Por un enfoque holístico en la enseñanza de las Matemáticas

Pere Mumbrú i Rodríguez

Resumen

Frecuentemente damos mucha importancia en nuestras aulas al trabajo con problemas y ejercicios rutinarios. De este modo escondemos facetas muy importantes de la actividad matemática.

Sugerimos la conveniencia de un enfoque holístico en la enseñanza de las matemáticas, que nos permita aproximarnos a los métodos vinculados con los aspectos creativos y llegue a producir una imagen más realista de la naturaleza de las matemáticas. Este enfoque puede llevarse a cabo mediante conjuntos estructurados de problemas, de los cuales mostramos algunos ejemplos.

Introducción

En nuestras aulas ponemos demasiado énfasis en el trabajo sobre problemas y ejercicios rutinarios que son coherentes con una «pedagogía de la programación» que se guía por objetivos minuciosos y rígidos en exceso. De este modo escondemos aspectos muy importantes de la actividad matemática y, en cambio, enseñamos sobre todo respuestas automáticas que acaban configurando una imagen distorsionada de la materia. Así, por ejemplo, a los alumnos les parece natural que solamente sea el maestro quien proponga cuestiones o que estas cuestiones tengan una única solución correcta, y consideran que las matemáticas son una colección de definiciones y reglas que hay que memorizar.

Nuestra enseñanza suele también presentar cierta preferencia por los aspectos lógico-verbales de la actividad intelectual frente a los visual-imaginativos. Al distinguir entre componentes visual-imaginativos y lógico-verbales estamos siguiendo la terminología de la escuela soviética [1], pero podríamos hablar de pensamiento lateral y pensamiento lógico como hace De Bono [2], o del hemisferio derecho y del hemisferio izquierdo del cerebro como sugirieron algunos neurólogos de los años sesenta [3], o de los estilos cognitivos basados en imágenes o bien en palabras como prefieren Davis y Hersh [4]. En cualquier caso nos referimos a dos maneras de proceder que, si bien son complementarias, a menudo reciben un tratamiento excluyente. De modo esquemático podemos decir que forman parte de las componentes lógico-verbales: el uso de símbolos abstractos, el lenguaje formalizado, el cálculo, la lógica formal, los procedimientos analíticos y secuenciales... Mientras que formarían parte de las componentes visual-imaginativas: el dominio de las imágenes visuales, los aspectos intuitivos, la capacidad para detectar formas y regularidades, los modos de proceder sintético y holístico... Pues bien, solemos cultivar de manera casi exclusiva las componentes lógico-verbales, relegando a las visual-imaginativas. En cambio, según algunos autores «... los resultados de las investigaciones indican que (...) la mente opera a niveles óptimos cuando las demandas de los procesos cognitivos son de una complejidad suficiente como para activar ambos hemisferios (...) Educativamente esto significa que los problemas repetitivos, simples y sin interés (tales como la mayoría de los cálculos matemáticos), serían comprendidos de manera pobre, con poco beneficio para ambos hemisferios» [3].

La visión que ofrecemos suele ser también esencialmente pasiva. Ciertas habilidades y nociones no son objeto de enseñanza, encontrándose muy poco desarrolladas en los alumnos. Nos referimos, por ejemplo, a saber hacer demostraciones, a la capacidad para reconocer regularidades y estructuras o a la práctica de pequeñas investigaciones. De este modo el alumno medio desconoce el «espíritu matemático», creyendo que aprender matemáticas consiste exclusivamente en ser enseñado primero sobre ciertos métodos estándar, para luego ejercitarse utilizando estos métodos en la resolución de problemas tipo, básicamente mediante la imitación. Las creencias de este tipo están tan enraizadas en ellos que éste será uno de los principales obstáculos para cualquier cambio en el método de trabajo. Si proponemos un nuevo estilo metodológico en clase, deberemos controlar que los alumnos elaboren una nueva imagen de la actividad matemática. Si no, podríamos conseguir un efecto contrario al deseado, aumentando su sentimiento de incapacidad e inseguridad hacia la materia.

Mientras el tratamiento pedagógico de las matemáticas adolece de las deficiencias citadas, la actividad matemática se guía por pautas bien distintas. Para Lakatos [5], las matemáticas como disciplina cultural evolucionan como resultado de la interacción entre las observaciones empíricas y la formalización. La componente empírica es esencial para el proceso deductivo ya que, a menudo, las exploraciones previas determinan la solución deductiva del problema. Y, recíprocamente, la deducción permite descubrimientos inaccesibles a la observación (pensemos, por ejemplo, en la existencia de las curvas sin tangente en ningún punto). Para adecuarse a lo que son las matemáticas, el método de enseñanza ha de ser de naturaleza holística [6], global, contemplando las componentes inductivas y deductivas, las visual-imaginativas y las lógico-verbales, puesto que si los estudiantes no aprenden a dominar todas estas componentes y no aprenden a aprovechar su interacción, no podrán recoger los frutos de sus conocimientos. A nuestro entender la educación matemática, además de proporcionar el dominio de las nociones ya disponibles, ha de favorecer la aproximación a los métodos y a los intrumentos necesarios para la actividad matemática creativa.

Esta aproximación es posible realizarla mediante la presentación de conjuntos estructurados de problemas elementales convenientemente escogidos, cuya resolución no sea trivial, de modo que proporcionen a los alumnos un nuevo paradigma de la actividad matemática.

Escoger estos problemas no es una cuestión fácil en general, pero podemos encontrar contextos inicialmente sencillos, que nos permitan llevar a cabo un trabajo de un nivel muy rico desde el punto de vista matemático. A continuación veremos algunos ejemplos concretos que nos ayudarán a hacer más claro y explícito lo que estamos afirmando.

Buscando cuadrados

Comencemos con una de las cuestiones típicas que se plantean usando un geoplano [7]:

«¿Cuántos cuadrados distintos podemos construir en un geoplano 4 × 4?»

Nos introducimos en el problema con una fase de tanteo experimental que nos permita familiarizarnos con él. Los primeros cuadrados que aparecen son los que podríamos llamar *verticales.*

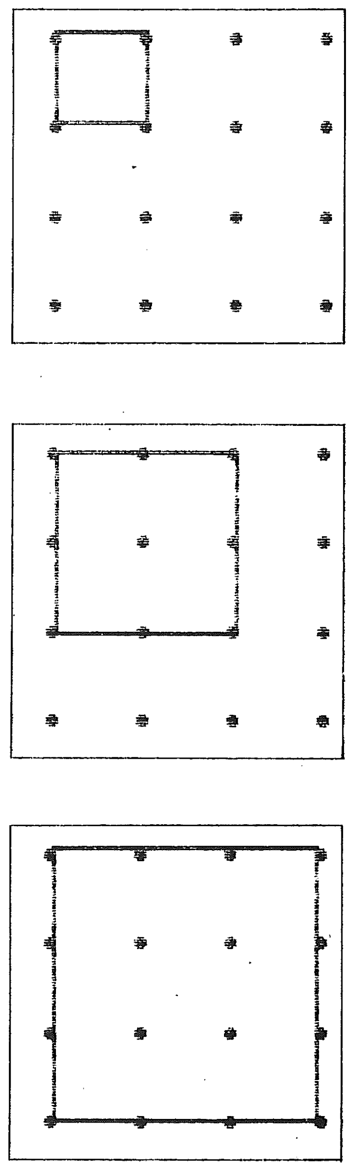


Figura 1

Constatamos en los alumnos unas primeras resistencias a reconocer cuadrados en posición distinta a la de los tres indicados. Éstas son probablemente resultado del aprendizaje condicionado, producido al mostar casi siempre en los ejemplos las figuras en una posición determinada.

Si llamamos su atención respecto al significado de *distintos* (¿cuándo han considerado que dos cuadrados son *distintos*?), llegaremos a explicitar que la igualdad la entendemos en el sentido de congruencia geométrica. De este modo un tipo de cuadrados queda determinado por una longitud, la del lado o la de la diagonal, o por su superficie.

Pero, ¿realmente los tres cuadrados *verticales* son todos los posibles? Todos están convencidos de que debe haber otros y fácilmente descubren los que bautizamos como cuadrados *inclinados.*

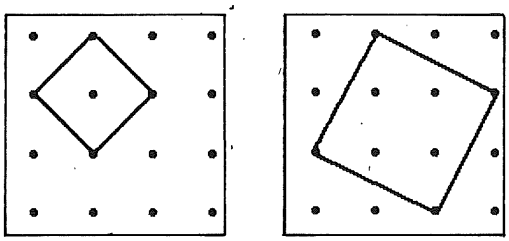


Figura 2

En total hemos obtenido cinco cuadrados; todos creen que no existe ninguno más y no sienten ninguna necesidad de demostrar que estos cinco son los únicos. Para ellos «es evidente». El problema hasta aquí ha resultado muy fácil y *pide un estudio más profundo*. La generalización natural aparece en consecuencia:

«*Si en un geoplano 4 × 4 hay 5 cuadrados distintos, ¿qué ocurrirá en uno $n \times n$?*».

Exploremos los primeros valores:

GEOPLANO	2x2	3x3	4x4	...
NUMERO DE CUADRADOS	1	3	5	

Figura 3

Una conjetura aparece inmediatamente. «En el geoplano 5 × 5 encontraremos 7 cuadrados y, en el $n \times n$, encontraremos $2n - 3$». Insistimos, «¿seguro?». «Si, es evidente.»

Pero al buscar todos los cuadrados en un geoplano 5 × 5, nos aparecen 3 cuadrados nuevos.

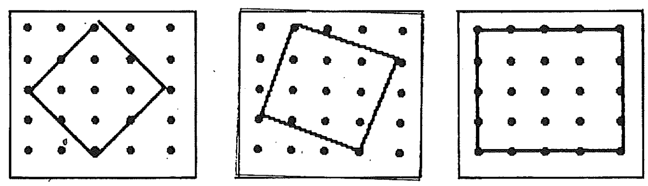


Figura 4

Nuestra conjetura no era buena, debemos buscar otra que se ajuste mejor a los hechos. Ampliamos un poco la tabla experimentalmente:

GEOPLANO	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	...
NUMERO DE CUADRADOS	1	3	5	8	11	15	...

Figura 5

Aunque algunos parecen encontrar cierto placer en ir tanteando y encontrando nuevos valores, no podemos continuar indefinidamente. Recapitulemos e intentemos sistematizar lo que sabemos hasta ahora.

Un cuadrado queda determinado por su diagonal. Dada una diagonal podemos construir la otra diagonal perpendicular a la primera y obtenemos el cuadrado.

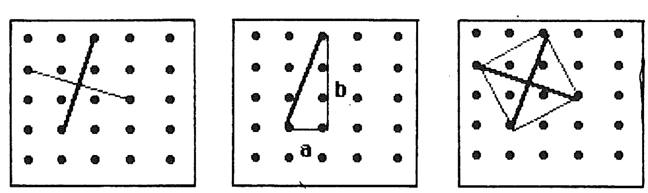


Figura 6

¿Cómo podemos encontrar todas las diagonales? Cada diagonal es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y b, siendo a y $b \leq n$.

(Podemos admitir que a o b son cero). Entonces las posibles diagonales serán las correspondientes a los valores de $(a^2 + b^2)^{1/2}$. El razonamiento nos parece plausible y, en consecuencia, calculamos el número de diagonales con longitudes distintas, que serán las correspondientes a los triángulos rectángulos isósceles, más las combinaciones de n elementos de dos en dos, es decir: $(n-1) + n \cdot (n-1)/2 = (n-1)(n+2)/2$. Pero si damos valores a n resulta que para un geoplano 2×2 obtendríamos 2 diagonales, para uno 3×3 obtendríamos 5, etc. Estos datos no coinciden con el número de cuadrados indicados en la tabla de la figura 3. ¿Cuál ha sido nuestro error? En el geoplano 2×2 las dos diagonales serían $2^{1/2}$ y 1, pero en cambio sólo podemos construir un cuadrado. De este modo se hacen necesarias más condiciones de compatibilidad sobre los segmentos para que el cuadrado resulte construible.

Nos replanteamos el problema y abandonamos el último punto de vista. Quizá la longitud de los lados, en lugar de las diagonales, nos proporcione una información más útil.

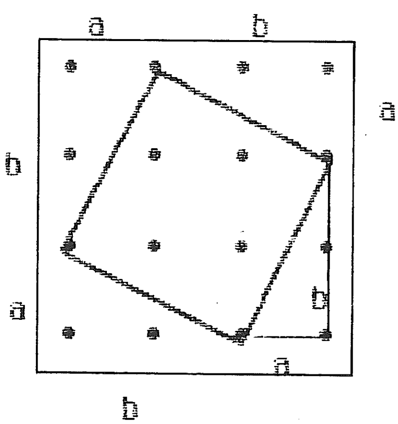


Figura 7

Cada lado también es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y b cuya longitud es entera. La longitud del lado será $(a^2 + b^2)^{1/2}$ y el área del cuadrado resulta $a^2 + b^2$. Cuando a o b son cero, el cuadrado es *vertical.* Así, todo cuadrado en el geoplano queda definido por un par de números (a,b).

¿Existe ahora, de modo parecido a lo que ocurría anteriormente, alguna acotación sobre los posibles valores de a y b? A lo sumo el cuadrado tendrá los vértices en la frontera del geoplano y por lo tanto $a + b < n$. Contemos el número total de posibilidades según sean los valores de a y b. Después de diversos intentos, alguien sugiere un procedimiento «regular».

~~(0,0)~~ (0,1) (0,2) ....(0, n-3) (0, n-2) (0, n-1) → n-1
(1,1) (1,2) .... (1, n-3) (1, n-2) → n-2
(2,2) ...... (2, n-3) → n-4
.... → + ...

total

Figura 8

El último valor dependerá de si n es par o impar. En concreto, el número total será $[n(n+2) - 4]/4$ si n es par y $[(n+1)^2 - 4]/4$ si n es impar.

Si damos valores, se satisfacen los casos de la tabla indicada en la figura 5. Pero al considerar $n = 8$ surgen nuevas dificultades. Hemos olvidado un detalle importante: puede haber dos cuadrados iguales aunque no correspondan a los mismos valores de a y b. Por ejemplo, los cuadrados (3,4) y (0,5) en un geoplano 8×8 son iguales.

De este modo aparece una nueva cuestión: «*¿cuántas representaciones distintas tiene un entero como suma de cuadrados?*»

Esto nos lleva a considerar un resultado de Teoría de Números [8], cuyo descubrimiento y demostración se alejan notablemente del nivel de dificultad en el que nos estamos moviendo. En concreto la propiedad afirma que: «el número de representaciones de un entero como suma de los cuadrados de dos enteros es cuatro veces la diferencia entre los divisores de n de la forma $4k + 1$ y los de la forma $4k + 3$». En realidad pues, lo que hemos hallado es el número de cuadrados distintos del tipo (a,b) que podemos hacer, considerando que son distintos cuando (a,b) no coincide en ambos.

Pero volvamos a la pregunta inicial. ¿Qué significa estrictamente «construir un cuadrado en un geoplano»? ¿El cuadrado de la figura 9 está construido en un geoplano? [9].

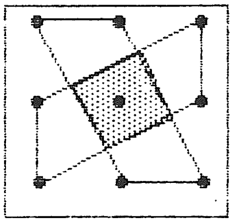


Figura 9

Ya sabemos que una clase de cuadrados queda determinada, de modo equivalente, por su diagonal, su lado o su área.

¿Cuáles son, en este caso, diagonal, área o lado?

Intuitivamente nos parece que el área puede brindarnos el punto de vista más abordable. Para calcular el área del cuadrado indicado, casi todos empezamos utilizando una estrategia de descomposición de figuras.

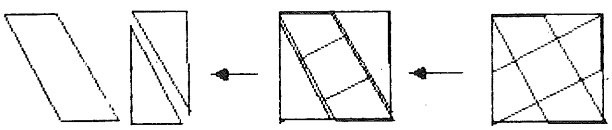


Figura 10

Obtenemos una primera observación: el paralelogramo y el rectángulo resultante tendrán la misma área que, a su vez, coincide con la mitad del área del geoplano. ¿Y a partir de aquí? ¿Estamos en un callejón sin salida?

Persistamos en las descomposiciones. Dos figuras llaman nuestra atención, dos tipos de triángulos rectángulos: unos, los T, que tienen por catetos el lado y la mitad del lado del geoplano, y otros, los t, cuya hipotenusa es la mitad del lado del geoplano.

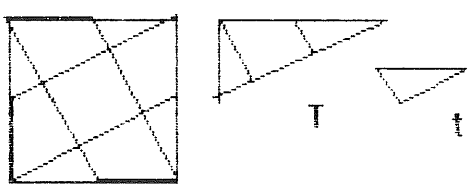


Figura 11

Al ser semejantes estos triángulos deducimos la relación existente entre sus áreas A_T y A_t. En concreto, $A_t/A_T = [(1/2) / (5/4)^{1/2}]^2 = 1/5$. A partir de este valor podemos calcular, por descomposición de figuras, la relación existente entre el área del geoplano y el área del cuadrado indicado. En particular, $1 - 4A_T + 4A_t = 1 - 4(1/4) + 4(1/5)(1/4) = 1/5$.

Pero, además de este modo de proceder tan analítico, ¿no podemos resolver el problema mediante una aproximación más global? Probemos con un nuevo enfoque. Si dibujamos la situación en un papel cuadriculado de 10×10, podemos calcular las áreas.

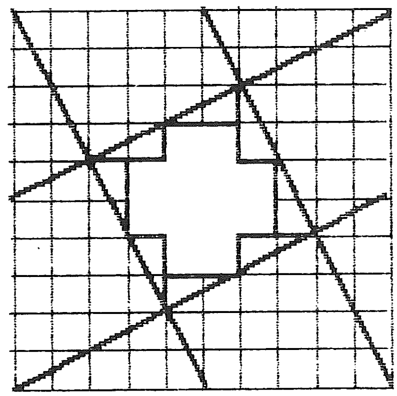


Figura 12

El área de la «cruz» central es 12, más 8 de los ocho triangulos rectángulos hacen un total de 20. Por otra parte, la superficie correspondiente a todo el geoplano sería 100; por lo tanto la superficie buscada es 1/5 del área total.

Pero este método no parece demasiado interesante, da la impresión de excesivamente particular. En efecto, con un cuadrado 12×12 ya no serviría.

La repetición de la figura que estamos considerando nos conduce a un método de resolución absolutamente intuitivo, casi un método «sin palabras».

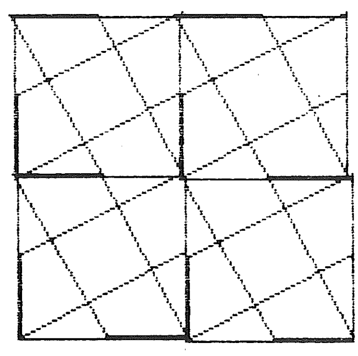


Figura 13

Agrupando convenientemente la partes de la figura implicadas, podemos ver que el cuadrado interior es 1/5 del geoplano.

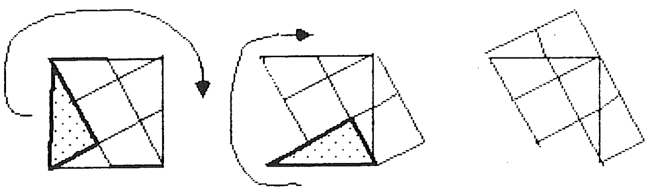


Figura 14

Este resultado lo hemos obtenido cuando trazamos líneas que unen un vértice con el punto medio de uno de los lados opuestos. Pero, *¿qué ocurre en general?*

De modo parecido a lo que dijimos antes, cada lado del cuadrado interior está formado por una línea que quedará caracterizada por dos números enteros positivos a y b, con $a > b$. Estos dos números determinan una dirección en una trama cuadriculada de puntos (un «geoplano infinito»). Observamos también que el otro valor que será relevante es la «distancia» entre las rectas paralelas. Es decir, situaciones como las siguientes serán equivalentes.

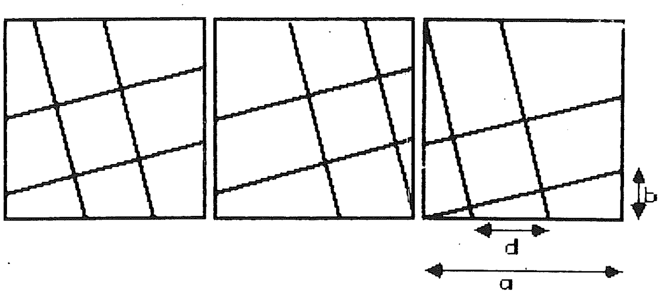


Figura 15

Para fijar ideas, consideremos que dos de las líneas que determinan el cuadrado pasan por los vértices de la izquierda del cuadrado formado por el geoplano $n \times n$, tal como indica el primer dibujo de la figura 15. Consideremos, por ejemplo, una situación de este tipo, con $n = 4$; $a = 3$, $b = 2$ y $d = 1$. Si utilizamos el último método propuesto aparecen dos cuadrados que, mediante un cambio de unidades, resultarán de lado a y lado b, siendo el área buscada $d^2/(a^2 + b^2)$ del total, es decir, $a^2\, d^2/(a^2 + b^2)$.

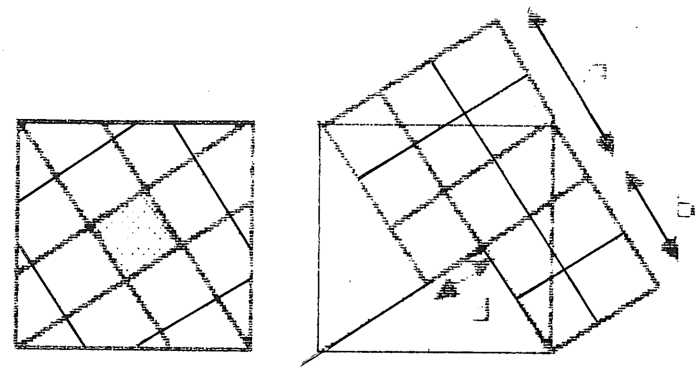


Figura 16

Fijémonos en que esta expresión es válida también para los cuadrados *verticales e inclinados*. Para los *verticales* tendremos $b = 0$ y $d = a$, de donde el área resulta a^2. Mientras que para los *inclinados,* es $b/(d - a) = a/b$ y el área resulta $a^2 + b^2$.

Al abordar el problema anterior mediante la descomposición de figuras, hemos utilizado modelos de papel para representar la situación. Efectuando los pliegues en el papel, surge muy a menudo un error (relacionado quizá con problemas de «lateralidad»), consistente en que uno de los pliegues se hace siguiendo una de las diagonales del cuadrado.

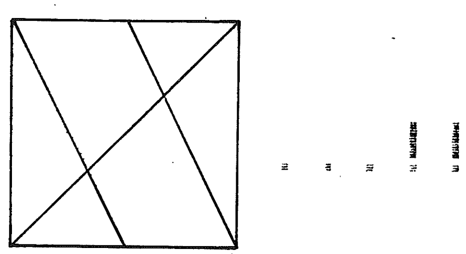
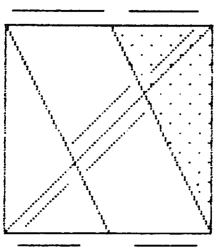


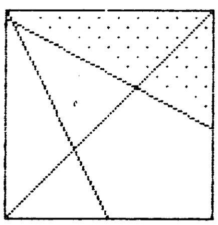
Figura 17

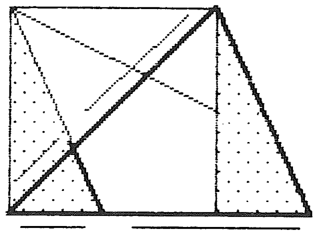
Algunos comentarios espontáneos de los alumnos nos plantean un nuevo problema: «*¿la diagonal queda dividida en tres partes iguales?*».

Surgen diversos tipos de argumentaciones que nos pueden permitir ilustrar desde los enfoques más analíticos hasta los más sintéticos y visuales. Veamos esquemáticamente una muestra de esta variedad de enfoques, agrupando las diferentes soluciones en dos clases, según utilicen la descomposición de superficies o las propiedades que se deducen de la semejanza de figuras planas.



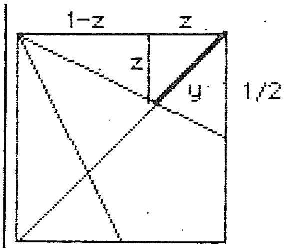
Del Teorema de Tales deducimos que las tres partes son iguales. Y coinciden con la participación que nos interesa.





1/3

Del Teorema de Tales deducimos que una de las partes es 1/3 del total.

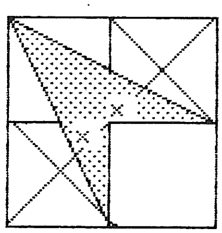


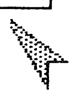
$(1 - z)/1 =$
$= z/(1/2)$

por lo tanto

$y = \sqrt{2}/3$

es la tercera parte de la diagonal.



El área de 

es 1/4 y descompone en suma de áreas:

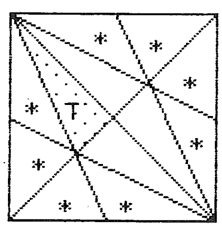
 + + 

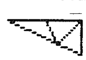
$1/4 = (1/2)(\sqrt{2}/2)$
$(2x) + 2(1/2) \cdot x \cdot$
$\cdot (\sqrt{2}/4)$

Por lo tanto

$2x = \sqrt{2}/3$

$2x = \sqrt{2}/3$



 descompone en tres triángulos equivalentes

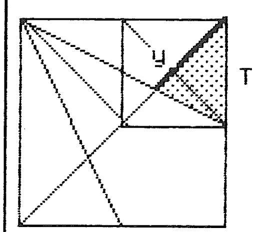
$A_* = 1/3 \cdot 1/4 =$
$= 1/12$

$A_T = (1/4)$
$(1 - 8/12) = 1/12 =$
$= (1/2) \cdot x \cdot (\sqrt{2}/2)$

Por lo tanto

$2x = \sqrt{2}/3$

es la tercera parte



$A_T = (1/2) \cdot y \cdot$
$\cdot (\sqrt{2}/4) = 1/4 -$
$- (1/2) \cdot y \cdot$
$\cdot (\sqrt{2}/2)$

Por lo tanto

$y = \sqrt{2}/3$

es la tercera parte de la diagonal.

A modo de conclusión

Encontrar el equilibrio adecuado en el grado de «dirección» de las actividades que proponemos en las clases de matemáticas es una de las dificultades importantes que aparecen en nuestro camino. Si están demasiado guiadas, las actividades llegarán a producir esencialmente conductas mecánicas; si lo están demasiado poco, producirán un bloqueo, una incapacidad de respuesta a las cuestiones planteadas. El hecho de que una situación resulte poco o muy dirigida, mecánica o adecuada para una investigación, no dependerá solamente las cuestiones planteadas en sí, sino también de una actitud mental del maestro hacia la materia. Actitud que podremos desarrollar en nuestros alumnos si nosotros mismos llegamos a estar impregnados de ella.

Al utilizar técnicas elementales, podemos concentrarnos en las estrategias usadas en la solución de los problemas que estamos considerando. Por lo tanto escogemos las situaciones de modo que, por ejemplo, se favorezca la capacidad de realizar conjeturas, contrastando su certeza y aceptándolas o refutándolas como plausibles o no; se descubran las regularidades matemáticas escondidas en una situación dada; se llegue a apreciar la necesidad de justificar la verdad de las conjeturas efectuadas, realizando las demostraciones al nivel conveniente; se avance en el estudio a través de reformulaciones sucesivas del problema original; etc. [10]. En suma, no se trata de evaluar la capacidad de los alumnos para resolver distintos tipos de problemas, sino de ofrecerles situaciones de aprendizaje en las que puedan aumentar sus habilidades, al tiempo que van adquiriendo una concepción más auténtica de la naturaleza de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

[1] VA. KRUTESKY. «Algunas características del pensamiento en escolares con escasa aptitud para las matemáticas», en Luria, Leontiev y Vigotsky. *Psicología y Pedagogía,* Akal, Madrid, 1979.

[2] E. DE BONO. *El pensamiento Lateral,* Paidós, Barcelona, 1986.

[3] JL. CRESWELL, C. GLIFORD y D. HUFFMAN. «Implications of Right/Left Brain Researh of Mathematics Educators», *School, Science and Math. 88,* 118-131 (1988).

[4] PJ. DAVIS y R. HERSH, *Experiencia Matemática,* MEC-Labor, Barcelona, 1988.

[5] I. LAKATOS, *Pruebas y Refutaciones,* Alianza, Madrid, 1982.

[6] G. GADANIDIS. «Problein Solving: The Third Dimension in Mathematics Teaching», *Math. Theacher. 81,* 16-21 (1988).

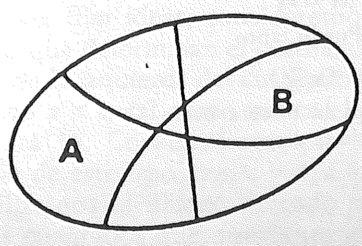
[7] K. HEDGER y D. KENT. «Given Two Points», *Math. Teaching. 84,* 19-21 (1978).

[8] GH. HARDY y EM WRIGHT, *An Introduction to the Theory of Numbers,* Clarendon Press, Oxford (1.ª ed., 1938) 1988.

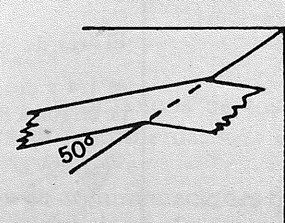
[9] S. CASEY y B. CLEMENS. «The Area of a Square», *Math. Teaching. 85,* 32-35 (1978).

[10] A. GARDINER. «Mathematical Method: does it exist?», *The Mathematical Gazette. 71,* 265-271 (1987).

Si cada una de las líneas divide la superficie del dibujo en dos partes iguales, ¿cuál es mayor, el área A o la B?, ¿o no es posible decirlo?



Una cinta de papel es doblada sobre una arista de un cubo tal y como se muestra en la figura.



El ángulo entre la cinta y la arista sobre una cara es de 50 grados. ¿Cuál será el ángulo entre la arista y la cinta sobre la cara contigua del cubo?

WELLS, D., *Can you solve these?,* Tarquin Publications, 1986.