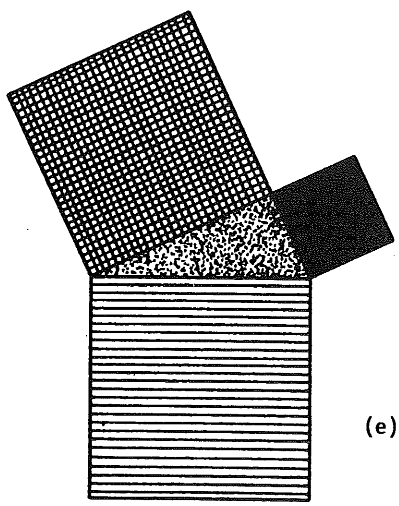
Actividad 1


(a)

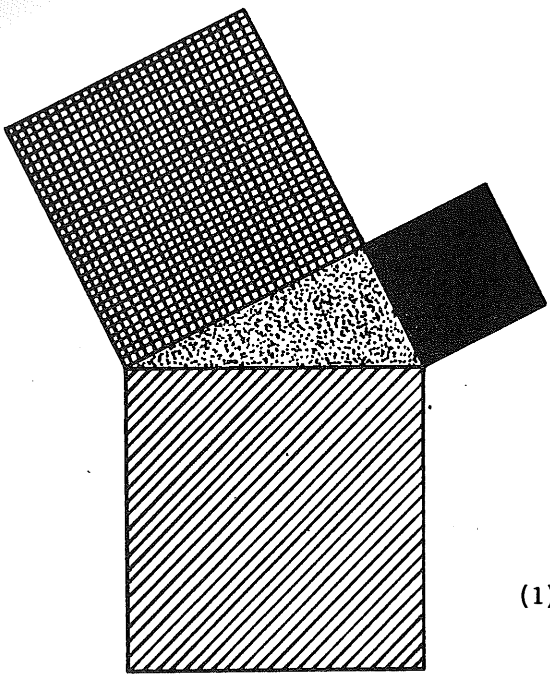

(b)


(c)

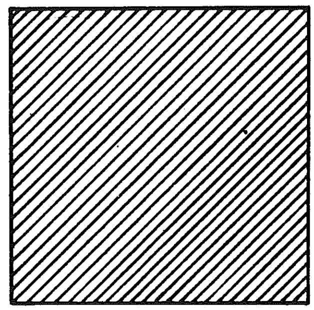

(d)


(e)

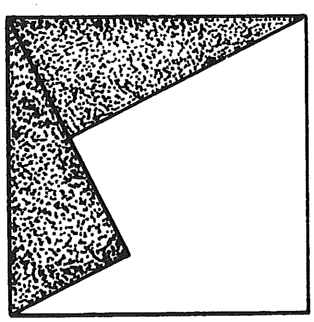
Actividad 2



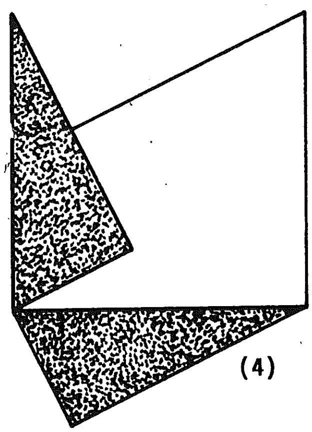
(1)



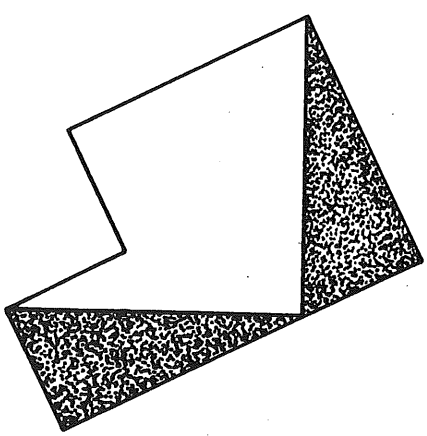
(2)



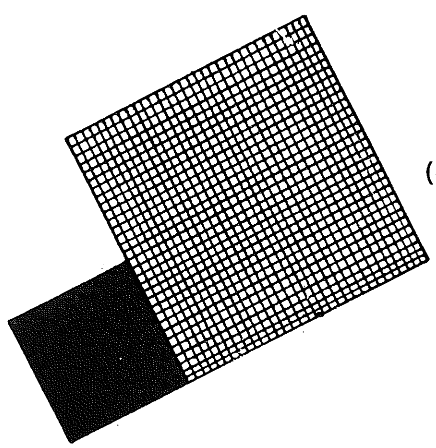
(3)



(4)



(5)



(6)

Construyendo medio cubo

Ángel Gutiérrez Rodríguez y Adela Jaime Pastor

Resumen

En este artículo presentamos diversas actividades a realizar con el cubo, que permiten el descubrimiento de características de la estructura de ese cuerpo y el desarrollo de destrezas en geometría tridimensional, tales como visualización, congruencias y simetrías en el espacio. Los niveles a los que están dirigidas abarcan las enseñanzas Elemental (Ciclo Superior), Media y Escuelas de Magisterio.

Los currícula actuales de enseñanzas Elemental y Media no realizan un desarrollo suficiente de la geometría tridimensional y, salvo algunos casos especiales, no abordan el desarrollo de la visión espacial del estudiante.

El cubo es una figura interesante para ser trabajada desde los primeros cursos de EGB; resulta familiar a los niños desde una edad temprana, presenta una amplia diversidad de posibilidades de manipulación y permite investigar en el aula y deducir gran variedad de propiedades.

Las actividades con cubos se pueden dividir básicamente en dos clases:

— Construcción de figuras con cubos (por ejemplo, policubos, que son los equivalentes tridimensionales de los poliominoes).

— Descomposición de un cubo en diferentes partes, lo cual permite la construcción de otras figuras (por ejemplo, somas y puzzles semejantes a los tangrams planos).

Las actividades que presentamos a continuación forman parte del segundo tipo y las consideramos adecuadas para grupos de estudiantes de Ciclo Superior de EGB, Enseñanza Media y Escuelas de Magisterio. Su finalidad principal es ayudar al desarrollo de la capacidad de visualización espacial, si bien los profesores podrían utilizarlas con otros fines, como estudiar el cubo u otros poliedros, trabajar sobre las isometrías del espacio o en cálculo de volúmenes. Como materiales más adecuados para su realización están la plastilina, el estirofoam y la cartulina.

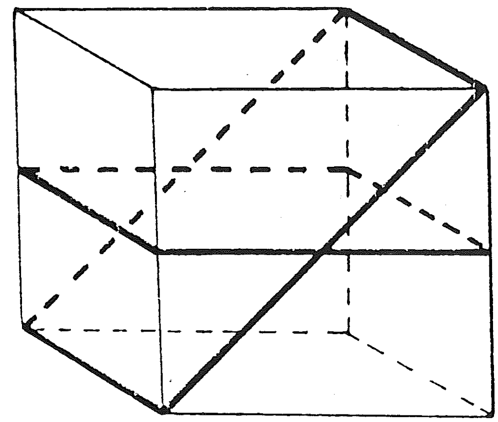


Figura 1

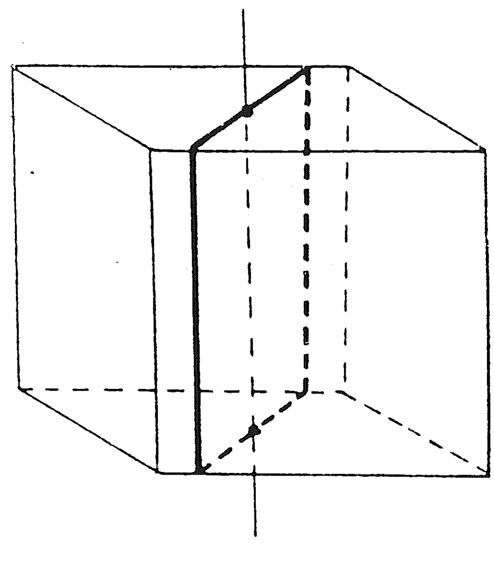


Figura 2

1. La primera actividad consiste en realizar divisiones de un cubo en dos partes congruentes. Los alumnos cortan cubos de plastilina o estirofoam y encuentran rápidamente las soluciones más sencillas, dividiendo el cubo por sus planos de simetría (figura 1). Cuando se continúa haciendo preguntas sobre la búsqueda de más soluciones, algunos alumnos descubrirán que existe la posibilidad de dividir el cubo en dos partes congruentes según cualquier plano que contenga un eje de simetría (figura 2).

Finalmente los estudiantes pueden llegar a obtener una solución general, que consiste en utilizar cualquier plano que contenga el centro de simetría del cubo (figura 3).

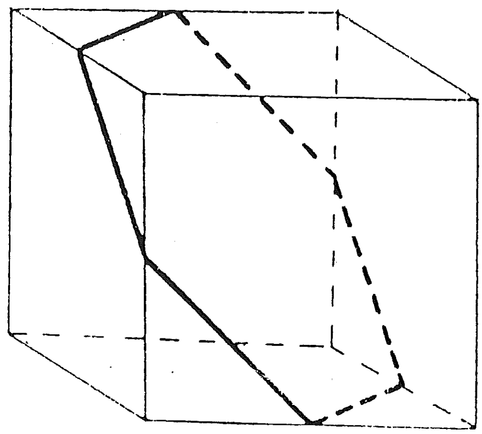


Figura 3

Esta actividad es útil para el estudio de las transformaciones del espacio, ya que las tres soluciones anteriores reflejan un interesante resultado de las isometrías tri-dimensionales (válido para cualquier sólido con plano, eje o centro de simetría); en este sentido, la actividad mencionada sería un buen punto de partida para adentrarse en el estudio teórico del tema. Pero, una vez que los alumnos han desarrollado este tipo de solución, el estudio se puede enfocar desde un punto de vista diferente.

2. Para la segunda actividad, se proporciona a los estudiantes cierta cantidad de módulos congruentes de estirofoam (o cartulina). La actividad consiste en encajar la mitad de estas piezas para construir medio cubo, y ajustar el resto de las piezas para construir *el otro* medio cubo. Cuando han encontrado una solución se pueden pegar los modulos en la posición correcta y proceder a encajar las dos partes del cubo para comprobar el resultado.

Para realizar esta actividad existen varios módulos de diferentes complejidades. El más simple es un módulo con forma de cubo (1/8 o 1/27 del cubo original) que permite, además, que los alumnos realicen un interesante trabajo de representación plana de sus construcciones (ver, por ejemplo, Gaulín [1], que ofrece una amplia bibliografía al respecto). Por otra parte, J. Carvajal ha realizado un interesante trabajo sobre las secciones modulares del cubo (ver, por ejemplo, Carvajal [2]), aunque sus objetivos son muy diferentes de los que planteamos en las actividades de este artículo.

3. Todos los módulos utilizados en la actividad 2 tienen la propiedad de que generan medio cubo congruente con la otra mitad del cubo; esto es, encajando adecuadamente varios ejemplares del módulo, se construye medio cubo que encaje con otro medio cubo de su misma forma (pero no su simétrica) para componer el cubo completo.

En la figura 4 mostramos un ejemplo. Los seis cortes realizados según las diagonales de las caras del cubo lo dividen en 24 módulos congruentes; su desarrollo se ve en la figura 5. Por tanto, con 12 de estos módulos los alumnos pueden construir figuras cuyo volumen es el de medio cubo.

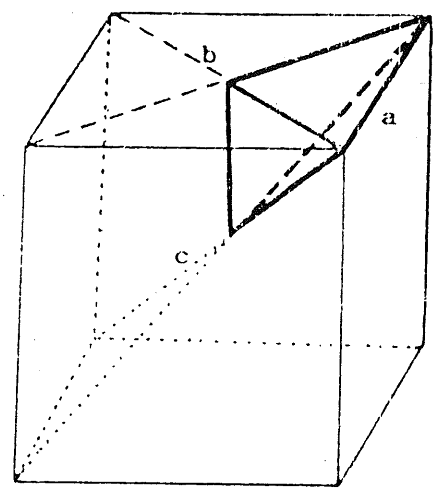


Figura 4

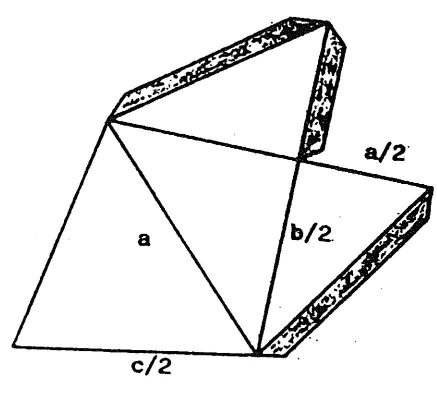


Figura 5

La tercera actividad consite en proponer a los estudiantes que repitan la actividad 2, pero buscando medio cubo que encaje consigo mismo para obtener el cubo completo. El interés y la dificultad de este último tipo de actividad reside en el hecho de que los estudiantes tienen que pensar sobre la posición de cada módulo en relación con los demás e imaginar la forma de ensamblar los medio cubos. La práctica y métodos de ensayo y error animarán a los alumnos a desarrollar algoritmos de construcción de soluciones, lo cual repercute en una mejora de su capacidad de visión espacial.

El aspecto teórico de estas actividades se basa en la dualidad entre concavidad y convexidad; para construir una forma que encaje con otra congruente y formar un cubo es necesario que a cada vértice «convexo» (es decir, vértice de un ángulo poliedro convexo) de la figura le corresponda un vértice «cóncavo» y que a cada arista «cóncava» le corresponda una «convexa» (ver la figura 6).

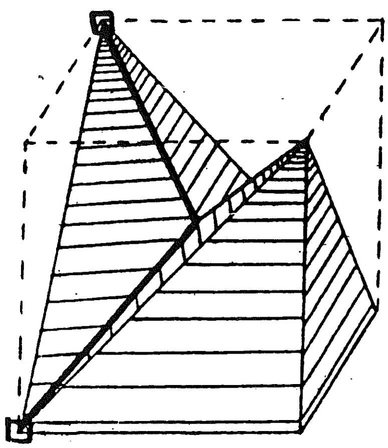


Figura 6

La variedad de soluciones para estas actividades depende del tamaño del módulo elegido. En las figuras 6 y 7 mostramos algunas soluciones, no todas, realizadas con el módulo que hemos presentado en la figura 4.

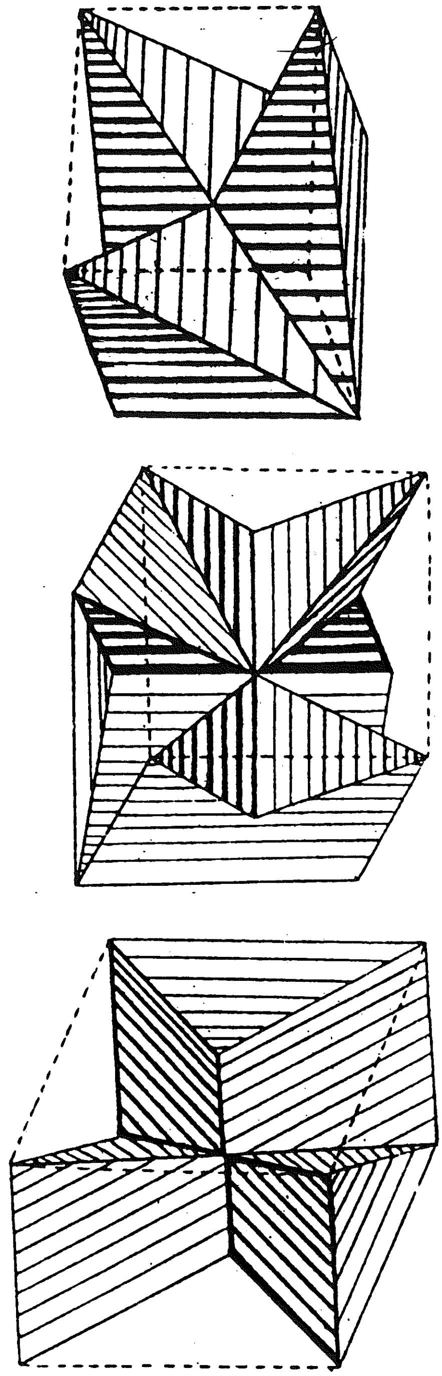


figura 7

[1] C. GAULÍN: «The need for emphasizing various graphical representations of 3-D shapes and relations», en *Streefland,* Proceedings of the 9 th PME, vol. 2, págs. 53-71, 1985.

[2] J. CARVAJAL: *Secciones modulares del cubo (recortables geométricos),* Generalitat Valenciana, Valencia, 1986.

Jugando con un triángulo

Juan Carlos Orero

«Todos mis trabajos son juegos. Juegos serios»
M. C. ESCHER

La idea estaba ahí y sólo hubo que tomarla.

Surgió durante una conversación que tuve con mi amigo Paco Hernán sobre una afición que tenemos en común: los mosaicos. Él volvía de una estancia de fin de semana en Granada durante la cual había visitado (de nuevo) la Alhambra. Yo, por mi parte, había ocupado el tiempo hojeando un libro sobre la vida y la obra de M. C. Escher.

Lo que había fijado nuestra atención esta vez era el efecto que sobre un mosaico llega a producir una variación local en el interior de una de sus losetas o módulos.

Unos días después estábamos trabajando con un grupo de profesores de matemáticas algunos aspectos de geometría que incluían el análisis de varios mosaicos de la Alhambra. Discutíamos sobre cómo podían haber sido diseñados el hueso, la hoja de higuera, el tripétalo, la pajarita..., y entonces pensamos que podíamos abandonar el análisis y poner el acento en la invención.

El juego consistía, partiendo de un triángulo equilátero como módulo base, en «hacer algo en su interior» (dibujar, sombrear, colorear...) y construir, usando este módulo modificado, un mosaico «nuevo».

Pusimos un par de ejemplos que sugerían el examen de cinco variables sobre el triángulo básico:

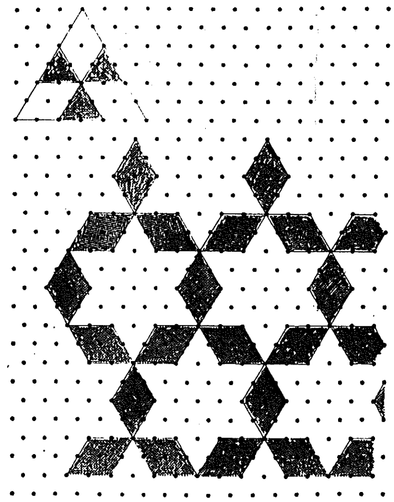
— Su tamaño.

— Su orientación.

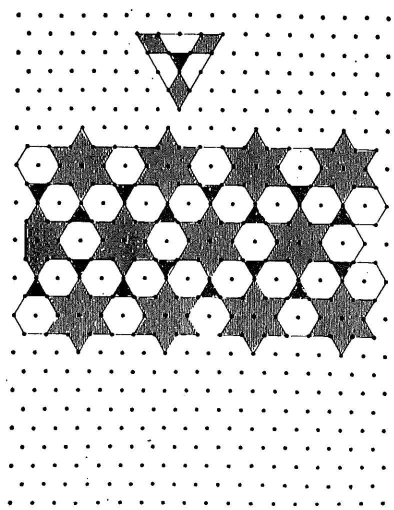
— Las características de la estructura que se piensa para su interior.

— El color.

— Los movimientos que actuarán sobre el triángulo para componer el mosaico.



[1]



[2]

Repartimos tramas isométricas, acetatos (transparencias) y rotuladores para hacer los diseños (también se pueden proporcionar libros de espejos, pero esta vez no lo hicimos).

Estuvimos trabajando durante hora y media y, después, con ayuda del proyector, vimos y analizamos los mosaicos diseñados por los profesores.

A continuación hay una pequeña muestra de los mosaicos que se inventaron.

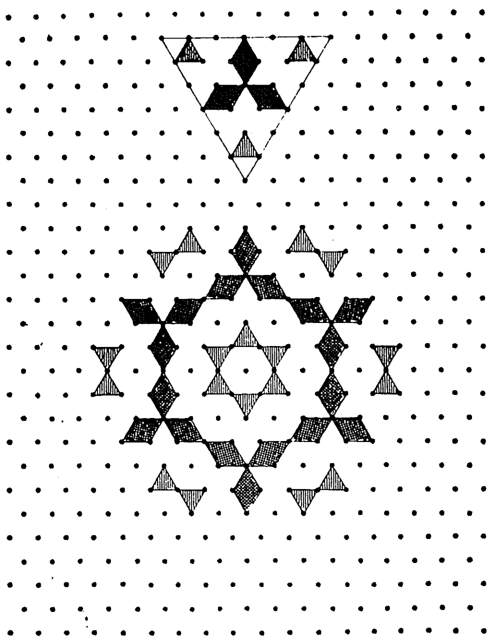
Los módulos de los tres primeros (1, 2 y 3) tienen una estructura similar (tres ejes de simetría y un motivo parecido) y sin embargo los mosaicos producidos son completamente distintos.

En el cuarto [4] se mantienen los tres ejes de simetría pero cambia la orientación del módulo.

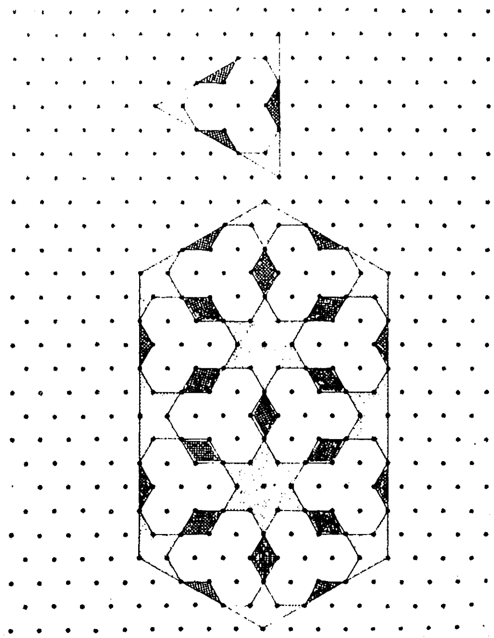
En el quinto [5] sólo hay un eje de simetría y la rotación produce una regularidad notable.

El sexto [6] es especial. No tiene ejes de simetría, pero sí hay simetrías en el mosaico resultante y además aparecen rectángulos.

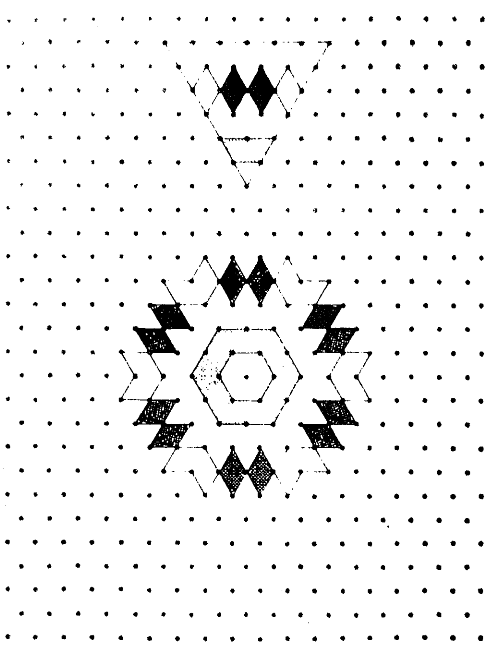
El juego resultó divertido.



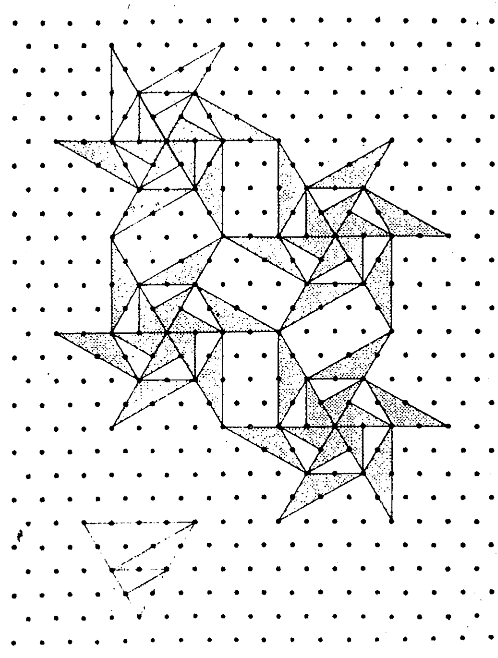
[3]



[4]



[5]



[6]

Astronomía: dos actividades

Manuel Fernández Tapia

El estudio de la Astronomía a niveles elementales en los centros de enseñanza, nos pone de manifiesto la gran aceptación que tiene por parte del alumno al ser factible su desarrollo práctico, al tiempo que crea en él un interés por la búsqueda de lo desconocido; y sobre todo, empieza a entender que la Ciencia no está dividida en compartimentos aislados entre sí, sino que existen multitud de problemas que pueden ser enfocados desde distintas perspectivas. Concretamente asignaturas como Filosofía, Religión, Física, Matemáticas, Química, Biología, Geografía, pueden estudiar conjuntamente una gran cantidad de aspectos relacionados con la Astronomía.

Dadas las enormes distancias que hay que manejar en Astronomía, muchos de los problemas que se nos plantean requieren la presencia de observadores que se hallen situados en puntos muy lejanos uno de otro. Esto implica la posibilidad de resolver cuestiones colaborando para ello dos o más centros de enseñanza que se encuentren en distintas provincias o incluso en distintas regiones españolas.

Planteamos a continuación dos ejercicios de estas características.

Actividad 1.ª

Calcular la diferencia de longitud geográfica que existe entre dos puntos

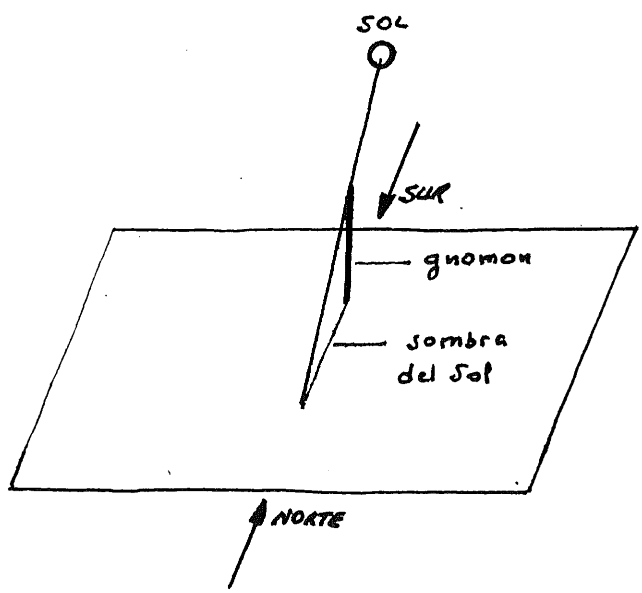
— Ponerse de acuerdo los dos centros que vayan a realizar la experiencia. Estos centros deben estar separados por una distancia de más de 100 kilómetros en la dirección este-oeste (por ejemplo Granada y Huelva).

— Construir en cada centro un gnomon, y averiguar *exactamente* la dirección norte-sur (*).

— Elegir un día para relizar el ejercicio y poner los relojes de los observadores exactamente coincidentes.

— Cada observador con su gnomon debe anotar ese día justamente el momento (la hora exacta) en que el Sol pasa por el meridiano local, es decir, por la dirección norte-sur (y, por lo tanto, su sombra es mínima).

Eso ocurrirá aproximadamente a las dos de la tarde en verano y a la una en invierno.



— Comunicarse ambos tiempos de paso por el meridiano local y calcular su diferencia (minutos y segundos).

— Convertir esa diferencia de tiempo en grados sabiendo que cada hora representa 15° (ya que las 24 horas corresponden a 360°).

— Comprobar (con un mapa de la zona que incluya a ambas poblaciones) que los grados resultantes corresponden a la diferencia de grados de longitud geográfica que existe entre ambos puntos.

Evidentemente, esto es debido al movimiento de rotación de la Tierra. Al girar ésta delante del Sol, éste pasa por el meridiano local de cada punto con un cierto retraso, originando así las diferencias horarias.

Como cada país tiene una hora oficial para todo su territorio, se dan estas diferencias en los diversos puntos que lo componen, siendo tanto más acusadas cuanta más diferencia de longitud geográfica exista entre ellos.

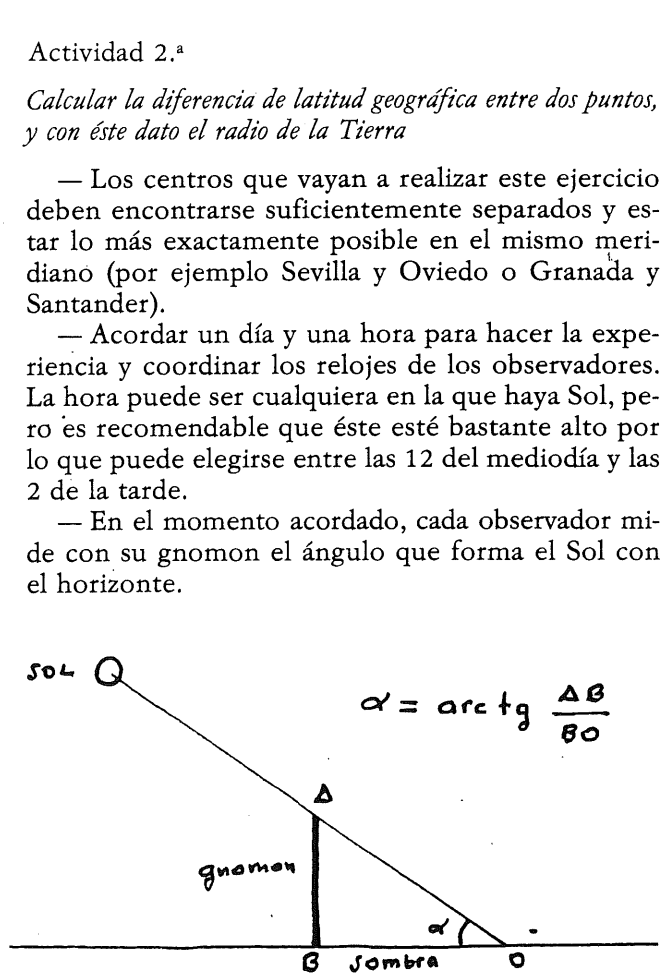
Actividad 2.ª

Calcular la diferencia de latitud geográfica entre dos puntos, y con éste dato el radio de la Tierra

— Los centros que vayan a realizar este ejercicio deben encontrarse suficientemente separados y estar lo más exactamente posible en el mismo meridiano (por ejemplo Sevilla y Oviedo o Granada y Santander).

— Acordar un día y una hora para hacer la experiencia y coordinar los relojes de los observadores. La hora puede ser cualquiera en la que haya Sol, pero es recomendable que éste esté bastante alto por lo que puede elegirse entre las 12 del mediodía y las 2 de la tarde.

— En el momento acordado, cada observador mide con su gnomon el ángulo que forma el Sol con el horizonte.



— Comunicarse ambos ángulos. La diferencia entre ellos corresponderá a la diferencia de latitud entre las dos poblaciones, como se puede comprobar en un mapa.

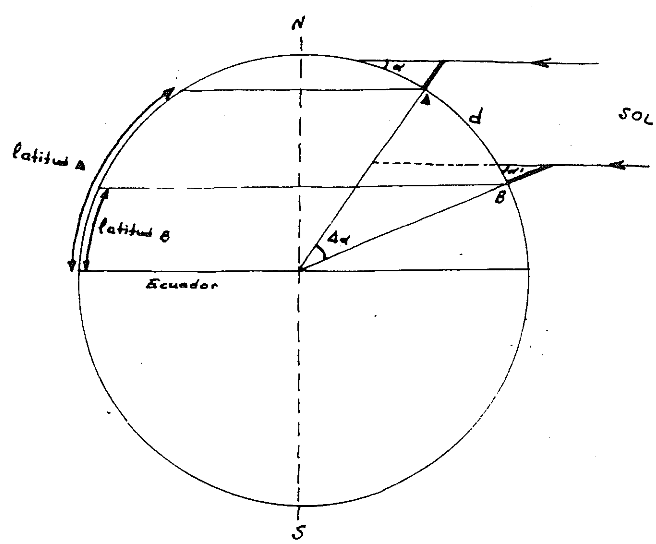
— Medir en el mismo mapa la distancia en línea recta que existe entre las dos ciudades (utilizando para ello la escala del mapa).

— Si $\Delta\alpha$ es la diferencia de latitud calculada y d la distancia en kilómetros entre ambas localidades, se verificará:

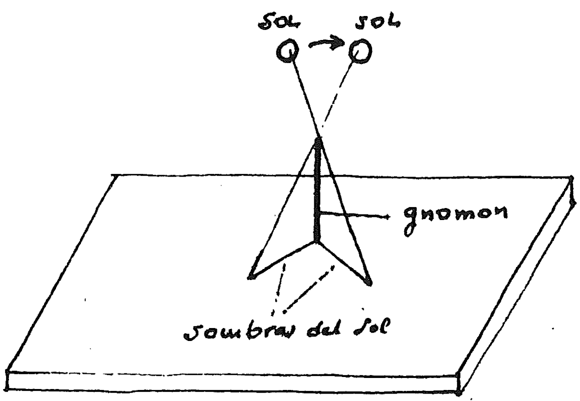
$$\frac{\Delta\alpha}{360^\circ} = \frac{d}{1}$$

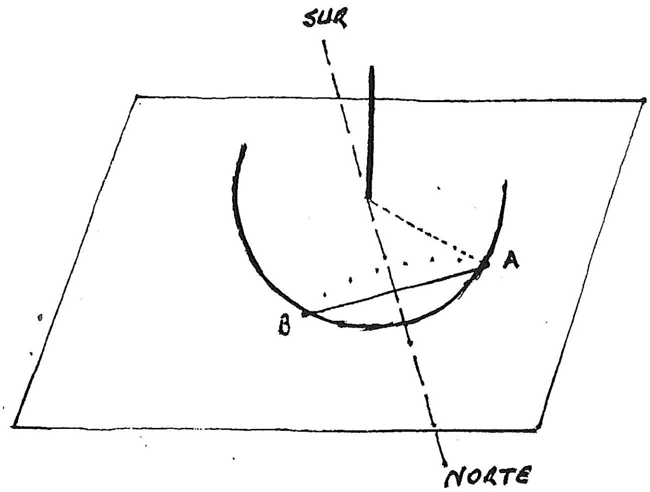
siendo *l* la longitud de la circunferencia terrestre. A partir de ella es evidente el cálculo del radio de la Tierra.

De la siguiente figura se puede deducir la explicación de este ejercicio.



* Un gnomon consiste simplemente en un palo vertical colocado en el suelo o en cualquier superficie horizontal, de tal manera que proyecte una sombra del Sol.





Como a lo largo de un día el Sol cambia de posición (debido a la rotación de la Tierra) la sombra se irá desplazando, siendo mínima justamente cuando el Sol se encuentre en la dirección norte-sur.

Para hallar esta dirección utilizando el gnomon se procede del siguiente modo:

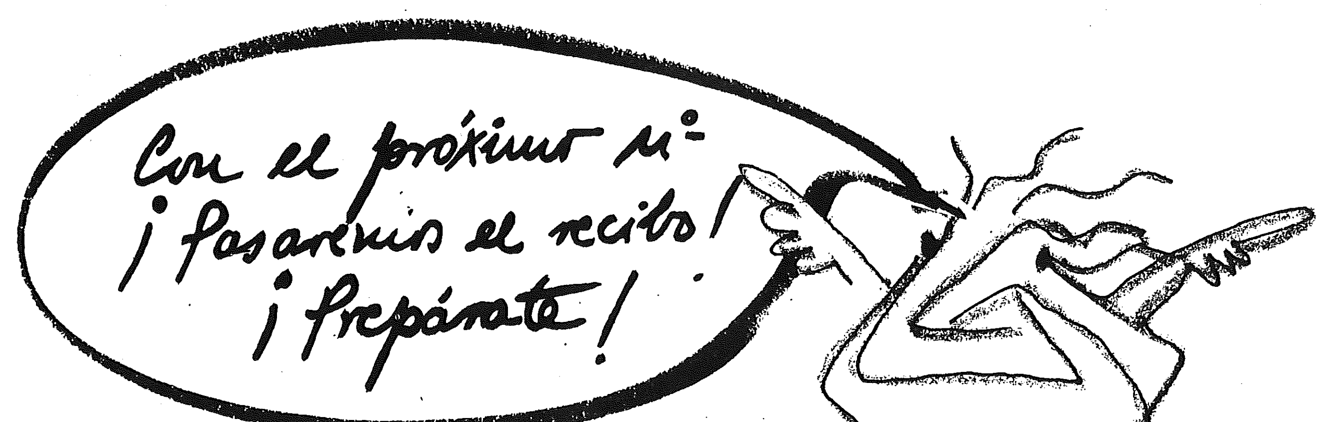
— Colocar el gnomon en un lugar completamente despejado (o sea, que pueda recibir los rayos del Sol durante todo el día).

— Marcar la sombra que proyecta la punta del gnomon a las 10 u 11 de la mañana aproximadamente.

— Con centro en la base del gnomon y radio la distancia de ésta al punto marcado, trazar un arco de circunferencia lo más grande posible.

— Esperar a que la sombra de la punta del gnomon vuelva a coincidir con este arco (ocurrirá por la tarde).

— Trazar un segmento uniendo ambos puntos de corte; la mediatriz de este segmento nos dará la dirección norte-sur buscada (meridiana).



Superficie foliar

Marta Albir, Molina Oliver,

Mercé Rovira y Ferrán Torres

El bosque está lleno de sorpresas. La flora y la fauna son un buen estímulo para el joven científico.

La población de árboles y arbustos es interesante. Su distribución nos enseña cómo es el bosque globalmente. Son particularmente importantes los hojas, que constituyen la parte verde del bosque. Las hojas verdes producen el oxígeno necesario para todos los habitantes del bosque y de la ciudad.

Queremos mostrar el trabajo que realizan, en un bosque cercano a Barcelona, grupos de chicos y chicas del Centro de Iniciativas y de Experimentación para Escolares de la Fundación Caixa de Pensions.

El trabajo consta de tres partes bastante diferenciadas:

a) La propuesta o discusión previa que permite reconocer el objetivo y definir una metodología.

b) La recogida de datos o salida al bosque, que permite llevar a la práctica la metodología elaborada.

c) La obtención de resultados que permiten trabajar en el aula con los datos recogidos, mostrar el trabajo realizado y su importancia.

Lo que sigue es el resumen de este trabajo, que nos parece que plantea bastantes propuestas y puede servir de ejemplo para realizar otros. A partir de la propuesta de Joan Franch el trabajo aquí presentado se ha experimentado con numerosos grupos de segunda etapa de EGB.

1. Propuesta de trabajo

Cuando se plantea a los chicos el problema: «Cómo podemos calcular la superficie de todas las hojas del bosque de Torrebonica», las respuestas son inmediatas:

1. Delimitamos una parcela de bosque de 10 m^2, contamos los árboles, después las hojas de cada árbol, y multiplicamos el número de hojas por las veces que hay 10 m^2 en el bosque.
2. Contamos las hojas que tiene un árbol y las multiplicamos por el número de árboles que hay en el bosque.
3. Contamos las hojas que hay en 1 m^2 de bosque y lo multiplicamos por el número de m^2 que tiene el bosque.
4. Calculamos la superficie de una hoja y lo multiplicamos por el número de hojas que tiene el bosque.
5. Etc.

Tenemos ya todas estas metodologías de trabajo planteadas. Debemos aprovecharlas todas o casi todas, discutirlas, ordenarlas y analizarlas.

Veamos los problemas de la propuesta 3. Los niños, cuando proponen contar las hojas que hay en 1 m^2 de bosque, se lo imaginan como una columna de tierra a cielo, pero cuando debemos delimitar esta columna físicamente no resuelven el problema. Por tanto, lo abandonan. Son muchas las veces que nos plantean esta metodología.

Si estudiamos la metodología 1, nos preguntamos: «¿Cómo es una parcela de 10 m^2? ¿Cabría dentro del aula? La respuesta espontánea es no, pero si lo pensamos mejor vemos que sí: que una cosa es la longitud y otra la superficie, y, a ojo de buen cubero, podemos observar que en una parcela tan pequeña de bosque es posible que no haya ningún árbol. Debemos, pues, coger una muestra mayor de terreno, y la elegimos de 400 m^2, o sea, un cuadrante de 20 m $\times$ 20 m, que es, más o menos, la superficie de un patio que está ante la casa y que han medido previamente.

Es posible que al escoger una única muestra de 400 m^2 lo hiciéramos de una parte de bosque poco representativa, ya que suponemos que no es uniformemente denso. Decidimos, pues, coger dos muestras de 400 m^2 que se diferencien por la densidad de población. Es evidente que si aumenta el número de muestras, aumenta también la fiabilidad del resultado.

Pero, ¿es realmente necesario contar una a una todas las hojas de cada árbol que hay en aquellas parcelas? Parece bastante complicado. No obstante, encontramos enseguida la solución. Basta con analizar la metodología 2, y vemos que si contamos las hojas de un ejemplar y multiplicamos el resultado por el número de árboles que hay en la parcela, nos ahorramos mucho trabajo.

Cuando contamos la vegetación de estos cuadrantes vemos la necesidad de hacer una clasificación previa por especies. Es más, dentro de cada especie deberemos hacer también una clasificación por tamaños. Utilizaremos, como patrón de medida, nuestro propio cuerpo.

Ahora bien: ¿contaremos todas las hojas de un árbol? No es necesario: cuando hayamos elegido un representante veremos cuantos ejemplares salen del suelo y por cada uno contaremos las ramas de primer orden (salen del tronco), de segundo orden (salen de una rama de primer orden) y de tercer orden, y contaremos el número de hojas de una rama de tercer orden.

De esta manera el número de hojas de un representante es (número de ejemplares) × (número de ramas de primer orden de un ejemplar) × (número de ramas de segundo orden de una rama de primer orden) × (número de ramas de tercer orden de una rama de segundo orden) × (número de hojas de una rama de tercer orden).

Recordemos que nuestro problema es encontrar la superficie foliar del bosque, y que por lo tanto debemos calcular la superficie de las hojas. Nos preguntamos, pues: ¿qué hoja debemos escoger para calcular la superficie? No todas las hojas del bosque son iguales, ya que cambian de forma y tamaño según la especie. Parece evidente, pues, la necesidad de calcular la superficie foliar del bosque por especies.

No podemos sumar hojas de diferente especie, pero sí podemos sumar la cantidad de superficie foliar que aporta cada especie. Es más, en cada especie hay hojas de diferentes medidas y, por lo tanto, de diferentes superficies. ¿Qué debemos hacer? ¿Clasificar las hojas por medidas, y contar cuántas hay de cada medida? Parece claro que sería casi imposible.

¿Y si elegimos hojas de varias medidas y hacemos la media? El método puede que no fuera muy riguroso, ya que seguramente no habrá el mismo número de hojas de cada medida.

Así pues, ¿qué hacemos? Pues bien: hay un método que es bastante válido, y es coger 5 ó 6 hojas al azar y sacar la media. Así, tenemos más posibilidades de acercarnos a la realidad del bosque.

En general debemos vigilar los posibles errores que podemos cometer cuando escogemos las muestras.

Después de mucho discutir y analizar las diferentes metodologías hacemos una lista de trabajos para realizar:

a) Calcular los m^2 de bosque que tiene Torrebonica.

b) Ver cuántas veces cabe nuestra muestra en el bosque.

c) Contar el número de ejemplares que tiene cada muestra de 400 m^2 de bosque.

d) Calcular el número de hojas que tiene un representante de cada especie y tamaño.

e) Calcular la superficie media de una hoja de cada especie.

f) Calcular la superficie foliar por especies haciendo los cálculos pertinentes.

g) Calcular la superficie foliar total sumando las parciales.

Los apartados *c* y *d* se realizan en el bosque y los otros en el aula.

2. Recogida de datos en el bosque

Lo primero que debemos hacer cuando llegamos al bosque es observar las diferentes especies y su densidad. Comprobamos que el bosque no es uniformemente denso: tiene claros y zonas más frondosas. Las especies que encontramos son pinos, encinas, tojos, torviscos, romeros, y otras más raras que podemos despreciar.

Hacemos una clasificación específica y por tamaños:

— Consideramos pinos grandes todos aquéllos con un perímetro del tronco superior a tres palmos, aproximadamente el perímetro craneal. Los pinos pequeños serán los que tengan un tronco que podamos abrazar con las dos manos. Y los pinos medianos los que no son ni grandes ni pequeños.

— Las encinas son muy jóvenes. Las consideramos grandes cuando tengan un tronco muy definido, pequeñas cuando estén por debajo de nuestras rodillas y medianas las comprendidas entre las grandes y las pequeñas.

— Consideramos que los arbustos son grandes o pequeños según si superan o no la altura de nuestras rodillas.

Tomamos dos muestras de 400 m² de bosque de diferente densidad y las dividimos en cuatro parcelas de 100 m². En cada una trabaja un grupo de niños y contamos lo que hay.

Contamos el número de hojas de un representante de cada una de las particiones.

Recogemos unas cuantas hojas de cada especie al azar, y volvemos al aula para terminar la tarea.

3. Obtención de resultados

A partir de ahora, referiremos el trabajo a una superficie de 100 m², que es la parcela donde ha trabajado cada grupo de niños.

Cuando llegue el momento, se forman grupos y cada uno se encarga de trabajar con uno de los aspectos siguientes:

1. Cálculo de la superficie foliar e índice foliar del bosque.
2. Cálculo de la superficie del bosque.
3. Cálculo de la superficie de las hojas.
4. Población de medidas para cada especie.
5. Población específica.
6. Población foliar específica.
7. Superficie foliar específica.
8. Bloque diagramático.
9. Reportaje del trabajo.

1. *Cálculo de la superficie foliar e índice foliar del bosque*

Al dividir la superficie foliar por la superficie del bosque obtenemos el *índice foliar.* Este índice nos indica los m² de hojas que hay en cada m² de bosque. (figura 1)

2. *Cálculo de la superficie del bosque*

El bosque se calca sobre papel milimetrado, se cuentan los cm² que ocupan y se pasa a escala.

3. *Cálculo de la superficie de las hojas*

Por cada especie se calcula la superficie de 5 hojas escogidas al azar perfilando el contorno sobre papel milimetrado. Después se saca la media y obtenemos la superficie media de una hoja de cada especie. (figura 2)

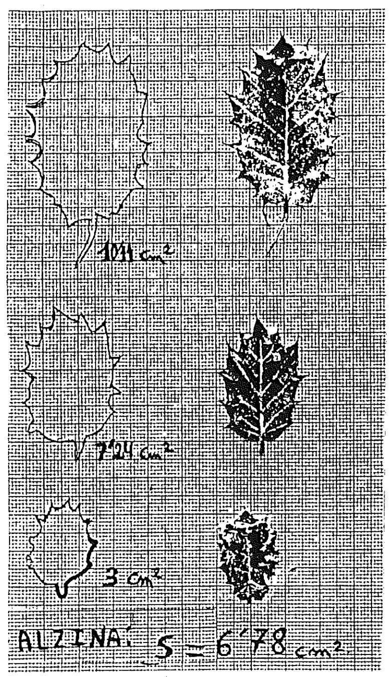


Figura 2

	Pi Gran	*Pi* Mitju	*Pi* Petit	*Alzina* Gran	*Alzina* Mitju	*Alzina* Petit	*Gatosa* Gran	*Gatosa* Petit	*Matapolls* Gran	*Matapolls* Petit	*Romani* Gran	*Romani* Petit
Promig 100 m²	2	3	6	2	41	55	7	21	9	11	1	6
N.º fulles ex.	1.530.000	609.000	33.000	857.000	61.000	1.300	10.000	500	1.500	300	7.000	900
N.º fulles 100 m²	3.060.000	1.827.000	198.000	1.714.000	2.501.000	71.500	70.000	10.500	13.500	3.300	7.000	5.400
N.º fulles esp.		5.085.000			4.286.500		80.500		16.800		12.400	
Superficie full.		39 mm²			678 mm²		103 mm²		27 mm²		35 mm²	
Superficie dol		19,83 m²			2.906 m²		8,29 m²		0,45 m²		0,43 m²	
Superficie foliar 100 m² 2.935 m²							Superficie del bosc 727.000 m²					
Superficie foliar del bosc 2.133.745.000 m²												
Index foliar especific												
		0,2			29		0,08		0,05		0,04	
Index foliar del bosc 29,35												

Figura 1

4. *Población de medida para cada especie*

Para cada especie, representamos el número de ejemplares grandes, medianos y pequeños que hay en 100 m^2.
Utilizamos histogramas.

5. *Población específica*

Enseña la abundancia absoluta y percentual de cada especie en 100 m^2.
Utilizamos diagramas de barras y sectores. (figura 3)

6. *Población foliar específica*

Muestra de la abundancia absoluta y percentual de hojas de cada especie en 100 m^2.
Utilizamos diagramas de barras y sectores.

7. *Supeficie foliar específica*

Distribución de la superficie foliar aportada por cada especie en el bosque.

8. *Bloque diagramático*

Dibujamos la clasificación que hemos hecho del bosque con relación a nuestro cuerpo. Añadimos unas líneas que separen el estrato arbóreo, el estrato arbustivo y el estrato herbáceo.

9. *Reportaje del trabajo*

Uno de los grupos se encarga de hacer de reporteros y entrevistan al resto mientras trabajan. A partir de los resultados obtenidos se prepara la redacción-resumen.
Se ha motivado la realización del trabajo por la presentación de una experiencia parecida hecha en otra escuela y que consistía en contar la población de gaviotas de las islas Medas. La presentación y la realización del trabajo nos ocupa aproximadamente seis horas.

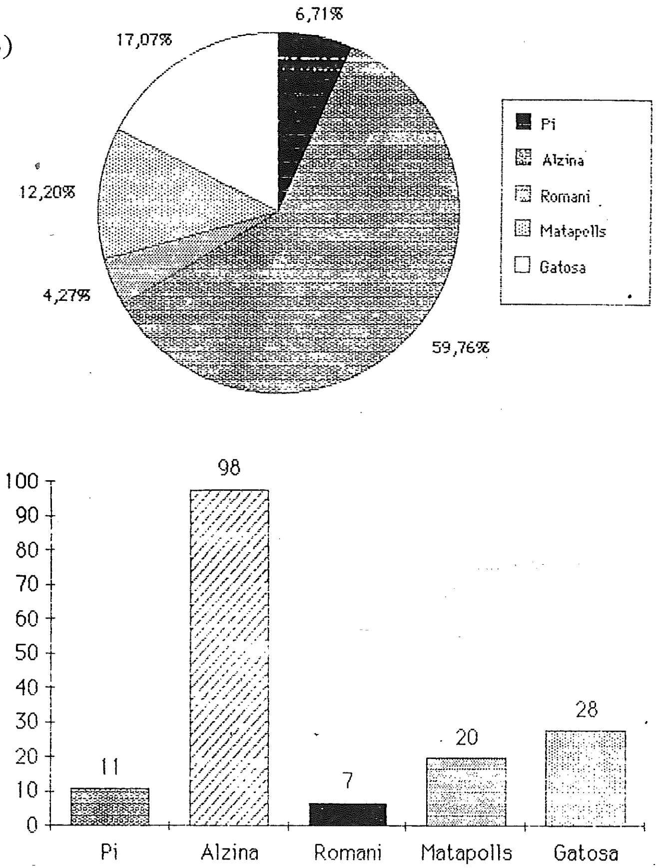


Figura 3

Los protocolos de resolución en la enseñanza de matemáticas

Inés María Gómez Chacón

Antecedentes y justificación

En este artículo presentamos algunas reflexiones acerca de la experiencia sobre el proceso de resolución de problemas en un grupo de alumnos de 1.º y 2.º de BUP durante los cursos 1987-88 y 1988-89. Analizamos cómo se puede favorecer y mejorar los procesos de pensamiento matemático utilizando para ello el trabajo de protocolos.

Los protocolos de resolución tratan de marcar las huellas objetivas de la secuencia sobre las acciones tomadas por un individuo en el proceso de resolución un problema.

Ha sido usada como herramienta en la enseñanza de la matemática para buscar el proceso de resolución de problemas.

Según Schoenfeld [1] el primer esquema de codificación de protocolos riguroso en la enseñanza de la matemática fue desarrollado por Kilpatrick en su disertación en 1967 [2]. El análisis de Kilpatrick codifica especialmente la clase de comportamientos heurísticos que eran supuestos en la resolución. El resultado del análisis fue una larga cadena de símbolos representando el proceso que se usó durante la resolución. La secuencia cifrada obtenida se utilizó como fuente de datos para un análisis estadístico. Éste permitió explorar la correlación entre los progresos en la resolución de problemas y la frecuencia de acontecimientos de ciertos procesos de resolución.

Muchos análisis de protocolos se basaron en el esquema de Kilpatrick (1967). Posteriormente se hicieron modificaciones de este esquema —Lucas (1972)—. La búsqueda de una mejora continuó durante los 70. El producto final del esquema de Lucas fue un diccionario de códigos de procesos, más de dos largas páginas que fueron acompañadas por comparaciones complejas y procedimientos codificados (Lucas, Branca, Goldberg, Kantowski, Kellogg y Smith, 1979), resultando molesto de cara a una investigación por la gran abundancia de símbolos.

Kantowski redujo el enfoque usando un esquema para procesos heurísticos de interés, centrándose en 5 procesos heurísticos relativos al planing, 4 relacionados con la analogía y 7 relacionados con la vuelta atrás.

Kulm, Campbell, Frank y Talsma (1981) desarrollaron, revisaron y condesaron procesos del código-diccionario, buscando correlaciones entre progresos en la resolución de problemas y la frecuencia de ciertos tipos de comportamientos reflejados en los protocolos. Pero ninguno de estos métodos de análisis de protocolos se ha centrado en decisiones de estrategias, ni en su impacto en la ejecución de resolución de problemas, ni en donde la decisión tiene lugar durante el intento de resolución. Éste es el método de análisis de protocolos descrito por Schoenfeld (1985), el cual se centra en la toma de decisiones de la ejecución o nivel de control.

Trabajo con protocolos

Como *modelo de referencia* para el desarrollo de nuestra experiencia, tomamos el concepto sobre el pensamiento matemático que desarrolla J. Mason, L. Burton y K. Stacey en su manual «Thinking Mathematically» (1982).

Para favorecer el aprendizaje de las fases de resolución de problemas y procesos involucrados en ellas, preparamos una amplia colección de problemas, que clasificados en concordancia con los procesos y habilidades; pretendimos no sólo fueran comprendidos por los alumnos para su aplicación inmediata, sino que pudieran ser incorporados a su banco de estrategias, listos para ser usados cuando la ocasión se presente.

A medida que avanzaba la experiencia nos dimos cuenta de que había que encontrar un método más eficaz que nos permitiera ver el proceso seguido por cada alumno y seguirlo personalmente. Decidimos que una vez que ellos habían visto modelos, ideas..., debíamos poner el énfa-

[1] Cfr. Schoenfeld, A. H., 1985, *Mathematical Problem Solving,* Academic Press, Orlando, F. L.

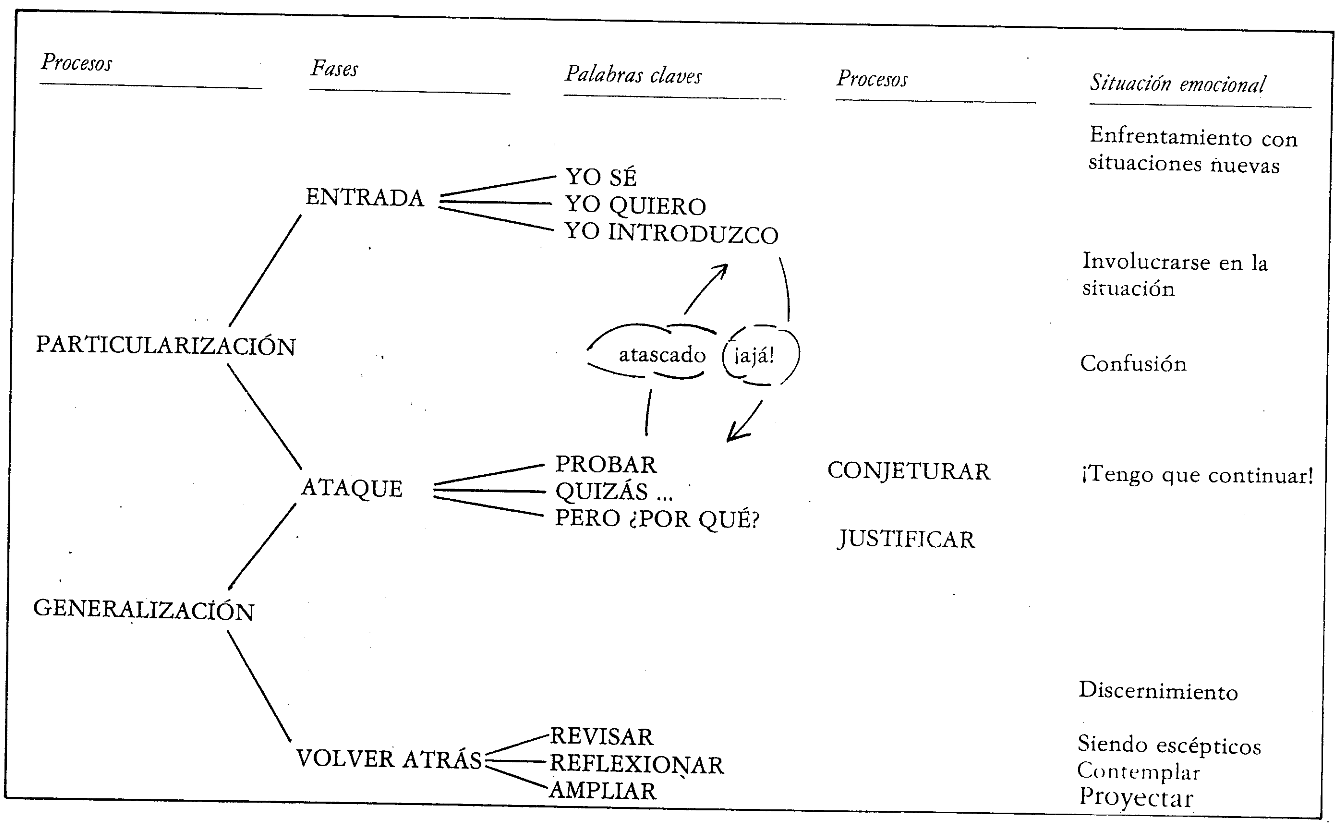
[2] Cfr. Kilpatrick, J. 1967, *Analyzing the solution of word problems in Mathematics: An exploratory Study,* Unpublished doctoral disertatión, Staford University, 1967.

sis en que cada uno adquiera el hábito de la reflexión sobre su propio proceso de pensamiento como técnica fundamental para su mejora. Utilizamos el trabajo y análisis de protocolos, es decir, le dábamos a cada uno una hoja con un único problema y dividida en dos partes. En una el alumno apuntaba lo que pensaba, su proceso..., en la otra la solución. Después de corregido y comentado a cada uno, él lo revisaba, y más tarde hacíamos la puesta en común y corrección en la pizarra.

Estas sesiones permitían conocer de cerca algunos elementos subyacentes a la resolución de problemas: bloqueos más habituales, forma de proceder de cada individuo, ensayo de materiales y estrategias, e ir dibujando atentamente el proceso de investigación, el estado emocional y psicológico que ello provoca, y concentrándonos en estos factores no sólo como ayuda al estudiante en su proceso de desarrollo sino como instrumento para evaluar la capacidad de resolver problemas.

Actualmente existen pruebas diseñadas a tal efecto con problemas de distintas partes de la matemática; también hay tablas para cuantificar esta habilidad teniendo en cuenta el plan de resolución, la estrategia utilizada, los cálculos y el razonamiento. Pero tanto en uno como en otro caso sólo se valora la respuesta final, ignorando el proceso seguido hasta ella. Creemos que con el análisis de protocolos podemos evaluar mediante un planteamiento más cualitativo en el que no se pierda de vista todo el proceso desde su fase de incubación. Para esto necesitamos seguir la evolución de los trabajos del estudiante durante un proceso largo de tiempo, ya que las distintas fases no se desarrollan en un período fijo y dependen del momento psicológico del individuo y después realizar una medida estadística de estos trabajos en la que se tengan en cuenta varios parámetros como: primeras ideas, diagramas hechos, capacidad para hacer distintos tipos de razonamiento, fases de resolución, empleo de estrategias, flexibilidad, perseverancia en el trabajo, creatividad para explorar nuevos caminos y superar bloqueos...

El cuadro que viene a continuación nos puede servir como esqueleto para efectuar un análisis de protocolos.



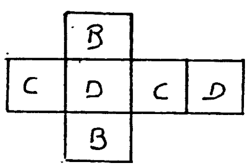
Análisis de un protocolo

Presentamos a continuación un protocolo de una alumna de 1.º de BUP realizado durante el curso 1987-88. Intercalados con la narración de la resolución del problema están los comentarios que yo iba efectuando al analizarlo sobre los procesos, fases, palabras claves que se produjeron durante la resolución.

Como pintar un cubo

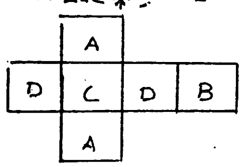
Problema

¿Cuál es el mínimo de colores que se necesitan para pintar un cubo de manera que dos caras adyacentes tengan siempre distinto color?
¿Cuántos cubos diferentes se pueden obtener usando cuatro colores? (Recuerda que cada cara ha de ir pintada sólo de un color y naturalmente caras adyacentes de colores distintos.)

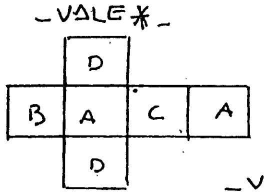


Nº MÍNIMO DE COLORES : 3

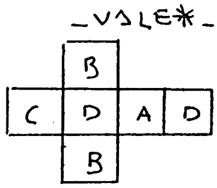
-VALE* - -4 COLORES-

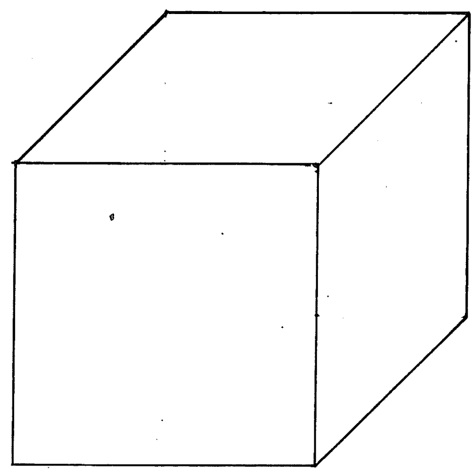


-VALE*-



-VALE*-





M.ª José

Creo que el enunciado del problema está escrito de una forma muy complicada. Es más fácil decir:
"Pinta un cubo con el mínimo de colores de tal forma que dos caras que estén juntas tengan siempre diferente color".

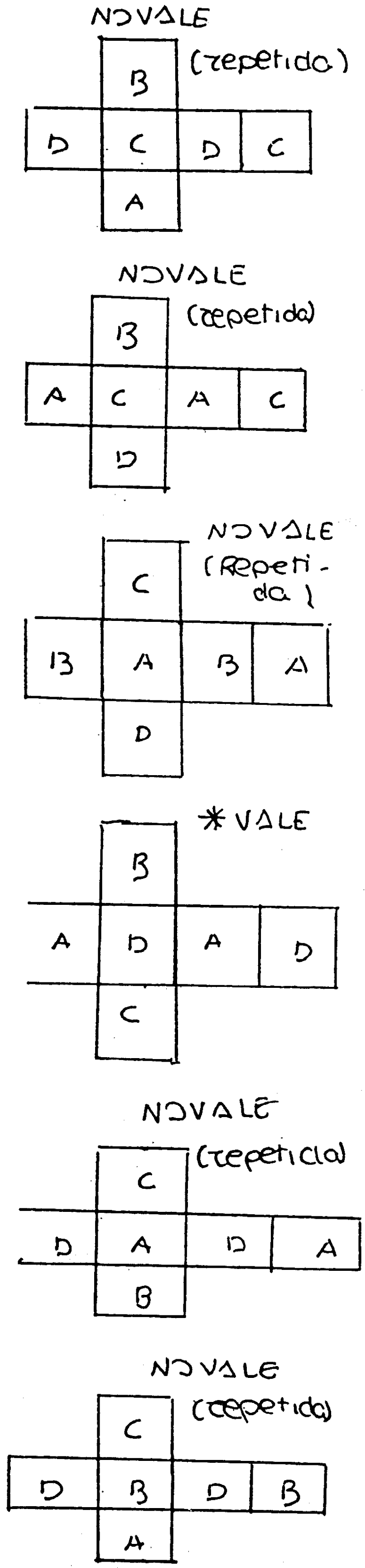
Comienza la fase de *entrada*.

— Se estudia el enunciado, se da una comprensión y reformulación de éste (yo sé, yo quiero).

— Presenta una flexibilidad mental. Se da un cambio de representación del cubo, de perspectiva a desarrollo del cubo (yo introduzco).

Para solucionarlo voy a dibujar los cubos y pintarlos.

— Introduce: representación.
diagramas.



Se me ha ocurrido una idea. Este proble-ma me parece parecido a otro problema que hemos hecho sobre tres amigos que jugaban 10 partidas de bolos. También es de combi-naciones. Voy a intentar resolverlo como el de los amigos, porque si lo dibujo me puedo llevar muchísimo tiempo, son cantidad de combinaciones

— Se da una analogía en el contexto matemático en el que se resuelve el problema. Busca un problema similar; pero es consciente que el problema no representa la misma estructura.

El problema de los amigos y este, no son iguales, porque en el de los amigos podías repetir posibilidades y en éste no.

Tiene que haber alguna forma porque a la cuenta de la vieja, o sea pintándolos me puedo llevar tres años.

Comienza la fase de *ataque*.

— Tiene una intuición (probar).

— Estimación de la solución. Se dan argumentos para estimar la validez de los resultados.

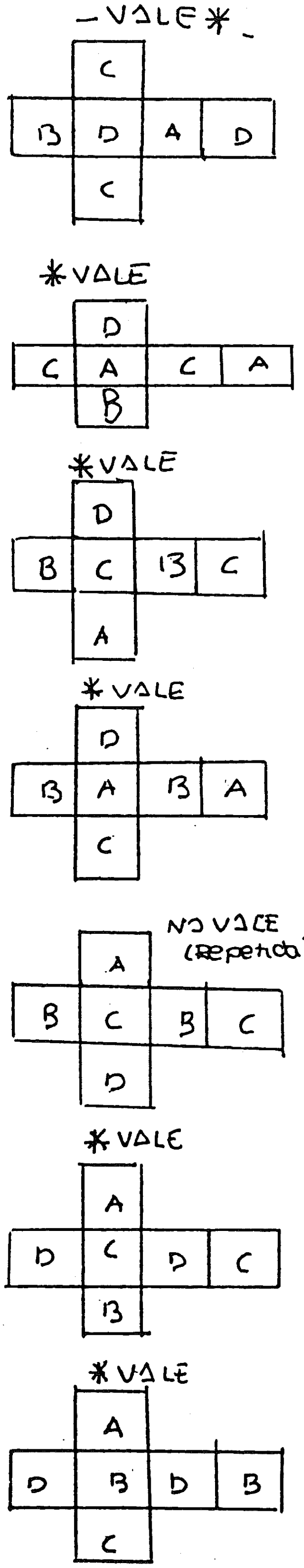
Se me ha ocurrido otra idea. En el problema venía en el libro, lo que estoy haciendo es buscar por el libro algún problema parecido a este.

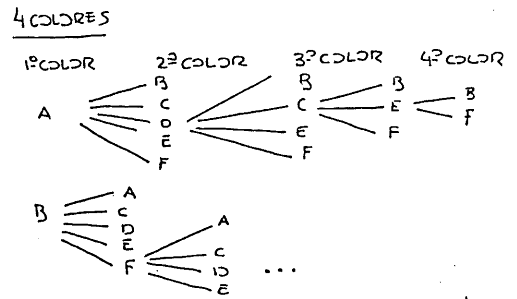
Después de un buen rato, he encontrado uno parecido, sobre las distintas formas de repartirse tres medallas entre 6 atletas.

Voy a intentar hacer este siguiendo un esquema:

— Busca problemas similares.

— Analogía existente entre la representación del desarrollo del cubo con la notación empleada: A, B, C, D, sin imaginarse cómo queda el cubo en el espacio y el otro del problema del libro (pero ¿por qué?).





6 caras (A, B, C, D, E, F) combinadas con 4 colores sería: | 6·5·4·3 = 360 CUBOS DIFERENTES |

— Introduce una nueva representación: el diagrama árbol.

Yo no sé si tú pensarás que es un poco de cara como lo he hecho, pero yo creo que no, porque bien que he trabajado para encontrar un proble ma parecido, entenderlo, y después hacer este probl) problema de esta forma.

— Estado emocional.

Todo lo que hecho está mal, porque no he tenido en cuenta lo de las caras adyacentes. Y así no me salen 360, sino muchas menos.

He seguido haciendo las combinaciones del principio, para ello me he fabricado un cubo de papel.

Comienza la fase de Volver atrás.

— Se da un elemento de control del problema (revisar).

— Comienza la fase de vuelta atrás, revisar argumentos, consecuencias, conclusiones...

Vuelve a la lectura del enunciado.

Ya he hecho todas las combinaciones. Hay algunas que son iguales. Las voy a tachar.

Hay 10 combinacones. Son las que tienen un asterisco.

— Reflexiona sobre las ideas y momentos claves.

— Manipulación: vuelve a la familiarización física. Le ha llevado a equivocación la representación del cubo.

— Vuelve a la resolución. Revisa para dar la solución.

Valoración de la experiencia

Subrayamos el cambio de actitud que poco a poco se va produciendo en los alumnos al abordar problemas. La valoración es positiva ya que no sólo les posibilita el aprendizaje de la resolución de problemas, sino que les lleva a una toma de conciencia de sus capacidades...

Exponemos a continuación algunas de las valoraciones hechas por los propios alumnos:

— «Los métodos me han parecido buenos porque nos han ayudado bastante ya que siempre habíamos hecho los problemas cada uno por su cuenta y sin ningún método, más o menos a voleo, y con las hojas hemos cogido un método, sabemos por dónde empezar, etc.»

— «Yo ahora, cuando cojo las Mates, sé de qué va y no me aburren como otros años.»

— «Con esto de las hojas, y créeme, *te lo digo en serio* y no estoy de "peloteo", me parece que mi "cerrada azotea" ha pensado más que antes, y eso me parece, que es bastante bueno.»

— «También me han parecido muy bien las fichas de problemas con las que hemos descubierto qué capacidad tenemos y a la vez (a mí por los menos) que hemos resuelto nosotros mismos, nos dan ánimos a seguir y a pensar que podemos sacar muchas más cosas.»

Bibliografía

ADAMS, James L.: *Juegos de desbloqueo mental,* Gedisa, Barcelona, 1987.

BOLT, B.: *Divertimentos matemáticos,* Ed. Labor, Barcelona, 1988.

BURTON, L., MASON, J., STACEY, K.: *Thinking Matematically,* Ed. Addlison, Wesley, 1982.

DE BONO, E.: *El pensamiento lateral,* Ed. Paidos, Barcelona, 1986.

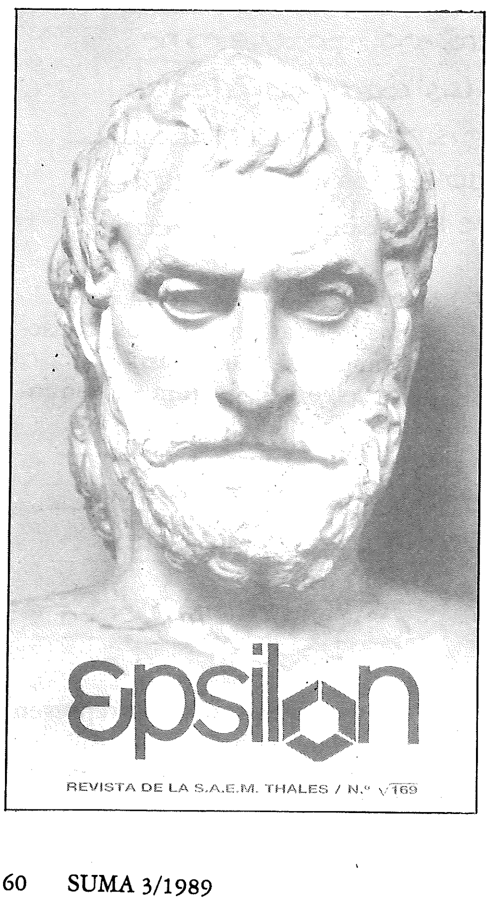
DE GUZMÁN, M.: «Enseñanza de la matemática através de la resolución de problemas», *Educación Abierta,* 71. (ICE Universidad de Zaragoza, 1987.)

POLYA, G.: *How to solve it*, Doubledoy, New York, 1957.

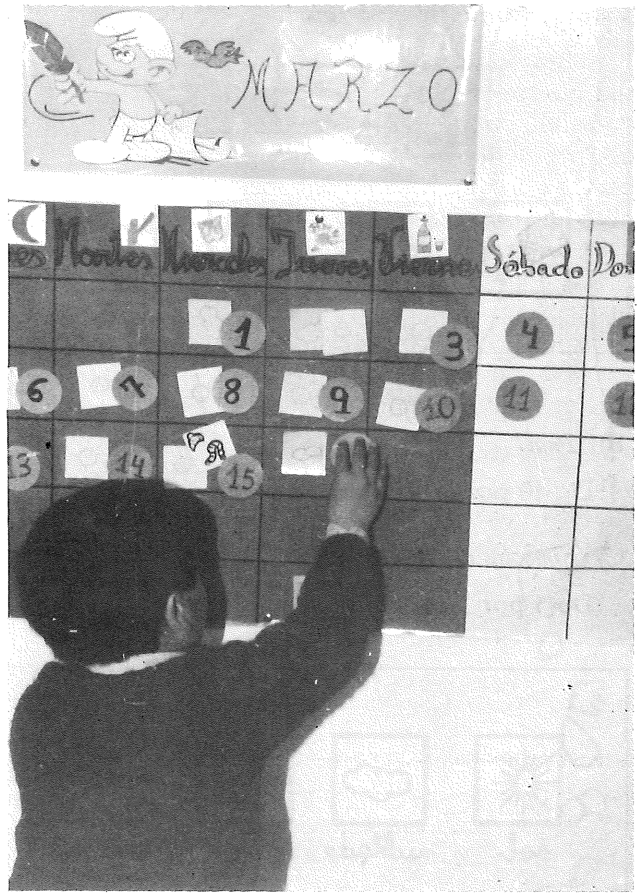
SCHOENFELD, A. H.: *Mathematical Problem Solving,* Academic Press, Orlando, FL, 1985.

SCHOENFELD, A. H.: «Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos», *La enseñanza de la matemática a debate,* MEC, Madrid, 1985.

WOOD, E.: *Estrategias de pensamiento,* Ed. Labor, Barcelona, 1987.



INDICE



El calendario como recurso didáctico

Consuelo Martínez y Clara M.ª Robles

Introducción

La actividad didáctica de preescolar creemos que ha de centrarse básicamente en la estimulación de los niveles madurativos que propicien un fácil aprendizaje de la lectoescritura y del cáculo.

Si bien es cierto que se ha elaborado abundante material respecto a la lectoescritura, no sucede igual con el cálculo.

Nuestra experiencia didáctica en preescolar y Ciclo inicial nos recuerda la dificultad para enseñar las matemáticas así como la de globalizarlas con el resto de las áreas.

Ante estas dificultades, comenzamos a utilizar el calendario como centro de interés alrededor del cual giraban todas las actividades que más directamente desarrollan los aspectos relacionados con el cálculo.

Las tareas han sido muy motivadoras para los alumnos pues ellos han participado activamente. Esta participación activa es clave no ya para incentivar el trabajo sino también para el propio aprendizaje.

1. Descripción del material

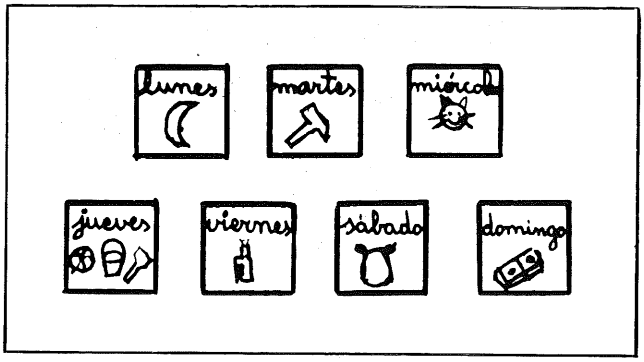
Todo el material está realizado en cartulina plastificada o en acetato.

A) *Calendario*

Consta de una cartulina plastificada dividida en cuadros, tal como aparece en el dibujo. El Sábado y el Domingo figuran en color rojo; el resto de los días en blanco.

Lunes	*Martes*	*Miércoles*	*Jueves*	*Viernes*	*Sábado*	*Domingo*

Hemos observado que los niños memorizan mucho mejor a través de símbolos, así pues le hemos asignado a los días de la semana los siguientes:

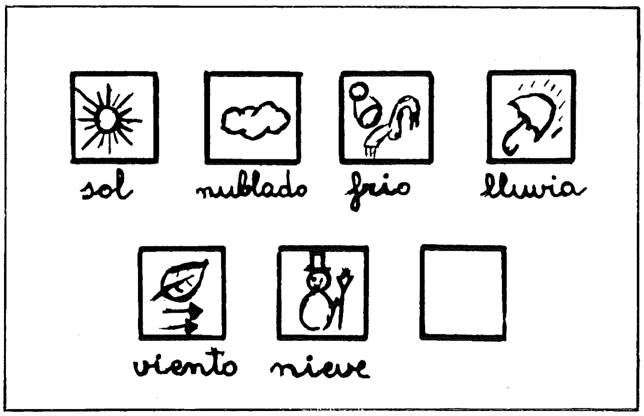


B) *Panel*

De 40 por 40 centímetros

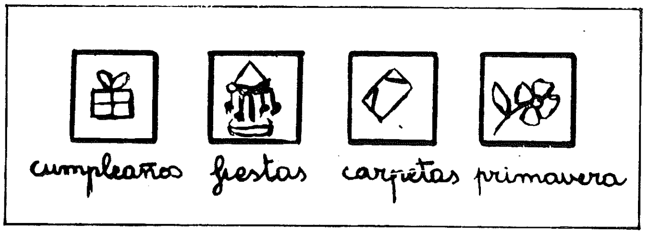
C) *Símbolos del tiempo*

De 5 por 5 centímetros cada uno



D) *Onomásticas, cumpleaños, días de fiesta, otros*

Estos símbolos se colocan al inicio de cada mes. Favorecen el planteamiento de situaciones problemáticas tales como: ¿Cuántos días faltan para la entrega de carpetas? ¿Cuántos días han pasado desde el cumpleaños de ...?



E) *Barritas y cuadritos*

Varias barritas en cartulina roja de 20 centímetros por 2, y tantos cuadritos confeccionados en cartulina azul plastificada de 2 cms. por 2 cms., como días tiene el mes

F) *Números*

Varios cuadrados de 5 cms. por 5, en cartulina azul donde están representados los números del 1 al 9. Con las mismas medidas pero en cartulina roja varios números 1 (todos estos números se colorarán en el panel), 31 círculos de 4 cms. en cartulina donde están representados los días del mes (estos números se colocarán en el calendario).

Todos los números tiene las unidades en azul y las decenas en rojo de manera que siempre relacionen unidades con cuadritos y con azul, y decenas con barritas y rojo. (No empleamos con los niños los términos unidades y decenas).

G) *Meses*

12 carteles con los nombres de los meses y dibujos alusivos al tiempo (se colocan encima del calendario).

2. Actividades

Expliquemos nuestra experiencia mediante la exposición de algunas actividades.

A) *Con símbolos*

Las actividades realizadas con los símbolos dependerán de los objetivos programados en los diferentes centros de interés, en cualquier caso el proceso que seguimos es el siguiente:
— Actividades Psicomotrices.
— Plasmación de las actividades en la alfombra.
— Representación gráfica en el papel.

Ejemplos

1.—*Realizar clasificaciones.*—Se reparten los símbolos entre los alumnos y se dan diferentes consignas:

● Los soles andan cuando oyen el tambor, las nubes cuando oyen los chinchines.

● La nieve anda de puntillas, los vientos caminan soplando y brazos arriba.

● Nos movemos con música, al parar se meten en aros los que tienen los mismos símbolos.

2.—*Realizar correspondencias entre los elementos de dos conjuntos*.—Entre los alumnos repartimos sólo dos modelos de símbolos. Formamos dos trenes paralelos, uno de soles y otro de nubes. Daremos diferentes consignas:

- Andar hacia adelante o hacia atrás.
- En cuclillas o de rodillas.
- Al parar la música cada sol dará la mano a una nube.

Observamos si todos los niños tienen un amigo. En caso contrario preguntamos ¿qué hay más soles o nubes?

3.—*Formar conjuntos*.—Se colocan distribuidos por la clase diferentes aros con su etiqueta. Nos movemos con música y al parar ésta cada niño debe buscar y meterse dentro del aro que le corresponda. Se cuentan los elementos y se le asigna el cardinal.

4.—*Realizar seriaciones según un criterio dado*.—Se sientan los niños en la alfombra con los símbolos sujetos en la ropa con una pinza. Se establece un criterio. Ejemplo, los niños van saliendo y colocándose en fila realizando la seriación.

Cualquiera que fuera la actividad trabajada en los ejemplos anteriores, el segundo paso sería: dejar plasmada la situación en la alfombra, con los símbolos metidos en aros, cuerdas, seriados... En el caso de las correspondendencias, se sustituyen las manos de los niños por palos, lanas...

El último paso es la representación gráfica. Cada niño debe presentar en su papel lo que hay en la alfombra. En el caso de que haya varias situaciones siempre pedimos que representen las más sencillas.

B) *Propiamente numéricas*

1.—Diariamente los responsables al iniciar la clase colocan en el lugar correspondiente del calendario el símbolo del tiempo. Por ejemplo

Se puede colocar más de un símbolo sol y nubes.

2.—Cada día en el panel se pone un cuadrito de 2 por 2 (el Lunes se pondrán ademas dos por el Sábado y Domingo). Se cuentan los cuadritos y se busca y coloca el número correspondiente.

Si por ejemplo, hoy es día 10, comprobamos que diez cuadritos equivalen a una barrita y la colocamos encima de forma que se pueda levantar para comprobar cuando sea preciso el número de cuadritos que hay en una barrita. A su lado se coloca el número correspondiente a la decena en rojo y el de las unidades en azul.

En días sucesivos los cuadritos nuevos se colocarán en el mismo panel, pero en la barra de abajo siguiendo el mismo proceso hasta completar otra decena y así hasta finalizar el mes.

3.—Contamos los cuadritos que hay hasta el día de la fecha, de modo que al superar la decena se dirá *diez* y *uno,* o dos *dieces y uno,* tres dieces...

En este apartado, y durante los nueve primeros días del mes, trabajamos mucho la descomposición de esos números utilizando los cuadrados del panel y los dedos de las manos. Así por ejemplo si estamos en el día 5, se trata de ver de cuantas maneras se puede formar ese número: 5 y 0, 4 y 1, 3 y 2 ...

4.—Lectura del número. Insistimos bastante en que a la hora de leer siempre debemos decir las barritas y después los cuadritos (siempre de arriba hacia abajo). La justificación reside en tratar de conseguir que no inviertan el orden de los números para no alterar las unidades y decenas.

Así pues, la lectura del núm. 31, se haría del siguiente modo: Tres barritas y un cuadrito; y también diez, diez, diez y uno; o tres dieces y uno.

5.—Una vez leido el número, se representa gráficamente en la pizarra, siguiendo el mismo proceso que en la lectura, primero se escribe el número de barras y después el número de cuadritos.

Después, se busca ese número entre los círculos y se coloca en el calendario junto al símbolo del tiempo.

6.—Comprobamos a qué día de la semana corresponde y trabajamos los conceptos de: ayer, mañana, antes, después, delante, detrás.

7.—Se pueden plantear preguntas tales como:

— ¿Qué semana tiene más nubes?

— ¿En esta semana qué hay menos?: ...

Aunque el calendario lo trabajamos en párvulos de 4 y 5 años, queremos hacer algunas precisiones:

— Durante el primer trimestre de escolaridad de los alumnos de 4 años, sólo intentamos familiarizarlos con el sistema de coordenadas del calendario, utilizando los símbolos del tiempo, trabajando en el orden a seguir en la colocación: izquierda-derecha; arriba-abajo; y los días de la semana.

— A partir del segundo trimestre colocamos el panel y empezamos a utilizar los cuadritos y barritas, contando hasta el número 10 y poniendo el número con el único objeto de que lo vayan reconociendo y familiarizándose con él.

— A finales del segundo trimestre y durante el tercero se trabajan los cinco primeros números. Siendo en Preescolar de 5 años cuando se trabajan los restantes y se profundiza en todos los aspectos relacionados con los números.

Conclusiones

Este sistema de trabajo con el calendario, lo llevamos utilizando desde hace cinco años y a lo largo de este tiempo hemos podido comprobar que los niños superan mayoritariamente los objetivos propuestos.

Interiorizan los conceptos:

— Arriba-abajo.

— Izquierda-derecha (se estimula su adquisición).

— Delante-detrás, en medio.

— Muchos-pocos, ninguno.

— Más, menos, tantos como, igual.

— Fila, columna.

— Temporales: antes, después, hoy, ayer, mañana, días de la semana, meses del año: ...

— Descomponen sin dificultad más de las diez primeras cifras.

— Plantean y resuelven situaciones problemáticas cotidianas.

— Descubren conceptos matemáticos no enseñados, tal como, $\emptyset$ (Sábado y Domingo no tienen etiqueta de tiempo).

— Interiorizan plenamente los conceptos de *unidad* y *decena* por ejemplo: dado un número, el 23, lo representan gráficamente en unidades y decenas.

—Dadas las unidades y decenas componen el número.

—Este conjunto de actividades estimulan en el alumno la capacidad de observación, curiosidad, creatividad, intuición...

Por último, es obvio que en el Ciclo Inicial se podría seguir utilizando el calendario como recurso didáctico.

Recursos para la clase de Matemáticas: el juego

José M.ª Gairín Sallán

El objetivo de este escrito es el de dar a conocer un material de apoyo para la tarea del profesor de matemáticas. Se trata de una serie de juegos educativos que vienen siendo utilizados por un amplio colectivo de profesores de la asignatura. Antes es conveniente hacer algunas consideraciones.

Es claro que todos los sectores sociales están de acuerdo en que los alumnos adquieran y retengan la mayor cantidad posible de conocimientos y habilidades matemáticas. Y también es cierto que todos los elementos implicados en el aprendizaje apuestan porque los estudiantes disfruten con las matemáticas que aprenden y que estén motivados para el aprendizaje.

Como profesionales de la enseñanza estamos de acuerdo en lo señalado por Johnson y Rising «El desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas es la tarea fundamental del profesor de matemáticas»[1]. Y en este camino pensamos que el juego es uno de los recursos que pueden utilizarse en la enseñanza de las matemáticas.

¿Por qué utilizar juegos?

El juego se ha desarrollado de forma paralela a la propia existencia humana. Entre otras por las siguientes razones:

— Es una actividad propia del hombre que ayuda al niño para preparar su vida adulta y le sirve para desarrollar su personalidad.

— Es una actividad placentera, como señalan Decroly y Boon «El juego es un instinto y es sabido que si se satisfacen los instintos se produce una sensación placentera»[2].

— Tiene un fin en sí mismo, pues a diferencia de la actividad laboral, el niño juega por jugar, sin buscar algo diferente.

— Exige la participación activa.

— Guarda relaciones con otras actividades: creatividad, perseverancia, búsqueda de estrategias, etc...

¿Qué es un juego educativo?

Siguiendo los criterios de Inbar, Stoll[3] y Fetcher[4] podemos definir un juego de acuerdo con los siguientes criterios:

1. En un juego se participa libremente.
2. En un juego participan dos o más jugadores o hay que enfrentarse a una tarea (solitarios).
3. En un juego hay un conjunto finito de reglas.
4. Psicológicamente el juego presenta una situación arbitraria claramente delimitada en el tiempo y en el espacio.
5. Aunque existe un conflicto de intereses entre los jugadores, la importancia social del resultado y situaciones del juego son de importancia mínima.
6. El juego tiene un número finito de jugadas y en cada momento los jugadores tienen plena capacidad para utilizar la jugada que deseen, aunque son desconocidas a priori por sus oponentes. En todo momento los jugadores tienen información sobre el desarrollo del mismo.
7. El juego termina después de un número finito de jugadas.

Un juego educativo añade a las anteriores la característica de que cumple unos objetivos educativos.

¿Para qué sirven los juegos?

Podemos citar algunas utilidades.

— Es un buen medio de promover actitudes positivas hacia las matemáticas, lo que ayudará a crear un ambiente más propicio para el aprendizaje.

[1] D. A. JOHNSON y G. R. RISING, *Guidelines for teaching mathematics,* Wadsworth Publishing Company, Belmont, 1967.
[2] O. DECROLY y G. BOON, *Iniciación general al método de Decroly,* Losada, Buenos Aires, 1965.
[3] M. INBAR y C. S. STOLL, *Games and learning,* Interchange, 1970.
[4] J. L. FLETCHER, *The effectiveness of simulation games as learning environments. Simulation and Games,* 1971.

— Hay una estrecha relación entre juego y matemáticas y de hecho se han venido utilizando a lo largo de este siglo en la clase de matemáticas.

— Aunque no ha sido exhaustivamente estudiado, sí que es cierto que el juego requiere de los participantes utilizar conocimientos matemáticos, buscar la manera de jugar mejor y discernir la estrategia mejor.

— Generalmente se puede atribuir a los juegos uno o varios de los siguientes objetivos: Desarrollar conceptos, proporcionar ejercicios y reforzar habilidades, desarrollar habilidades formativas y potenciar el razonamiento lógico.

¿Cómo utilizar los juegos?

En el momento de llevar un juego a los alumnos hay que tener en cuenta las siguientes normas generales:

1. En el momento adecuado.

Si el juego tiene que cumplir con sus objetivos educativos hay que observar el nivel instruccional en el que ha de encuadrarse:

— Pre-instruccional. El juego sirve para provocar en el alumno la aparición de un concepto o algorítmo.

— Co-instruccional. El juego forma parte de la programación de un tema.

— Post-instruccional. El juego servirá para fijar un concepto o practicar habilidades que ya son conocidas por el alumno.

2. Para el fin previsto.

El alumno ha de ser consciente de que está haciendo una actividad que le ayuda en su aprendizaje. Y el juego ha de usarse para surta el efecto deseado.

3. En la forma correcta.

La actividad del juego hay que organizarla de manera que puedan participar todos los alumnos y que todos puedan aprender algo. Y para ello es preciso que haya una fase previa en la que los alumnos conozcan el juego, que las reglas sean correctas, que no haya situaciones confusas , que el juego no se haga tedioso, etc...

¿Qué ha de hacer el profesor?

El profesor es el encargado de hacer que el juego sirva para los fines deseados. Ello le obliga a que en la preparación de la sesión tiene que prever las posibilidades del juego, dificultades que puede plantear, otras aplicaciones, etc...

Y por encima de las reglas y objetivos de los juegos, el profesor ha de pensar en los alumnos que tiene en el aula, adaptando los juegos a las capacidades de sus estudiantes.

Tipos de juegos

Los juegos que venimos utilizando quedan englobados en dos grandes grupos:

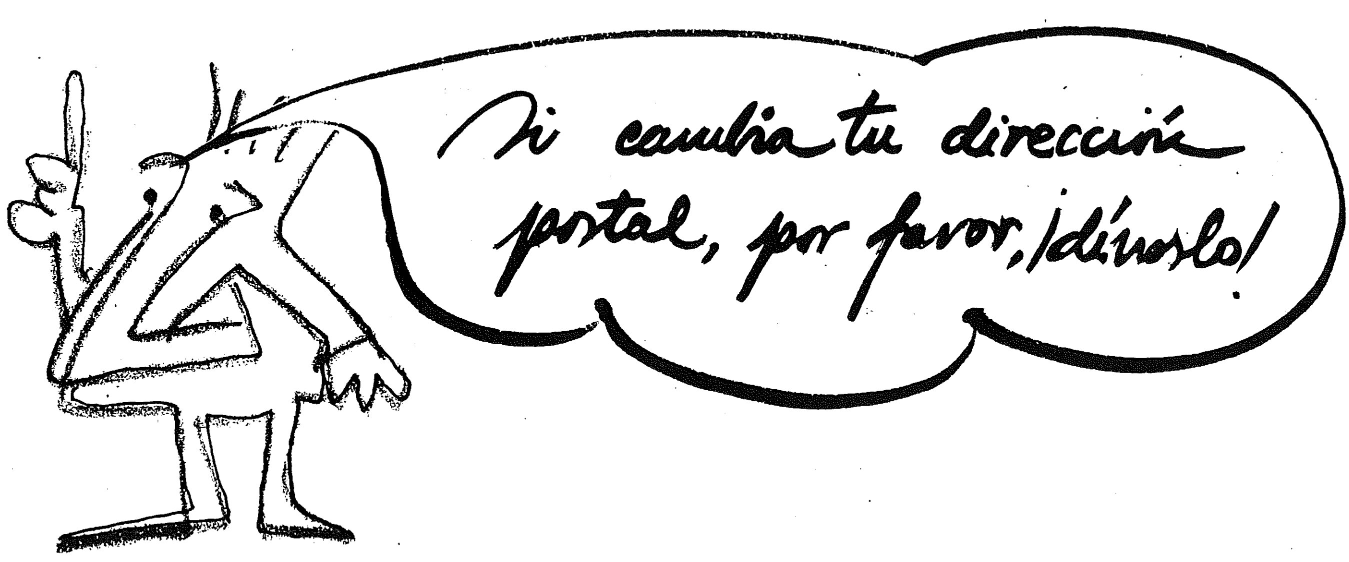
— Juegos de conocimiento.

Son aquellos juegos que en su desarrollo exigen que el alumno utilice alguno de los contenidos que se exponen en el aula.

— Juegos de estrategia.

Son juegos que exigen de los participantes la utilización de técnicas heurísticas necesarias para la resolución de problemas.

En estas páginas se recogen algunos juegos de conocimiento, que pasamos a descubrir.



Buscágono

J. Antolín, F. Corbalán y J. M.ª Gairín

Nombre: Buscágono.
Ciclos: Medio y Superior.
Nivel instruccional:
Co-instruccional. Se utiliza para visualizar las figuras geométricas planas.

Post-instruccional. Sirve para reforzar los conceptos de regularidad, concavidad y convexidad, paralelismo de lados, etc.

Objetivos instrucionales:
— Clasificar figuras planas según diferentes propiedades.
— Identificar figuras con su nombre.
— Conocer las figuras planas a través de sus propiedades.

Material

Este juego se practica con una baraja de 45 cartas grabadas por las dos caras. Por una de ellas aparece una figura plana y por la otra aparecen algunas propiedades y su nombre.

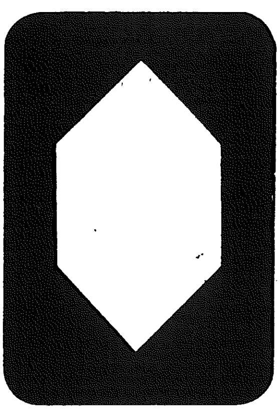
Desarrollo del juego

Pueden participar cualquier número de jugadores, pero se aconseja que sean cuatro.

Hay que dedicar alguna sesión a que el alumno se familiarice con las figuras y la forma de clasificarlas atendiendo a sus propiedades. El juego se desarrolla de la siguiente forma:

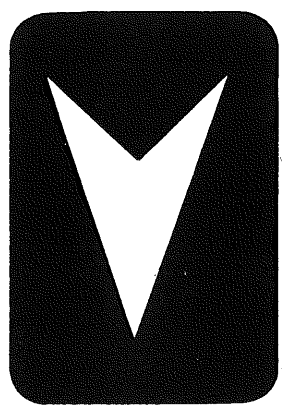
Participan dos jugadores o cualquier número que se quiera divididos en dos equipos. Se extienden todas las cartas sobre la mesa con las figuras hacia arriba. Uno de los equipos elige una de las figuras y apunta su nombre en un papel. El objetivo del otro juego es adivinar de qué figura se trata mediante el menor número posible de preguntas. Las preguntas que se hagan tan sólo ha de responderse con sí o no. Una vez que un equipo hace una pregunta si el equipo rival contesta con un sí se retiran de la mesa todas aquellas cartas que no cumplen la propiedad que se ha preguntado. En caso de que la respuesta sea no, se retiran todas las cartas que sí cumplen la propiedad. Si un jugador o equipo responde de forma equivocada pierde la partida. Si un equipo deja de retirar alguna de las cartas que tiene que quitar pierde la partida.

Variantes: Se puede jugar con dos juegos de cartas de modo que cada jugador o equipo elige una de las figuras y se van haciendo preguntas alternativamente hasta que uno de los jugadores o equipos consigue adivinar la figura, con lo que se convierte en ganador de la partida.



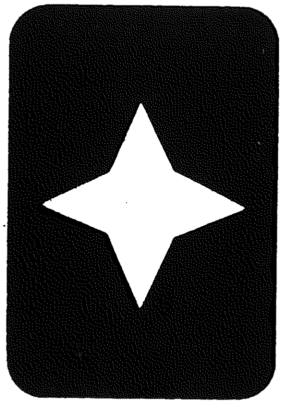
Nº de lados:6
---**exágono**
Angulos iguales: 4 y 2
Lados iguales : todos
---**irregular**
¿Al prolongar algún lado se corta la figura? : no
---convexo

<u>EXAGONO EQUILATERO CONVEXO DE LADOS PARALELOS DOS A DOS</u>



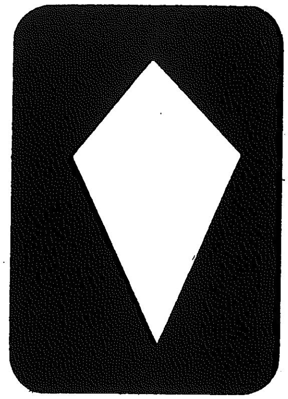
Nº de lados:4
---**cuadrilátero**
Angulos iguales: dos
Lados iguales:dos y dos
---**irregular**
¿Al prolongar algún lado se corta la figura? : si
---**cóncavo**
Pares de lados paralelos:0
---**no paralelogramo**

<u>FLECHA</u>



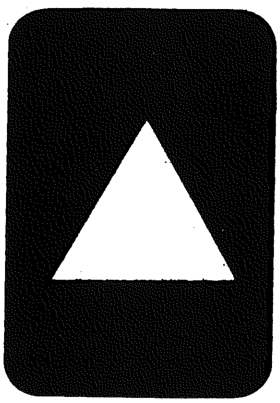
Nº de lados:8
---**octógono**
Lados iguales: todos
Angulos iguales: 4 y 4
---**irregular**
¿Al prolongar algún lado se
corta la figura? si
---**cóncavo**

ESTRELLA EQUILATERA DE 4 PUNTAS



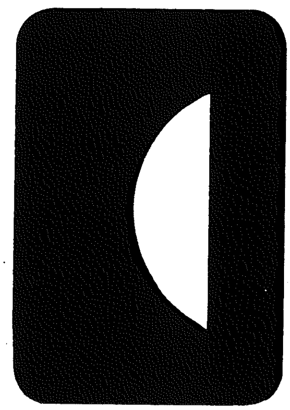
Nº de lados 4
---**cuadrilátero**
Angulos iguales:dos
Lados iguales :dos y dos
---**irregular**
¿Al prolongar algún lado se
corta la figura? :no
---**convexo**
Pares de lados paralelos 0
---**no paralelogramo**

DELTOIDE O COMETA



Nº de lados: 3
---**triángulo**
Angulos iguales:todos
Lados iguales :todos
---**regular**
¿Tiene algún ángulo recto?:no
---**no rectángulo**
¿Al prolongar algún lado se
corta la figura? :no
---**convexo**

TRIANGULO EQUILATERO



SEGMENTO CIRCULAR

Otras posibilidades no contempladas en las instrucciones

1.—Clasificación de figuras planas.

Los alumnos han de elaborar diferentes criterios para clasificar parte o todas las figuras que aparecen en la baraja, como por ejemplo elaborar criterios para clasificar los 7 triángulos que aparecen en la baraja.

2.—Cálculo de áreas y perímetros.

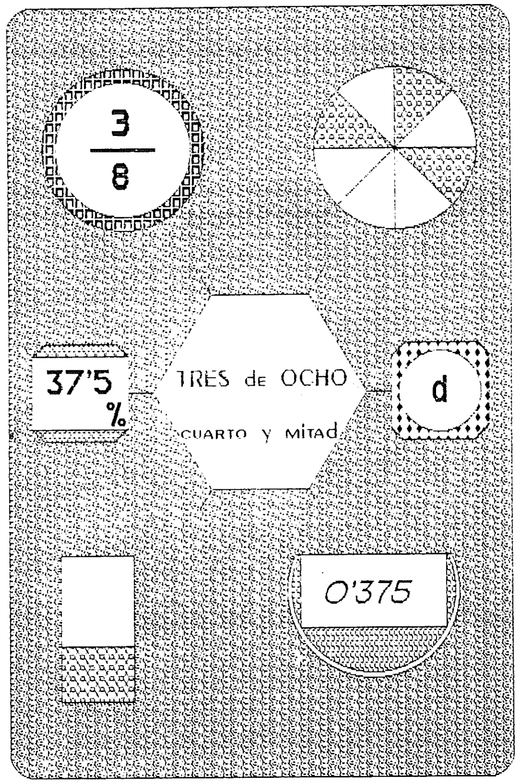
Se dispone de una gran variedad de figuras diferentes a través de las cuales se puede jugar a buscar polígonos que tengan el mayor perímetro y/o la menor área. Para ello los alumnos han de buscar las medidas necesarias puesto que no aparecen en las figuras.

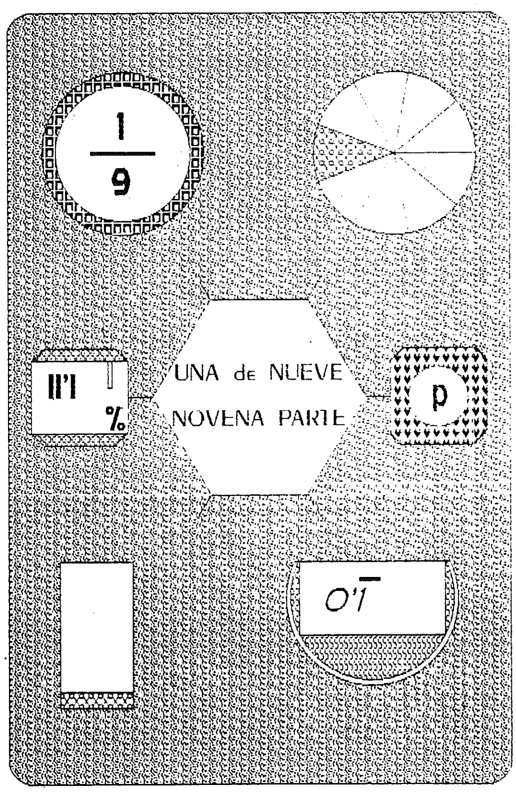
Construcción del juego. Este juego ha sido creado por J. Antolín, F. Corbalán y J. M. Gairín y presentado en las Jornadas sobre V Muestra Nacional de Experiencias en las aulas de EGB[1].

[1] Informes, núm. 23, ICE Universidad de Zaragoza. Zaragoza, 1987, pág. 291-292.

Baraja de fracciones

Moisés Coriat Benarroch





Resumen

Se presenta una nueva baraja de fracciones. Se proponen algunas manera de jugar.

La baraja está orientada a alumnos con 12 años o más y se puede adaptar a los que están adquiriendo el concepto de fracción.

1. Descripción

A) Cada carta contiene siete informaciones relacionadas con el concepto de número racional; se referencian, seguidamente, de izquierda a derecha y de arriba a abajo.

[1] Escritura matemática con barra horizontal.

[2] Representación gráfica «exacta» en un círculo.

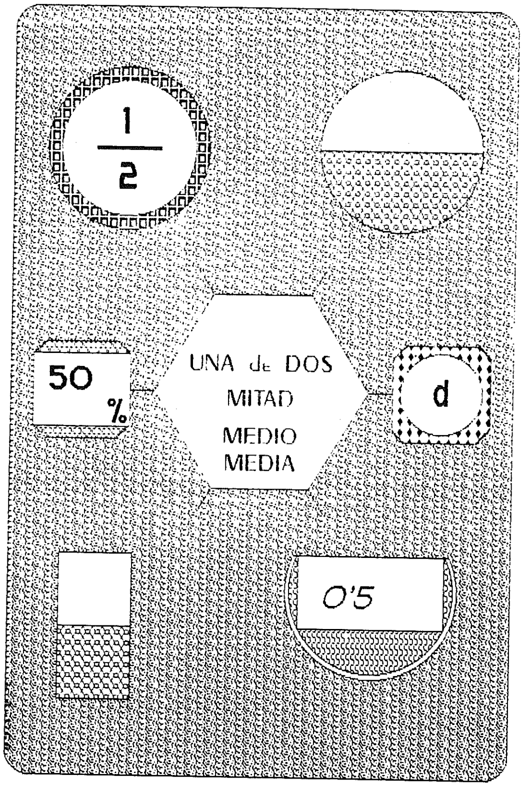
[3] Interpretación como operador (porcentaje).

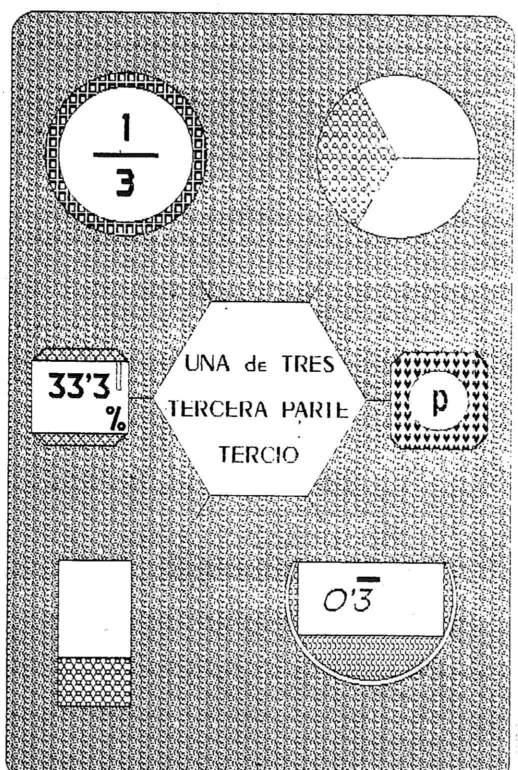
Para esto, se ha utilizado un máximo de tres cifras significativas. Cuando ha habido que aproximar, se han seguido los criterios habituales de redondeo por defecto y por exceso (codificados, respectivamente, con un pequeño rectángulo vertical «vacío» o «lleno»).

[4] Escritura castellana del concepto (no el nombre).

Por ejemplo, no se verá «cinco séptimos» (que es la lectura de «5/7»), sino *cinco de siete* (para dar a entender que de siete partes se toman cinco).

En algunos casos, se han utilizado varias verbalizaciones, por ser de empleo corriente en la calle. Así, a «3/8», corresponde también la mención «cuarto y mitad», tan de uso en las tiendas que venden al paso o al volumen.





[5] Redundancia relativa al tipo de número representado.

La letra *e* se usa en un solo caso (con «1»).

La letra *d* se usa con todas las fracciones decimales.

Enteros y decimales son racionales decimales; esto se codifica con el «diamante».

La letra *p* se usa con todas las fracciones no decimales. (Se ha elegido esta letra porque los alumnos tienden a identificar las fracciones con su escritura decimal, que, en el caso que nos ocupa, es siempre periódica (pura o mixta). Los racionales no decimales se codifican también con el «corazón».

[6] Representación gráfica «exacta» en forma de «termómetro».

[7] Escritura decimal de la fracción. (En su caso, se hace uso de la famosa raya de período.)

Se ha elegido una disposición bastante aleatoria para, en cierto modo, ayudar a la vista a recorrer completamente la carta y manejar todas las informaciones que contiene.

El «fondo arrugado» es otro código para indicar que cada una de ellas representa un número.

B) La baraja se compone de 40 cartas, distribuidas en varios «palos» y «series».

El palo de los diamantes abarca las fracciones decimales.

Sus series son:
Entera: 1.
Mitades: 1/2.
Cuartos: 1/4, 3/4.
Quintos: 1/5, 2/5, 3/5, 4/5.
Octavos: 1/8, 3/8, 5/8, 7/8.
Décimos: 1/10, 3/10, 7/10, 9/10.
Comodines o Variables: (dos)

El palo de los corazones abarca todas las fracciones no decimales. Sus series son:
Tercios: 1/3, 2/3.
Sextos: 1/6, 5/6.
Séptimos: 1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7.
Novenos: 1/9, 2/9, 4/9, 5/9, 7/9, 8/9.
Doceavos: 1/12, 5/12, 7/12, 11/12.
Comodines o Variables:
Aproximación porcentual por defecto (uno).
Aproximación porcentual por exceso (uno).

La misión de los comodines es evidente. Como *Q* carece de subconjuntos en los que las cuatro operaciones sean internas, los comodines servirán para «cerrar operaciones» (de otro modo, sería necesaria una baraja de infinitas cartas).

Por ejemplo, si un alumno quiere exhibir la igualdad

$$\frac{2}{9} \times \frac{5}{7} = \frac{10}{63},$$

y tiene un comodín *p*, apuntará en él la fracción 10/63 y las restantes informaciones que la acompañan.[1]

2. **Breves sugerencias para jugar**

Con independencia del juego concreto, se pueden dar tres grandes variantes:

Solitarios

Se trataría de ordenar las cartas siguiendo algún criterio (baraja, palos, series, secuencias).

La intervención de los comodines es posible si se propone algún tipo de «interpolación».

Descartes a lo largo de la partida

Un jugador puede descartarse siempre que

1.º tenga tres o más cartas que configuren una igualdad aritmética.

Por ejemplo, si el jugador posee las cartas correspondientes a «1/2», «1/3» y «5/6», podrá descartarse, ya que la suma de las dos primeras es igual a la tercera.

Previamente, habrá que llegar a un acuerdo sobre la puntuación.

Por ejemplo, se puede asignar la siguiente:

factor * (número de cartas descartadas) + valor de la expresión, donde «factor» vale 1 si se trata de operaciones del mismo nivel (suma, resta; o multiplicación, división) y 2 si se trata de operaciones combinadas.

2.º reuna una serie o, incluso, una secuencia.

Por ejemplo, con las cartas

1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, 1,

se tiene una secuencia (y se practica la equivalencia de fracciones), que se podría enfrentar con otras posibles secuencias (algunas son decimales).

Nuevamente, habrá que consensuar previamente las puntuaciones.

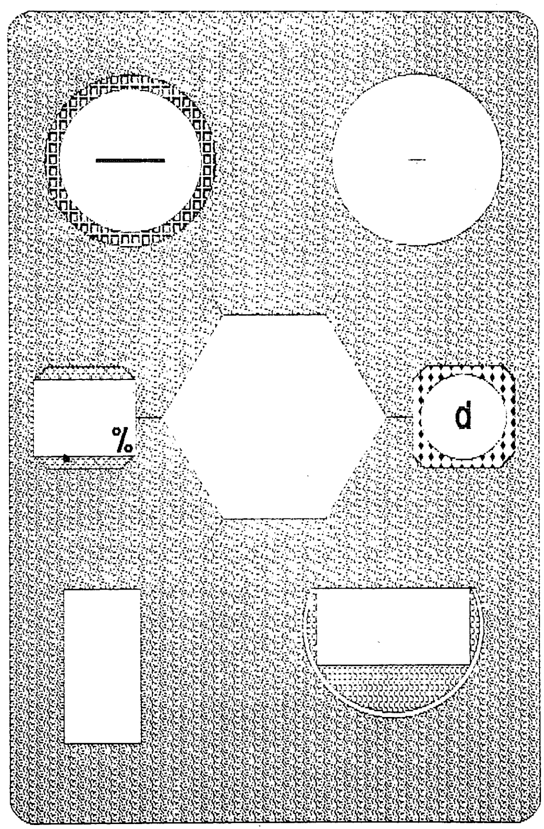
En cualquiera de los dos supuestos, se enunciarán reglas para «robar», «intercambiar», formar «parejas» de jugadores, etc.

Descartes al final de la partida

Una vez inventadas y aceptadas las reglas del juego, los jugadores intentarán atesorar la máxima puntuación. Cuando ningún jugador pueda ya conseguir más cartas, se procederá a determinar el ganador (o la pareja ganadora). Se necesitará un tiempo de cómputo para determinar la mejor distribución de cartas en función de las posibles puntuaciones (con operaciones o con ordenaciones).

Comodines

Si el comodín se utiliza para representar una carta de la baraja, recibirá, sugiero, menos puntuación que cuando se utiliza para diseñar una nueva carta.



[1] Para facilitar la duración de la baraja, conviene que las cartas estén plastificadas y que se utilice, al escribir en los comodines, una tinta o mina de fácil borrado, a menos que se disponga de plantillas de papel vegetal para escribir dichos valores.

3. ¿Para qué alumnos?

Si se desea utilizar directamente la baraja que presento, desde luego, debería hacerse con alumnos que fueran capaces de comprender al menos 5 de los siete *items* que tiene cada carta (hacia los 12 años, por lo general).

También cabe ir construyendo poco a poco la baraja y añadir informaciones a medida que los alumnos vayan adquiriendo conocimientos concretos. Para ello, cabe hacer fotocopias, en cartulina o cartón, de las matrices (figuras 1 y 2) y usarlas para rellenar, esta vez con tinta indeleble, los *items* que vayan siendo aprendidos. Al objeto de facilitar al lector (¡y a sus alumnos!) esta tarea, se acompañan plantillas con las divisiones del círculo y del «termómetro» en 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 12 partes iguales (figuras 3 y 4). De este modo, la *baraja de fracciones* puede acompañar el aprendizaje de los alumnos desde los 9 años.

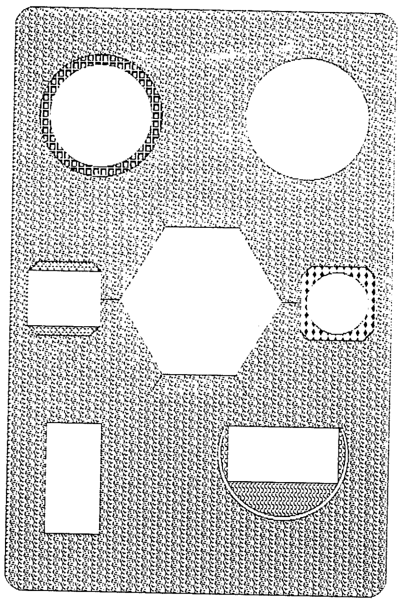


Figura 1

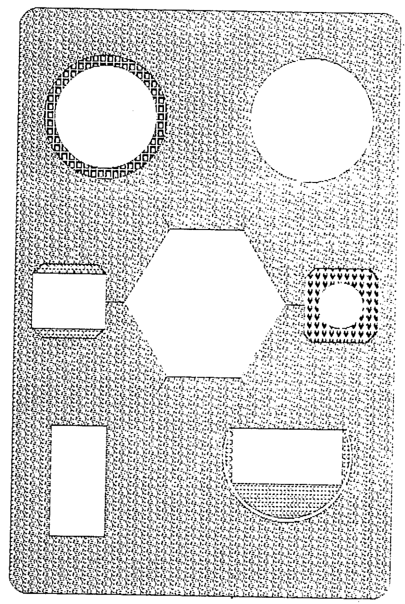


Figura 2

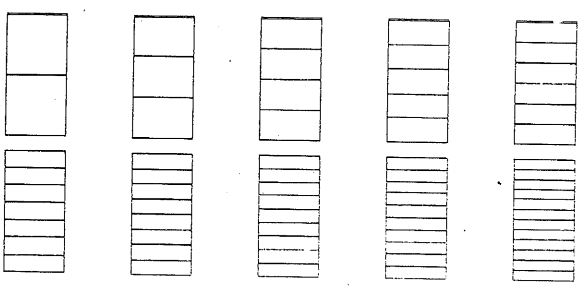


Figura 3

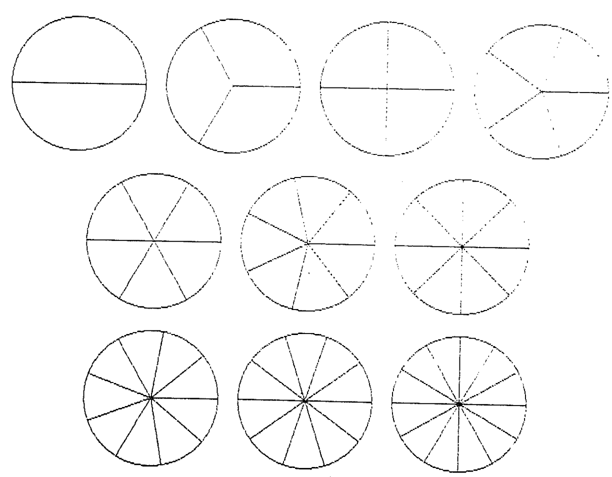


Figura 4

La utilidad de lo inútil

Ángel Salar Gálvez

«Todo el mundo sabe de la utilidad de lo útil, pero pocos conocen la utilidad de lo inútil»

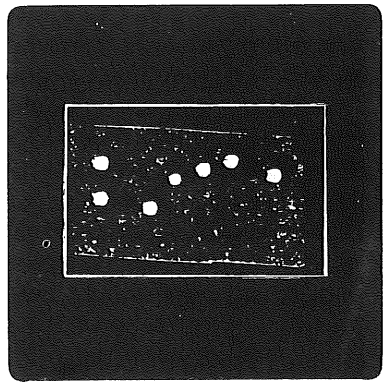
ZHUANGZI

Hay ocasiones en que lo inútil puede convertirse en un adecuado instrumento de trabajo. Quienes son aficionados al bricolaje saben bien esto por propia experiencia. La escasez de materiales y recursos de los Centros de enseñanza ha propiciado en muchas ocasiones la fabricación del material propio aprovechando elementos de desecho. Algunos de estos materiales pueden ser de mucha utilidad como elementos auxiliares de enseñanza. Esto ocurre habitualmente con las diapositivas subexpuestas que resultan totalmente ennegrecidas y que acaban en el cesto de los papeles. La idea de reaprovecharlas con otra finalidad no es nueva, la he tomado prestada de un libro que, desde la primera vez que lo leí, me ha parecido fascinante por la cantidad de sugerencias que contiene, es el *Nuevo Manual de la Unesco para la enseñanza de las ciencias*. Todo el libro es un inventario magnífico para aprovechar eficazmente (cuando no se dispone de los medios habituales de trabajo o los elementos de un laboratorio) los productos caseros o las cosas inservibles. Con ellos es posible realizar multitud de experimentos científicos. Se escribió por primera vez después de la Segunda Guerra Mundial pensando en la falta de medios de una Europa asolada por la guerra, pero luego ha sido ampliado y puesto al día por su posible utilidad en los paises en vías de desarrollo.

En el libro se cuenta cómo las diapositivas estropeadas pueden servir para reproducir, sobre una pared blanca de cualquier habitación, las constelaciones de estrellas. Basta simplemente perforar la diapositiva con un alfiler y proyectarla sobre la pared, teniendo cuidado al perforar de que los orificios reproduzcan la forma exacta de la constelación.

Para conseguir que la forma de la constelación en la diapositiva sea idéntica a la que presenta realmente en el firmamento yo utilizo un procedimiento que consiste en hacer sucesivas fotocopias reducidas de la constelación que deseo visualizar hasta conseguir el tamaño adecuado a la diapositiva.

La fotocopia final utilizada como plantilla, se coloca sobre la diapositiva oscurecida y con el alfiler se perfora sobre cada estrella. Finalmente, si algunas estrellas de la constelación son de mayor intensidad luminosa que otras, pueden hacerse los orificios más grandes calentando el alfiler y pasándolo varias veces por las perforaciones de las estrellas que corresponda.



Además de esta aplicación, las diapositivas estropeadas, pueden servir para el estudio de algunas cuestiones de geometría. Tuve la idea de aprovecharlas con esta finalidad en una ocasión en que trataba de imaginarme los resultados producidos al cortar un cubo mediante un plano. En particular la forma que tomaban sobre el cubo las secciones planas que resultan de cortarlo. No era capaz de imaginarlas ni «verlas» mentalmente, así que cada vez que esto ocurría tenía que recurrir a cortar un cubo de porex o bien a dibujar la sección que buscaba sobre el desarrollo plano del cubo. La lentitud de los dos procedimientos no permite avanzar en la investigación satisfactoriamente.

Además, de poco valen los métodos anteriores si lo que te interesa, como en mi caso, no era tanto observar una sección en concreto sino cómo se van transformando unas secciones en otras a medida que vas dando cortes paralelos a un corte inicial.

Un modelo de cubo en plástico transparente, de los que hay en muchas escuelas e institutos en los juegos de cuerpos sólidos, lleno de agua o arena puede ser una solución rápida para realizar la observación. Este procedimiento tiene el inconveniente de que las sucesivas secciones dependen tanto de la posición del cubo como de la cantidad de líquido introducido.

La solución más apropiada la conseguí utilizando una diapositiva estropeada y cubo de plástico transparente como el anterior. En esencia tenía que producir un plano «inmaterial» que «cortara» al cubo «sin cortarlo».

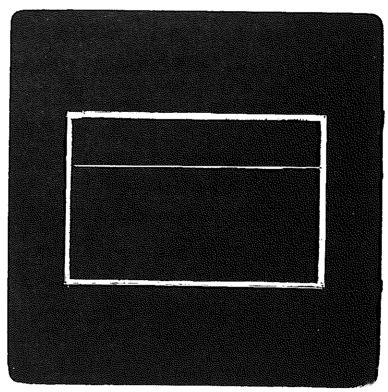
Si se efectúa un corte recto muy fino en la diapositiva, con un cutter por ejemplo, se coloca en un proyector y se enfoca al cubo, se consigue un haz de luz prácticamente plano. Este haz al chocar con el cubo transparente deja sobre sus caras la traza de la sección de corte. Al desplazar el cubo paralelo a sí mismo aparece ante la vista una increíble variedad de figuras geométricas en movimiento. El carácter mágico de esta sorprendente geometría dinámica puede aumentarse aún más si se utilizan papeles de celofán de colores para envolver el cubo o también si se colocan sobre el foco del proyector.

Por último quiero proponer a los lectores un problema que no he sido capaz de resolver. Está relacionado, de alguna manera, con todo lo anterior.

Imaginar una situación espacial, o llegar a visualizarla mentalmente, entraña casi siempre serias dificultades si no se dispone de un modelo adecuado. Con los estudiantes de COU me encuentro todos los años con estas dificultades al tratar los temas de posiciones de planos y rectas en el espacio.

Pensando que el procedimiento de la diapositiva serviría también en este caso, hice una hipótesis demasiado apresurada: con dos proyectores colocados adecuadamente, cada uno con su diapositiva preparada y cubierto el foco de uno de ellos con celofán azul y el otro con celofán amarillo por ejemplo, conseguiría ver en color verde la recta resultante de la intersección de los dos planos.

Desafortunadamente las cosas no funcionan así; los planos de luz son «demasiado inmateriales» para provocar el efecto deseado. Sigo haciendo pruebas pero no he conseguido hasta el momento hacer que los planos de luz sean «más materiales». Si alguien que lea estas notas tiene ideas acerca de como conseguirlo o bien hace las pruebas por sí mismo y obtiene resultados sería interesante que escribiera contando el procedimiento.



Hacer Matemáticas en «El Molino de Lecrín»

José Gutiérrez Pérez
(SAEM Thales, Equipo Pedagógico de «El Molino de Lecrín»)

I. Presentación

La Granja Escuela «El Molino de Lecrín» es un Centro Educativo situado en la provincia de Granada, al pie de Sierra Nevada, en un medio natural poco degradado y de alto valor ecológico.

Durante el curso escolar y de lunes a sábado, recibimos a escolares, profesores de EGB en ejercicio o universitarios de toda la geografía andaluza y otras comunidades autónomas, *ofreciendo la posibilidad de trabajar conjuntamente en un medio diferente, con unos recursos didácticos poco frecuentes en los ambientes urbanos.*

Como objetivos prioritarios, el Equipo Educativo de la Granja se propone:

1. Compartir en grupos pequeños las tareas de la huerta, el establo, la transformación de los alimentos producidos, el reciclaje de papeles y materiales de desecho, la elaboración de jabones, la obtención de esencias aromáticas a partir de las plantas del entorno, la investigación del medio social y el descubrimiento de interacciones en los ecosistemas del medio natural.
2. Poner en práctica metodologías participativas basadas en la no competitividad, la mutua colaboración y la discusión colectiva, manipulando, visualizando y reflexionando en presencia de los objetos de estudio.
3. Posibilitar la creación permanente a través del juego y la animación.
4. Proyectar los aprendizajes hacia el *currículum* escolar aunando esfuerzos con el profesorado.

II. Las Matemáticas en la Granja

La reflexión y el trabajo matemático que se desarrolla en la Granja Escuela no constituyen un fin con valor propio, son las demandas de cada situación las que determinan los instrumentos matemáticos a utilizar, exigiendo como condiciones:

— que sean herramientas ágiles y manejables desde el nivel de maduración de los niños y niñas;

— que posean cierto prestigio cultural;

— que se utilicen ordinariamente en el quehacer cotidiano del medio rural;

— o que surjan de la invención e ingenio de los niños y niñas en los variados contextos.

Predomina en todo momento la utilidad y el realismo característico de las ocupaciones, tareas y conflictos a que se enfrenta en su quehacer diario el agricultor, granjero, alquimista, panadero, carpintero, alfarero o naturalista: *El aprendizaje matemático se concibe aquí como una forma natural de inventar e imitar procedimientos significativos que poseen una proyección clara sobre la realidad.* Los niños y niñas son conscientes en todo momento de las intenciones que se persiguen al utilizar un determinado procedimiento.

El trabajo educativo no está subordinado a ningún imperativo de contenido matemático mínimo, la magnitud y alcance de los aprendizajes se perfilan al conjugar equilibradamente las tareas a desarrollar con la agilidad del grupo para generar respuestas atrevidas o construir medios de resolución gratificantes y oportunos. Con frecuencia, se atienden las peticiones del profesorado planificando conjuntamente algún contenido propio del *currículum* escolar y de fácil conexión con los recursos y actividades de la Granja Escuela.

Una visión superficial puede considerar casi anecdótico el aporte conceptual que recibe el *currículum* matemático escolar durante una semana. Esto ocurriría si no se considera que los materiales elaborados, los datos recogidos, los procesos y tareas desarrolladas sirven de apoyo, motivación y refuerzo al posterior trabajo de aula. Se ofrece a su vez al profesor una demostración práctica de la importancia de la manipulación en los procesos de aprendizaje, el valor de la reflexión colectiva sobre las tareas y problemas surgidos, así como la construcción y puesta a punto de soluciones creativas, elaboradas a partir de necesidades reales, y orientadas por los propósitos e intereses de los propios niños y niñas. A lo largo del curso, y dentro del contexto escolar, la Granja Escuela se convierte en un referente inevitable.

III. Naturalizar las situaciones de aprendizaje

El aula a veces se convierte en un espacio cerrado, excesivamente artificioso, presionado por la formalidad y exigencias de actividades rígidamente estructuradas que coartan la creatividad y el libre pensamiento de los alumnos y alumnas. Naturalizar las situaciones de aprendizaje significa ofrecer contextos usuales dotados de medios y recursos apropiados, capaces de estimular y organizar los descubrimientos básicos necesarios para el desenvolvimiento social e intelectual de los niños y niñas en su medio ordinario.

A continuación presentamos una serie de consideraciones elementales que determinan *principios generales de procedimiento* para el equipo de profesores que desarrollan las actividades diarias de la granja, creándose un marco real para la integración del pensamiento matemático en la cotidianeidad y familiaridad que se merece. Estos principios constituyen aportaciones inmediatas que garantizan el uso obligado e ineludible de procedimientos matemáticos en las actividades y tareas de la Granja-Escuela:

— Agilizar la resolución de situaciones complicadas con marcado carácter cuantitativo.

— Simplificar y esquematizar procesos naturales sometidos a variabilidad.

— Facilitar la comprensión de cambios y transformaciones en lo material.

— Simbolizar alteraciones y relaciones de dependencia en el medio social y natural.

— Acotar los límites de la materia orgánica e inorgánica.

— Delimitar espacios escénicos, territorios, ámbitos de supervivencia o competición animal y vegetal.

— Valorar la rentabilidad, costo, índice de consumo y productividad en las áreas de producción, consumo y manufactura.

— Realizar estimaciones y cálculos aproximados en situaciones con magnitudes discretas como la edad, el número de animales, el número de árboles...; y con magnitudes continuas como la longitud, la superficie, el peso, la capacidad, el volumen...

— Valorar el sentido y consecuencias del error según los materiales y productos con que se manipule.

— Iniciarse en el manejo de técnicas e instrumentos de medida de carácter convencional utilizadas para cuantificar la tierra y los productos obtenidos en la huerta o el establo.

— Disfrutar de las posibilidades lúdicas que ofrecen las matemáticas en contextos reales.

IV. Fenomenología y etapas de trabajo matemático

Las actividades de la vida social y los acontecimientos del entorno natural han constituido desde siempre una fuente inagotable de cavilaciones epistemológicas para el ser humano. También el saber matemático se ha visto enriquecido desde la más remota antiguedad por preocupaciones y problemas de tipo práctico, íntimamente ligados a la vida cotidiana y los sucesos que en ella acontecen.

En el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas se ha construido en los últimos años todo un campo teórico que ofrece una sólida *fundamentación social a los diseños curriculares.* Su propulsor, el profesor Hasns Freudhental (1983) concibe el aprendizaje matemático como un recorrido fenomenológico a través de las múltiples situaciones reales en que aparece un determinado concepto; haciendo hincapié sobre todo en su valor cultural y motivacional.

En otro orden, el profesor Bishop (1987) considera la matemática como un hecho cultural propio del saber acumulado por un determinado grupo social a lo largo de sucesivas generaciones, y concibe el aprendizaje matemático como un proceso de enculturación ligado a un medio singular y a los recursos evolutivos disponibles en ese momento.

El paisaje y los elementos naturales que rodean al viejo molino harinero, así como el conjunto de actividades y tareas que en él, en cuanto contexto particular, se desarrollan, ofrece a la fenomenología una riqueza y variedad de recursos digna de ser aprovechada. *En la historia del medio rural, el uso matemático ha estado presente en todas y cada una de las facetas laborales, domésticas, lúdicas, monetarias, administrativas, gubernativas...,* ya sea como agente objetivo de justicia social, o como elemento de comunicación y uso convencional digno y legítimo.

Basándonos en los descubrimientos y propuestas de Dienes (1959), Bruner (1960), Lovel (1982), Alsina y otros (1987), estructuramos el trabajo educativo referido a los aspectos matemáticos en tres niveles de intervención:

1. *Nivel manipulativo,* de naturaleza visual y motora, en el cual la intuición ofrece un conocimiento directo, elemental y burdo del entorno. En esta etapa previa a la siguiente se adquiere una percepción vaga e intuitiva de algo que no está totalmente entendido, pero que sirve a la lógica y el razonamiento posterior.

2. *Nivel de representación*, se pone de manifiesto con los gráficos, dibujos, esquemas, maquetas... Se utiliza el mural como elemento de síntesis de las tareas realizadas.

3. *Nivel de análisis,* en el que el individuo posee un marco conceptual previo que utiliza en sus reflexiones y análisis, actuando con una lógica interna al enfrentarse a cualquier situación problemática.

1.—El *nivel manipulativo* se da en forma de acciones y procesos reales de manipulación, construcción, acondicionamiento, asistencia o creación artesanal; tareas que aparecen en el desarrollo de las actividades de la granja o actividades de preparación de fiestas y juegos:

° Manipulación de áridos en la asignación de la dieta diaria de los animales del establo.

° Medición de parcelas agrícolas, superficies de competencia vegetal, rediles, corrales y viviendas del ganado.

° Combinación y disolución de volúmenes para la fabricación de jabones, perfumes, limonadas y refrescos.

° Manipulación de recipientes para áridos y líquidos.

° Determinación de pesos para la fabricación de pan, rosquillas y bombones.

° Construcción de puentes, cabañas, naves espaciales con soporte geométrico, hornos para cerámica, comederos y nidos para pájaros, juguetes de marquetería o escayola, semilleros para la huerta, moldes para el jabón o el papel reciclado, marcos para telares...

° Elaboración e interpretación de los calendarios de siembra, las frecuencias de riego, abonado y recolección de los productos de huerta.

° En las observaciones meteorológicas referidas a la lluvia, evaporación, temperatura, época de floración de frutales, pérdida y recuperación de la masa foliar de los árboles de hoja caduca, o regreso de aves migratorias.

° Observación de los astros y construcción de maquetas para su estudio.

° Modelado de imágenes para construir relieves, ilustrando el proceso de transformación de superficies en volúmenes a través de la superposición de láminas y dibujos.

° Elaboración e interpretación de mapas sencillos utilizando escalas apropiadas a cada situación.

2.—En el *nivel de análisis* se hace uso de los conocimientos matemáticos de los alumnos y alumnas para interpretar, comprender y parcelar la realidad de forma geométrica, aritmética o estadística. Es una perspectiva puramente gráfica o conceptual la que se potencia en este nivel:

La *aritmética*.—Para Castro y otros (1987), *La práctica aritmética encierra una doble intencionalidad:*

i. Pretende por una parte cuantificar con símbolos las acciones, relaciones y transformaciones que acontecen en el mundo real, utilizando criterios coordinados y reversibles de carácter psicológico tales como el orden, la cantidad o la medida.

ii. Establece por otra parte un juego interno de reglas y conexiones formales, estructuradas en dos

operaciones fundamentales y sus derivadas inversas.

En el proceso de abstracción-generalización de las relaciones y transformaciones que ocurren en los contextos numéricos surgen modelos mentales que ilustran individualizadamente los actos aritméticos, asignando a cada situación un procedimiento heurístico más o menos complicado. La fenomenología de la Granja abunda fundamentalmente en el «apartado i», y sostiene sus ensayos sobre modelos de tipo lineal, cardinal o de medida; relegando el «apartado ii» junto con los modelos más de tipo funcional al ámbito de las enseñanzas regladas. La aritmética está presente en:

° En los calendarios de siembra, las frecuencias de riego, abonado y recolección de productos.
° En las observaciones meteorológicas diarias referidas a la lluvia, la evaporación del agua y los cambios de temperaturas.
° En las anotaciones fenológicas correspondientes referidas a la época de floración de frutales, los intervalos de pérdidas y regeneración de la masa foliar en los caducifolios, el regreso de las aves migratorias a la eclosión de los primeros huevos de determinadas especies de insectos y arácnidos.
° En los ciclos de celos, partos, y edades de los animales.
° En los itinerarios por la naturaleza se trabaja la estimación y el cálculo aproximado en forma de previsiones acerca de las trayectorias recorridas, los tiempos empleados, los cambios de altitud y desniveles en el paisaje, las cotas de altura geológica, las distancias percibidas entre referentes destacados del entorno...
° También en el establo se establecen estimaciones sobre el consumo de agua y alimentos, la producción de leche o la rentabilidad de algunas especies.
° En las tareas de mantenimiento, distribución y acondicionamiento del comedor.
° En la compra-venta de sellos para las cartas que se envian a los familiares y amigos.

La *geometría*.—Se podría considerar como la *matemática del espacio,* tomando por objeto el analizar, organizar y sistematizar los conocimientos del entorno. De un entorno natural ajeno a la creatividad humana y de un entorno artificial creado por el hombre con su ciencia, su tecnología y sus artes...; infraestructura mínima para hacer real un viejo sueño: construir un lenguaje adecuado capaz de describir y transformar las dimensiones, formas, movimientos y relaciones que se dan en estos entornos (Alsina y otros, 1987).

Según los criterios de estos autores, las actividades espaciales más frecuentemente desarrolladas en la granja son de tipo cuantitativo (referidas a las medidas numéricas de longitud, amplitud, áreas y volúmenes) y figurativo (referidas a la regularidad, simetría o transformación en las formas geométricas, independientemente del tamaño y el material). Dichas actividades utilizan básicamente modelos estructurales, energéticos o tecnológicos y se desarrollan en un intervalo espacial que va desde los objetos meramente manipulables («meso-espacio») hasta aquello que rebasa las posibilidades naturales de apreciación visual del sujeto, auxiliándose de lo gráfico, óptico y fotométrico («macro-espacio» y «micro-espacio»).

En su acepción etimológica, la palabra geometría deriva del griego «ge», que significa «*tierra*» y «metreîn», que significa «*medir*»; con ello señalamos la inquietud latente en nuestros antepasados por medir las porciones de tierra, la capacidad de los graneros o la utilidad de determinados recipientes. La geometría está presente en:
° En las formas naturales de los animales, vegetales, rocas y minerales del entorno.
° En la distribución y aprovechamiento de las parcelas de cultivo agrícola.
° En los sistemas de regadío y la disposición de acequias y canales.
° En la representación de las formas y distancias entre los distintos elementos y estructuras del paisaje y del espacio.
° En los códigos de comunicación específica que utilizan los niños deficientes.
° En las cercas y vallas que delimitan los corrales para el ganado.
° En las estructuras y volúmenes construidos para los montajes artísticos, los juegos, decorados y fiestas.

La *Estadística* en cuanto conjunto de datos numéricos representados de forma ordenada en tablas, gráficos o dibujos, cubre ese segundo nivel de trabajo representativo:
° En el recuento diario de los productos recogidos en el establo.
° En los frecuentes muestreos realizados en el entorno acerca de los seres vivos y minerales que existen en el valle.

° En las cosechas anuales de cereales, frutas y hortalizas obtenidas en las huertas.

° En las comparaciones meteorológicas a lo largo de las distintas estaciones del año.

° En la procedencia, edad, curso, número de niñas y de niños que asisten a la granja en los diferentes turnos.

Rèsumen

No cabe duda de que una parte de la matemática encontró hace algún tiempo su medio óptimo de desarrollo en el seno de la vida cotidiana y se afincó en ella ocupando un lugar propio.

A estas alturas quizá sea fácil recopilar algún descuido o negligencia en los procedimientos que guiaron la enseñanza matemática de los antepasados, si bien, nuestros progenitores con menos tregua sabrán buscarnos las cosquillas a los llamados educadores de hoy.

Si apreciamos el contexto escolar como una porción casi insignificante del amplio medio social, podemos definir el aprendizaje matemático como una reliquia cultural dinámica, sometida o los fuertes agetreos del progreso, la evolución y el cambio social, siendo el medio escolar un intermediario que simplifica o problematiza dicho aprendizaje.

El conjunto de medios y recursos puestos al servicio de la educación matemática de nuestros días tiene un carácter mucho más lúdico y variado que los clásicos aperos de antaño. Se encomienda al profesor en última instancia la tarea de canalizar con cierta flexibilidad y orden ese caudal de medios que se vierten a su alrededor para sacarles partido educativo. La granja escuela es un ejemplo de aprendizaje complementario que puede enriquecer y amenizar el trabajo del aula en alguna de sus facetas de acción curricular.

Bibliografía

ALSINA, C., BURGUÉS, C., FORTUNY, M. (1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría,* Colección Matemáticas, Cultura y Aprendizaje, Ed., Síntesis, Madrid.

BISHOP, A. J. (1987): *Aspectos sociales y culturales de la Educación Matemática,* II Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias y las Matemáticas, Valencia.

CASTRO, E., RICO, L., CASTRO E. (1987): *Números y Operaciones. Fundamentos para una Aritmética Escolar.* Colección Matemáticas, Cultura y Aprendizaje. Ed. Síntesis, Madrid.

FREUDENTAL, H. F. (1985): *Didacticas Phenomenology of mathematical structures,* D. Reidel Publishing Company.

LOVELL K. (1982): *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y*

Nota

Agradecemos la participación prestada por los/as alumnos/as y profesores/as de los colegios: «Aljarafe», «Alemán» y «C. Docente María» de Sevilla; «Puerto Sol», «Limonar», «S. Vicente de Paúl», «Cerrado de Calderón» y «Platero» de Málaga; y «Blas de Otero» de Madrid.

Unamuno y las matemáticas

Manuel Díaz Castillo

Algo hay de verdad y algo de estereotipo en la común imagen de aquel entrañable rector reclamando contra la técnica y contra la ciencia proclamas pasmosas. El que pronunció «¡Que inventen ellos!» no se crea que anduvo presto para la retractación. Antes al contrario, en el momento en que creía contar con la mejor disposición del lector insistió con desdén irónico en *El sentimiento trágico de la vida,* en que la luz eléctrica lucía aquí como allá donde fue descubierta, y que «nos servimos de los logaritmos como en el país donde fueron ideados».

La labor más vocacional de D. Miguel, como se sabe, era aquella continua agitación de las conciencias espirituales del país, es decir de su religiosidad, y de paso, la denuncia de los males de la patria porque ésta no se había fijado en él lo debido; pero también la constante curiosidad por el saber de su tiempo y por las ciencias, si bien más por las biológicas y psicológicas que por las especulativas. En uno de sus primeros exámenes de oposiciones —comenta en sus *Cartas inéditas* entre jocoso y entristecido— al citar a Wundt, fundador de la psicología científica, fue tachado por sus examinadores de «materialista», y no está de más recordar que por ese tiempo muy poca gente en España conocería la existencia del notable investigador alemán y que el juicio de los ilustres censores fuera especialmente desafortunado.

Tras la apariencia de predicador laico, como él mismo se veía, existe una importante faceta en Unamuno, que le mueve a tratar de encontrar las más firmes bases para que el conocimiento sea verdaderamente científico, metódico, sin retóricas fatuas, paciente y continuo, aunque para ello haya que luchar contra las resistencias de nuestra alma medieval que, según él ha atravesado a la fuerza del Renacimiento, la Reforma y la Revolución. El ansia de penetración en la verdad profunda de las cosas le llevaba con facilidad al desprecio de la opinión vulgar de su tiempo, cuando ésta tenía por las matemáticas un aprecio excesivo, no porque las entendiera, sino porque el cálculo infinitesimal, se decía que servía para construir máquinas *(De mi vida)*.

En uno de sus repetidos denuestos contra los franceses, «pueblo de geómetras, matemáticos, que llegan a falsificar la emoción» («Naturalidad del énfasis»), puede observarse que el conocido estereotipo (muy generalizado en Europa), acerca de nuestros vecinos transpirenaicos, está presidido por las figuras eminentes de Descartes y Pascal, y que se beneficia más de la particular galofobia de su autor que dé una posible falta de respeto hacia la matemática.

Por mi parte no creo que Unamuno fuera más allá de las nociones aprendidas durante el bachillerato en su conocimiento matemático. A pesar de ello es muy probable que la matemática ejerciera sobre él una cierta atracción no sólo propia del «dilettante», sino más bien como la que se registraba desde tiempos de la Ilustración: la rotundidad del trazado de sus contornos, de sus reglas, de su método, eran tanto más admirables cuanto imposibles de aplicar a la dirección del espíritu, y quizá por ello, como su muy leído Pascal, creyó Unamuno que la matemática era el conocimiento más bello, pero también el más inútil. De cualquier modo, ésta, por sí sola era incompleta, y hasta llegó a parecerle un inconveniente para el espíritu.

> «Y yo encomendaría un asunto delicado a un puro matemático. Las matemáticas, dadas sin compensación ni contraveneno, son funestísimas para el espíritu. Son como el arsénico, que en debida proporción fortifica y en pasando de ella mata. Los matemáticos puros se acostumbran a discutir con el encerado o el papel y no con la cabeza. Obsesiónales una falsa idea de la exactitud.» («Sobre el ajedrez».)

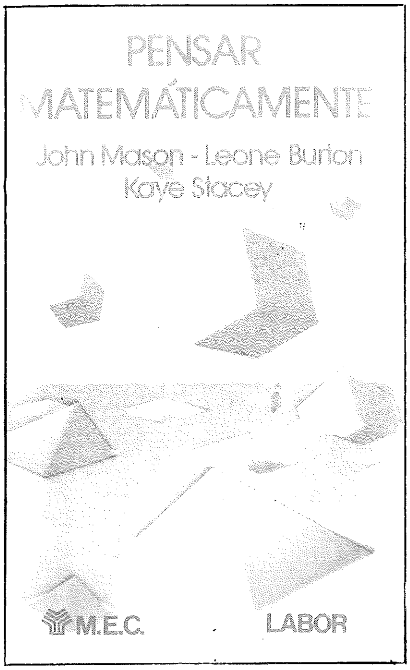
Tras la hoja de cargos precedente se aprestará al análisis de sus virtudes educativas en comparación con otras ciencias.

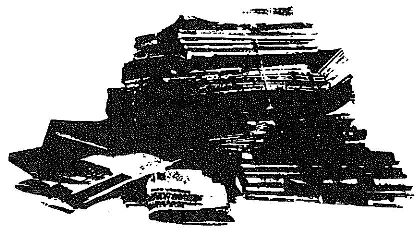
> «Es sin duda mucho más educadora cualquier ciencia de observación, de laboratorio, la biología sobre todo porque en ella hay que aprender a doblegarse al hecho, que sólo en pequeña parte nos es conocido. Toda célula por muy conocida que sea cela un misterio: el triángulo, por el contrario, o la elipse, como no es sino un concepto, lo tenemos todo entero en el espíritu. El que los rumiantes tengan la pezuña partida, no se sabe bien por qué, además de ser tan exacto como $(a + b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$; es mucho más educador.» *(Íbidem.)*

Más desconocida es la imagen de un Unamuno entusiasmado con la idea de haber resuelto un problema matemático propuesto por una revista belga, y esperanzado con ganar el dinero que le serviría para comprar varios libros a los que había echado ojo, y con la posibilidad de descubrir o acaso despertar una nueva vertiente de búsqueda en su insatisfecho espíritu.

> «No sé si leería Vd. en "El Nervión" mi solución a un problema que ha presentado la revista belga "La Science" ofreciendo 1.000 francos a cada uno de los cinco primeros que remitieran la solución antes del 15 de éste. El problema se reduce a escribir el número 100 *sin emplear fracciones ordinarias* (es decir, quebrados) lo cual excluye 99 9/9. Mi solución es 99,99... representando los puntos suspensivos una fracción decimal (no ordinaria) periódica pura cuyo límite es un entero 0,99... = 1 lo mismo que 0,33... = 1/3. Me he consultado con matemáticos y me han dicho que está bien, que las fracciones periódicas representan su límite y que el límite de 0,99... es un entero. En cuanto leí el problema se me ocurrió, casi por inspiración, la solución y la remití a "La Science". Si resultaré un matemático? Tendría gracia.» *(Cartas inéditas.)*

Ésta era la curiosidad candorosa e incisiva de aquel D. Miguel de Unamuno que gustaba de promover entusiasmos y polémicas.





RESEÑAS

MASON J., BURTON L., STACEY K.: *Pensar matemáticamente,* MEC, Labor, 1988.

Existen libros fundamentales que hacen, si no cambiar, sí caminar en las líneas de desarrollo de las áreas de conocimiento. Éste es el caso del que vamos a comentar. Lo mismo que había ocurrido con el libro de Banwell, Saunders y Tahta, Starting Points, editado por Oxford University Press (1972), el que ahora nos ocupa editado inicialmente por Addison-Wesley (1982), ha sido el punto de apoyo de otros varios, como por ejemplo el libro de Burton, Thinking Things Through, Basil Blackwell (1984).

Pensar matemáticamente es un magnífico libro, que trata de los procesos que sigue el pensamiento matemático. Se presenta un problema o investigación y se plantea cómo atacarlo de una manera eficaz, para ir aprendiendo de la experiencia de intentar resolverlo. Interesan los procesos más que las soluciones.

Es un libro para usar más que para leer. Su utilidad depende de la energía con la que se trabajan las cuestiones propuestas. De la capacidad del que lo utiliza de experimentar y reflexionar sobre los procesos que se van presentando.

Hay tres factores que influyen en el grado de efectividad del razonamiento matemático:

— La competencia en el uso de los procesos de investigación matemática.

— La confianza en el dominio de los estados emocionales y psicológicos, para sacar ventaja de ellos.

— El conocimiento de las matemáticas.

El libro se centra en los dos primeros factores, no porque el conocimiento de los «contenidos matemáticos» sea menos importante, sino porque eso es lo que normalmente ocupa todo el escenario y a menudo se presenta como el «único» factor importante.

En el propio libro aparecen, en el capítulo nueve, las siguientes conclusiones a modo de resumen:

¿Qué es el pensamiento matemático?

Un proceso dinámico que, al permitirnos aumentar la complejidad de las ideas que podemos manejar, extiende nuestra capacidad de compresión.

¿Qué puedo utilizar para esto?

Particularización, generalización, conjeturas y convencimiento.

¿Cómo actúa todo esto?

En tres fases: abordaje, ataque y revisión; estas fases están asociadas a distintos estados emocionales: primeros contactos, entrando en materia, fermentando, avanzando, intuyendo, mostrándose escéptico y contemplando.

¿Qué fases hay que destacar?

El abordaje porque es el fundamento del ataque.

La revisión, porque es la menos reconocida y la que más puede enseñar.

¿Qué sirve para mejorar el razonamiento matemático?

La práctica con reflexión.

¿En qué se apoya el razonamiento matemático?

En una atmósfera de interrogantes, desafíos y reflexión, con abundante tiempo y espacio.

¿Qué es lo que provoca el razonamiento matemático?

Un desafío, una sorpresa, una contradicción, o el descubrimiento de un vacío de comprensión.

¿A dónde lleva el razonamiento matemático?

A un conocimiento más profundo de ti mismo.

A una visión más coherente de lo que sabes.

A una investigación más eficaz de lo que quieres saber.

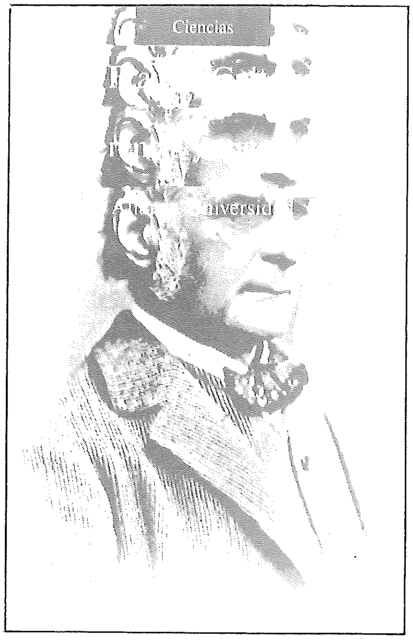
A una postura más crítica ante lo que oyes y lo que ves.

Ningún pensamiento puede tener lugar en el vacío. La atmósfera racional y emocional afecta a tu razonamiento, tanto si eres consciente de ello como si no. Para pensar matemáticamente de una manera efectiva necesitarás tener suficiente confianza para poner a prueba tus ideas y enfrentarse a tus estados emocionales conscientemente. El fundamento de la confianza radica en experimentar la potencia de tu razonamiento para aumentar tu capacidad de comprensión.

Muchos de los problemas planteados son originales, y otros tomados de diferentes fuentes bibliográficas. Los autores citan, entre aquellas personas a las que han de agradecer sus ayudas, a Polya y Schoenfeld.

Los profesores de matemáticas debemos de alegrarnos del acuerdo editorial entre Labor y el Ministerio de Educación y Ciencia, que está dando frutos tan sustanciosos como la traducción de libros como éste y el de Davis y Hersh, *Experiencia Matemática.*

Enrique VIDAL COSTA



GALTON Francis: *Herencia y Eugenesia*

Leer directamente a los clásicos del saber es complicado y difícil, aunque normalmente merezca la pena conocer sin intermediarios las doctrinas que han conformado las ciencias.

Es complicado ya que no es frecuente en nuestro país la publicación de estos clásicos. Y es difícil debido a que el lenguaje, los símbolos y las referencias han cambiado y no los familiares. También son muchos los autores que nos obligan a leer innumerables páginas antes de llegar al meollo de la cuestión, a la idea fundamental e interesante por la que han pasado a la historia.

Sir Francis Galton hizo dos aportaciones importantes a la ciencia. Por un lado introdujo (junto a Quételet), la estadística en las ciencias sociales, dotando a éstas de un soporte matemático que ha contribuido mucho a modernizarlas. Por otra parte presentó a matemáticos más profundos que él mismo (Hamilton, Pearson), problemas estadísticos en busca de una solución, haciendo de esta manera que avanzara y se desarrollara la estadística matemática. Galton junto con Pearson y Weldon fundó la revista *Biometrika*, y muchos bioestadísticos, como Fisher, no son sino continuadores de su trabajo.

La selección del libro que comentamos ha sido realizada por R. Álvarez y presenta textos de sus obras más originales, haciendo hincapié en la *Eugenesia:* la doctrina para lograr, favoreciendo la selección natural, el perfeccionamiento de la raza humana, según definición de la propia Raquel Álvarez.

Galton hace dos aportaciones directas a la estadística. Por una parte, introduce la curva del error, de Gauss, para el estudio de una variable no física: la distribución del talento en la sociedad.

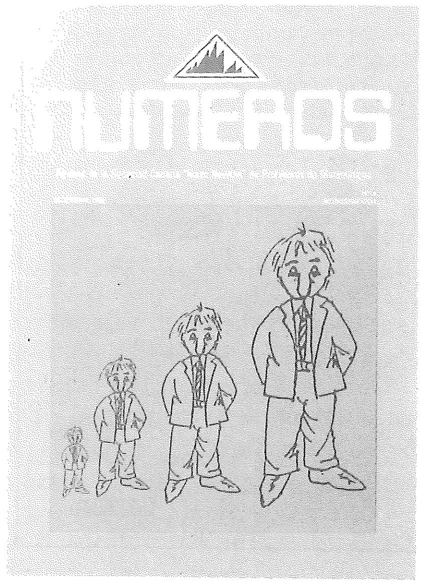
La curva, que tan amplia difusión en este tipo de aplicaciones encuentra después, es utilizada por Galton para estudiar «dotes intelectuales», siguiendo para ello a Quételet que la había empleado en la distribución de medidas de estaturas, peso, etc., de grandes poblaciones. Aplicándola, construye una «Clasificación de los hombres de acuerdo a sus dotes naturales», estableciendo una serie de categorías en función de la habilidad natural de la población estudiada. Así, por ejemplo, en el máximo nivel (por encima de la clase G), sólo hay un hombre por cada millón. En la G, uno por cada 79.000, en la F uno por cada 4.300, etc.

Su otra gran aportación es la del coeficiente de regresión, que emplea, como es sabido, en el estudio de la herencia, de padres a hijos, de la estatura. Este estudio fue el paradigma en el que se han basado después un gran número de trabajos estadísticos. La Ley de regresión, dice Galton, con respecto a la estatura debe expresarse de la siguiente manera: la desviación de la media de los hijos es, en promedio, igual a un tercio de la desviación del padre y en la misma dirección.

Muchas de las ideas de Galton, presentadas en este libro, como la máquina de pesas para calcular, o el método de fotos compuestas en el estudio de las fisonomías conductuales son originales y, cuando menos interesantes.

Es realmente una selección de textos conseguida y que merece la pena leer. (*Herencia y Eugenesia,* de Francis Galton. Traducción, selección y notas de Raquel Álvarez Peláez. Alianza Universidad, Madrid, 1988.)

Primer monográfico de la revista «Números»



La revista *Números,* que edita la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton», presenta en su número 18 una serie de trabajos sobre la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad. Se abre con «Proporcionalidad y probabilidad», del profesor Santaló, de la Universidad de Buenos Aires.

Animados por el éxito de este primer intento-dice en su editorial-proponemos para futuras ediciones los siguientes temas:

— Números racionales.
— La medida.
— Errores típicos: Análisis de sus causas y corrección.
— Lenguaje matemático.
— Resolución de problemas.
— Estadística y probabilidad.
— Funciones, derivadas e integrales.
— Geometría.
— Taller de Matemáticas.

Es propósito de la Sociedad Newton publicar, al menos, uno de estos monográficos al año. Actualmente está trabajando y solicitando colaboraciones para el de la medida y el de errores.

Información: Revista *Números.*
Sociedad «Isaac Newton»
Apdo. 329 - La Laguna
Tenerife - España

Novedades bibliográficas

BAROODY, A. J.: *El pensamiento Matemático en los niños,* Visor-MEC, Madrid, 1988.

BOLT, B.: *Actividades Matemáticas,* Labor, Barcelona, 1988.

— *Más actividades matemáticas,* Labor, Barcelona, 1988.

BRANDREHT, G.: *Juegos con números,* Gedisa, Madrid, 1989.

BRIALES, F. J. y JIMÉNEZ, M.: *Matemática viva,* Alhambra, Madrid, 1989.

CAJARAVILLE, J. A.: *Ordenador y Educación matemática. Algunas modalidades de uso,* Síntesis, Madrid, 1989.

CARLAVILLA, J. L. y FERNÁNDEZ, G.: *Historia de las Matemáticas. (Comic),* Cons. Educ. Castilla-Mancha, Toledo, 1988.

CORDERO MUÑOZ, F.: *Didáctica de las Matemáticas en Educación de Adultos,* Popular-MEC, Madrid, 1988.

DAVIS, P. J. y HERSH, R.: *Experiencia Matemática,* Labor-MEC, Barcelona, 1988.

— *El sueño de Descartes,* Labor-MEC, Madrid, 1989.

DUDENEY, H. E.: *Los acertijos de Canterbury,* Gránica, Buenos Aires, 1988.

ENTIWISTLE, N.: *La comprensión del aprendizaje en el aula,* Paidos-MEC, Barcelona, 1988.

FLORES, M. B.: *Curiosidades Matemáticas,* Alianza, Madrid, 1989.

GARDNER, M.: *Magia Inteligente,* Crónica, Buenos Aires, 1988.

— *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona, 1988.

— (Selec. y presentac.) *Los acertijos de Sam Loyd.* Vol. 1, Gránica, Buenos Aires, 1988.

GETE ALONSO, J. C. y DEL BARRIO, V.: *Medida y realidad,* Alhambra, Madrid, 1989.

HYATT, H. R. y SMALL, L.: *Trigonometría con calculadoras,* Limusa, México, D. F. 1988.

KRUPP, E. C.: *En busca de las antiguas Astronomías,* Pirámide, Madrid, 1989.

MASON, J. BURTON, L. y STACEY, *Pensar Matemáticamente,* Labor-MEC, Barcelona, 1988 (88).

MATAIX, M.: *En busca de la solución,* Marcombo Boixanen, Barcelona, 1989.

NOVAK, J. D. y GOWIN, D. B.: *Aprendiendo a aprender,* Martínez Roca, Barcelona, 1988.

QUINE, W. V.: *Las raices de la referencia,* Alianza Universidad, Madrid, 1988.

REY PASTOR, J.: *Selecta,* Fundación Banco Exterior, Madrid, 1988.

ROANES, E.: *Maco: Matemáticas con ordenador,* Síntesis, Madrid, 1988.

SMULLIAM, R.: *Juegos para imitar a un pájaro imitador,* Gedisa, Barcelona, 1989.

UDINA I ABELLO, F.: *Aritmética y calculadoras,* Síntesis, Madrid, 1989.

WITTROCK, M. C.: *La Investigación de la Enseñanza I. Enfoque, teorías y métodos,* Paidos-MEC, Barcelona, 1989.

Próximos encuentros de profesores

UNIVERSIDAD CASTILLA - LA MANCHA

CURSOS DE VERANO 1989

"LA EDUCACION MATEMATICA"

Cuenca, 5 a 7 de julio

Con el patrocinio de la O.N.C.E.

Colaboran: Junta de Comunidades.
Diputación Provincial.
Caja de Ahorros de Cuenca y Ciudad Real.

VICERRECTORADO DE EXTENSION UNIVERSITARIA.
ANTIGUO CONVENTO DE CARMELITAS.
Ronda de Julián Romero, s/n. CUENCA.

"LA EDUCACION MATEMATICA"

DIRECTOR: **D. Luis RICO.** Catedrático de EE. UU. Universidad de Granada.

SECRETARIO: **D. José L. SORIANO.** Profesor Titular de EE. UU. Universidad de Castilla-La Mancha.

Curso dirigido a: Profesores de Preescolar, Educación General Básica, Enseñanzas Medias y Escuelas Universitarias de Magisterio.

PROGRAMA

5 de julio

10 h. Entrega de documentación.

11,30 h. Presentación del curso.

12 h. **"LEYES DEL AZAR: LA REGULARIDAD DE LO INCIERTO".**
D. José COLERA. Catedrático de Bachillerato. Profesor del ICE, Universidad Autónoma de Madrid.

18 h. **TALLERES DE GEOMETRIA (I).**
"La geometría del plano" y "La geometría del espacio".
D. Rafael PEREZ. Catedrático de Bachillerato y Director de la revista "Suma".
D. José M.ª FORTUNY. Catedrático de EE. UU. Universidad Autónoma de Barcelona.

6 de julio

9,30 h. **"EL CONOCIMIENTO MATEMATICO EN EL PREESCOLAR".**
D.ª Encarnación CASTRO. Profesora Titular de EE. UU. Universidad de Granada.

11 h. **"EL CALCULO SIMBOLICO AUTOMATICO Y LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA ELEMENTAL".**
D. Tomás RECIO. Catedrático de la Universidad de Cantabria.

12,30 h. **"LA EDUCACION MATEMATICA PARA CIEGOS".**
D. José Enrique FERNANDEZ DEL CAMPO. Licenciado en Matemáticas y profesor de la ONCE.

7 de julio

9,30 h. **"LA EDUCACION ARITMETICA EN LOS 90: TENDENCIAS Y RETICENCIAS".**
D. Bernardo GOMEZ. Profesor Titular de EE. UU. Universidad de Valencia.

11 h. **"EL MOVIMIENTO ASOCIATIVO EN LA COMUNIDAD DE EDUCADORES MATEMATICOS".**
D. Antonio PEREZ. Catedrático de Bachillerato Sevilla.

12,30 h. **"PROBLEMAS ACTUALES EN EDUCACION MATEMATICA".**
D. Luis RICO.

16 h. **TALLERES DE GEOMETRIA (II).**

17,30 h. **MESA REDONDA Y CLAUSURA.**

LA UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA ENTREGARA A TODOS LOS ASISTENTES DIPLOMA ACREDITATIVO DE SU ASISTENCIA.

IV Jornadas de educación matemática «Thales»

Málaga, 11 al 15 de septiembre de 1989.

Tema: *Las Matemáticas en el umbral del siglo XXI*

— *Sesiones plenarias*

— Tendencias actuales en la enseñanza de la Matemática.

— El papel social del profesor de Matemáticas.

— Matemáticas en Ciencias Humanas y Sociales.

— El curriculum de Matemáticas de la Reforma en Andalucía.

— *Talleres o seminarios*

(De 6 a 7 horas de trabajo sobre un tema monográfico con un responsable del tema.)

1.—Geometría.
2.—Matemáticas en el Ciclo Superior.
3.—Informática en el aula.
4.—Uso de la calculadora en el aula.
5.—Vídeos educativos.
6.—Matemáticas en el Ciclo Medio.
7.—Enseñanza de la Estadística.
8.—Resolución de problemas.
9.—Historia de la Matemática utilizable en el aula.

— *Comunicaciones libres*

Temas que se sugieren:
Matemáticas en Ciencias Humanas y Sociales.
Matemáticas en Educación Especial.
Historia de la Matemática en el aula.
Matemática recreativa.
Estadística en los currículos de Matemáticas.

Software educativo.

Plazo de admisión:
Antes del 1 de agosto: resumen de la comunicación.
Antes del 1 de septiembre: texto completo.
(Se oferta la posibilidad de exponer la comunicación mediante posters.)

— *Zoco*

Con la aportación de materiales de los asistentes (interesados en exponer deberán contactar con el Comité Organizador de las Jornadas).

— *Exposiciones*

Material de apoyo a la Educación Matemática (interesados en exponer deberán contactar con el Comité Organizador de las Jornadas).

CUOTA DE INSCRIPCIÓN

Número máximo de asistentes: 500 personas

	antes del 1 de agosto	*posteriormente*
Socios de SAEM «THALES»....	3.500 pts.	5.000 pts.
No socios	7.000 pts.	10.000 pts.

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

(enviar a SAEM «THALES» apartado 702 - 29080 Málaga)

Nombre ____________________

Apellidos ____________________

Domicilio ____________ Teléfono ________

Localidad ____________ C.P. ________

Provincia ____________________

Centro de trabajo ____________________

Dirección ____________ Teléfono ________

Localidad ____________________

Presenta comunicación ☐ SÍ ☐ NO

Materiales para el zoco ☐ SÍ ☐ NO

Preferencia de talleres ______ ______ ______ ______
(Indicar números)

Socio de la SAEM «THALES» ☐ SÍ ☐ NO

Adjunta ☐ talón nominativo (a SAEM «THALES»)
☐ resguardo de transferencia bancaria
(a la c.c. núm. 300299-3 de la Caja de Ahorros de Ronda, sucursal 29 de Málaga)

Para cualquier información o contacto:

SAEM «THALES» Apartado de Correos 702
29080 - Málaga
CEP de Málaga - Teléfono: 952 - 358710 ó 358713

Escuela de Verano de Madrid
Fechas: del 3 al 12 de julio.
Organiza: Acción Educativa
c/. Príncipe, 35
28012 - Madrid

CI.25.4
MUSICANDO LAS MATEMÁTICAS
A cargo de: Ruben ALTSCHULER

CM.02.1
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EGB
A cargo de: Ignacio GAZTELU

CS.13.1
LOS NÚMEROS ENTEROS EN EL CS
A cargo de: Manuel G.ª DENIZ

EM.08.2
LAS DIFICULTADES DEL ÁLGEBRA. UN MATERIAL ALTERNATIVO
A cargo de: Grupo AZARQUIEL

CS.09.1
INVESTIGANDO LA GEOMETRÍA EN LA ESCUELA
A cargo de: Isabel CALLEJO, Rosa FORNIES y Lidia VIVAS

CM.14.2
TRABAJOS PRÁCTICOS CON ALGUNAS ESTRATEGIAS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
A cargo de: Manuel G.ª DENIZ

CI.09.1
APRENDIZAJE DE LA LECTO-ESCRITURA Y LAS MATEMÁTICAS EN EL CI (doble duración)
A cargo de: Emilia ABARCA y Begoña SÁNCHEZ

CM.17.4
MATEMÁTICAS DIVERTIDAS
A cargo de: Luis FERRERO

CM.12.2
INICIACIÓN A LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD
A cargo de: Grupo de Estadística de AE

EM.01.1
GEOMETRÍA
A cargo de: M.ª Ángeles ISIDRO

CM.23.4
CONSTRUIMOS GEOMETRÍA
A cargo de: Seminario de Matemáticas de AE

II CONGRESO DOS ENSINANTES DAS CIENCIAS

ENCIGA
ASOCIACION DOS ENSINANTES DE CIENCIAS DE GALICIA

RIBADAVIA

12 - 14 Outubro 1989

Boletín de inscripción

Apelidos: .... Nome: ....
Enderezo: ....
Localidade: Cód. Post. e Prov.: ....
.... Tfo.: ....
Nivel no que ensina: ....
Disciplina ou especialidade: ....
Centro de traballo: ....
Provincia: .... Tfo.: ....
Socio ENCIGA: Si ( ) Non ( )

*** En caso de presentar **comunicación:**
TITULO:
Tipo: Ponencia ( ) Poster ( ) Exib. ( )
Obradoiro ( ) Mostra mat. ( )
Material requerido: Prox. ( ) Retrop. ( ) Video ( )
Auga ( ) Gas ( ) Elect. c.a. ( ) Elect. c.c. ( )
Outros: ....
O día e hora de inclusión no programa será comunicado ós interesados na 2.ª quincena de setembro.
DEREITOS INSCRIPCION: Socios: gratis.
Non socios: 3.000 pesetas a ingresar na CC. 1612/5. Caixa Ourense. Ribadavia, mediante transferencia ou xiro postal. Adxuntar resgardo ou copia de abono co presente boletín.
Data:

Remitir a:
Comisión Organizadora II Congreso.
I.B. de Ribadavia.
32400 Ribadavia (Ourense).

Vème ÉCOLE D'ÉTÉ DE
DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

24 Août - 2 Septembre 1989 — Plestin les grèves (près de Lannion)

Première annonce

L'école d'été s'adresse aux personnes intéressées aux développements de la recherche en didactique des mathématiques et de l'informatique : chercheurs (il faut entendre par là non seulement des personnes qui ont un statut de chercheur universitaire ou autre, mais aussi par exemple des enseignants et des formateurs qui font des recherches ou sont impliqués dans des recherches) et étudiants en didactique des mathématiques et de l'informatique, ou enseignants ayant à enseigner la didactique des mathématiques.

L'école est le lieu d'échanges approfondis entre chercheurs sur les questions vives de la didactique des mathématiques et de l'informatique et les relations avec l'extérieur. Elle contribue également au travail de constitution et de développement d'enseignements de didactique des mathématiques.

L'école offre un enseignement de haut niveau, sous forme de cours, conférences, ateliers, séminaires, informe les participants des développements récents et significatifs de la recherche et organise des débats avec des équipes ayant contribué à ces développements.

Le programme, actuellement en préparation mettra l'accent sur les points suivants :
— la notion de champ conceptuel
— l'utilisation de situations d'interaction comme méthode de recherche
— la géométrie au collège : méthodes d'exploration des phénomènes didactiques
— le contrat didactique
— les problématiques de recherche sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation
— les problématiques de recherche sur l'apprentissage de la programmation
— les théorisations du sujet.

Pour permettre un travail réel, le nombre de participants est limité à 80 personnes. Le montant de la participation sera d'environ 2600 F.

Les dossiers de préinscription et toute information complémentaire peuvent être obtenus en s'adressant à :
M. Régis Gras, département de mathématiques, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex.

ACTES DE LA 3EME CONFÉRENCE
DU GROUPE "THEORY OF MATHEMATICS EDUCATION"

TME — Conference Proceedings Available

The International Study Group "Theory of Mathematics Education (TME)" founded in 1984 at ICME 5 in Adelaide, Australia, has thus far held three international conferences. The proceedings of TME-1, a post-congress conference held in Adelaide in 1984, are available from: IDM, University of Bielefeld, P.B. 8640, D-48 Bielefeld, F.R. Germany (Prof. H. G. Steiner). The proceedings of the 1985-Bielefeld-conference TME-2: "Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics)" (ed. by H. G. Steiner and A. Vermandel) and of the 1988-Antwerp-conference TME-3: "Investigating and Bridging the Teaching-Learning Gap" (ed. by A. Vermandel and H. G. Steiner) are available from: Universitaire Instelling Antwerpen, Universiteitsplein 1, B-2610 Wilrijk, Belgium (Prof. A. Vermandel). The prices are resp.: US $ 5; 10; 5 plus postage.

ANNOUNCEMENT

The fourth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, *ICTMA 4*, will be held at Roskilde University Centre, Denmark, from 3–7 July 1989.

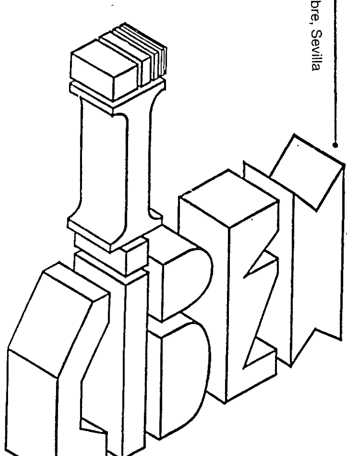
The main aim of the conference is to provide a forum for presentation and exchange of information, experience, views and ideas between people engaged in the topic of the conference. The educational levels considered are secondary and tertiary levels. The scientific programme of the conference will consist of lectures, workshops, exhibitions and demonstrations. The conference will also include an attractive social programme.

For further information, please contact:

Professor Mogens Niss, chairman
IMFUFA, Roskilde University Centre
P.O. Box 260, DK-4000 Roskilde
DENMARK.

Sevilla, Septiembre 1990 - España

España - 1990 Septiembre, Sevilla



S.A.E.M. THALES

INSCRIPCION

Se establecen dos tipos de cuotas: ordinaria y especial. Se podrán acoger a la segunda modalidad cualquier socio de las Sociedades Españolas Federadas, de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Portugal y los participantes de países iberoamericanos.

PLAZOS	CUOTAS	
	ORDINARIA	ESPECIAL
Hasta 30-5-90	15.000 Ptas. 100$	11.000 Ptas. 135$
Hasta 30-8-90	18.000 Ptas. 125$	14.000 Ptas. 160$
En el Congreso	21.000 Ptas. 150$	17.000 Ptas. 185$

– Número de participantes: 1.000.

– Todos los interesados deberan enviar el boletín de preinscripción a:

I-CIBEM
S.A.E.M. «THALES»
Facultad de Matemáticas
Apartado 1160
41080 SEVILLA (ESPAÑA)

PREINSCRIPCION

Apellidos

Nombre

Dirección

País

Lugar de trabajo

Nivel:

Primaria

Secundaria

Universitaria

ESTRUCTURA

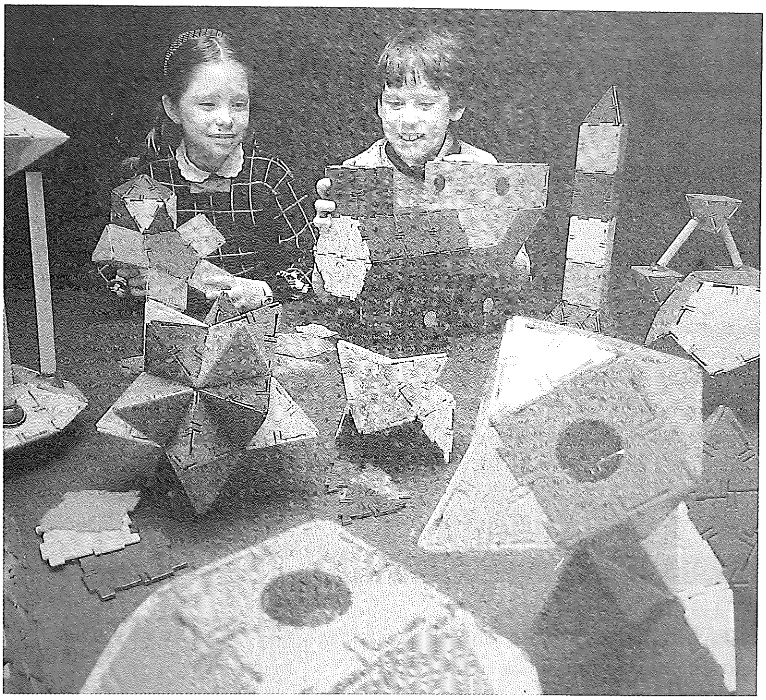
1. **CONFERENCIAS PLENARIAS**
   CONFERENCIANTES:
   – Prof. C. Alsina.
   – Prof. U. D'Ambrosio.
   – Prof. E. Luna.
   – Prof. J. Ponte.
   – Prof. L. Santaló.
2. **PANELES**
   – Renovación y reformas.
   – Informática y enseñanza.
   – Formación del Profesorado.
   – Educación matemática en grupos culturalmente diferenciados.
   – Investigación en educación matemática.
   – Estadística y enseñanza.
   – Geometría en las enseñanzas primaria y secundaria.
   – Resolución de problemas.
3. **COMUNICACIONES**
   – En este apartado tendrán cabida trabajos de investigación didáctica, talleres, etcétera.
   – El tiempo destinado a cada comunicación será de 20 minutos y 20 minutos de debate, si procede.
   – Un esquema de la comunicación deberá ser enviado al Comité Organizador antes del día 31 de enero de 1990, siendo la fecha límite de recepción de la comunicación (10 folios máximo) el 30 de abril de 1990.
4. **EXPOSICIONES**
   Durante el Congreso se podrán exponer todo tipo de material de apoyo a la educación matemática. Los interesados deberán comunicar sus características, así como las necesidades de espacio, antes del 30 de abril de 1990.
5. **IDIOMAS OFICIALES**
   Español y portugués.

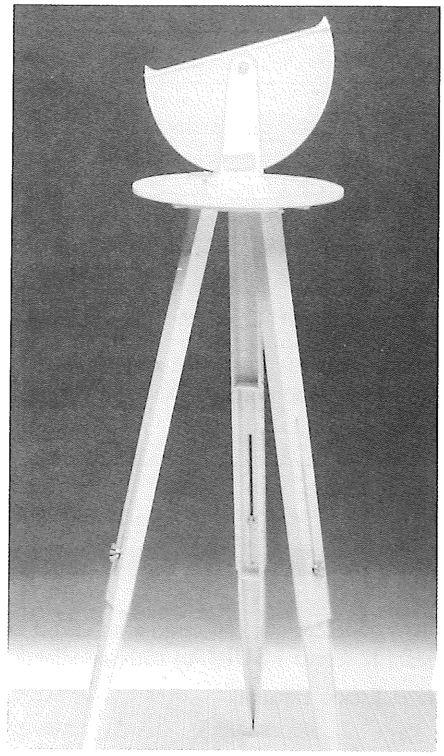
distesa

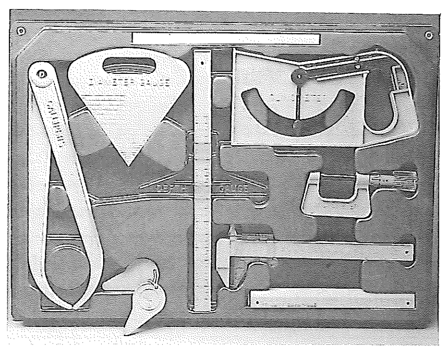
HACEMOS FÁCIL LO DIFÍCIL

La estructura de la Matemática es una de las construcciones más bellas diseñadas por el hombre. Desgraciadamente su enseñanza se ha enfocado de forma tradicional resultando poco motivadora para la mayoría de los alumnos.

A nivel mundial se está produciendo un cambio en la metodología de esta disciplina fundamentada en la utilización de materiales manipulativos que permitan crear estructuras abstractas partiendo de materiales concretos.







Distesa, dentro de su proyecto MATMAN 90 ha seleccionado más de 700 productos didácticos para facilitar la enseñanza de la Matemática. Todos ellos se encuentran en un Catálogo específico de este área con divisiones en función de las edades y los grandes bloques temáticos. Este Catálogo será enviado a todos los profesores de Matemática que lo soliciten a nuestras Oficinas Centrales.

DESEO RECIBIR EL CATALOGO DE MATEMATICAS PROYECTO MATMAN 90
Nombre ....
Centro Educativo ....
Dirección .... n.º ....
Localidad .... Provincia .... Telf. ....
Desea alguna otra información ....
....

Envíe este cupón a: Distesa. Josefa Valcárcel, 27 - 28027 Madrid - España

GRUPO ANAYA

SUMA 3
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Primavera 1989

Nombre y Apellidos:

Calle:

Población: C.P.:

Provincia/País: Tfno.: (   )

Profesión: D.N.I./C.I.F.

Centro de trabajo: Nivel:

Firmado: Fecha:

Firma:

Deseo suscribirme por: ☐ un año (3 números) ☐ números a partir del número ______

Cuyo importe haré efectivo mediante:
☐ Cheque bancario adjunto
☐ Domiciliación bancaria
☐ Giro Postal N.º________ Fecha______
☐ Contra reembolso
☐ Transferencia a c.c. 6719644, Caja Postal, Urb. Camino de Ronda, Granada

Estado español: Particulares: 2.500 Pts.
Centros: 3.000 Pts.
Europa: $ 40 ídem.
Resto del mundo: $ 55 ídem.

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista **«SUMA»** correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.
(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja:

Agencia:

Calle:

Población: C. Postal:

Provincia:

N.º Cuenta/Libreta:

Titular:

Firmado: Fecha:

Firma:

Agradeceríamos el envío de dirección postal de Centro/Institución o persona interesada para enviarle información sobre la presente publicación

Nombre y Apellidos/Centro:

Dirección: C.P.:

Provincia: País:

Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ningua Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1017, 18080 Granada (España).
La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja.

Domiciliación Bancaria

Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

Recomendaciones

Las siguientes indicaciones tienen por objeto conseguir una paulatina normalización en el estilo de presentación de los textos. No deben ser consideradas como obstáculo o dificultades añadidas a las generalmente ya de por sí precarias condiciones en que se realizan los trabajos sino como metas a las que debemos ir tendiendo.

La propias indicaciones son susceptibles de alteración en función de los medios tecnológicos de impresión de que la redacción pueda ir disponiendo.

1. Indicaciones de carácter general

Todo texto presentado deber ser (física o conceptualmente) legible, coherente (en contenido y en notación) y manipulable —para propósitos de imprenta— por personas no versadas en el tema de que el texto trate.

Se aconseja explícitamente, a quienes envíen artículos, piensen que el lector medio no sabe tanto del tema como ellos mismos. Se puede tener consideración hacia el lector de muy diversas maneras; por ejemplo, cabe

a) redactar una introducción (no necesariamente limitada al primer párrafo) que sitúe informalmente el contenido del artículo en un contexto generalmente más conocido;

b) plantearse si el esquema «definición-teorema-demostración» no podría ser sustituido por otro más «amigable»;

c) atender al hecho incuestionable de que muchos lectores preferirán enfrentarse a textos claros y concisos antes que a ristras de fórmulas;

d) estructurar el artículo de modo que el hilo conductor no quede ahogado por divagaciones...

2. Indicaciones específicas

2.1. *Escritos*

Los escritos deberían presentarse por duplicado, en papel DIN-A4, escritos a máquina por una sola cara.

El título debe ser descriptivo y corto.

En hoja aparte, figurará un breve resumen en castellano y la traducción de éste al inglés (independientemente de la lengua utilizada en el artículo).

Es deseable que la longitud de los artículos no sobrepase las 15 páginas; sin embargo, este número jamás será un requisito de aceptación o de rechazo. (La redacción se reserva la posibilidad, en artículos más largos, de publicarlos en dos entregas de la revista si los autores muestran su acuerdo.) Se invita a los autores a ser escuetos, pero sin abusar de sobreentendidos.

Tanto la página del resumen como la primera página del artículo deben contener el nombre y apellidos y centro de trabajo de quienes lo han realizado.

Siempre deberá figurar una dirección completa a la que deba remitirse la correspondencia y, en su caso, pruebas de imprenta.

2.2. *Símbolos y unidades*

Todos los artículos deben ser coherentes en lo relativo a símbolos y a unidades. Si no son de uso común, deben aparecer adecuadamente definidos.

Los símbolos matemáticos pueden ser escritos a mano o a máquina y no deben surgir ambigüedades. Los símbolos poco usuales y las letras de un alfabeto como el griego deben ir anotadas al margen. Distíngase muy bien la letra O del número 0, la letra *l* del número 1 y de la prima, la letra *k* de la letra *kappa*, etc. Empléese una notación coherente para vectores (por ejemplo: negrita o indicación de esto con un subrayado sinuoso) o para numerar expresiones matemáticas (por ejemplo: números entre paréntesis a la derecha de la expresión).

2.3. *Referencias bibliográficas*

Toda referencia a obras previamente publicadas debe ir numerada entre corchetes ([ ]) a lo largo del texto. Al final de éste aparecerá la lista completa de citas en el mismo orden numérico.

Los artículos de revistas se citarán con la siguiente pauta:

Autor/a/es: Nombre (inicial/es) y apellido(s).

Título: (el que corresponda).

Revista: Nombre o abreviatura comúnmente utilizada para referirse a ella.

Número: (el que corresponda, subrayado).

Páginas: (número de la página inicial)-(número de la página final) ocupada(s) por el artículo.

Año: (cuatro cifras).

Los libros se citarán con la siguiente pauta:

Autor: ...

Título: ...

Editorial: ...

Lugar de edición: ...

Año de edición: ...

2.4. *Notas a pie de página*

Deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. *Listados de ordenador (programas, tablas, etc.)*

Se enviarán listados originales (evítense rigurosamente las fotocopias) que se reprografiarán para evitar errores. También se aceptarán negativos en blanco y negro de listados originales.

2.6. *Ilustraciones*

Aunque las ilustraciones interrumpirán el texto publicado, deben remitirse en hojas separadas del manuscrito con indicación de la colocación óptima. Los autores deben asegurar la calidad de los trazos, de los símbolos empleados y, en general, de todos los elementos de las ilustraciones teniendo en cuenta que éstas se someterán a reprografía directa en escala próxima a 1:2.

El número de ilustraciones no está limitado; se ruega eviten redundancias en el material gráfico.

2.7. *Fotografía en blanco y negro*

Sólo podrán publicarse fotografías remitidas con negativos. Si las fotografías requieren algún comentario, leyenda o símbolo especial, se numerarán y en folio aparte se indicará el contenido de tales adiciones.

2.8. Enviar a cualquiera de las personas que figuran en el Panel de Colaboradores o a

Revista *SUMA*
Apdo. 1017
18080 Granada.
ESPAÑA