

# El azar y su aprendizaje

Eliseo Borrás Veses y Magda Morata Cubells  
(Grupo Cero)

## Resumen

Se presentan unas breves pinceladas sobre el importante papel que el azar desempeña en nuestro mundo. De acuerdo con ello, se resalta el esfuerzo que tendríamos que realizar para introducir experiencias acerca del azar en la escuela y se relatan dos de ellas.

### 1. Las redes del Azar

La naturaleza, el universo, parecen estar en continuo cambio (selección de unas especies a expensas de otras, mutaciones, herencia genética, reacciones químicas, tiempo meteorológico ...). El azar es uno de los motores de ese cambio.

Nuestra vida cotidiana está inmersa en un mar de fenómenos aleatorios (accidentes, votaciones, índices de bolsa, loterías ...).

Podría pensarse que es inútil indagar en las posibilidades del futuro, ya que todo lo que ocurra será casual, «por suerte» (o «por desgracia!»), y un azar ciego condicionará el porvenir.

Afortunadamente no es así, el azar produce *regularidades* que pueden detectarse:

— al lanzar un dado muchas veces se obtienen las seis caras aproximadamente en igual proporción;

— aunque unas familias tengan más hijos de un sexo que de otro, la proporción de nacimientos de mujeres y hombres es aproximadamente la misma;

— una mutación producida por azar en el código genético de un organismo puede producir otro nuevo, más apto para la vida, más estable;

...  
Estas regularidades permiten hacer previsiones y, en algunos casos, nos ayudan a tomar decisiones.

El *azar*, en interacción con una gran variedad de leyes, gobierna el mundo. Si solamente actuaran las leyes, la vida sería determinista, todo podría predecirse antes de que sucediera. Pero el *azar* introduce la sorpresa, hace que algunas veces suceda lo inesperado, modula el determinismo de las leyes y, por su causa, todos los sucesos, en mayor o menor grado, se tiñen de imprevisión. La aventura es posible, lo inesperado puede romper lo habitual...

### 2. Familiarizarse con el azar

Si se desea que los estudiantes tengan la posibilidad de entender mejor nuestro mundo, es necesario realizar y analizar en la escuela actividades relacionadas con el azar.

Cuando se discute a qué edad sería oportuno que los niños comenzasen a familiarizarse con el azar, suelen aparecer opiniones enfrentadas:

— Tradicionalmente se ha considerado que el azar debe ser presentado en niveles de enseñanza superiores, descartándolo de la enseñanza primaria; esta opinión se refleja, por omisión, en casi todos los libros de texto y sigue siendo sustentada por la mayoría de los profesores. Para algunos, el azar es simplemente una aplicación que carece de entidad matemática. Para otros, el aprendizaje del comportamiento del azar es demasiado difícil para ser presentado en la escuela primaria, ya que se requieren no sólo conocimientos de álgebra booleana de conjuntos, de fracciones y de teoría combinatoria, sino también una gran capacidad para abstraer de la realidad.

— En los últimos años, en la mayoría de las reuniones internacionales sobre educación matemática, se ha defendido con fuerza la opinión de que los niños deben encontrarse con el azar cuanto antes, desde los primeros años escolares. Las razones son precisamente:

\* el azar es uno de los elementos más sencillos de cómo matematizar situaciones reales;

\* el azar es un componente esencial del mundo moderno;

\* las técnicas necesarias para estudiarlo (recuentos, porcentajes y fracciones) no son complicadas;

\* hace falta tener experiencias directas sobre el azar antes de tratarlo desde un punto de vista formal.

Nuestra visión del mundo (y de las matemáticas) es eminentemente determinista, ya que la mayor parte de las experiencias que analizamos a lo largo de nuestra vida son de este tipo. Algunos estudios realizados en USA e Inglaterra (como por ejemplo los descritos en *Misconceptions of Probability. From Systematic Errors to Systematic Experiments and Decisions*, J. Michael Shaughnessy, NCTM, 1981, Yearbook) prueban que las falsas intuiciones sobre el azar eran comunes a niños de diversas edades y a adultos. Nuestra experiencia como profesores confirma esta idea; incluso, en algunos casos, los adultos tienen más dificultades que los niños en comprender ciertas situaciones aleatorias.

Por ejemplo, más de una vez se han engrosado las arcas de Hacienda cuando el número premiado en un sorteo de la lotería es muy bajo, ya que nadie quiere comprar los números «que empiezan por ceros», por considerarlos menos probables que los otros.

Parece justificado pensar que este comportamiento indiferenciado de niños, adolescentes y adultos es debido a una carencia continuada en el tiempo de experiencias que hayan hecho posible la construcción de una red conceptual apropiada sobre el azar. Conceptualizaciones iniciales mal formadas persisten con la edad si no hay oportunidad de reelaborarlas; las cosas suelen ser más o menos difíciles según la menor o mayor familiaridad que uno tenga con ellas. Para remediarlo habría que proporcionar a los alumnos la oportunidad de experimentar con situaciones aleatorias desde las primeras etapas, en la escuela. Esto les permitiría desarrollar su intuición sobre el comportamiento del azar y mejorar y ampliar los conceptos que lleva asociados.

### 3. Dos aproximaciones al azar: La simulación y los juegos

Naturalmente, la presentación de situaciones cuyo análisis esté fuera del alcance del aprendiz es inútil y contraproducente. Afortunadamente hay, al menos, dos métodos de análisis del azar que están al alcance de cualquier aprendiz: la simulación y los juegos.

La *simulación* es uno de los procedimientos más utilizados en la actualidad para estudiar los posibles resultados de una experiencia, aleatoria o no. Suele ser una técnica mucho más barata y, en muchos casos, menos peligrosa que la realización de la experiencia real.

En el caso de los fenómenos de azar basta utilizar materiales tan sencillos como dados, ruletas, bolas,

fichas ... o máquinas que generen números aleatorios.

El problema principal, en cada caso, es encontrar la forma de simular la situación propuesta, es decir construir un modelo que la represente, por analogía. Si el modelo es fiel, se podrá usar para predecir lo que ocurrirá en la realidad y estudiar el efecto de posibles cambios. Muchas veces el problema que se plantea podrá ser resuelto teóricamente, sin recurrir a la simulación, pero esa solución no siempre está al alcance de los alumnos ni de los profesores. Además, el proceso de construcción de un modelo incrementa la comprensión necesaria para decidir qué aspectos de la situación son significativos y cuáles no. Una ventaja definitiva de la simulación sobre otros métodos es que está al alcance de todos los alumnos de cualquier nivel.

Los *juegos* actúan como modelos de situaciones muy diversas y suelen ser aceptados con gran interés por los alumnos. El análisis de los resultados y de las reglas del juego, y su posible modificación, es una rica fuente de aprendizaje significativo.

Como siempre, hay un peligro: convertir la simulación y el juego en un ritual sin sentido, abstracto, desconectado del mundo propio del niño, que los haga un instrumento de tortura más para los alumnos.

### 4. Dos ejemplos

Las dos situaciones que siguen son dos ejemplos de encuentros con el *azar* en dos niveles diferentes:

\* *La caza de patos*, en 5.º de EGB.

\* *La cueva*, en 8.º de EGB.

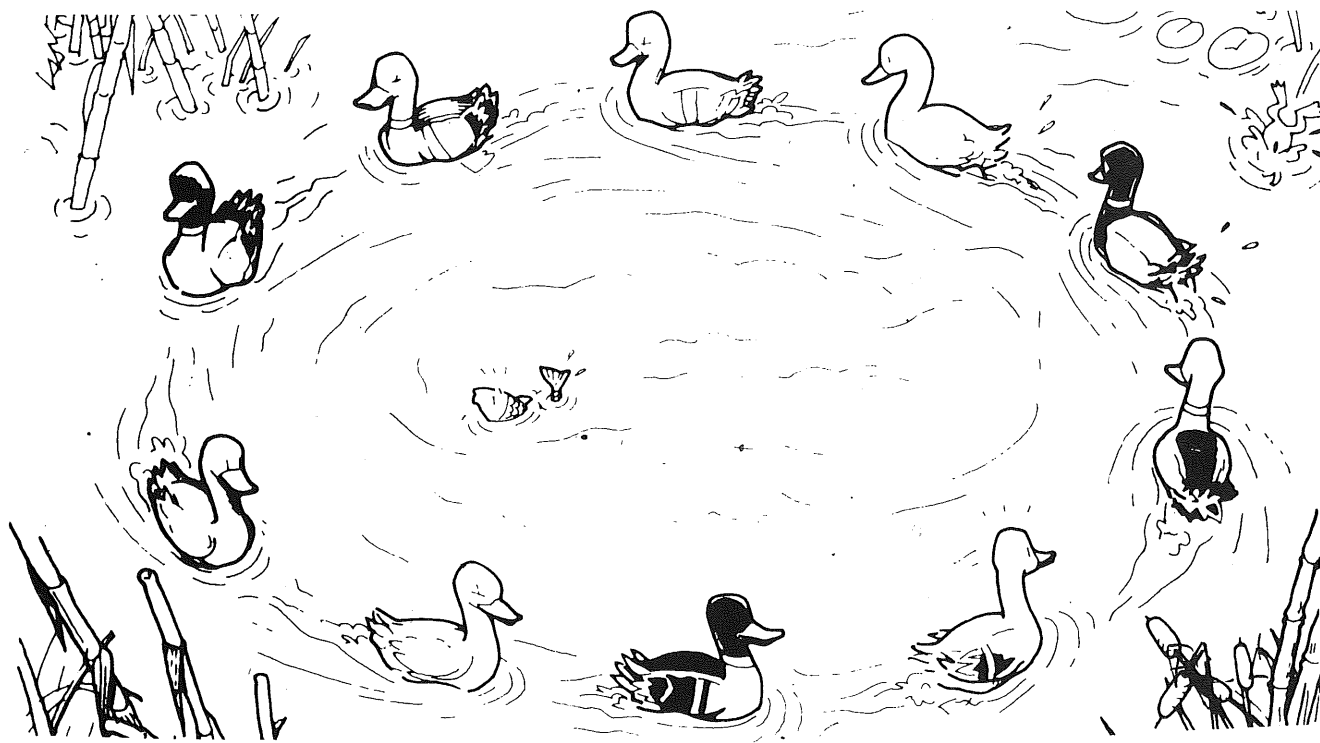
Están basadas en ideas de A. Engel y T. Varga.

En los dos casos aparece una idea central: la reflexión sobre cómo *simular* el problema que se propone es esencial para comprenderlo y resolverlo. La *búsqueda de regularidades* en los resultados de las simulaciones permite *hacer previsiones* bastante ajustadas. En el segundo problema, un análisis teórico posterior, utilizando *diagramas en árbol*, puede llevar a soluciones generales. La propuesta en forma de *juego* acrecienta el interés de los alumnos.

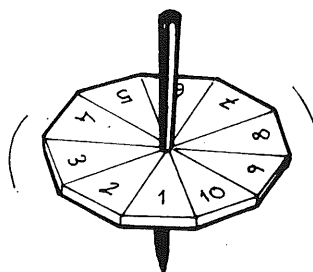
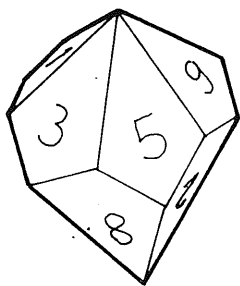
*La caza de patos*

Diez cazadores, estupendos tiradores, van a cazar patos a una laguna. Al rato de llegar, 10 patos se posan sobre el agua. Cada cazador dispara a un pato, todos simultáneamente y todos aciertan; pero ninguno sabe a qué pato apuntan los demás. ¿Cuántos patos sobrevivirán?

Los alumnos están distribuidos por parejas (cada niño jugará por 5 cazadores). Hace falta un tablero con los 10 patos dibujados.



Cada jugador tiene 5 fichas de distinto color que las de su compañero y un dado o una ruleta decimales.



Se necesitan también unas 100 fichas de otro color (por ejemplo, negras) para las apuestas.

Los alumnos son, en este caso, de quinto de EGB.

Para comenzar, se discutió cuál era el número máximo y mínimo de patos supervivientes. Un niño opina que «Como es un juego de suerte, no es posible saber cuántos patos van a quedar vivos».

Puesto que los alumnos no tienen una idea clara de lo que puede ocurrir, la profesora decide aplazar la discusión hasta después de haber jugado y propone una nueva cuestión:

¿Cómo simular la caza de los patos?

Profesor: Tenemos ruletas con los números del 1 al 10 y fichas. ¿Cómo podemos utilizarlas?

Alumnos: La ruleta nos sirve para disparar.

P: ¿Y cómo haremos los disparos?

A: Podemos poner números en los patos.

P: ¿Qué números pondremos?

A: Los mismos que tiene la ruleta: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10.

P: Y ahora ¿qué hacemos?

A: Giramos la ruleta. Si sale un 6, eso quiere decir que hemos matado 6 patos.

A: Y si sale un 3, que hemos matado 3 patos.

P: Pero cada cazador dispara sólo una vez. ¿Cuántos patos puede matar como máximo?

A: Uno (muchos niños). Sí porque matar dos pájaros de un tiro ...

P: ¿Qué quiere decir que salga el número 3?

A: Que hemos matado el pato número 3.

De forma parecida se decide que las fichas sirvan para señalar en el tablero los patos que han sido alcanzados.

Se sortea el orden de juego. Al comenzar a jugar cada niño pronostica el número de patos que sobrevivirán a la caza.

El jugador 1 hace girar la ruleta y pone una de sus fichas sobre el pato cuyo número coincide con el resultado obtenido. El otro jugador hace lo mismo y así van jugando, hasta que han realizado los diez disparos.

Al finalizar una ronda, cada jugador recibe tantas fichas negras como diferencia haya entre su conjetura y el número de patos que sobreviven al juego.

Se juegan varias rondas, por ejemplo 10. Interesa que los niños observen lo que ha pasado en las series anteriores para mejorar sus conjeturas en las partidas siguientes. Para ello es conveniente que recojan los datos en una tabla.

Gana quien al final tenga menos fichas negras.

*A los niños les ha gustado el juego. Al terminar las diez series quieren seguir jugando.*

*Al finalizar las tablas en las que han anotado sus resultados y apuestas se observa que:*

— *Algunos niños tienden a fijarse al principio sólo en el resultado de la partida anterior, aunque a partir de la sexta serie prácticamente todos apuestan por 3, 4 o 5 patos vivos.*

— *Desde el comienzo descartan los valores extremos 0, 1, 8 y 9. Muy pocas veces apuestan por el 2 y el 6 (ver tablas de Mar y Carmelina).*

*Al preguntar a cada grupo, al final, qué apuesta harían si tuvieran que jugar otra vez, todos eligen la moda (el resultado más frecuente) que ha sido 3 ó 4 en la mayor parte de los casos. Aunque ésta es la estrategia ganadora, nunca pueden tener la seguridad de que van a ganar.*

*Se recogen en la pizarra los resultados de todos los grupos y sus conjeturas finales. Entonces todos coinciden en apostar al 3 o al 4, excepto un alumno que se mantiene en su hipótesis inicial: «5 por ser la mitad del número de patos», hipótesis que ha visto confirmada por los resultados de sus 10 series.*

*Dman*

| PARTIDA | APUESTA | NUMERO DE PATOS VIVOS | PUNTOS |
|---------|---------|-----------------------|--------|
| 1       | 3       | 4                     | 1      |
| 2       | 4       | 4                     | 0      |
| 3       | 4       | 5                     | 1      |
| 4       | 4       | 1                     | 2      |
| 5       | 4       | 4                     | 0      |
| 6       | 3       | 3                     | 2      |
| 7       | 3       | 3                     | 0      |
| 8       | 3       | 4                     | 1      |
| 9       | 4       | 4                     | 0      |
| 10      | 4       | 3                     | 1      |
| TOTAL   |         |                       | 3      |

*La clase termina con una discusión sobre el significado de la palabra simulación y del concepto de moda.*

El valor que predice la teoría (el número medio de patos supervivientes) es:

$$10 \times (9/10)^{10} \approx 3,49$$

*Variante:* Se puede simplificar el juego con 6 patos y 6 cazadores, usando dados cúbicos. Con los dados la simulación es mucho más rápida que con las ruletas. Esta versión del juego es apropiada para niños más jóvenes.

En este caso, el número medio teórico de patos supervivientes es:

$$6 \times (5/6)^6 \approx 2.$$

Por otra parte, el juego puede complicarse modificando el número de cazadores o de patos o ambos.

Este problema, propuesto a alumnos de 2.º de BUP y a adultos, fue resuelto de forma similar aunque, en este último caso, se presentaron más dificultades al decir qué procedimientos son válidos para realizar la simulación.

*Carmelina*

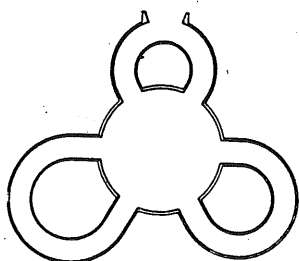
| PARTIDA | APUESTA | NUMERO DE PATOS VIVOS | PUNTOS |
|---------|---------|-----------------------|--------|
| 1       | 3       | 3                     | 0      |
| 2       | 4       | 4                     | 0      |
| 3       | 2       | 3                     | 1      |
| 4       | 3       | 4                     | 1      |
| 5       | 4       | 3                     | 1      |
| 6       | 4       | 3                     | 1      |
| 7       | 3       | 4                     | 1      |
| 8       | 4       | 4                     | 0      |
| 9       | 4       | 4                     | 0      |
| 10      | 3       | 3                     | 0      |
| TOTAL   |         |                       | 5      |

APUESTA

4

La cueva

Veintisiete exploradores están perdidos en una cueva de la que parten tres caminos.



Uno de ellos conduce al exterior en una hora. Los dos restantes no tienen salida: si entran por uno de ellos vuelven a la cueva en 2 días; si lo hacen por otro, vuelven en 3 días.

Como no llevan ninguna luz y la cueva está oscura y llena de obstáculos, eligen, cada vez que hacen un intento de salir, uno de los tres caminos al azar.

Si sólo tienen comida y agua para sobrevivir durante menos de 6 días, ¿cuántos de los 27 exploradores crees que lograrán salir de la cueva?

¿Cuántos se salvarían si hubiese 54 exploradores? ¿Y si hubiese 18?

Si hubiera un número cualquiera de exploradores, ¿qué proporción de ellos crees que se salvaría?

Si tuvieran alimentos para subsistir indefinidamente, ¿crees que se salvarían todos los exploradores?

¿Cuánto tiempo crees que tardaría cada explorador en salir, por término medio?

Se propuso la primera parte de este problema a alumnos de 8.º de EGB.

Los alumnos deciden cómo realizar la simulación:

P: ¿Cómo simular la búsqueda de la salida por los exploradores, usando dados y fichas?

A: Numeramos las salidas de la cueva: la primera con los números 1 y 2, la segunda con 3 y 4, la tercera con 5 y 6.

A: Se lanza el dado cada vez que un explorador tiene que elegir una salida.

A: Las fichas representan a los exploradores. El camino de un explorador no termina hasta que sale libre o muere.

Los alumnos se agrupan de 3 en 3: cada uno de ellos juega por 9 exploradores, con 9 fichas del mismo color.

Antes de empezar una partida, cada alumno hace una conjetura (apuesta) sobre el número de exploradores que quedarán vivos. En muchos casos, la primera conjetura es un número muy pequeño, aunque muchos coinciden en creer que la mejor apuesta es igual a la mitad del número de exploradores (14 ó 15).

Para anotar lo sucedido a lo largo del juego y sus apuestas, utilizan las siguientes tablas:

| explorador nº | recorrido | duración | libre | muerto |
|---------------|-----------|----------|-------|--------|
| 1             |           |          |       |        |
| 2             |           |          |       |        |
| 3             |           |          |       |        |
| 4             |           |          |       |        |
| 5             |           |          |       |        |
| 6             |           |          |       |        |
| 7             |           |          |       |        |
| 8             |           |          |       |        |
| 9             |           |          |       |        |
| 10            |           |          |       |        |
| 11            |           |          |       |        |
| 12            |           |          |       |        |
| 13            |           |          |       |        |
| 14            |           |          |       |        |
| 15            |           |          |       |        |
| 16            |           |          |       |        |
| 17            |           |          |       |        |
| 18            |           |          |       |        |
| 19            |           |          |       |        |
| 20            |           |          |       |        |
| 21            |           |          |       |        |
| 22            |           |          |       |        |
| 23            |           |          |       |        |
| 24            |           |          |       |        |
| 25            |           |          |       |        |
| 26            |           |          |       |        |
| 27            |           |          |       |        |

| nombre | conjetura | resultado | diferencia |
|--------|-----------|-----------|------------|
|        |           |           |            |
|        |           |           |            |
|        |           |           |            |

Tras haber jugado dos partidas, el profesor pide a los alumnos que establezcan una conjetura común a los tres jugadores.

En la pizarra se recogen los resultados y conjeturas de cada grupo:

| GRUPO | PARTIDA |         | CONJETURA |
|-------|---------|---------|-----------|
|       | PRIMERA | SEGUNDA |           |
| 1     | 19      | 19      | 19        |
| 2     | 18      | 19      | 16        |
| 3     | 20      | 22      | 21        |
| 4     | 14      | 20      | 17        |
| 5     | 14      | 18      | 15        |
| 6     | 18      | 20      | 19        |
| 7     | 14      | 17      | 16        |
| 8     | 15      | 17      | 16        |
| 9     | 16      | 20      | 18        |
| 10    | 18      |         | 18        |

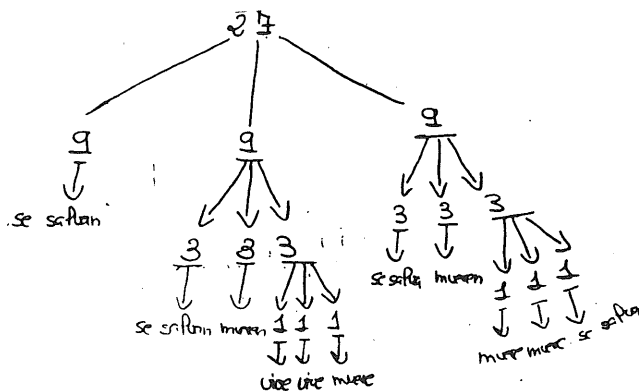
Como se puede comprobar en la tabla anterior, la mayoría calcula la media de sus dos resultados, aunque hay algunas excepciones significativas:

— Los componentes del grupo 3 juegan 3 partidas, obteniendo 20, 17 y 22 exploradores libres respectivamente, pero desechan el resultado 17 «por ser un número impar» y calculan la media de los otros dos.

— En el grupo 2 han obtenido los resultados 18 y 19, pero su conjetura es 16. Al preguntarles la razón, responde uno de ellos: «es mi número».

— La conjetura del grupo 5 es 15, a pesar de que sus resultados son 14 y 18. Siguen pensando, como al principio de la clase, que la mejor apuesta es la mitad del número de exploradores.

— José Ramón, Raul y Vicente, tras jugar una sola partida, establecen su conjetura 18 utilizando el siguiente diagrama:



Al explicar estos últimos al resto de la clase su razonamiento, alguien pregunta:

A: Pero si hay 3 caminos y los exploradores se mueven al azar, ¿por qué han de ir 9 por cada camino?

A: Esa es la resolución lógica.

P: ¿Cómo podemos tener en cuenta todo el volumen de información que tenemos en la pizarra?

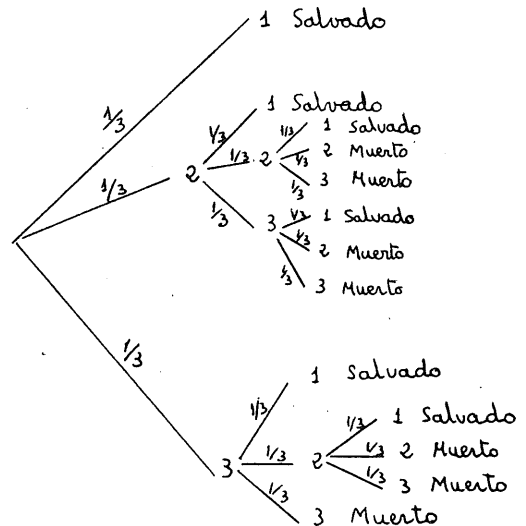
A: Calculando la media de todos los resultados.

Se calcula la media de todos los resultados experimentales (17,78) y la de todas las conjeturas (19,1), comparándolas con la predicción teórica (18).

Finalmente se propone a los alumnos que generalicen el problema a cualquier número de exploradores.

Este mismo problema ha sido abordado por alumnos de 1.º de BUP, con más experiencia en situaciones en las que interviene el azar.

Prácticamente todos ellos (algunos sin realizar ninguna simulación previa) razonan de forma análoga a como lo hicieron los tres alumnos de 8.º Un grupo de chicas, tras haber trabajado de esta manera desde el principio, calcula la probabilidad de que un explorador se salve utilizando un diagrama en árbol como el siguiente:



$$p = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3} + \frac{3}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Todos generalizan el problema: «si hay  $n$  exploradores esperamos que se salven  $2/3$  de  $n$ ». Para su total resolución han utilizado dos clases.

Sin embargo, alumnos de otro grupo de 1.º de BUP, sin experiencia previa en situaciones de azar y menos entrenados en la resolución de problemas, tuvieron dificultades similares e incluso mayores que los de 8.º de EGB.

El problema resulta interesante y rico en posibilidades. Al plantearlo con 27 exploradores ( $27 = 3^3$ ) se favorece un razonamiento del tipo del empleado por José Ramón, Raul y Vicente, que puede servir como paso previo a la introducción del ábaco probabilístico (ver capítulo 14 del volumen 2 del libro *Probabilidad y Estadística* de Arthur Engel, Ed. Mestral).

Otra posibilidad, sino se consideran ninguna limitación de tiempo debida a los alimentos o incluso a la edad de los exploradores, es el cálculo de la duración media de los recorridos, que coincide precisamente con la suma de las duraciones de los tres caminos: 5 días y 1 hora.

##### 5. Últimas anotaciones

Al trabajar con estos problemas es posible que surjan algunos de los siguientes conceptos:

- Simulación de una experiencia utilizando dados o ruletas.
- Sucesos no equiprobables. Suceso imposible.
- Imposibilidad de predecir con certeza el resultado de una experiencia aleatoria.
- Moda y media aritmética.
- Sesgo de un generador aleatorio y su verificación.

- Pruebas repetidas.
- El azar produce regularidades.
  - o estrategias:
    - Conjetura, verificación y mejora de la conjetura a la vista de los resultados experimentales.
    - Confección de una tabla que facilite la recogida de los datos y su análisis.
    - Elaboración de un diagrama.
    - Búsqueda de regularidades.
    - Generalización.

Los ejemplos anteriores pueden ser propuestos a alumnos de diferentes edades y resueltos con técnicas y niveles de abstracción distintos. No es ésta una característica exclusiva de las situaciones en las que interviene el azar, pero sí que es más patente aquí que en otros dominios de la matemática.

Para que las conclusiones extraídas de la simulación tengan una cierta fiabilidad, es conveniente que toda la clase colabore para recoger la mayor cantidad de datos posible y que se resuma toda la información en unos pocos parámetros que permitan hacer conjeturas.

La inmersión en situaciones complejas, como las presentadas, es una poderosa fuente de aprendizaje para alumnos y profesores. Éstos descubren las ideas que sus alumnos tienen con respecto al azar y a aquéllos se les brinda la oportunidad, jugando, de ir construyendo y reconstruyendo una red de conocimientos apropiada para navegar por el mar del azar. En cualquier caso, ¡siempre hay sorpresas y lo pasan bien!