

# Los protocolos de resolución en la enseñanza de matemáticas

Inés María Gómez Chacón

## Antecedentes y justificación

En este artículo presentamos algunas reflexiones acerca de la experiencia sobre el proceso de resolución de problemas en un grupo de alumnos de 1.º y 2.º de BUP durante los cursos 1987-88 y 1988-89. Analizamos cómo se puede favorecer y mejorar los procesos de pensamiento matemático utilizando para ello el trabajo de protocolos.

Los protocolos de resolución tratan de marcar las huellas objetivas de la secuencia sobre las acciones tomadas por un individuo en el proceso de resolución un problema.

Ha sido usada como herramienta en la enseñanza de la matemática para buscar el proceso de resolución de problemas.

Según Schoenfeld<sup>1</sup> el primer esquema de codificación de protocolos riguroso en la enseñanza de la matemática fue desarrollado por Kilpatrick en su disertación en 1967<sup>2</sup>. El análisis de Kilpatrick codifica especialmente la clase de comportamientos heurísticos que eran supuestos en la resolución. El resultado del análisis fue una larga cadena de símbolos representando el proceso que se usó durante la resolución. La secuencia cifrada obtenida se utilizó como fuente de

datos para un análisis estadístico. Éste permitió explorar la correlación entre los progresos en la resolución de problemas y la frecuencia de acontecimientos de ciertos procesos de resolución.

Muchos análisis de protocolos se basaron en el esquema de Kilpatrick (1967). Posteriormente se hicieron modificaciones de este esquema —Lucas (1972)—. La búsqueda de una mejora continuó durante los 70. El producto final del esquema de Lucas fue un diccionario de códigos de procesos, más de dos largas páginas que fueron acompañadas por comparaciones complejas y procedimientos codificados (Lucas, Branca, Goldberg, Kantowski, Kellogg y Smith, 1979), resultando molesto de cara a una investigación por la gran abundancia de símbolos.

Kantowski redujo el enfoque usando un esquema para procesos heurísticos de interés, centrándose en 5 procesos heurísticos relativos al planing, 4 relacionados con la analogía y 7 relacionados con la vuelta atrás.

Kulm, Campbell, Frank y Talsma (1981) desarrollaron, revisaron y condesaron procesos del código-diccionario, buscando correlaciones entre progresos en la resolución de problemas y la frecuencia de ciertos tipos de comportamientos reflejados en los protocolos. Pero ninguno de estos métodos de análisis de protocolos se ha centrado en decisio-

nes de estrategias, ni en su impacto en la ejecución de resolución de problemas, ni en donde la decisión tiene lugar durante el intento de resolución. Éste es el método de análisis de protocolos descrito por Schoenfeld (1985), el cual se centra en la toma de decisiones de la ejecución o nivel de control.

## Trabajo con protocolos

Como *modelo de referencia* para el desarrollo de nuestra experiencia, tomamos el concepto sobre el pensamiento matemático que desarrolla J. Mason, L. Burton y K. Stacey en su manual «Thinking Mathematically» (1982).

Para favorecer el aprendizaje de las fases de resolución de problemas y procesos involucrados en ellas, preparamos una amplia colección de problemas, que clasificados en concordancia con los procesos y habilidades; pretendimos no sólo fueran comprendidos por los alumnos para su aplicación inmediata, sino que pudieran ser incorporados a su banco de estrategias, listos para ser usados cuando la ocasión se presente.

A medida que avanzaba la experiencia nos dimos cuenta de que había que encontrar un método más eficaz que nos permitiera ver el proceso seguido por cada alumno y seguirlo personalmente. Decidimos que una vez que ellos habían visto modelos, ideas..., debíamos poner el énfasis

<sup>1</sup> Cfr. SCHOENFELD, A. H., 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, F. L.

<sup>2</sup> Cfr. KILPATRICK, J. 1967, *Analyzing the solution of word problems in Mathematics: An exploratory Study*, Unpublished doctoral dissertation, Stauford University, 1967.

sis en que cada uno adquiriera el hábito de la reflexión sobre su propio proceso de pensamiento como técnica fundamental para su mejora. Utilizamos el trabajo y análisis de protocolos, es decir, le dábamos a cada uno una hoja con un único problema y dividida en dos partes. En una el alumno apuntaba lo que pensaba, su proceso..., en la otra la solución. Después de corregido y comentado a cada uno, él lo revisaba, y más tarde hacíamos la puesta en común y corrección en la pizarra.

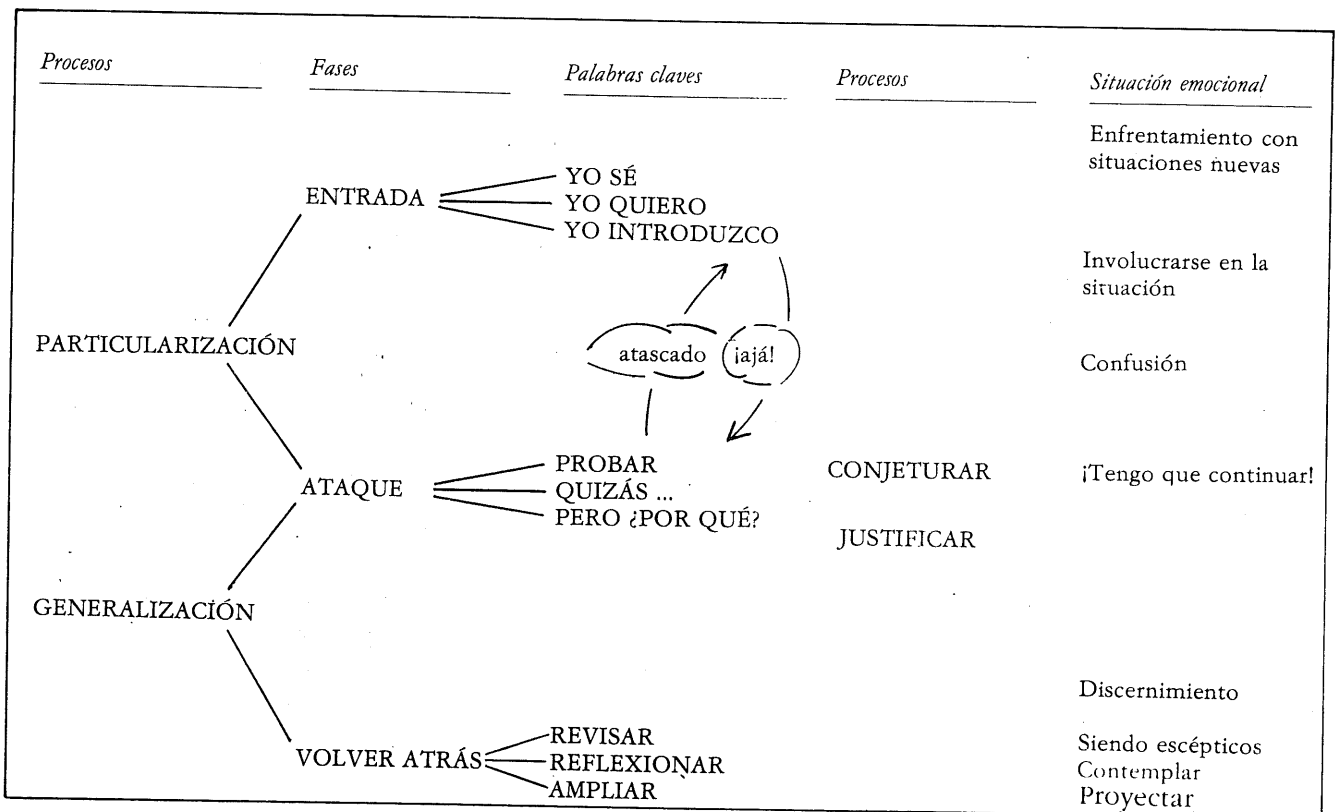
Estas sesiones permitían conocer de cerca algunos elementos subyacentes a la resolución de problemas: bloqueos más habituales, forma de proceder de cada individuo, ensayo de materiales y estrategias, e ir dibujando atentamente el proceso de inves-

tigación, el estado emocional y psicológico que ello provoca, y concentrándonos en estos factores no sólo como ayuda al estudiante en su proceso de desarrollo sino como instrumento para evaluar la capacidad de resolver problemas.

Actualmente existen pruebas diseñadas a tal efecto con problemas de distintas partes de la matemática; también hay tablas para cuantificar esta habilidad teniendo en cuenta el plan de resolución, la estrategia utilizada, los cálculos y el razonamiento. Pero tanto en uno como en otro caso sólo se valora la respuesta final, ignorando el proceso seguido hasta ella. Creemos que con el análisis de protocolos podemos evaluar mediante un planteamiento más cualitativo en el que no se

pierda de vista todo el proceso desde su fase de incubación. Para esto necesitamos seguir la evolución de los trabajos del estudiante durante un proceso largo de tiempo, ya que las distintas fases no se desarrollan en un período fijo y dependen del momento psicológico del individuo y después realizar una medida estadística de estos trabajos en la que se tengan en cuenta varios parámetros como: primeras ideas, diagramas hechos, capacidad para hacer distintos tipos de razonamiento, fases de resolución, empleo de estrategias, flexibilidad, perseverancia en el trabajo, creatividad para explorar nuevos caminos y superar bloqueos...

El cuadro que viene a continuación nos puede servir como esqueleto para efectuar un análisis de protocolos.



### Análisis de un protocolo

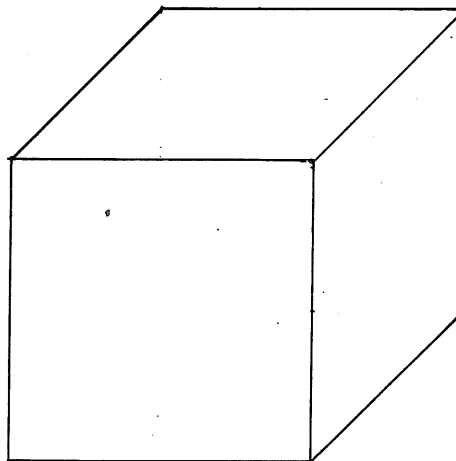
Presentamos a continuación un protocolo de una alumna de 1.º de BUP realizado durante el curso 1987-88. Intercalados con la narración de la resolución del problema están los comentarios que yo iba efectuando al analizarlo sobre los procesos, fases, palabras claves que se produjeron durante la resolución.

### Como pintar un cubo

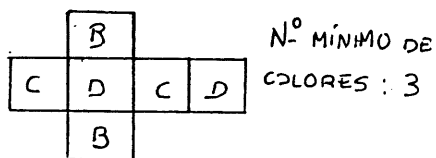
#### Problema

¿Cuál es el mínimo de colores que se necesitan para pintar un cubo de manera que dos caras adyacentes tengan siempre distinto color?

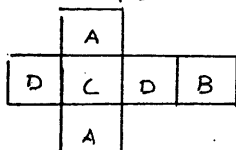
¿Cuántos cubos diferentes se pueden obtener usando cuatro colores? (Recuerda que cada cara ha de ir pintada sólo de un color y naturalmente caras adyacentes de colores distintos.)



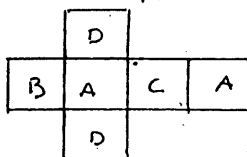
M.<sup>a</sup> José



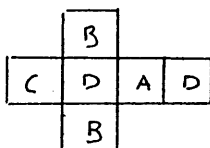
-VALE\* - 4 COLORES -



-VALE\* -



-VALE\* -



Creo que el enunciado del problema está escrito de una forma muy complicada. Es más fácil decir:

"Pinta un cubo con el mínimo de colores de tal forma que dos caras que estén juntas tengan siempre diferente color".

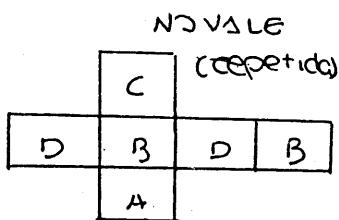
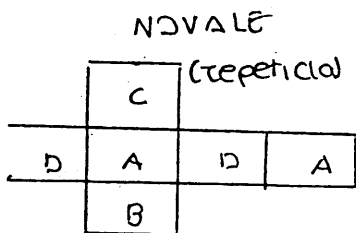
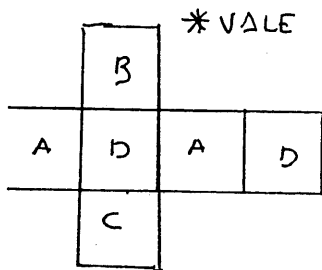
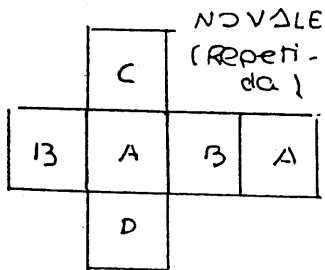
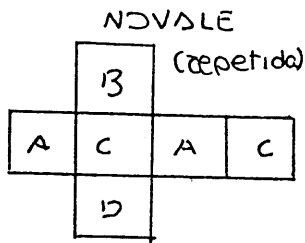
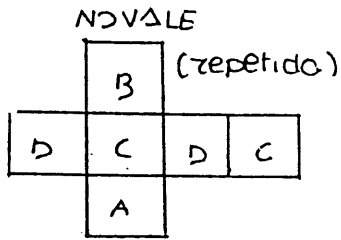
Comienza la fase de *entrada*.

— Se estudia el enunciado, se da una comprensión y reformulación de éste (yo sé, yo quiero).

— Presenta una flexibilidad mental. Se da un cambio de representación del cubo, de perspectiva a desarrollo del cubo (yo introduzco).

Para solucionarlo voy a dibujar los cubos y pintarlos.

— Introduce: representación, diagramas.



Se me ha ocurrido una idea. Este problema me parece parecido a otro problema que hemos hecho sobre tres amigos que jugaban 10 partidas de bolos. También es de combinaciones. Voy a intentar resolverlo como el de los amigos, porque si lo dibujo me puedo llevar muchísimo tiempo, son cantidad de combinaciones.

— Se da una analogía en el contexto matemático en el que se resuelve el problema. Busca un

problema similar; pero es consciente que el problema no representa la misma estructura.

El problema de los amigos y este, no son iguales, porque en el de los amigos podías repetir posibilidades y en éste no.

Tiene que haber alguna forma porque a la cuenta de la vieja, o sea pintándolos me puedo llevar tres años.

Comienza la fase de *ataque*.

— Estimación de la solución.

— Tiene una intuición (probar).

Se dan argumentos para estimar la validez de los resultados.

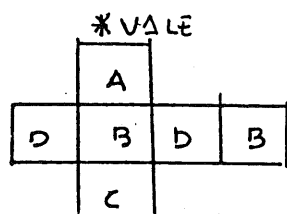
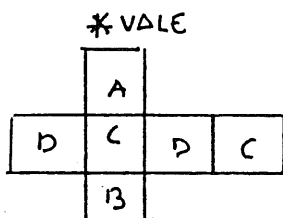
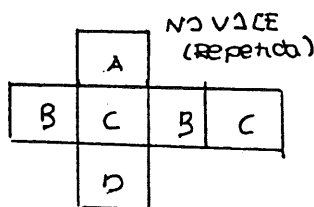
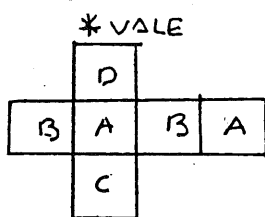
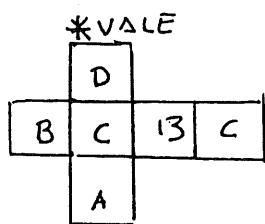
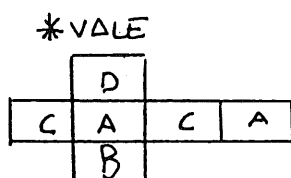
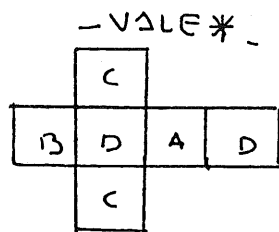
Se me ha ocurrido otra idea. En el problema venía en el libro, lo que estoy haciendo es buscar por el libro algún problema parecido a este.

Después de un buen rato, he encontrado uno parecido sobre las distintas formas de repartirse tres medallas entre 6 atletas.

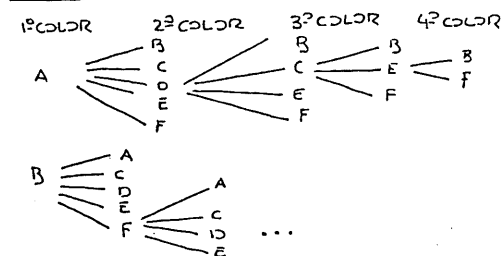
Voy a intentar hacer este siguiendo un esquema:

— Busca problemas similares.  
— Analogía existente entre la representación del desarrollo del cubo con la notación empleada:

A, B, C, D, sin imaginarse cómo queda el cubo en el espacio y el otro del problema del libro (pero ¿por qué?).



4 COLORES



6 caras (A/B/C/D/E/F) combinadas con 4 colores sería:  $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$  CUBOS DIFERENTES

— Introduce una nueva representación: el diagrama árbol.

Yo no sé si tú pensarías que es un poco de arca como lo he hecho, pero yo creo que no, porque bien que he trabajado para encontrar un problema parecido, entenderlo, y después hacer este probl) problema de esta forma.

— Estado emocional.

Todo lo que hecho está mal, porque no he tenido en cuenta lo de las caras adyacentes. Y así no me saben 360, sino muchas menos.

He seguido haciendo las combinaciones del principio, para ello me he fabricado un cubo de papel.

Comienza la fase de Volver atrás.

- Se da un elemento de control del problema (revisar).
- Comienza la fase de vuelta

atrás, revisar argumentos, consecuencias, conclusiones...

Vuelve a la lectura del enunciado.

Ya he hecho todas las combinaciones. Hay algunas que son iguales. Las voy a tachar.

Hay 10 combinaciones. Son las que tienen un estetisco.

— Reflexiona sobre las ideas y momentos claves.

— Manipulación: vuelve a la familiarización física. Le ha lle-

vado a equivocación la representación del cubo.

— Vuelve a la resolución. Revisa para dar la solución.

### Valoración de la experiencia

Subrayamos el cambio de actitud que poco a poco se va produciendo en los alumnos al abordar problemas. La valoración es positiva ya que no sólo les posibilita el aprendizaje de la resolución de problemas, sino que les lleva a una toma de conciencia de sus capacidades...

Exponemos a continuación algunas de las valoraciones hechas por los propios alumnos:

— «Los métodos me han parecido buenos porque nos han ayudado bastante ya que siempre habíamos hecho los problemas cada uno por su cuenta y sin ningún método, más o menos a voleo, y con las hojas hemos cogi-

do un método, sabemos por dónde empezar, etc.»

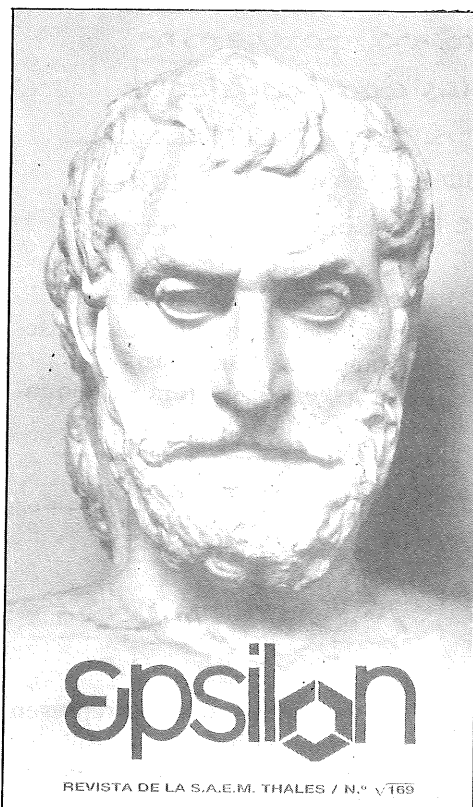
— «Yo ahora, cuando cojo las Mates, sé de qué va y no me aburren como otros años.»

— «Con esto de las hojas, y créeme, *te lo digo en serio* y no estoy de "peloteo", me parece que mi "cerrada azotea" ha pensado más que antes, y eso me parece, que es bastante bueno.»

— «También me han parecido muy bien las fichas de problemas con las que hemos descubierto qué capacidad tenemos y a la vez (a mí por los menos) que hemos resuelto nosotros mismos, nos dan ánimos a seguir y a pensar que podemos sacar muchas más cosas.»

### Bibliografía

- ADAMS, James L.: *Juegos de desbloqueo mental*, Gedisa, Barcelona, 1987.
- BOLT, B.: *Divertimentos matemáticos*, Ed. Labor, Barcelona, 1988.
- BURTON, L., MASON, J., STACEY, K.: *Thinking Mathematically*, Ed. Addison, Wesley, 1982.
- DE BONO, E.: *El pensamiento lateral*, Ed. Paidós, Barcelona, 1986.
- DE GUZMÁN, M.: «Enseñanza de la matemática através de la resolución de problemas», *Educación Abierta*, 71. (ICE Universidad de Zaragoza, 1987.)
- POLYA, G.: *How to solve it*, Doubledoy, New York, 1957.
- SCHOENFELD, A. H.: *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando, FL, 1985.
- SCHOENFELD, A. H.: «Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos», *La enseñanza de la matemática a debate*, MEC, Madrid, 1985.
- WOOD, E.: *Estrategias de pensamiento*, Ed. Labor, Barcelona, 1987.



II. EXPERIENCIAS EN EL AULA	
El teorema de Pitágoras Rafael Pérez Gómez I.B. Alonso Cano, Dórcal (Granada)	79
III. ACTUALIDAD	
VI Congreso Internacional de Educación Matemática (VI ICME) Antonio Pérez Jiménez Secretario de la S.A.E.M. Thales	89
IV. PROBLEMAS	
Problemas Propuestos XXV Olimpiada Matemática Española (Granada) Premio Extraordinario de Bachillerato, 1988 Olimpiada Matemática de Leningrado, 1984 O'THALES, números 8, 9 y 10 V Olimpiada Matemática Thales	95
Problemas Resueltos XXV Olimpiada Matemática Española. 1.ª Fase (Madrid) XXV Olimpiada Matemática Española. 1.ª Fase (Sevilla) Oposiciones a Profesores de Matemáticas de E.M.I.	106
V. BIBLIOGRAFIA	

I. ARTICULOS	
Análisis no standard y estructura de filtros Cándido Martín González I.B. Licinio de la Fuente, Coin (Málaga) Dolores Martín Barquero I.B. de Fuengirola, (Málaga)	9
El proceso de aprendizaje en Matemáticas y la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau José Luis Rodríguez Fernández I.B. sabatón, Jaén Luisa Ruiz Higuera Dpto. de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. (Sección Jaén)	27
Origen de los cuaterniones Antonio Rosales Góngora I.B. de Beja, (Almería)	43
Desarrollo cognitivo y Matemáticas. Un ejemplo: la evolución del razonamiento proporcional en B.U.P. José A. Acaveño Díaz I.B. Alonso Sánchez, Huelva	51
Sobre un problema de Poncelet Manuel Delgado Delgado I.B. Pino Montano, Sevilla	59
Interpretación de expresiones Matemáticas: aplicación en análisis numérico José A. Mayor Gallego I.B. Mixto de Rota, (Cádiz)	71