SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 29

NOVIEMBRE 1998

SUMA 29
noviembre 1998

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.000 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Pilar Moreno es la autora de las fotografías que ilustran este número.

SUMA 29
noviembre 1998

La cuarta hora

EDITORIAL

EN EL PASADO mes de septiembre el MEC ha anunciado su intención de modificar el horario de Matemáticas en el segundo ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria, pasando a tener cuatro periodos lectivos semanales en cada uno de los cursos, lo cual supone un aumento de dos horas más en toda la etapa.

De momento esta ampliación del horario se aplicará únicamente en el ámbito de gestión del MEC. Desconocemos si será asumida por las comunidades autónomas con competencias educativas en las que no estuviese ya implantada una medida semejante, como es el caso de Cataluña. Sería imprescindible que en todas las comunidades se mejore el horario de Matemáticas y que aquellas que vayan asumiendo las competencias en educación tomen una decisión en este sentido lo más rápidamente posible.

Esta medida está incluida en el plan de mejora de enseñanza de las Humanidades. No deja de ser un tanto paradójico que de resultas del debate sobre las humanidades, en el que se criticaban los actuales planes por ser excesivamente «cientifistas», se incluya esta medida que afecta a las matemáticas. De todas las maneras, sea bienvenida.

Es una reivindicación sostenida desde hace un tiempo por amplios sectores del profesorado de nuestra área; ya en los seminarios que organizó la Federación en Jaca y en El Escorial se debatió ampliamente la conveniencia de ampliar el horario en una cuarta hora semanal y constituyó una de las conclusiones más nítidas de cada uno de ellos. No hay que olvidar que con la implantación del nuevo sistema educativo se disminuyó sensiblemente el tiempo dedicado a Matemáticas y que, a pesar de lo que algunos sostienen, no se rebajó en modo *alguno la «cantidad de contenidos» ni su dificultad, a lo que hay que añadir que las metodologías propugnadas en la reforma son más «lentas» que las que, con carácter general, se aplicaban con anterioridad. Además, a las Matemáticas se les exige socialmente bastante más que a otras materias y resulta lógico que tengan un tratamiento que, al menos, no sea discriminatorio de forma negativa en el reparto de la «tarta horaria».*

Aunque es obvio, no está de más señalar que esta ampliación del horario no debe suponer la inclusión de nuevos contenidos, sino que el tratamiento de los que se venían dando se debe llevar a cabo con mayor sosiego, con más profundidad y detalle, haciendo unas clases más activas, poniendo más énfasis en la resolución de problemas...

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 5-16

¿Qué es la geometría?*

Brian Bolt

ARTÍCULOS

ME GUSTARÍA empezar haciendo un bosquejo de mis propias experiencias en el aprendizaje y enseñanza de la geometría. A lo largo de mi educación secundaria me enseñaron la geometría como una materia separada de la aritmética y del álgebra, a cargo de profesores diferentes y no formando parte de una asignatura integra llamada matemáticas. Es interesante resaltar que la Mathematical Assotiation se creó a finales del siglo pasado en Inglaterra en un intento de mejorar la enseñanza de la geometría. Entonces, y cuando yo iba a la escuela, por geometría se entendía todo lo relativo a los teoremas de Euclides y lo que podía demostrarse a partir de ellos. Yo tuve que aprender alrededor de 70 teoremas y sus demostraciones pero mi madre cuenta que en su época el número era cercano a los 140 teoremas. Por suerte para mí, las demostraciones me resultaron sencillas y me gustaba el desafío de hacer los ejercicios que les seguían. ¿Pero para qué porcentaje de la población era esto cierto? ¡A mi hermana gemela no le resultaba fácil la típica tarea de aprender la demostración de un teorema de geometría para el día siguiente! Su método consistía, como el de la mayoría de los estudiantes, en aprender de memoria cada línea del teorema.

La realidad es que la geometría euclidea, tal como se enseñaba, era una materia muy sofisticada. Para un matemático en ciernes, que podía apreciar la estructura de la materia y la forma en que ésta se desarrolla deduciendo, a partir de un pequeño número de axiomas, una gran colección de propiedades sobre líneas, triángulos y círculos mediante un razonamiento exacto, era hermoso.

¿Pero qué relevancia tiene la geometría euclidea en la «vida real»? El pequeño curso de trigonometría que, en este nivel, formaba parte de la aritmética parecía tener más propósito y ser más pertinente.

* Texto de la conferencia pronunciada en Barcelona, en mayo de 1998, en el seminario «Innovación en la enseñanza de la geometría» en el marco del proyecto TIEM 98, patrocinado por el Centre de Recerca Matemàtica del Institut d'Estudis Catalans.

Traducción: Julio Sancho

En mis dos últimos cursos en la escuela secundaria la geometría dio un nuevo giro y fue denominada geometría con coordenadas en la que se olvidaba a Euclides y Descartes era el nuevo dios. Los pasos de las demostraciones eran ahora líneas de ecuaciones en las que las ideas de espacio se perdían en manipulaciones algebraicas. Una elipse ya no era una bonita figura sino una ecuación de segundo grado a la que conducía una pesada manipulación algebraica.

En la universidad, la geometría llegó a estar aún mucho más alejada del «mundo real» como en los temas de las formas cuadráticas y las transformaciones afines. El curso de teoría de grupos me dio nuevas intuiciones, así como un curso de cristalografía..., de hecho escribí un trabajo sobre patrones bidimensionales basados en el estudio de libros de diseños de papel pintado. Si hubiese vivido en esta parte del mundo no dudo de que habría sido sobre los mosaicos de la Alhambra.

Al dejar la universidad fui a enseñar a una escuela de chicos y descubrí que nada había cambiado desde la época en que yo era también un escolar excepto en que en los cursos más altos debía preparar a los chicos que querían solicitar becas para Oxford lo que incluía geometría proyectiva. Este era una tema nuevo para mí e hizo falta que me pusiera las pilas para poder anticiparme. Pero aunque el tema resultaba precioso, me preguntaba por su pertinencia ya que no parecía tener relación con el mundo de más allá del aula.

De momento espero que comencéis a comprender mi cuestionamiento de gran parte de lo que enseñaba.

La geometría, de acuerdo con el *Cambridge Paperback Encyclopedia*, es «la parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las formas y el espacio, originalmente (como sugiere su nombre) de la Tierra. Los griegos desde alrededor del 300 a. C. desarrollaron la geometría sobre una base lógica, y muchos de los primeros resultados están recogidos en los *Elementos* de Euclides». ¡Euclides tiene mucho de lo que reponsabilizarse!

Lo que no dice esta enciclopedia es que las ideas se desarrollaron a partir del conocimiento obtenido por los antiguos egipcios midiendo las tierras inundadas de las llanuras del Nilo. Mucha de la geometría euclideana, que está basada en triángulos congruentes, se ocupa de cómo fijar las posiciones de unos puntos con relación a otros en el plano. Entonces, ¿por qué no usar eso como nuestra manera de acercarnos a la enseñanza de la geometría?

Afortunadamente para mí, en 1962 me invitaron a unirme a un equipo de profesores de matemáticas, muy competentes, para intentar diseñar un programa de matemáticas para la escuela y a escribir libros de texto como soporte del mismo, con lo que se trataba de acercar la materia al siglo XX. Esto acabó siendo conocido como el *School Mathematics Project* (SMP) y quizá ha llegado a ser el proyecto más influyente que se haya ideado nunca.

Mucha de la geometría euclideana, que está basada en triángulos congruentes, se ocupa de cómo fijar las posiciones de unos puntos con relación a otros en el plano. Entonces, ¿por qué no usar eso como nuestra manera de acercarnos a la enseñanza de la geometría?

Nos pusimos ante una hoja de papel en blanco y tratamos de contestar preguntas como:

- ¿Qué matemática es relevante enseñar a los chicos?
- ¿Cuál es el propósito de la educación matemática de los chicos?

Había muchos temas que hubiéramos querido incluir como la estadística, la programación lineal, la topología, los vectores, las matrices, los grupos... ¿Qué podíamos dejar fuera?

Pues bien, el tema menos apreciado por el 90% de nuestros alumnos era la geometría euclidea que ocupaba al menos el 40% del tiempo de enseñanza y que, dejando aparte algunos resultados básicos, parecía el menos relevante de los temas existentes.

Después de mucho discutir se decidió introducir la geometría usando las transformaciones: reflexiones, rotaciones, homotecias, transformaciones afines, etc. Nos inspiramos en una conferencia de Klein de 1872 en la que sugería que la geometría debía enseñarse como los invariantes de los grupos de las transformaciones en el espacio. Esto encajaba bien con nuestra visión global de las matemáticas y también con nuestra introducción del álgebra matricial que permite describir las transformaciones. Pero eramos prisioneros de nuestro pasado. Estábamos contentos por introducir las transformaciones de forma práctica, por el movimiento de las figuras sobre un papel, pero para atacar la demostración de todos los resultados debíamos estar familiarizados con la geometría euclidea. La experiencia pronto nos mostró que este nuevo enfoque, aunque fascinante para el equipo de profesores, era tan difícil para los alumnos como el viejo. Incluso probablemete era más sofisticado. Pero fue desde este punto desde el que yo empecé a ver la importancia del movimiento para apreciar el espacio. Llegué a interpretar la palabra geometría no simplemente como «la medida de la tierra» sino como «conseguir medir el espacio», esto es «entender las relaciones espaciales». Además creo que deberíamos ser conscientes de que para muchos de los alumnos sería bueno hacer conexiones entre las matemáticas y el mundo en el que viven siempre que sea posible. Una de las consecuencias de esto es que saqué a los alumnos de 11 años fuera del aula a medir terrenos de la escuela. Esto enseguida les ayudó a ver las medidas necesarias para determinar puntos con precisión.

Supongamos, por ejemplo, que una parte del terreno es aproximadamente como el cuadrilátero ABCD que se muestra en la figura 1. Es fácil clavar algunas cañas en un campo de deporte para representar cualquier forma que se quiera medir. El problema para los alumnos es decidir qué longitudes y ángulos es necesario medir para hacer con precisión un dibujo a escala de la forma dada.

Una vez que decidí que el papel tradicional de la geometría no era sostenible, empece a apreciar que lo que se necesitaba eran experiencias para que mis alumnos incrementaran su conciencia del espacio y del mundo en el que vivían.

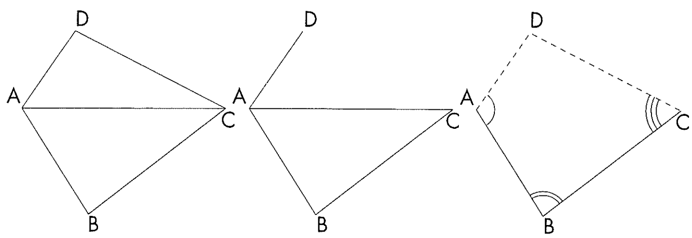


Figura 1

Para determinar los vértices del cuadrilátero hay muchas posibles alternativas, por ejemplo:

1. Medir los cuatro lados y una diagonal.
2. Medir tres lados y dos diagonales.
3. Medir AB, BC y CD, y los ángulos en B y C.
4. Medir AB y BC, y los ángulos en A, B y C.

Obsérvese como en cada caso es necesario hacer cinco medidas para determinar los cuatro puntos. En la práctica se pueden tomar otras medidas para verificarlas, pero teóricamente son suficientes cinco. Cuando lo hice en la escuela convencí al profesor de geografía para juntarnos en una serie de clases que dieron lugar a un valioso proyecto. Escribí un largo capítulo sobre agrimensura en el libro del SMP para los niños de 11 años basado en mi experiencia y vi que era un punto de partida ideal para un trabajo más abstracto. Pero para muchos de los profesores que después usaron el libro fue el capítulo que evitaron ya que no querían verse involucrados en actividades prácticas. ¡Encontraron muchas excusas, entre las que la favorita era que no tenían suficiente equipamiento! Pues bien, descubrí que un paso de una persona es una medida bastante buena para longitudes y organicé la clase en pequeños grupos para medir un terreno, con un miembro de cada grupo para ser aquel cuyo paso se usaba como un estándar. Posteriormente, la necesidad de un estándar común podía dar lugar a una útil discusión y el estándar conseguirse contando cuántos pasos da una persona en 100 metros. Para medir los ángulos usamos un trozo de papel sobre un tablero de dibujo colocado sobre un taburete de laboratorio que debía situarse en un vértice. En el papel, se dibujaban dos líneas en las direcciones de los otros vértices que forman el ángulo y se medía el ángulo determinado por las líneas con un transportador. Una vez se había hecho un trabajo de esta naturaleza era sencillo motivar a los estudiantes para hacer ejercicios de clase, más tradicionales, de dibujar polígonos dados algunas de sus longitudes y ángulos.

Un proyecto relacionado se enlazó con el deporte de la orientación en el campo en el que una persona debe seguir un itinerario yendo de un punto a otro conociendo la orientación y la distancia de un punto al siguiente. Estoa propuesta tiene muchas posibilidades que sólo están limitadas por lo dispuesto que esté uno a salir fuera de los confines de la clase. A los estudiantes, a los que preparo para ser profesores, les he hecho medir estanques, cuencas de canales, emplazamientos arqueológicos, excavaciones, viejos ferrocarriles y diseñar el plano de un aparcamiento en un trozo grande de terreno.

Una vez que decidí que el papel tradicional de la geometría no era sostenible, empece a apreciar que lo que se necesitaba eran experiencias para que mis alumnos incrementaran su conciencia del espacio y del mundo en el que vivían. Por ello, para el resto de esta conferencia he seleccionado unas cuantas ideas que he usado para conseguirlo.

Poliedros

Demasiado a menudo las lecciones sobre el espacio son bidimensionales y estáticas. Sólo dibujos lineales. Creo firmemente que se necesita tocar y manipular objetos reales para poder comprenderlos por completo. Muchos alumnos habrán construido un cubo alguna vez en su paso por la escuela y lo habrán hecho casi seguro a partir de una red con forma de cruz. Puede llegar a ser revelador para ellos darse cuenta que puede conseguirse a partir de otras redes. Es muy instructiva una investigación para buscar todos los hexaminós y el subconjunto de los que pueden plegarse para hacer un cubo. En la figura 2 pueden observarse algunos de los 11 hexaminós que forman una red de la que se obtiene un cubo.

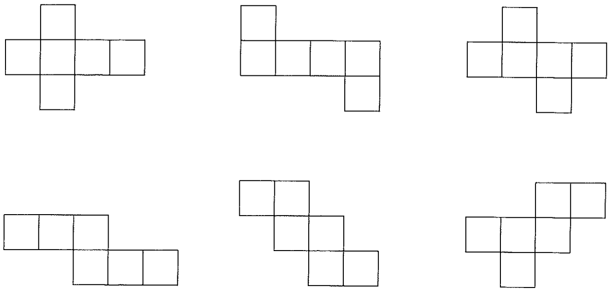


Figura 2

Una investigación que he usado frecuentemente con mis alumnos, que se estaban preparando para ser profesores de matemáticas, es buscar formas de cortar un cubo por la mitad y contruir las formas correspondientes. Debe observarse que esta actividad resultó valiosa tanto para los graduados en matemáticas como para los alumnos de la escuela primaria. No hay nada mejor que construir y manipular objetos reales.

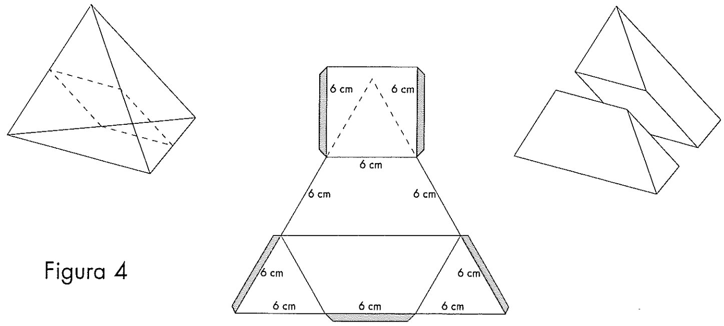


Figura 4

La fórmula del volumen de una pirámide no es un concepto fácil de entender, pero hacer un modelo en el cual haya 6 pirámides idénticas, o bien 3 pirámides idénticas, unidas para formar un cubo le da sentido. La figura 5 muestra el modelo que hago siempre con mis alumnos en el momento que necesitan saber el volumen de una pirámide. ¡Sí, toma su tiempo, pero bien vale la pena el esfuerzo ya que los alumnos tienen un modelo de lo que están haciendo y no sólo una fórmula aprendida como un papagayo!

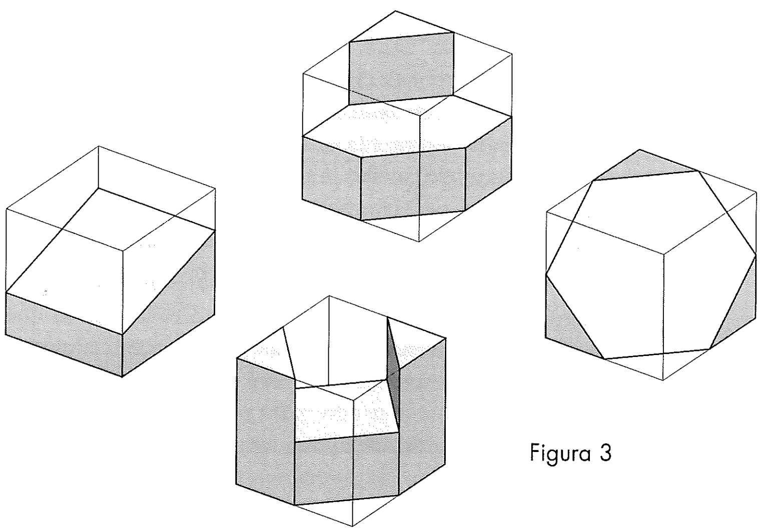


Figura 3

Una construcción que siempre tiene éxito, con cualquier grupo de edad, es construir las dos mitades de un tetraedro, e intercambiarlas entre los compañeros para tratar de poner las piezas juntas de nuevo. Los alumnos más capaces pueden hacer su propio desarrollo, pero tengo un desarrollo impreso sobre una cartulina (figura 4) para que los alumnos menos capaces puedan conseguir algún éxito.

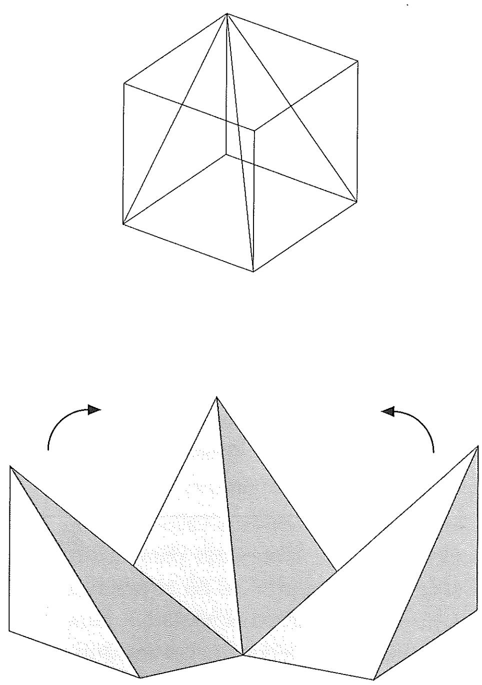


Figura 5

Otro método que he utilizado para construir poliedros es usar pajitas de beber para construir triángulos articulados, enhebrando un hilo elástico a través de ellas, y tensándolo antes de hacer un nudo en uno de los vértices. Lo uso dentro de un proyecto relacionado con la estructura de puentes, pescantes de grúas, andamios, cúpulas geodésicas y otras estructuras que dependen para su fortaleza de la rigidez de triángulos y tetraedros. La estructura tridimensional más simple que puede construirse de esta forma es el tetraedro y éstos pueder agregarse construyendo otros tetraedros sobre una o más caras. El cubo sólo se hace rígido si se pone una barra diagonal en cada una de sus caras cuadradas, pero el octaedro y el icosaedro son rígidos sin otro soporte ya que cada una de sus caras es un triángulo. Este método de construcción en el que las uniones de los vértices no son rígidas revela la importancia del triángulo en las estructuras de ingeniería civil. Una construcción que me gusta hacer de esta forma consiste en empezar con un octaedro y construir un tetraedro en cada cara. El modelo resultante puede verse como la intersección de dos grandes tetraedros o como un octaedro estrellado. Además los vertices de la estrella forman los vértices de un cubo (figura 6).

Perímetros y áreas sobre el geoplano

Los alumnos confunden a menudo los conceptos de área y perímetro y uno de los ejercicios que creé para ayudarles a superar esta dificultad fue hacer uso de un tablero de clavos o geoplano y preguntarles por todas las formas que pueden construirse en él cuyo perímetro sea 12 unidades. Los resultados pueden anotarse en un papel pautado y con cierta frecuencia motivo a los alumnos proponiendo el ejercicio como una competición en la que se consiguen puntos por soluciones que nadie hubiese encontrado. Depués de haber encontrado un cierto número de figuras puede pedírseles que las clasifiquen de acuerdo con sus áreas. (Ver figura 7).

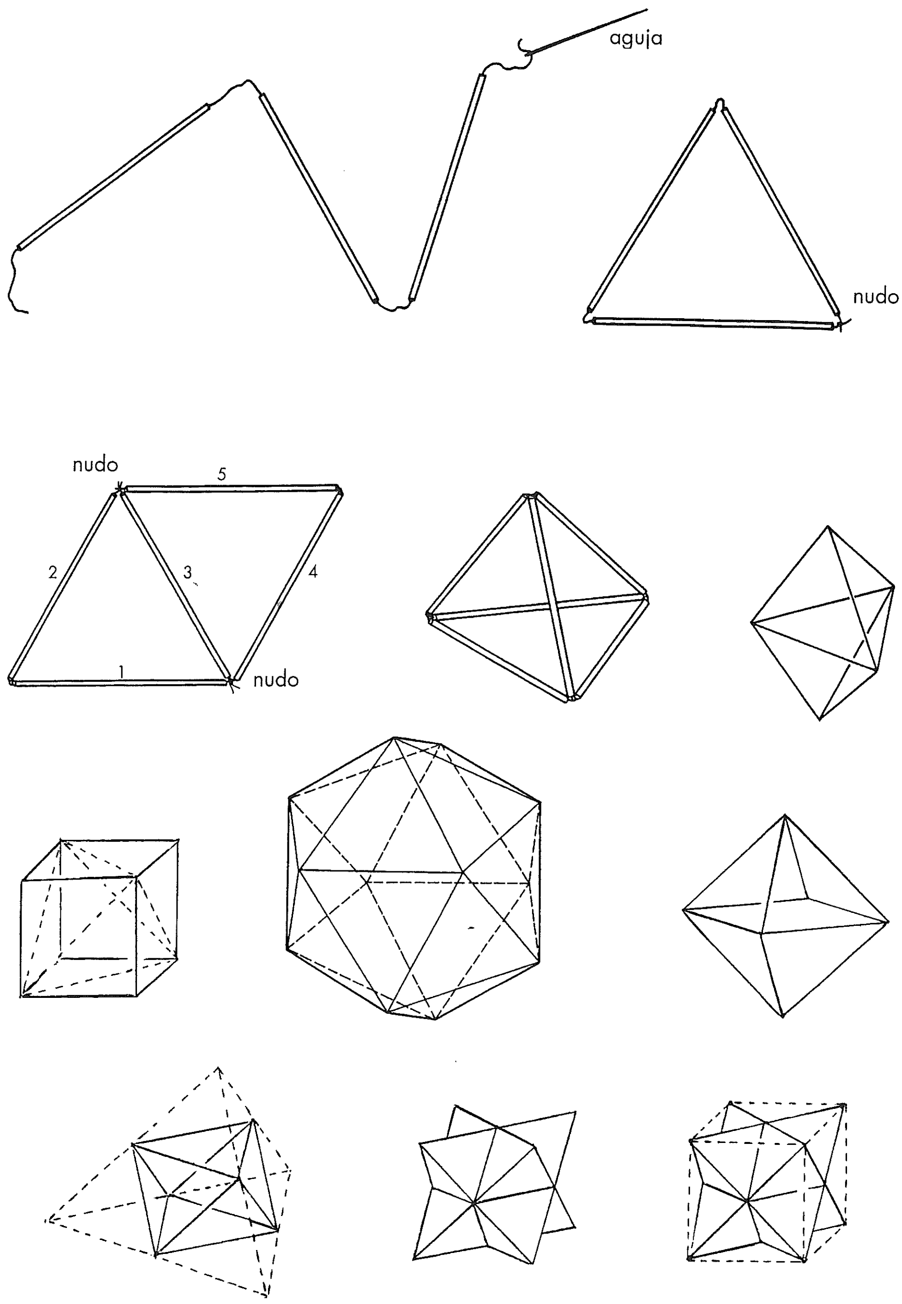


Figura 6

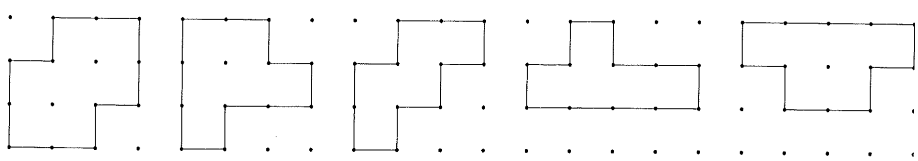


Figura 7

El hecho de que el triángulo rectángulo con lados de 3, 4 y 5 unidades tenga un perímetro de 12 unidades permite hacer una serie de figuras interesantes para extender las soluciones más allá de las figuras rectangulares simples. He aquí algunas de ellas.

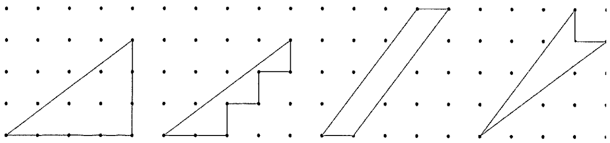


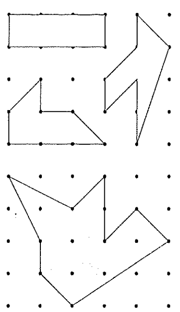
Figura 8

Descubrí que el geoplano es un valioso instrumento para la enseñanza y el aprendizaje. Otro sencillo ejercicio consiste en pedir a los alumnos que encuentren tantas figuras como puedan de 3 unidades cuadradas de área. ¡Cuando se lo propuese a un grupo de graduados de matemáticas, que se preparaban para ser profesores, algunos sólo pudieron encontrar dos figuras y se avergonzaron mucho cuando les conte que, el sábado anterior, entre mis jóvenes alumnos de un club matemático habían encontrado cientos!

¿Con qué frecuencia como profesores hemos dibujado nuestras figuras inclinadas?

En una etapa posterior los alumnos pronto se las arreglan para hallar el área de cualquier polígono que pueda construirse sobre un geoplano y adquieren una verdadera sensibilidad para las áreas que no que no está limitada al uso de fórmulas. Pero una fórmula que siempre merece la pena investigar es la conocida como teorema de Pick:

El área dentro de un polígono en un geoplano es igual al número de puntos interiores mas la mitad del número de puntos que hay en la frontera menos uno:



Figuras de 3 unidades de área:

$i = 0$
$b = 8$
$A = 0 + (1/2) \cdot 8 - 1 = 3$

Figura de 9 unidades de área:

$i = 5$
$b = 10$
$A = 5 + (1/2) \cdot 10 - 1 = 9$

Figura 9

¡Ahora quiero someteros a una sencilla prueba! Si tenéis un papel dibujad en él (i) un cuadrado, (ii) un triángulo isósceles, (iii) un triángulo rectángulo. Manos arriba aquellos que han dibujado las figuras de la forma siguiente:

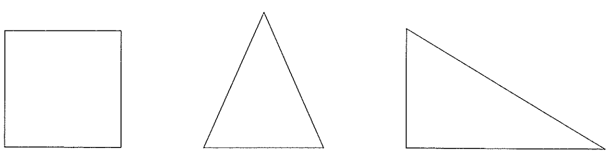


Figura 10

Más figuras

En la Unidad de Evaluación de Logros (APU) de UK, se examinó a miles de alumnos de diferentes edades y se descubrió, entre otras cosas, que los niños a menudo tienen dificultad para reconocer una figura a menos que esté de la «manera adecuada» como en la figura 10. ¿Qué falla aquí? ¿Con qué frecuencia como profesores hemos dibujado nuestras figuras inclinadas? Para contribuir a contrarrestar esto propongo la siguiente investigación: Buscar de cuántas maneras se puede colocar cuatro fichas sobre una retícula 5x5 de modo que sean los vértices de un cuadrado. Siempre digo a mi auditorio que hay tres niveles de respuesta a partir de los que puedo descubrir hasta dónde ha llegado su capacidad espacial de ver cuadrados. ¡Muy poca gente da todas las posibles maneras sin alguna ayuda! Se pueden encontrar 30 cuadrados que se apoyan en sus bases: 16 cuadrados 2x2, 9 cuadrados 3x3, 4 cuadrados 4x4 y 1 cuadrado 5x5. Además, hay 10 cuadrados a los que los alumnos llaman diamantes, 9 pequeños y 1 grande. Pero aún hay 10 cuadrados más que se pueden encontrar considerando los cuadrados en diferentes inclinaciones. El movimiento del caballo en el ajedrez es la clave para 8 de ellos.

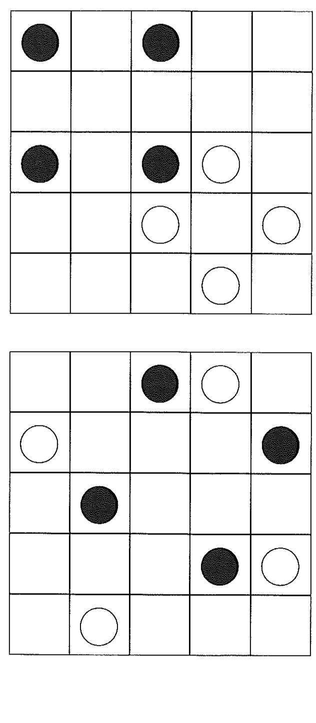


Figura 11

Cuando la investigación está completa las ideas pueden reforzarse:

a) Desafiando a los alumnos a buscar el mayor número de fichas que pueden colocarse en el tablero de modo que no haya cuatro de ellas formando un cuadrado.

b) Haciendo un juego para dos jugadores que, por turnos, añaden una ficha el tablero. Pierde el primero que al añadir una ficha forma un cuadrado.

Hay muchos puzzles matemáticos que exigen pensamiento espacial y yo he hecho siempre mucho uso de ellos. He aquí unos pocos para mostrar la gama de posibilidades:

Quitar cuatro cerillas de modo que queden exactamente cuatro triángulos equiláteros iguales. (Figura 12)

Dividir las figuras X e Y en dos piezas idénticas. (Figura 13)

Dibujar cuidadosamente las cinco figuras mostradas sobre papel cuadriculado. Recortarlas y con ellas mostrar cómo formar un cuadrado usando: (i) las piezas A, B, C y D. (ii) las cinco piezas. (Figura 14)

Ocho cubos unidad se juntan para formar un cubo 2x2x2. Mostrar que se puede pintar cada cubito de manera que puedan reordenarse para construir el cubo grande tanto rojo como azul. ¿Fácil? Ahora trata de colorear 27 cubos unidad para construir un cubo 3x3x3 tanto rojo, como azul o amarillo. (Figura 15)

Los movimientos del caballo sobre el tablero de ajedrez han sido investigados desde hace cientos de años. ¿Qué tal si descubrimos circuitos del caballo en estos tableros? En cada uno de ellos es posible encontrar un camino del caballo que pase por cada una de las casillas del tablero una vez y termine con el movimiento del caballo a la casilla inicial. Un recorrido como éste se denomina reentrante. (Figura 16)

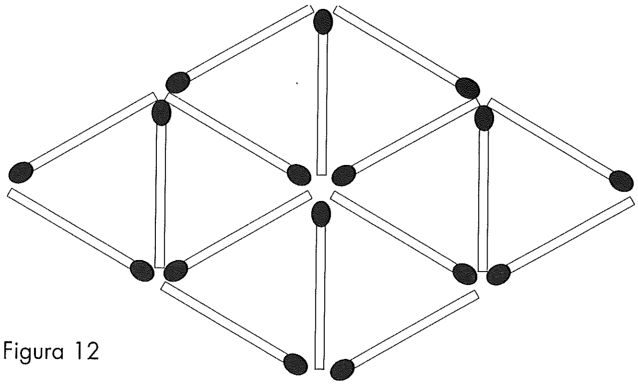


Figura 12

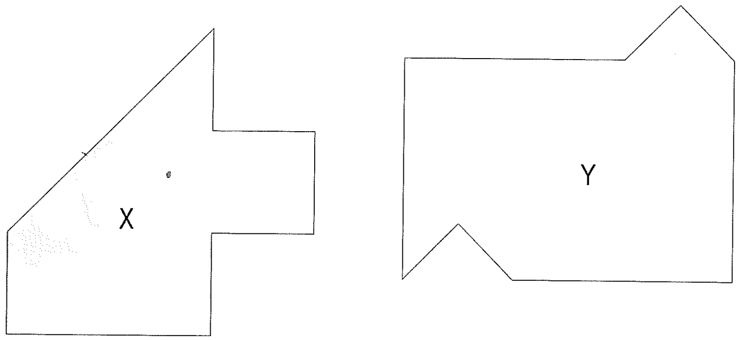


Figura 13

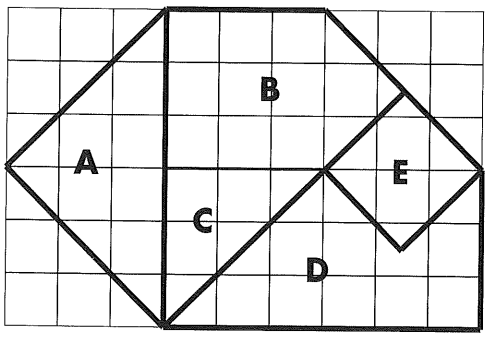


Figura 14

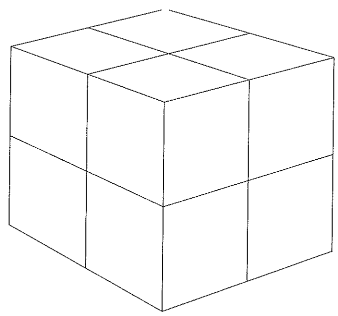


Figura 15

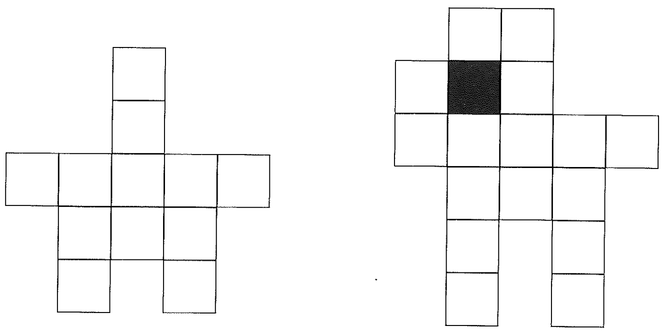


Figura 16

Mecanismos articulados

Hay muchos temas que me gustaría incluir en este artículo que tienen que ver con ideas espaciales: curvas de seguimiento; secciones cónicas; envolventes de curvas y superficies regladas; simetría; teselaciones; empaquetamiento en 2 y 3 dimensiones; curvas de anchura constante; redes y teoría de grafos, todos ellos vienen a mi mente. Pero no puedo acabar sin compartir algunas de mis ideas sobre la geometría de los mecanismos.

Se trata de un enfoque que he estado desarrollando desde 1966. Empecé cuando pasé de enseñar en una escuela para chicos a preparar a profesores de todos los niveles. La geometría que había estado desarrollando con el equipo del SMP me pareció bastante poco apropiada cuando me encontré trabajando una vez a la semana, junto a un grupo de mis alumnos, con 40 alumnos de 12 años de edad de baja capacidad. Fue entonces cuando decidí ver qué matemáticas podía encontrar en objetos como bicicletas, máquinas de coser y sillas plegables. Al principo me moví con precaución pero encontré una gran abundancia de ideas estallando ante mí, ideas que motivaban a mis alumnos y que les hacían más conscientes del mundo en el que vivían. ¡Para esto es para lo que debe servir la educación, no sólo para saber cómo pasar exámenes!

Desde muy pronto lo que me llamó la atención era la forma en que se usan cuatro barras articuladas en muchas situaciones. Como un cuadrilátero articulado, en su forma más simple, imaginemos cuatro barras atornilladas en sus extremos para formar un cuadrilátero de forma que las barras puedan girar.

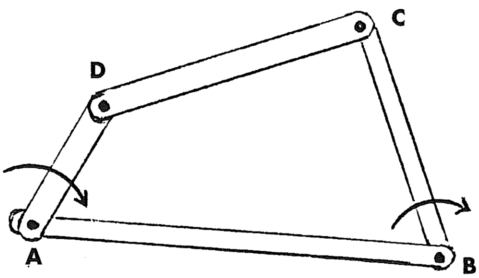


Figura 17

Para estudiar este tipo de articulación es imprescindible contruir un modelo y manipularlo. ¿Qué ángulo gira BC cuando AD gira 30°? ¿Qué puede decirse sobre la longitud de las barras para que formen un cuadrilátero? ¿Cuándo es posible para AD dar una vuelta completa alrededor de A?, y, ¿existe alguna situación en la que esto se use en la práctica? Mientras se manipula el cuadrilátero, cambia el área que encierra. ¿Cuál es el máximo?

Pero concentrémonos primero en el paralelogramo articulado y veamos dónde se usa y con qué propósito.

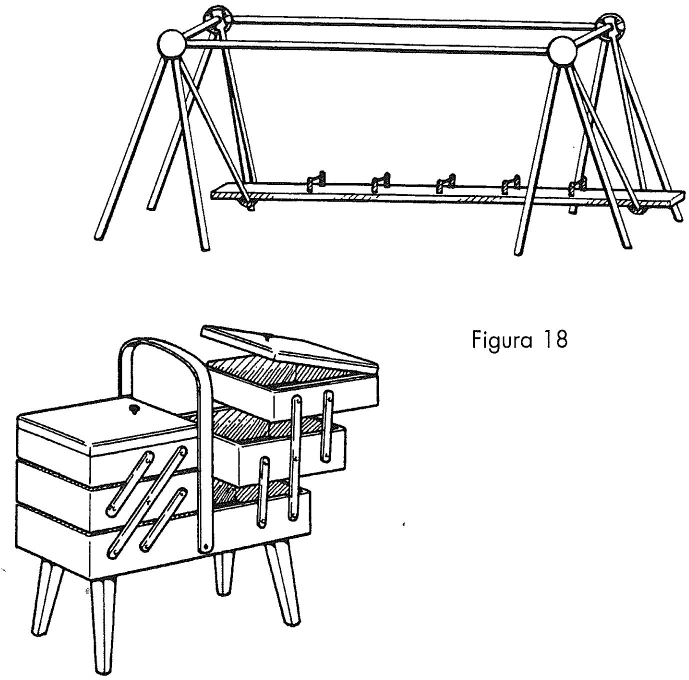


Figura 18

Fue entonces cuando decidí ver qué matemáticas podía encontrar en objetos como bicicletas, máquinas de coser y sillas plegables.

Un tipo de balancín, que se puede encontrar en los parques infantiles de Inglaterra, está claramente basado en un paralelogramo y cuando se balancea de un lado para otro el tablón que forma los asientos siempre permanece paralelo al suelo, aunque cualquier punto de él describe un arco de círculo. La caja de costura o de herramientas, que se muestra en la figura 18, tiene paralelogramos articulados formados por los cajones y las barras de metal unidas a ellos, de forma que siempre que se tira de los cajones para abrirlos éstos permanecen horizontales. He hecho que mis alumnos hagan modelos de esto usando tarjetas para las varillas y uniendo los finales con pasadores para sujetar papeles. Pronto aprendieron, a partir de la experiencia, que los cajones sólo se mueven paralelos a la base cuando los pasadores se colocan para que formen cuadriláteros con caras opuestas iguales.

Las balanzas de cocina, los granatarios de laboratorio y balanzas pesacartas, usan paralelogramos articulados. En estos casos es para asegurarse que los platillos de las balanzas permanezcan horizontales cuando se mueven arriba y abajo. Pero, ¿por qué los autocares, camiones y aviones, frecuentemente, tienen las escobillas de sus limpiaparabrisas montados sobre un paralelogramo articulado? ¿Por qué la suspensión de las ruedas de un coche de carreras consiste en un paralalogramo articulado? En cada caso, ello asegura que alguna parte del mecanismo se mueva paralela a otra, normalmente una parte fija. Los libros en relieve usan paralelogramos y es un ejercicio interesante, para los alumnos más jóvenes, hacer tarjetas de cumpleaños o de navidad que tengan efectos de relieve. Las «barquillas» de la parte superior de los elevadores, usados para arreglar alumbrado público, no vuelcan ya que usan paralelogramos articulados. Sin importar cómo se muevan los brazos del elevador, la barquilla siempre permanece horizontal. La mejor forma de comprender lo que pasa es construir modelos, como los que se muestran en la figura 19, que puedan moverse.

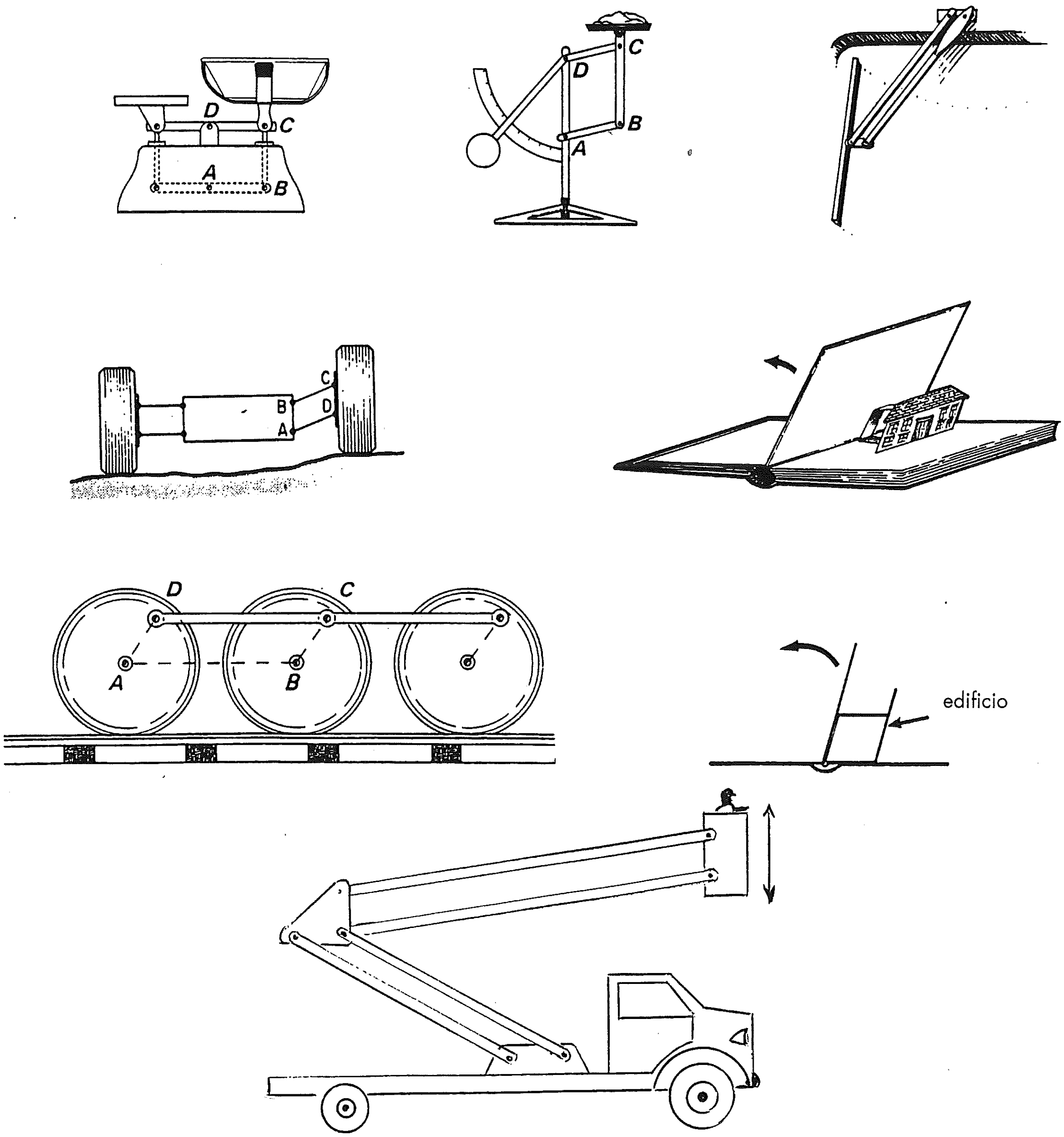


Figura 19

A continuación vamos a ver el trapecio articulado. En realidad es un nombre poco adecuado para la articulación ya que se trata tan sólo de un trapecio en su posición de equilibrio. Inicialmente tuve conocimiento de ella cuando observaba cómo están diseñados los caballitos de juguete. O bien están construidos sobre listones curvos o usando, como se muestra en la figura 20, un cuadrilátero articulado. En el caballo de los parques infantiles el mecanismo está oculto bajo su cuerpo. Los topes de los postes A y B son puntos fijos en el espacio y desde ellos estan conectadas dos barras cortas al armazón del cuerpo del caballo. Cuando se empuja el caballo de izquierda a derecha, C empieza en un arco ascendente de centro B mientras que D lo hace en un arco descendente de centro A. El resultado es que DC se balancea y por tanto también lo hace el caballo.

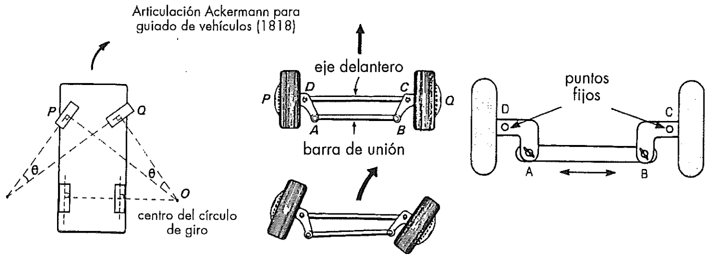


Figura 21

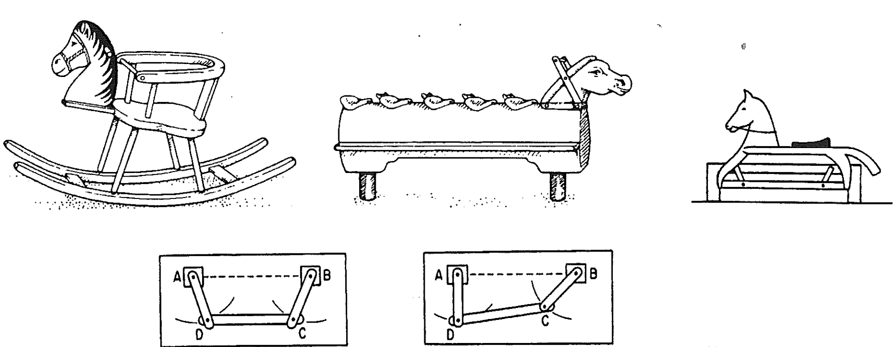


Figura 20

Considerado tan sólo como un mecanismo para un caballo de juguete, el trapecio articulado puede no ser demasiado interesante, pero en 1818 un ingeniero alemán vio en él la solución para dirigir coches tirados por caballos y hoy se usa en casi todos los vehículos de ruedas, desde un coche de juguete a un tractor, coche, camión o autobús. El problema que hay que resolver es asegurarse que al girar, las ruedas frontales se mueven en direcciones perpendiculares a las líneas que pasan por el centro del círculo de giro. Si no fuera así entonces las ruedas se arrastrarían lateralmente y pronto se desgastarían sus llantas. Ustedes lo habrán experimentado si la tracción de su coche no está adecuadamente ajustada. Esto significa que cuando se gira a la derecha entonces la rueda delantera derecha debe girar un ángulo mayor que la izquierda. Cuanto menor sea el radio de giro mayor será la diferencia entre los ángulos de las ruedas frontales. (Ver figura 21).

Incluso antes, en 1784, el ingeniero inglés James Watt usó este tipo de articulación para aproximarse a un movimiento rectilíneo. El problema que trataba de resolver era cómo guiar al vástago del pistón de un motor de vapor en línea recta fuera del cilindro, de manera que el cuello de la cabeza del cilindro no se desgastase demasiado rápidamente por la biela que conecta el vástago del pistón con el volante que tira de él lateralmente. Su solución parece muy simple y haciendo un modelo se ve cómo el punto medio de la corta varilla central traza una línea que parece recta hasta que se prolonga, que es cuando se le ve describir una delgada figura en forma de ocho. No obstante, este montaje se usó en máquinas de vapor de todo el mundo durante al menos dos siglos. (Figura 22).

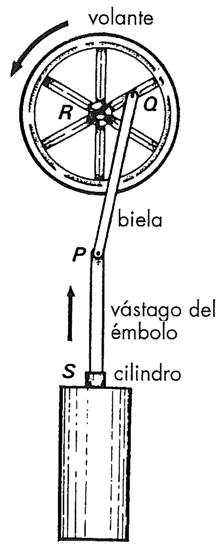
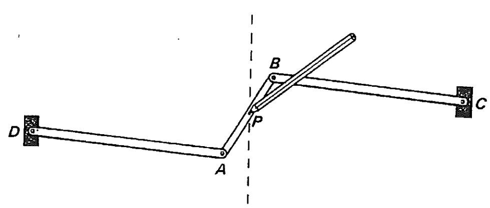
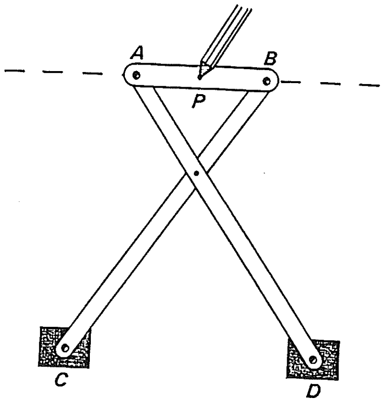


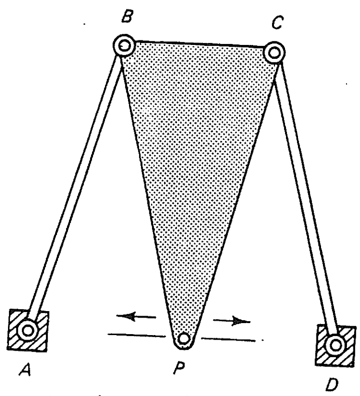
Figura 22



En 1850, el matemático ruso Tchebycheff creó una versión diferente de la articulación de cuatro barras con el mismo propósito. En su solución las longitudes estaban en razones 5:4:2. En 1860, Richard Roberts, otro inglés, ideó otra aproximación, que era incluso mejor, que de nuevo estaba en cuatro barras articuladas, ¡pero cuando se describe completamente el lugar geométrico del vértice del triángulo se da uno cuenta qué lejos queda de la línea recta!

Articulación Tchebycheff (1850)





Articulación Roberts (1860)

Figura 23

Cuadriláteros más generales aparecen como articulaciones, a menudo muy disfrazadas, en incontables situaciones. Tengo en casa un par de tijeras de podar cuyo diseño está basado en cuatro barras articuladas. A causa de ello se produce un deslizamiento a la vez que un movimiento de corte cuando se aprietan los mangos, obteniéndose un corte limpio. Los cochecitos plegables para niños, con frecuencia hacen uso de articulaciones entrelazadas como las que se muestran en la figura 24. ¡Cada fabricante tiene un diseño distinto de forma que se podría escribir una tesis sobre los diseños de cochecitos plegables para niños!

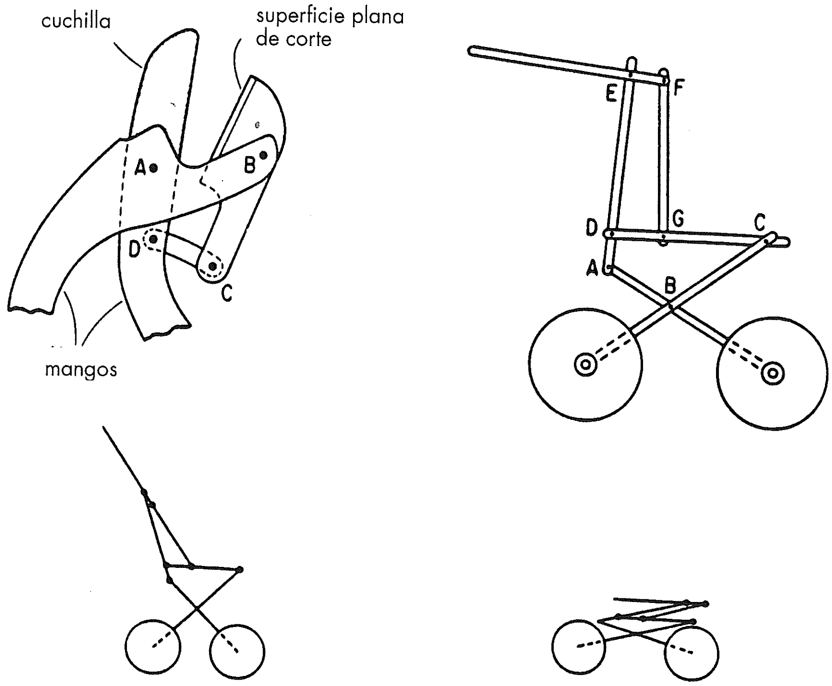


Figura 24

Pero en muchas ocasiones, el interés recae en el caso de que una de las barras de la articulación cruza sobre la opuesta y da una vuelta completa sobre uno de sus vértices.

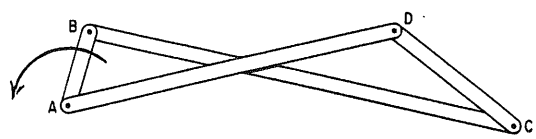


Figura 25

¡Un buen ejemplo es un cubo con pedal! Es necesario tener en cuenta donde están los pivotes y ver por qué es equivalente a cuatro barras articuladas. La máquina de coser a pedal es un buen ejemplo de una situación en la que una barra, unida al volante, da revoluciones completas. Es interesante examinar las longitudes relativas de las barras para que este giro sea posible y restringir el ángulo que gira el pedal a algo que el tobillo pueda soportar. Si se le da la vuelta a mi modelo, quizá se pueda ver que representa el pedaleo de un ciclista. Dos de las barras ahora la forman la pierna del ciclista. Si la potencia la aporta un motor que impulsa a la barra a hacer rotaciones completas, entonces la barra opuesta puede oscilar y servirá para impulsar un limpiaparabrisas o una lavadora. (Figura 25).

Sólo he tocado un aspecto de la geometría de los mecanismos pero hay muchos más que son acccesibles en el nivel escolar y que pueden relacionarse con el mundo real. En esta charla no he hecho ningún intento de construir una estructura geométrica tal como se ha enseñado tradicionalmente, o mencionado la palabra demostración. Desde mi punto de vista la geometría trata sobre la comprensión de relaciones espaciales. Es el área en la que más lugar tiene nuestro pensamiento creativo. Deseo haberos estimulado a haceros preguntas sobre la geometría que habeis enseñado y la que podríais enseñar. No estoy interesado en los futuros graduados en matemáticas, sino en la gran mayoría de alumnos que normalmente no estudian geometría después de los 16 años. Dicho esto, he descubierto que a los graduados en matemáticas, a los que he preparado como profesores, les motivó mucho el enfoque contenido en las ideas que os he presentado.

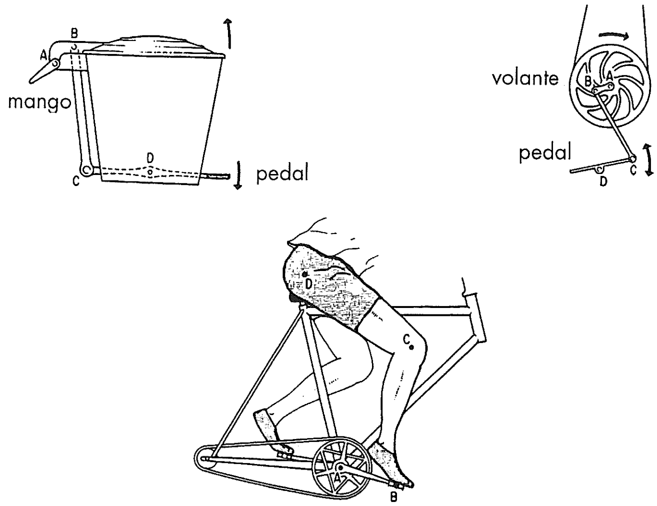
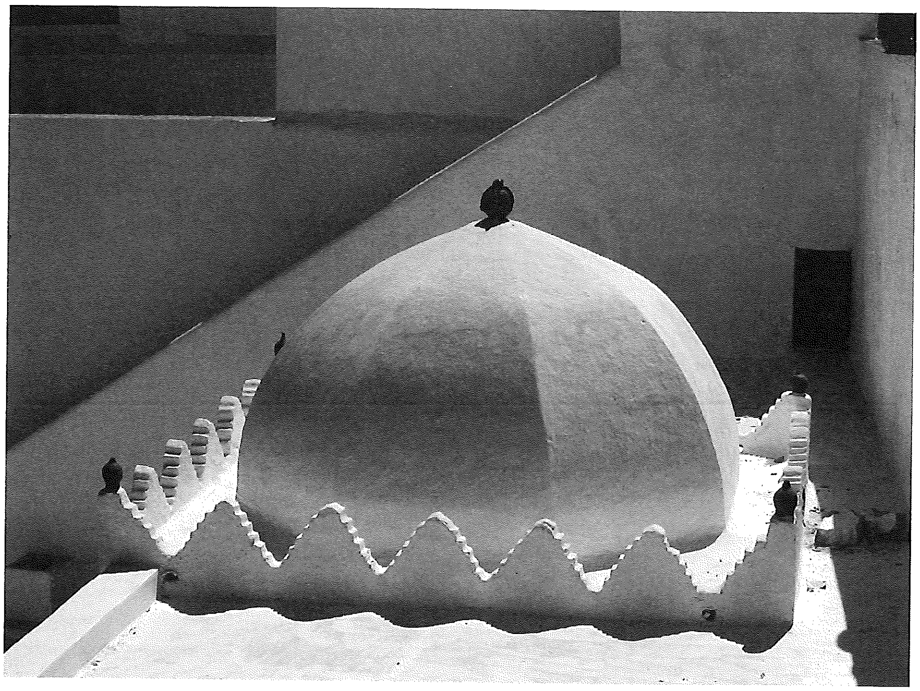


Figura 26

Brian Bolt
Universidad de Exeter.
Reino Unido



Marruecos
Foto: Pilar Moreno

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 17-27

Diagnóstico general del sistema educativo. Resultados en Matemáticas

José Antonio López Varona

A MEDIADOS del mes de marzo pasado la educación fue objeto de atención en diarios, revistas, radio y televisión, con dedicación de tiempo y espacio inusual para el mundo educativo. El motivo fue la presentación por el MEC del avance de los resultados de un estudio de evaluación realizado por el INCE (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación), y la consiguiente controversia y debate generado por los mismos. En este artículo se presentan los resultados de matemáticas de forma resumida, habiendo tomado como referencia el informe final, del que se extraen los datos.

El INCE ha realizado a finales del curso 1996/97 un estudio en los centros que imparten clases a alumnos de 14 y/o 16 años con la finalidad de diagnosticar el estado de la educación en los niveles correspondientes. Para ello se ha recogido y analizado información de alumnos, profesores, equipos directivos y familias. Las conclusiones de este estudio se han publicado en seis informes. Uno de ellos presenta los resultados de una prueba de rendimiento en lengua, matemáticas, ciencias, geografía e historia. En el presente artículo se exponen los resultados generales de matemáticas y algunos ejemplos de las preguntas que se han formulado.

El diagnóstico general del sistema educativo

En el año 1996, el INCE incorporó a su Plan de Actuación la realización de un Diagnóstico General del sistema educativo en los niveles no universitarios. La dirección y coordinación del diagnóstico corresponde al INCE en colaboración con las autoridades educativas competentes, MEC y comunidades autónomas con competencias plenas en educación.

El estudio ha sido estructurado de acuerdo a los siguientes objetivos o temas de interés:

1. Resultados escolares.
2. Planes de estudio y métodos de enseñanza.
3. Funcionamiento de los centros.
4. Función docente.
5. Sociedad y sistema educativo.

La primera parte del diagnóstico se ha llevado a cabo durante el curso 1996/97. El objetivo de la evaluación de

ARTÍCULOS

resultados escolares ha sido los alumnos de 14 y 16 años, alumnos que ese curso realizaban 8.° de EGB o 2.° de ESO por una parte y 2.° de BUP, 2.° de ESO, 2.° de FPI o 2.° de REM[1] por otra, respectivamente. La ESO ha sido el objetivo de la evaluación de los «Planes de estudio y métodos de enseñanza» y, de igual modo, los centros públicos y privados que imparten esa etapa han sido evaluados en su «Funcionamiento», atendiendo al ejercicio de la función directiva, la participación y la convivencia. El estudio de la «Función docente» también ha ido dirigido a la ESO, y se ha centrado en aspectos tales como el modo en que se enseña, la formación inicial y permanente del profesorado y la incentivación y prestigio social del profesorado. El análisis de «La sociedad y el sistema educativo» se ha centrado en las relaciones entre la familia y el sistema educativo y en las opiniones y valoración de éstas sobre él.

Para la realización del estudio se crearon cinco comisiones, una por cada objetivo o núcleo de interés, formadas por especialistas nombrados por las Administraciones educativas implicadas: el MEC y las CCAA de Cataluña, Galicia, Navarra, País Vasco, Comunidad Valenciana y, parcialmente, Canarias.

La aparición de los cinco informes de las comisiones, más uno global con los resultados más notables de los anteriores tuvo lugar a principios del mes de junio del presente año. Quienes quieran consultar el avance de resultados pueden acceder a la Web del INCE:

http//www.ince.mec.es,

donde también encontrarán información de otros estudios y evaluaciones llevados a cabo recientemente.

Resultados escolares

Muestras y ámbito territorial

Para la evaluación del rendimiento educativo, resultados, se aplicaron pruebas en varias materias. Por una parte, a 20.642 alumnos de 14 años, 8.° de EGB y 2.° de ESO, y a 25.893 de 16 años, 2.° de BUP, 4.° de ESO y 2.° de FPI, se les pasaron pruebas en Comprensión lectora, Gramática y Literatura, y en Matemáticas. Estos alumnos pertenecen a las comunidades mencionadas antes como participantes en el Diagnóstico a excepción del País Vasco, que sólo participó con alumnos de 14 años, y Canarias, que no participó con ninguno. A 3.374 alumnos de 14 años y 3.186 de 16 años matriculados en centros pertenecientes al ámbito del MEC se les aplicaron pruebas en Ciencias de la Naturaleza, Geografía e Historia. Finalmente, a 1.651 alumnos de 14 años y 1.753 de 16 se les pasaron pruebas de Dictado y Expresión escrita.

Las dos pruebas de matemáticas, para 14 y para 16 años, constaban de 45 preguntas construidas sobre contenidos y procedimientos comunes a los distintos currículos de cada edad. Cada pregunta se clasificó en dos dimensiones: contenido y operaciones cognitivas.

1 REM, Reforma de las Enseñanzas Medias, antiguo plan experimental que sólo se imparte en unos centros de Navarra.

Presentación de los resultados

Para presentar los resultados globales se ha construido una escala para cada materia, con un rango que va de 0 a 500, una media de 250 y una desviación típica de 50. La puntuación de un individuo en esa escala depende del número de preguntas que ha respondido correctamente y de la dificultad de las mismas. Dicha puntuación es una medida del nivel de dominio de la materia, verificándose que a mayor puntuación corresponde un mayor nivel de conocimientos. Para darle significado a las puntuaciones obtenidas, se han fijado en la escala unos puntos de referencia que llamaremos niveles de dominio o, brevemente, niveles: 150, 200, 250, 300, 350 y 400; y a cada uno de ellos se le ha asociado un conjunto de conocimientos y destrezas. El alumno cuya puntuación en la escala ha superado un determinado nivel posee las destrezas asociadas al mismo, pero no así los que tienen puntuación inferior.

En cada materia se ha construido una escala única, común a los alumnos de 14 y 16 años, de modo que se puede medir el progreso entre edades. Esto ha sido posible porque las pruebas de las dos edades llevan un número de preguntas comunes que permiten la equiparación de sus puntuaciones.

Para las preguntas individuales o conjuntos parciales de preguntas, como bloques de contenidos, los resultados se dan en términos de porcentajes de aciertos.

Las matemáticas

Las dos pruebas de matemáticas, para 14 y para 16 años, constaban de 45 preguntas construidas sobre contenidos y procedimientos comunes a los distintos currículos de cada edad. Cada pregunta se clasificó en dos dimensiones: contenido y operaciones cognitivas.

Las tablas 1 y 2 presentan los bloques de contenidos y las operaciones cognitivas así como el número de preguntas que les corresponde en cada prueba.

Resultados globales en matemáticas

La escala en que se presentan los resultados de matemáticas es común a 14 y 16 años y, como se ha dicho, tiene unos puntos de referencia, los niveles, que llevan asociados un conjunto de conocimientos, habilidades y competencias que expresan lo que conocen y saben hacer los alumnos cuya puntuación individual los alcanza o rebasa. La atribución de significado a los puntos de referencia se hace de forma empírica y una vez conocidos los resultados. Si un conjunto de preguntas es respondido correctamente por un alto porcentaje de alumnos cuyas puntuaciones individuales han alcanzado o rebasado determinado nivel, pero por un pequeño porcentaje de alumnos con puntuaciones del nivel inmediatamente inferior, podemos interpretar que esos alumnos cuya puntuación en la escala ha alcanzado o rebasado ese cierto nivel poseen los conocimientos y habilidades requeridos para responder las preguntas de ese conjunto.

	14 años		*16 años*	
Bloques de contenidos	N	%	N	%
Números y operaciones	16	35	11	25
Medida	9	20	7	15
Geometría	9	20	9	20
Análisis de datos, estad. y probabilidad	7	15	11	25
Álgebra y funciones	4	10	7	15
Total	45	100	45	100

Tabla 1. Bloques de contenidos de las pruebas de matemáticas para 14 y 16 años. Número y porcentaje de preguntas de cada bloque en cada prueba. (Fuente: INCE (1998): *Evaluación de resultados escolares*)

	14 años		*16 años*	
Operación cognitiva	N	%	N	%
Conocer	7	15	7	15
Utilizar algoritmos y destrezas básicas	13	30	9	20
Utilizar procedimientos complejos	16	35	16	35
Resolución de problemas	9	20	13	30
Total	45	100	45	100

Tabla 2. Operación cognitiva de las pruebas de matemáticas para 14 y 16 años. Número y porcentaje de preguntas de cada operación en cada prueba. (Fuente: INCE (1998): *Evaluación de resultados escolares*)

Nivel	Conocimientos, habilidades y competencias asociadas al nivel
150	• Maneja operaciones algebraicas sencillas con números algebraicos sencillos.
200	• Resuelve problemas sencillos de la vida cotidiana con operaciones algebraicas sencillas, estimaciones y redondeos y conceptos intuitivos de estadística.
250	• Resuelve problemas sencillos de la vida cotidiana en los que se encuentran relaciones de proporcionalidad numérica y porcentajes. • Conoce cuerpos planos y tiene nociones de la geometría del triángulo, semejanza entre figuras, etc. • Resuelve ecuaciones lineales sencillas. • Tiene algunas nociones de probabilidad y es capaz de estimarla en situaciones simples (aplicación de la Ley de Laplace). • Construye gráficas sencillas y puede interpretar tablas de frecuencias.
300	• Comienza a utilizar el lenguaje algebraico para resolver problemas prácticos. • Utiliza y opera con soltura los números fraccionarios en problemas de la vida cotidiana. • Maneja con soltura el concepto de proporcionalidad numérica y lo aplica en situaciones prácticas. • Comprende, conoce y estima longitudes y superficies de espacios y objetos, y maneja sus sistemas de medidas. • Comienza a utilizar la aproximación por exceso o defecto y posee nociones de redondeo.
350	• Maneja con soltura las representaciones de figuras, cuerpos y configuraciones geométricas utilizando adecuadamente las unidades de medida para resolver problemas de estimación de superficies y volúmenes, y realizar transformaciones geométricas. • Utiliza correctamente las potencias en la resolución de problemas. • Resuelve problemas sencillos de la vida cotidiana utilizando herramientas algebraicas básicas. • Conoce e interpreta conceptos de estadística básicos y puede estimar muestras en situaciones sencillas. • Domina la relación de proporcionalidad y utiliza con soltura las proporciones y porcentajes en la resolución de problemas complejos.
400	• Posee una alta capacidad espacial que le permite estimar la medida de superficies planas y volúmenes regulares. • Utiliza las herramientas algebraicas básicas que le permiten la manipulación de expresiones con símbolos para la resolución de problemas. • Interpreta y asigna probabilidades correctamente a fenómenos aleatorios complejos.

Tabla 3. Niveles y conocimientos, habilidades y competencias asociados. (Fuente: INCE (1998): *Evaluación de resultados escolares*)

Intervalos	14 años %	14 años % acumulado	16 años %	16 años % acumulado	Diferencia (%16) – (%14)
101-150	1	1	0	0	–1
151-200	27	28	10	10	–17
201-250	44	72	28	38	–6
251-300	24	96	39	77	15
301-350	4	100	20	97	16
351-400	0	100	3	100	3

Tabla 4: Porcentajes de alumnos de 14 y 16 años en cada intervalo de la escala, porcentajes acumulados y diferencia entre los porcentajes de 16 y de 14 años. (Fuente: INCE (1998): *Evaluación de resultados escolares*)

Nivel	14 años	16 años	Diferencia
150	99	100	1
200	72	90	18
250	28	62	34
300	4	23	19
350	0	3	3
400	0	0	0

Tabla 5. Porcentajes de alumnos de 14 y de 16 años que rebasan cada nivel y diferencias entre los porcentajes de 16 y de 14 años. (Fuente: INCE (1998): *Evaluación de resultados escolares*)

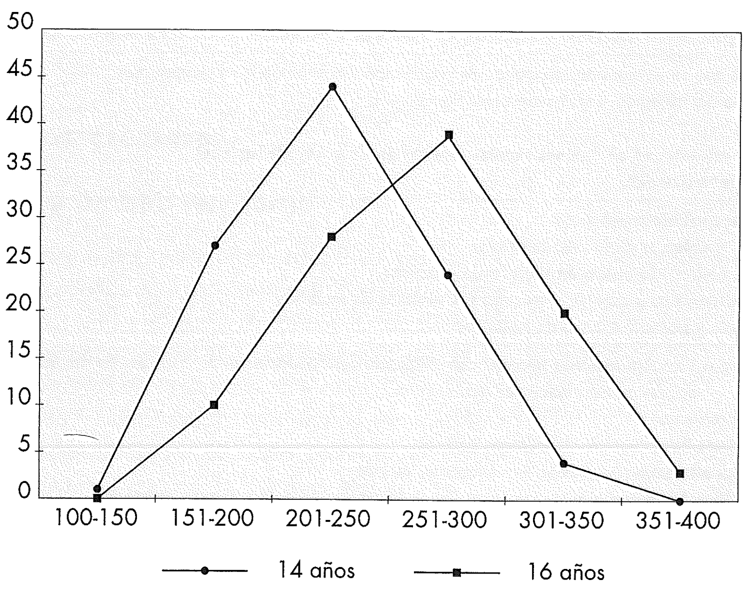


Gráfico 1. Polígono de frecuencias de las distribuciones de las puntuaciones de 14 y 16 años agrupadas por intervalos. (Fuente: INCE (1998): *Evaluación de resultados escolares*)

En la tabla 3 se enumeran los niveles de dominio y los correspondientes conocimientos, habilidades y competencias asociadas, tal cual los ha establecido la comisión de la evaluación y los presenta en el informe de resultados.

La puntuación media conjunta de los alumnos de 14 y 16 años es de 250, pues así se ha convenido, la de 14 años es 227 y la de 16 es 263. Se observa un progreso de 36 puntos de la escala al pasar de 14 a 16 años.

Dividiendo el rango de la escala en intervalos de longitud 50 y considerando el porcentaje de alumnos cuyas puntuaciones quedan en cada intervalo tenemos los resultados que presenta la tabla 4.

La lectura de la tabla 4 proporciona información sobre el porcentaje de alumnos que están en cada intervalo y, por ser los extremos de los intervalos los niveles de referencia, también tenemos con los porcentajes acumulados la proporción que no ha alcanzado cada nivel. La tabla 5 nos muestra los porcentajes de alumnos de 14 y 16 años que han rebasado cada nivel, así como las diferencias entre los porcentajes correspondientes a los alumnos de 16 años y los de 14. En dicha tabla se puede ver que para cada nivel el porcentaje de alumnos que lo rebasan es mayor en 16 años que en 14. La columna de diferencias muestra las diferencias de esos porcentajes, los porcentajes 16 años menos los de 14, y es una medida del progreso de los alumnos en cada nivel, al realizar los dos curso que van de tener 14 años a tener 16.

Las puntuaciones de los alumnos de 16 años son, en general, superiores a las de los 14. En el intervalo 151-200 están el 27% de los alumnos de 14 años y sólo el 10% de los de 16, mientras que en el intervalo 301-350 están el 4% de los alumnos de 14 años y el 20% de los de 16. Si se mira el gráfico 1, vemos el polígono de frecuencias de las puntuaciones de los alumnos de 16 años desplazado a la derecha de la escala con relación al de los de 14 años. En las puntuaciones bajas la poligonal de 14 años está por encima de la de 16, hay más porcentaje de alumnos de 14 años con esas puntuaciones, y en las altas sucede al contrario. De hecho ya vimos que también la puntuación media de 16 años es 36 puntos superior a la de 14.

Qué saben los alumnos y en qué proporción

Los niveles tienen asociados unos conocimientos, habilidades y competencias que nos indican lo que conocen y saben hacer los que rebasan esos niveles. Así el alumno que rebasa el nivel 200 es capaz de «resolver problemas sencillos de la vida cotidiana con operaciones algebraicas sencillas, estimaciones y redondeos y conceptos intuitivos de estadística». El 28% de los alumnos de 14 años no supera el nivel 200, y el 72% que lo supera, ver tabla 5, posee las competencias asociadas a él y, por tanto, a los niveles anteriores. Ese 72% de alumnos de 14 años posee además los conocimientos, habilidades y competencias del nivel 150, por ser anterior al 200. Como muestra la tabla 5, el 90% de los alumnos de 16 años rebasan el nivel 200, lo que cabe interpretar como que, en esos dos cursos más que han realizado estos alumnos sobre los de 14 años, un 18% de alumnos han adquirido los conocimientos y competencias correspondientes al nivel 200.

El 72% de los alumnos de 14 años, ver tabla 4, tiene puntuación inferior o igual a 250, por lo que sólo el 28% rebasa el nivel 250, tabla 5. En consecuencia, el 72% de los alumnos de 14 años no saben resolver problemas sencillos que implique proporcionalidad y porcentajes, no conoce cuerpos planos sencillos, ni relaciones entre sus elementos, no resuelve ecuaciones lineales sencillas,..., según se desprende de la asociación de niveles y competencias de la tabla 3. En este nivel es el 38% de los alumnos de 16 años los que no alcanzan esas competencias. Es un ejercicio ilustrativo, a la vez que sencillo, continuar el análisis a partir de los porcentajes de las tablas 4 y 5, y de las adscripciones a los niveles que presenta la tabla 3.

...el establecimiento de niveles con un conjunto de conocimientos, habilidades y competencias ligadas a cada nivel nos permite, como ya se ha visto, interpretar las puntuaciones desde el punto de vista de lo que conocen y saben hacer los alumnos, pero en modo alguno supone que esos conocimientos, habilidades y competencias se correspondan con las establecidas en el currículo para esos cursos o edades.

Hay que resaltar que el establecimiento de niveles con un conjunto de conocimientos, habilidades y competencias ligadas a cada nivel nos permite, como ya se ha visto, interpretar las puntuaciones desde el punto de vista de lo que conocen y saben hacer los alumnos, pero en modo alguno supone que esos conocimientos, habilidades y competencias se correspondan con las establecidas en el currículo para esos cursos o edades. En consecuencia, sólo cabe que el lector se forme un juicio subjetivo sobre si el logro de los niveles y, por tanto, de las competencias asociadas a ellos es lo que cabría esperar en función del currículo y la edad.

Resultados por bloques de contenidos

En la tabla 1 se muestran los bloques de contenidos en que se agrupan las preguntas de las pruebas y el número de ellas que corresponden a cada bloque. En la tabla 6 se dan los porcentajes de aciertos habidos en cada bloque de contenidos y en cada una de las pruebas, de 14 y 16 años.

El hecho de que unos bloques tengan porcentajes de aciertos diferentes a otros no quiere decir necesariamente que los alumnos sepan más de los bloques en que esos sean mayores. Puede ser consecuencia de ese hecho o, simplemente, porque las preguntas de unos bloques sean más fáciles que las de los otros.

Bloques de contenidos	*14 años*	*16 años*
Números y operaciones	46	54
Medida	40	39
Geometría	44	44
Análisis de datos, estad. y prob.	44	47
Álgebra y funciones	40	60

Tabla 6. Porcentajes de aciertos de los alumnos de 14 y 16 años por bloques de contenidos. (Fuente: INCE (1998): *Evaluación de resultados escolares*)

La prueba de 14 años parece haber resultado más equilibrada en sus distintos bloques, con porcentajes de aciertos muy similares y moviéndose entre 40% y 46%.

Los porcentajes de aciertos en la prueba de 16 años varían entre el 39% del bloque de medida y el 60% de álgebra y funciones. Ha resultado una prueba más heterogénea en cuanto a la dificultad de los bloques.

Ejemplos de preguntas

Un profesor de los cursos evaluados tiene una idea formada del currículo que se imparte y de los niveles de conocimientos que tienen sus alumnos. Ante una pregunta de su materia se forma una opinión sobre el grado de dificultad para los alumnos y en qué medida se ajusta al currículo. A continuación se exponen unas preguntas de cada una de las pruebas, para 14 años y para 16. No se dan más ejemplos de preguntas porque las restantes se van a usar en posteriores evaluaciones con el fin de comparar sus resultados con los de ésta.

Las 45 preguntas de cada prueba son de opción múltiple, constando de un cuerpo de texto con el enunciado y la pregunta, y cinco alternativas de las que una y sólo una es cierta. El alumno debe seleccionar la que cree cierta. Las únicas valoraciones posibles son: pregunta correcta, si se selecciona una sola opción y es la válida, y pregunta incorrecta, cuando se selecciona una opción incorrecta o más de una, se deja en blanco o es imposible determinar qué opción se ha seleccionado.

En cada ejemplo de los que se presentan a continuación aparecen la pregunta completa y sus cinco opciones, el porcentaje[2] de alumnos que ha seleccionado cada opción y, agrupados en la categoría de Nc (no contesta), el porcentaje de alumnos que dejan la pregunta en blanco, eligen más de una opción o no es identificable lo que han elegido. También se pone, aparte, la opción correcta o clave y el porcentaje de alumnos que la han seleccionado. A casi todas las preguntas le sigue una tabla con dos filas, en la primera aparecen ordenados los niveles de dominio y la puntuación media de la prueba y en la segunda fila se da el porcentaje esperado de aciertos para cada una de las puntuaciones de la primera fila. Esos porcentajes esperados son característicos de cada pregunta y vienen a determinados por su grado de dificultad.

En el primer ejemplo de la prueba de los alumnos de 14 años, para el nivel 150 el porcentaje esperado de aciertos es del 11%, para la media es de 17%, para el nivel 300 es 51%, etc. Por ello, entre los alumnos que tienen un nivel de dominio teórico de 150 se espera que respondan la pregunta correctamente en torno a un 11%, en torno a un 17% los que lo tienen de 227, y sobre un 51% los de 300. Los porcentajes esperados van creciendo con la escala, presentando un crecimiento brusco en un determinado tramo de la misma, que corresponde a los niveles de los alumnos con los conocimientos, habilidades y competencias requeridos para responder correctamente la pregunta. Se espera que las preguntas con porcentajes altos en los niveles más bajos de la escala sean acertadas por muchos alumnos, son fáciles, y al contrario con las que tienen bajos porcentajes esperados de aciertos en gran parte de la escala. Esa tabla es, pues, una radiografía de la pregunta que nos indica la dificultad de la misma y los conocimientos y habilidades necesarios para seleccionar la opción correcta.

2 Porcentajes ponderados de modo que cada alumno contribuya a ellos según el número de alumnos de la población a que representa. Así, la muestra nos proporciona estimaciones insesgadas de los correspondientes porcentajes poblacionales.

Ejemplos de la prueba de 14 años

Ejemplo 1

Edad: 14 años	8.° de EGB, 2.° de ESO	Clave: d (19%)
Un ángulo de un paralelogramo mide 40°. ¿Cuánto miden los otros tres ángulos?		% por opción
a) Todos 40°		a) 42
b) Uno 40° y cada uno de los otros dos 150°		b) 10
c) Uno 40°, otro 100° y el tercero 220°		c) 9
d) Uno 40° y cada uno de los otros dos 140°		**d)** 19
e) Uno 40°, otro 120° y el tercero 200°		e) 12
		Nc 8

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	11%	13%	17%	23%	51%	83%

Ejemplo 2

Edad: 14 años	8.° de EGB, 2.° de ESO	Clave: a (48%)
La publicidad en un periódico cuesta en proporción al área que ocupa. Si un anuncio de 5 cm por 8 cm cuesta 2.000 ptas, ¿cuánto costará otro de 6 cm por 10 cm?		% por opción
a) 3.000 ptas. b) 2.500 ptas. c) 2.400 ptas. d) 2.000 ptas. e) 4.000 ptas.		**a)** 48 b) 18 c) 16 d) 3 e) 11 Nc 4

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	21%	32%	43%	56%	82%	95%

Ejemplo 3

Edad: 14 años	8.° de EGB, 2.° de ESO	Clave: e (77%)
El bote de 3 pelotas de tenis cuesta 540 pesetas. ¿Cuántos botes compraremos con 2.000 pesetas?		% por opción
a) 5 b) 7 c) 12 d) 9 **e)** 3		a) 5 b) 3 c) 8 d) 5 **e)** 77 Nc 2

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	47%	68%	78%	85%	94%	98%

Ejemplo 4

Edad: 14 años	8.° de EGB, 2.° de ESO	Clave: c (37%)
Federico tiene una huerta con 3 parcelas iguales en las que ha sembrado tomates, ajos y lechugas. Hoy ha regado solamente la mitad de la parcela de tomates. ¿Que parte de la huerta ha regado?		% por opción
a) 1/2 b) 1/3 **c)** 1/6 d) 2/3 e) 2/6		a) 19 b) 28 **c)** 37 d) 10 e) 4 Nc 2

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	10%	15%	28%	53%	95%	100%

Ejemplo 5

Edad: 14 años	8.° de EGB, 2.° de ESO	Clave: a (71%)
El 10% de los alumnos de un grupo han obtenido un SB en la asignatura de matemáticas. ¿Cuál de los siguientes gráficos de sectores se corresponde con esta afirmación?		% por opción
a) El gráfico 2 b) Las dos gráficas c) El gráfico 1 d) Ninguno de los gráficos e) El gráfico 2 a doble tamaño		**a)** 71 b) 7 c) 9 d) 6 e) 4 Nc 4

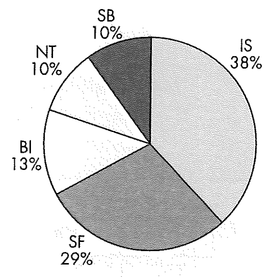


Gráfico 1

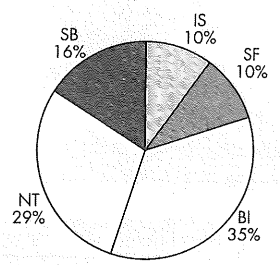


Gráfico 2

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	36%	60%	73%	82%	94%	98%

Ejemplo 6

Edad: 14 años	8.° de EGB, 2.° de ESO	Clave: c (50%)
La temperatura de una ciudad, medida a las 8 de la mañana es de 2°C sobre cero; de 8 a 10 la temperatura aumentó en 3°; de 10 a 2 de la tarde aumentó en 6°; de 2 a 5 no varió; de 5 a 7 descendió 4°; de 7 a 9 descendió 3 grados; y de 9 a 12 otros 7 grados. ¿Cuál es la temperatura a las 12 de la noche?		% por opción
a) 5° b) 0° **c)** –3° d) 3° e) –1°		a) 13 b) 10 **c)** 50 d) 12 e) 6 Nc 9

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	21%	23%	26%	32%	59%	86%

La pregunta que ha resultado ser más difícil entre estas seis es la del ejemplo 1. El porcentaje de aciertos es del 19%, y entre los alumnos con una puntuación en la escala de 227, la media de 14 años, el porcentaje de aciertos esperados es del 17%. Es una pregunta que requiere conocer figuras geométricas planas y las relaciones entre sus ángulos. Otra pregunta poco acertada ha sido la del ejemplo 4, con un 37% de aciertos. Requiere conocer el concepto de fracción, interpretarlo en una situación práctica y/o realizar operaciones con fracciones.

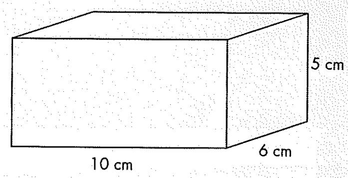
La que ha resultado más fácil, más acertada, ha sido la del ejemplo 3, con un 77% de respuestas correctas. Para responderla correctamente se requiere saber hacer divisiones enteras e interpretar el resultado. La del ejemplo 5 ha sido acertada por el 71% de los alumnos. Exige leer un diagrama de sectores.

Las preguntas de los ejemplos 2 y 6 han resultado de una dificultad media.

Ejemplos de la prueba de 16 años

Ejemplo 1

Edad: 16 años	2.° de BUP, 4.° de ESO, 2.° de FPI, 2.° de REM	Clave: d (21%)
¿Cuántos cm^2 de cartón se necesitan para construir una caja, con tapa, de dimensiones 5 cm, 6 cm y 10 cm?		% por opción
a) 140 b) 220 c) 250 **d)** 280 e) 300		a) 8 b) 7 c) 8 **d)** 21 e) 51 Nc 5



Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	8%	9%	14%	16%	30%	63%

Ejemplo 2

Edad: 16 años	2.° de BUP, 4.° de ESO, 2.° de FPI, 2.° de REM	Clave: b (51%)
¿Cuánto nos costarán unos pantalones que marcan en su etiqueta 5.880 pesetas si por estar en rebajas nos van a descontar 1/12 de su coste?		% por opción
a) 705 ptas. **b)** 5.390 ptas. c) 490 ptas. d) 5.392 ptas. e) 6.370 ptas.		a) 3 **b)** 51 c) 31 d) 9 e) 3 Nc 3

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	28%	30%	39%	45%	70%	94%

Ejemplo 3

Edad: 16 años	2.° de BUP, 4.° de ESO, 2.° de FPI, 2.° de REM	Clave: c (72%)
A Luis le han puesto una multa de 5.000 ptas. por no llevar el casco, si paga en el acto le hacen un descuento del 20% y si no, tiene un recargo del 30%. Como no lleva suficiente dinero encima, ¿cuánto tiene que pagar?		% por opción
a) 4.000 ptas. b) 6.000 ptas. **c)** 6.500 ptas. d) 3.500 ptas. e) 7.500 ptas.		a) 4 b) 5 **c)** 72 d) 8 e) 8 Nc 3

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	27%	47%	72%	78%	89%	96%

Ejemplo 4

Edad: 16 años	2.° de BUP, 4.° de ESO, 2.° de FPI, 2.° de REM	Clave: a (25%)
Tenemos 75 m de cuerda y la enrollamos alrededor de una lata cilíndrica de 10 cm de radio. ¿Cuántas vueltas daremos?		% por opción
a) 119 b) 150 c) 110 d) 100 e) 200		**a)** 25 b) 28 c) 15 d) 10 e) 9 Nc 13

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	13%	13%	14%	16%	40%	93%

Ejemplo 5

Edad: 16 años	2.° de BUP, 4.° de ESO, 2.° de FPI, 2.° de REM	Clave: d (57%)
¿Qué número está más próximo a 3'45?		% por opción
a) 3'456 b) 3'451 c) 3'4501 **d)** 3'450098 e) 3'44		a) 7 b) 6 c) 7 **d)** 57 e) 21 Nc 2

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	17%	27%	49%	57%	76%	92%

Ejemplo 6

Edad: 16 años	2.° de BUP, 4.° de ESO, 2.° de FPI, 2.° de REM	Clave: a (75%)
Una región de una población de 500.000 habitantes tiene un ingreso anual medio por persona de 1.500.000 ptas. ¿Cuál es el ingreso anual total de la región?		% por opción
a) 750.000 millones b) 180 millones c) 500.000 millones d) 140 millones e) 75.000 millones		**a)** 75 b) 3 c) 4 d) 3 e) 12 Nc 4

Niveles de dominio y puntuación media (227)	150	200	(227)	250	300	350
Porcentaje medio esperado de aciertos	36%	55%	74%	79%	88%	95%

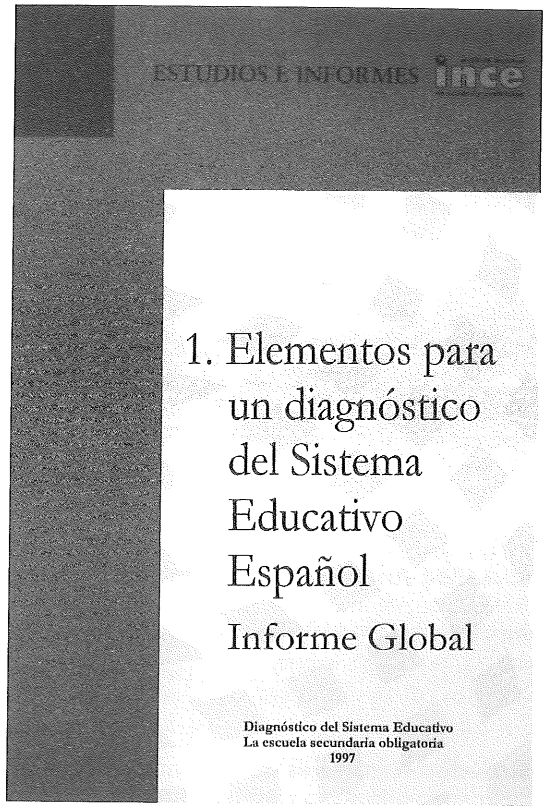
Las dos preguntas más difíciles son las de los ejemplos 1 y 4. Ambas requieren dominar conceptos de geometría y medida, y la segunda, además, el concepto e interpretación de la división. Las dos más fáciles son la 6 y la 3, por ese orden. La primera exige nociones de estadística descriptiva y la segunda trabajar con porcentajes. Las dos preguntas restantes tienen dificultad intermedia.

Las doce preguntas anteriores han sido seleccionadas para mostrar ejemplos con gran dificultad, dificultad media y poca dificultad. Estas son las únicas preguntas de las pruebas de matemáticas que se van a dar a conocer en un futuro inmediato, pues ya se dijo antes que el resto se reservan para otras evaluaciones. Aparecen en el Avance de Resultados y en la página Internet del INCE.

Los informes del diagnóstico

La parte del Diagnóstico del Sistema Educativo realizada hasta la fecha ha producido seis informes, uno con carácter de resumen de los resultados más notables y otro por cada una de las cinco comisiones creadas para atender los objetivos, ya especificados, en que se concreta el Diagnóstico en su conjunto. La lectura de estas publicaciones aportará información sobre el sistema educativo en su conjunto, y es de esperar que aporte argumentos y hechos al debate surgido, especialmente en las enseñanzas medias, a raíz del comienzo de la implantación generalizada del nuevo sistema. La bibliografía da las referencias de los seis informes.

J. Antonio López Varona
Instituto Nacional
de Calidad y Evaluación
(INCE)



Bibliografía

Diagnóstico del Sistema Educativo, 1977, que consta de los siguientes informes:

GARCÍA GARRIDO, J. y otros (1998): *Elementos para un diagnóstico del Sistema Educativo Español. Informe global*, MEC, Madrid.

ORDEN, A. y otros (1998): *Evaluación de los resultados escolares*, MEC, Madrid.

RODRÍGUEZ DIÉGUEZ, J. y otros (1998): *Planes de estudio y métodos de enseñanza*, MEC, Madrid.

BUJ GIMENO, A. y otros (1998): *El funcionamiento de los centros*, MEC, Madrid.

IBÁÑEZ-MARTÍN, J. y otros (1998): *La función docente*, MEC, Madrid.

GONZÁLEZ ANLEO, J. y otros (1998): *Familia y escuela*, MEC, Madrid.

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Xavier Vilella Miró
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Fidela Velázquez
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: Francisco Aguiar Clavijo
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Modesto Sierra Vázquez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez
IES José María Pereda. C./ General Dávila, 288. 39007-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 29-34

Algunas ideas preconcebidas sobre probabilidad

Agustín Muñoz Núñez

Todas estas borrascas que nos suceden son señales de que presto ha de serenar el tiempo, y han de sucedernos bien las cosas, ya que no es posible que el mal ni el bien sean tan durables y de aquí se sigue que, habiendo durado mucho el mal, el bien esté ya cerca.
Don Quijote de la Mancha

Dos ideas preconcebidas sobre probabilidad, bastante arraigadas en muchos de los estudiantes de secundaria, son: «lo raro es menos probable» y «el pasado condiciona el futuro». Fragmentos de sendas entrevistas con alumnos de COU, antes de iniciar el estudio del tema de probabilidad, ilustran estas concepciones.

ARTÍCULOS

LA ADQUISICIÓN del concepto de probabilidad ha sido con frecuencia objeto de estudio de la psicología, un investigador pionero y ya clásico en este tipo de estudios con niños y adolescentes fue Piaget, sus trabajos inspiraron y siguen inspirando la investigación sobre la adquisición de conceptos en la psicología constructivista. De esta tradición constructivista forman parte los estudios sobre *concepciones falsas*, *ideas preconcebidas*, o *conceptos previos* (traducciones libres de la palabra inglesa *misconceptions*) que tuvieron su origen en el estudio del aprendizaje de conceptos físicos elementales (Clement, 1983) (McCloskey, 1983) y que luego se han extendido a otras disciplinas como la biología o las matemáticas. La aportación principal de estas investigaciones es que los alumnos tienen ideas preconcebidas sobre muchos conceptos (la velocidad, la herencia biológica, la pendiente de una recta, etc.) antes de recibir instrucción formal en la escuela sobre ellos. Las ideas preconcebidas no coinciden con el concepto científico normalmente, pero nos informan de cómo piensan los alumnos y, a veces, de formas ya superadas de pensar sobre determinados conceptos que tuvieron vigencia en épocas pasadas –la física aristotélica o el ejemplo descrito en Clement (1983)–. No son pues lo primero que se les viene a la cabeza sino el resultado de un aprendizaje desde el sentido común motivado por la necesidad de explicar los fenómenos que tienen lugar en su vida diaria. En las aulas la versión científica o escolar de un concepto y las ideas preconcebidas sobre éste entran en diálogo, de acuerdo con la visión constructivista. Así, el aprendizaje se convierte en un proceso por el cual construyendo desde lo válido de las ideas previas del alumno éste aprende a descubrir las limitaciones de aquellas y a asimilar el concepto científico. Una forma en la que este proceso tiene lugar es cuando el alumno reconoce que sus intuiciones tienen contextos de validez limitados y que no son aplicables a contextos más generales (por ejemplo, pensar que los pies de las alturas no salen de un triángulo, válido sólo en triángulos acutángulos), o simplemente porque aprende a diferenciar contextos que antes para él eran el mismo (distinguir que hay dos tipos de movimiento, el uniforme y el uniformemente acelerado, por ejemplo).

Dentro de la corriente constructivista han surgido más recientemente investigaciones de carácter más didáctico, en cuanto que están más contextualizadas en lo que se refiere a los contenidos de los experimentos de los estudios (próximos al currículo escolar) y también, a veces, en cuanto a la metodología que es menos «tipo laboratorio» y más consciente de factores que entran en juego en las aulas como el lenguaje, la cooperación o comunicación entre alumnos. Una recopilación interesante de estudios en Educación Matemática en esta línea aparece en Glasersfeld (1991); este artículo adopta la metodología de análisis de entrevistas presente en la mayoría de ellos.

El presente trabajo pretende identificar algunas ideas preconcebidas típicas observadas en alumnos de COU que no han estudiado probabilidad antes, pero que tienen, como es de esperar a estas edades, un concepto de ésta formado por la experiencia. Para ello, mantuvimos entrevistas con estudiantes en las que se les plantearon dos problemas de probabilidad bastante representativos de los conceptos que forman parte del currículo del tema de probabilidad: los sucesos equiprobables (primer problema) y la independencia de sucesos (segundo problema). Estas entrevistas se realizaban antes de la introducción del tema de probabilidad, se trataba por parte del entrevistador de intervenir lo menos posible, pero no eran completamente abiertas pues éste pretendía que dijeran por qué creían que su respuesta era correcta, y de este modo tratar de valorar el arraigo de las concepciones identificadas, viendo si estaban convencidos de lo que decían y hasta qué punto las podían apoyar con alguna explicación. A lo largo de este artículo nos referiremos a estas ideas preconcebidas también como concepciones o intuiciones.

La probabilidad dentro del currículo

El tema de probabilidad que nuestros alumnos encuentran en COU supone una novedad, y así es percibido por ellos en comparación con otros contenidos de análisis o geometría que han estudiado hasta entonces.

Por un lado, los problemas de probabilidad aunque no tienen cálculos complicados, requieren mucha atención en el planteamiento, en entender el problema. Son menos rutinarios y a menudo recibimos la queja de los alumnos de que cada problema se hace de un modo distinto, de que no hay una fórmula. Por otro, es un tema donde por la propia condición de la probabilidad de ciencia que estudia fenómenos no deterministas, las conjeturas y estimaciones (incluso con un matiz de implicación personal) surgen de modo natural: «*Me* parece más probable que...», «*Yo* escogería...». Todos los alumnos tienen una idea, bastante arraigada, de lo que significa *ser más probable*, aunque ésta no coincida siempre con el concepto matemático. Sus intuiciones sobre lo que creen ser más probable chocan a menudo con lo que la teoría matemática nos dice y esto es muchas veces un elemento de motivación y curiosidad. Nuestra experiencia con las entrevistas mantenidas es que sus intuiciones les parecen tan evidentes que al ser puestas a prueba, enseguida, tras a veces una obcecación inicial en creerlo «porque sí», empiezan a proponer explicaciones con mucho convencimiento, que consisten en ejemplos de la vida diaria relacionados con el azar que comparan con el problema propuesto: «es como cuando...». En general, hemos encontrado alumnos con capacidad para razonar sobre sus intuiciones en una materia donde el bagaje matemático se reduce a lo mínimo, y donde priman los aspectos conceptuales sobre el cálculo. La probabilidad nos permite acercarnos a las matemáticas de un modo distinto al de otros temas del currículo, bien porque son más rutinarios (aprender las reglas de derivación, por ejemplo) o bien porque es difícil que los alumnos tengan ideas preconcebidas sobre ellos (el caso de los determinantes).

Todos los alumnos tienen una idea, bastante arraigada, de lo que significa ser más probable, aunque ésta no coincida siempre con el concepto matemático. Sus intuiciones sobre lo que creen ser más probable chocan a menudo con lo que la teoría matemática nos dice y esto es muchas veces un elemento de motivación y curiosidad.

Entrevistas e identificación de concepciones

Los fragmentos de la entrevista y su interpretación pretenden *ilustrar* distintas concepciones en los razonamientos de los alumnos y no suponen un análisis exhaustivo de los datos; orientaciones metodológicas sobre el análisis cualitativo de datos verbales pueden encontrarse en la obra ya clásica de Ericson (1985). Corresponden todos a una misma entrevista mantenida con un alumno durante hora y media. En todo ese tiempo la conversación no fue siempre tan lineal como puede parecer por esta selección de fragmentos: en muchas ocasiones había que volver a reformular el problema, a centrar la conversación, a asegurarnos de que lo había entendido, y el alumno por su parte volvía a razonamientos que parecía ya haber superado. Aunque no es posible esperar que las entrevistas con todos alumnos tomen siempre el mismo curso o que el alumno colabore del mismo modo, las mantenidas con otros estudiantes nos han permitido identificar las mismas concepciones que reflejamos en esta selección. El diálogo, el debate intelectual es muy gratificante y además es una forma de aprendizaje (heredera del diálogo clásico o socrático). Es también una fuente insustituible para saber cómo piensan nuestros alumnos. Animamos a los lectores a mantener este tipo de discusiones con sus estudiantes, que incluso pueden adaptarse a diálogos con toda la clase.

Primer Problema

— Si fueras a comprar un número de lotería ¿cuál elegirías el 11111 o el 12472?
— El 12472 (*con rotundidad*).
— ¿Por qué?
— El 11111 nunca sale.
— ¿Y el 12472 sí? (*intentando orientar su argumentación*).
— Sí porque nunca salen cinco unos.
— Pero recuerdas que haya salido alguna vez el 12472 (*poniendo a prueba su argumentación de nuevo*).
— No, pero es más fácil que salga un número así.
— ¿Por qué?
— Porque puedes formar más números de esa forma y con cinco unos sólo hay uno.
— Pero estamos hablando del 11111 o el 12472, imagina todos los números en una bolsa y que sacas uno, entonces ¿cuál es más probable? (*proponiendo un modelo más sencillo equivalente*).
— Sí (*tras pensar unos segundos*), da igual, los dos tienen la misma probabilidad.
— Entonces si tuvieras que comprarlo realmente, ¿cúal comprarías?
— Cualquiera.

> *...la tarea del entrevistador es facilitar con ejemplos o modelos equivalentes al problema planteado, un terreno donde los argumentos del alumno puedan ser defendidos por éste y puestos a prueba por áquel, algo parecido a establecer un lenguaje común a ambos.*

Este fragmento de la entrevista identifica e ilustra la concepción que podemos denominar *lo raro es menos probable*. Para el alumno el número 11111 es raro (porque se puede identificar y recordar con facilidad) frente al 12472 que es un número más. Sin embargo el error viene de comparar el suceso «salir el 11111» con «salir un número del tipo 12472» y no con «salir exactamente el 12472». Esto queda claro cuando dice «Porque puedes formar más números de esa forma y con cinco unos sólo hay uno». Está dispuesto a justificar su intuición mediante algún mecanismo generador de casos, lo cual indica que entiende que a mayor número de casos favorables mayor probabilidad, intuición por otro lado muy importante.

Aunque la concepción de *lo raro es menos probable* no es aplicable en este problema tiene sus contextos de validez, en particular los problemas en los que no interviene el orden de las cifras. Por ejemplo, si el mismo problema nos pidiera decir qué es más probable si obtener un número con las cifras 11111 o con las cifras 12472 su argumento sería correcto. La dificultad inicial para distinguir entre sucesos equiprobables es muy frecuente entre los alumnos, y también entre adultos incluso con formación científica, como hemos podido comprobar al proponer el problema a colegas que no eran matemáticos. Sin embargo, es una concepción que cuando se entra en diálogo con ella acaba por refinarse, es decir, el alumno entiende cuándo es aplicable y cuándo no, aprende a distinguir contextos donde influye el orden y donde no, generalmente porque es capaz de reducir el problema a problemas equivalentes más sencillos del mismo modo que el entrevistador lo hace con el ejemplo de las bolas.

En general, como se ve en los fragmentos, la tarea del entrevistador es facilitar con ejemplos o modelos equivalentes al problema planteado, un terreno donde los argumentos del alumno puedan ser defendidos por éste y puestos a prueba por áquel, algo parecido a establecer un lenguaje común a ambos. Esta entrevista se repite en términos parecidos casi siempre si el entrevistador sigue la misma estrategia de ir acotando y poniendo a prueba la argumentación del alumno.

Segundo Problema

- Lanzamos 8 veces una moneda, se trata de sacar 7 caras seguidas y una cruz al final o de sacar 5 caras seguidas y 3 cruces seguidas, en este orden. ¿Cuál de los dos casos te parece más probable?
- 5 y 3.
- ¿Por qué?
- Porque si te pones a tirar una moneda es más difícil que salgan 7 caras seguidas que cinco, ...haz la prueba.
- Ya, pero supón que hubieran salido ya cinco caras seguidas, y vas a lanzar la moneda de nuevo, en ese momento ¿qué es más probable, que salga cara o cruz?
- Igual.
- Entonces será igual de probable que salgan 5 que 6 y si lo vuelves a repetir 5 que 7.
- No, ...no sé. (*Dubitativo y sin que la explicación le haya convencido*).
- ¿Por qué?
- Porque ya han salido cinco caras seguidas antes y que salga otra...
- Da igual, aunque hubieran salido 99 caras seguidas, la probabilidad de que salga en la siguiente tirada cara o cruz es la misma[1].
- No puede ser porque tendrá que salir cruz alguna vez.
- Pero cada vez que lanzas es como si empezaras de nuevo. Lo que haya pasado antes no cuenta.
- Tiene que contar.
- No, no cuenta porque cada vez que tu lanzas la moneda es independiente de lo que haya ocurrido anteriormente, la moneda no tiene memoria para saber lo que ha pasado antes.
- Sí, eso es verdad ...no digo que ...eso no tendría sentido. (*No parece que entienda del todo la independencia de sucesos*).
- Entonces...
- Ya pero hay pocas formas de sacar 7 caras y 1 cruz y hay más formas de sacar 5 caras y 3 cruces. (*Parece como si no hubiera entendido la pregunta inicial donde se decía que tenían que aparecer en un orden dado*).
- Sí, pero estamos hablando de dos casos concretos donde hay un orden de aparición de las caras y las cruces dado. (*Centrando el problema de nuevo*).
- No, si eso lo entiendo pero al haber más formas de conseguirlo... porque cuando hayan salido 3 caras seguidas por ejemplo, es más fácil que salgan otras 2 y 3 cruces que no otras 4 caras y al final una cruz, ¿no?
- Sí, pero siempre que te de igual el orden en el que aparezcan, y ése no es el caso.
- Ya sé que hay que tener en cuenta el orden. Lo que digo es que 7 y 1 es poco probable, entonces la descarto y la mía está entre las que son más probables las de 5 y 3. (*La concepción de lo raro es menos probable aparece aquí de nuevo*).
- Pero la 7 y 1, en este orden, es una elección concreta entre todas las que tienen 7 caras y 1 cruz. De acuerdo que una combinación de este tipo es menos probable que una del tipo 5 caras y 3 cruces, pero esa no es la pregunta. (*A partir de aquí la conversación fue volver una y otra vez sobre lo mismo sin que el alumno cayera en la cuenta de por qué su argumento no era válido*).

Este fragmento ilustra la concepción que podemos llamar el pasado condiciona el futuro. La sabiduría popular recoge esta intuición en refranes como «no hay mal que cien años dure»

Este fragmento ilustra la concepción que podemos llamar *el pasado condiciona el futuro*. La sabiduría popular recoge esta intuición en refranes como «no hay mal que cien años dure» o en la cita del Quijote al comienzo de este artículo. También es frecuente encontrarse jugadores de azar que parten de esta premisa para apostar: «hace mucho que no sale el 5, alguna vez tendrá que salir», «no apuestes al 3 porque acaba de salir». Incluso nosotros mismos tuvimos que hacer un esfuerzo para no dejarnos llevar instintivamente por el razonamiento del alumno en algún momento de la entrevista. Esta concepción se sustenta en una idea importante asociada a un razonamiento incorrecto. La idea es la de probabilidad como límite de frecuencias (quizá el más usado en el bachillerato). Nos viene a decir que si tiramos «muchas» veces una moneda el número de caras y cruces tiende a ser muy parecido. El razonamiento incorrecto consiste en decir que habiendo salido noventa y nueve caras sea más probable una cruz en la siguiente tirada, porque como sabemos por la independencia de sucesos, el salir cara o cruz es igual de probable. Sin embargo se tiende a pensar que la tirada número cien es un buen momento para que salga una cruz pues ya van «muchas»

1 El entrevistador trata de presentar un caso límite, sin embargo, de producirse en realidad, según nos han observado colegas que han leído la entrevista, sería incluso *más razonable* pensar que la moneda está sesgada y volver a pedir cara sería lo correcto.

tiradas todas de caras y ambos números tienen que resultar al final (en infinitas tiradas) parecidos, así que tendrán que salir cruces para compensar el número de caras. Aunque los alumnos den explicaciones más o menos elaboradas todas se reducen a esta argumentación. En el caso de nuestro estudiante las frases: «Porque si te pones a tirar una moneda es más difícil que salgan 7 caras seguidas que cinco, …haz la prueba». «Porque ya han salido cinco caras seguidas antes y que salga otra...». «No puede ser porque tendrá que salir cruz alguna vez» indican, a nuestro juicio, que su explicación va por esos derroteros en la primera parte de la entrevista. Cuando el entrevistador confronta estas explicaciones haciéndole ver que las tiradas son independientes el alumno ensaya otra explicación basada en la concepción de la entrevista anterior *lo raro es menos probable*, aunque con una argumentación, la de su última intervención en la entrevista, que nos parece bastante sofisticada y hasta «convincente».

Resulta evidente del análisis anterior, cómo dentro de una concepción que es globalmente errónea hay elementos muy aprovechables (la idea de que las frecuencias de caras y cruces se estabilizan); también como las concepciones interaccionan: en este caso una ayuda a justificar la otra. Además, vemos que son muy persistentes, como prueba por un lado el afán de justificar que el pasado tiene que condicionar la tirada actual a pesar de encontrar los argumentos en contra del profesor, y por otro, el que otra concepción que debería estar superada de la entrevista anterior vuelve a aparecer como elemento de la explicación.

El punto muerto en el que entra la conversación donde la hemos dejado indica que el diálogo con una concepción es a veces difícil, y que los ejemplos y analogías, junto a la pericia del entrevistador, no siempre sirven para hacer ver al alumno que su razonamiento no es adecuado.

La intuición a veces se obceca, como acabamos de ver, y superar esta situación puede requerir introducir la teoría matemática y que ésta sea el terreno donde el razonamiento formal pueda competir con lo intuitivo. La tarea de crear ese lenguaje común que hemos mencionado en el apartado anterior, es en este caso más difícil pues ese lenguaje es el matemático. Esto supone que el alumno aprenda a admitir la validez de un argumento porque es deducido de acuerdo con las reglas de juego de las matemáticas, aunque éste no coincida con lo que él piensa. En definitiva, que reconozca que no todo lo intuitivamente aceptable siempre es válido desde el punto de vista formal. Esto no significa despreciar los razonamientos intuitivos sino más bien una educación de la intuición. La propia historia de las matemáticas contiene episodios de este tipo, por ejemplo, el que la imagen de una aplicación continua de un segmento pueda rellenar un cuadrado fue y es algo bastante poco intuitivo, pero una vez convencidos de que es posible y comprendida realmente la idea que hay debajo, este tipo de aplicaciones (curvas de Peano) pasan a formar parte de nuestros razonamientos intuitivos cuando más adelante encontramos problemas parecidos. Este refinamiento de la intuición supone una capacidad de abstracción y de madurez matemática considerable que podemos iniciar en nuestros alumnos cuando las circunstancias nos brinden esa oportunidad.

…el alumno aprenda a admitir la validez de un argumento porque es deducido de acuerdo con las reglas de juego de las matemáticas, aunque éste no coincida con lo que él piensa. En definitiva, que reconozca que no todo lo intuitivamente aceptable siempre es válido desde el punto de vista formal.

Conclusiones

Al profesor atento le resultaran familiares estas concepciones porque las reconocerá en sus alumnos. Queremos hacer notar que aunque nuestros alumnos no hayan estudiado probablidad antes, manejan ideas previas importantes y son capaces de argumentar con ellas y de defenderlas. Estas ideas o concepciones tienen su origen en experiencias de la vida cotidiana, en analogías, etc. y siempre encierran algo de *verdad*, entendiendo como tal los contextos donde pueden resultar válidas. Cuando introducimos este tema en nuestras clases entramos en diálogo con ellas, la mente del estudiante no es un cuaderno en blanco, donde se escriben nuestras explicaciones. Los fragmentos ofrecen ejemplos de cómo este diálogo se puede producir y también de sus limitaciones. El identificar las concepciones y qué las sustenta nos da pistas de por qué hay conceptos que suelen entender con más facilidad, como el mencionado de que las frecuencias de caras y cruces tienden a ser iguales, y también, de cómo otros parecen escapárseles, como la independencia de sucesos. También nos ayuda a superar visiones reduccionistas de los errores y dificultades de nuestros alumnos, que las atribuyen exclusivamente a la complejidad intrínseca de los conceptos o a la falta de atención. El identificarlas es también un primer paso para diseñar estrategias para reforzarlas, combatirlas o refinarlas. Profundizar en esto último supone construir el conocimiento desde estas concepciones y diseñar el curriculum teniéndolas en cuenta, y esto supera el propósito de ese artículo que era sólo identificar algunas de estas concepciones.

Referencias bibliográficas

CLEMENT, J. (1983): «A Conceptual Model Discussed by Galileo and Used Intuitively by Phisics Students», en *Mental Models,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale, NJ, 325-340.

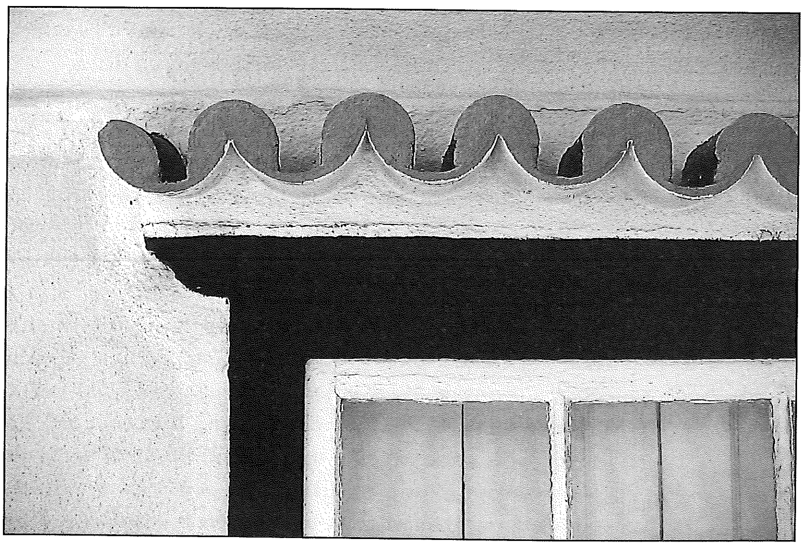
ERICSON, K. (1985): *Protocol Analysis: Verbal Reports as Data,* MIT Press, Cambridge, Mass.

VON GLASERSFELD, E. (Ed) (1991): *Radical Constructivism in Mathematics Education,* Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.

MCCLOSKEY, M. (1983): «Naive Theories of Motion», en *Mental Models,* Lawrence Erlbaum Associates, Hillsadle, NJ, 325-340.

Agustín Muñoz
IB Dionisio Aguado.
Fuenlabrada (Madrid)

Chartres



Cascais

Fotos:
Pilar Moreno

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 35-41

Matemáticas aplicadas a la Astronomía: tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del Sol en los solsticios

José Luis Sánchez Almécija

LA TIERRA describe una órbita elíptica en su movimiento de traslación alrededor del sol. Los solsticios tienen lugar en los momentos en los que la Tierra se encuentra en los vértices del eje mayor de la elipse. Estos dos momentos son conocidos como solsticio de invierno, sobre el 21 de diciembre, y solsticio de verano, sobre el 22 de junio.

En este artículo se resuelve un problema de astronomía mediante la utilización de la trigonometría elemental y del espacio euclideo tridimensional. Se aspira a tener una idea de cómo varía la luz solar en los solsticios a lo largo de las latitudes de nuestro planeta, de polo a polo, y se concluye con un programa informático y una tabla para las latitudes de varias ciudades del mundo.

Tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del sol en el solsticio de invierno

Vamos a calcular la proporción de luz p que recibe un observador A situado a una latitud λ. Si multiplicamos p por el número de horas de este día, 23 horas 58 minutos[1] (Menzel y Pasachoff, 1990) obtendremos las horas de luz solar del solsticio de invierno.

Consideremos la proyección ortogonal de la Tierra sobre el plano meridiano[2] (figura 1). Los puntos N y S repre-

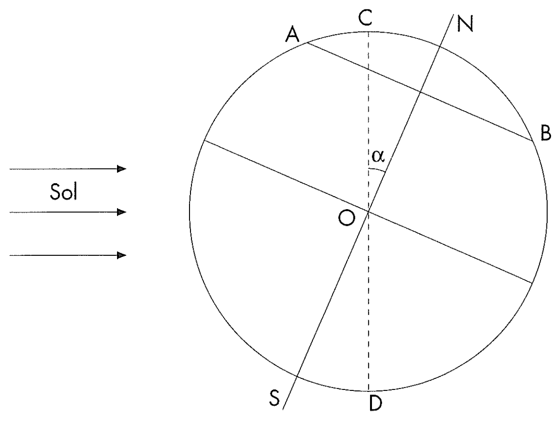


Figura 1

1 Realmente las 24 horas de un día es la media de todas los días, es decir, es un día medio. La duración de un día cualquiera del año podemos encontrarla en un analema, curva aparente que describe el centro del sol durante un año a las 12:00 horas de Greenwich.

2 Plano que contiene la línea NS y al observador A.

IDEAS Y RECURSOS

sentan el polo norte y sur de la Tierra respectivamente, la línea NS representa el eje de rotación de la Tierra, el segmento AB el paralelo de latitud λ donde se encuentra el observador A, el segmento CD la circunferencia que separa el día de la noche, el punto O el centro de la Tierra y el ángulo α = 23°27´ la inclinación del eje de la Tierra.

Tomemos la mitad del paralelo que pasa por A y por B, donde se encuentra el observador A (figura 2). Sea $l = 90° - \lambda$, AP el arco de luz , PB el arco de sombra, P´ la proyección ortogonal de P sobre el segmento AB, β el ángulo que abarca el arco AP y R el radio de la Tierra.

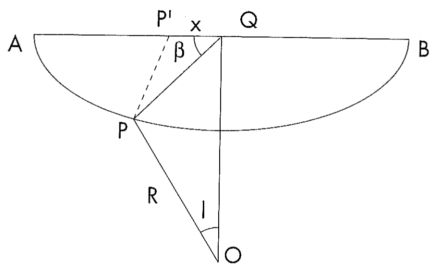


Figura 2

La proporción de luz es

$$p = \frac{\beta}{180°}$$

Del triángulo rectángulo OPQ se obtiene PQ = R·senl. Sea ahora x = P'Q. En el triángulo rectángulo PP´Q obtenemos que

$$\cos\beta = \frac{x}{R \cdot \text{sen}\, l}$$

Entonces basta calcular x para obtener β.

Tomemos ahora el triángulo rectángulo AOQ (figura 3)

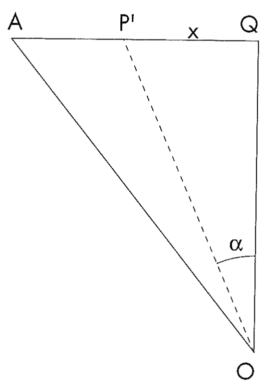


Figura 3

Resulta que OQ = R ·cosl y que

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{x}{R \cdot \cos l} \quad \Rightarrow \quad x = R \cdot \cos l \cdot \text{tg}\,\alpha$$

[en el solsticio de invierno] en todo el Círculo Polar Antártico, entre los 66°33´ y 90° de latitud sur, luce el sol todo el día. ...en todo el Círculo Polar Ártico, entre los 66°33´ y 90° de latitud norte, es de noche todo el día.

Entonces

$$\cos\beta = \frac{R \cdot \cos l \cdot \text{tg}\,\alpha}{R \cdot \text{sen}\, l} = \cot l \cdot \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,\lambda \cdot \text{tg}\,\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \text{arc cos}\,(\text{tg}\,\lambda \cdot \text{tg}\,\alpha)$$

Luego la proporción de luz

$$p = \frac{\text{arc cos}\,(\text{tg}\,\lambda \cdot \text{tg}\,\alpha)}{180°}$$

y el tiempo que transcurre entre la salida y la puesta de sol es

$$t = p \cdot 23{,}9\widehat{6} \text{ horas}.$$

Esta fórmula es válida para

$$-66{,}55° \leq \lambda \leq 66{,}55°$$

Si λ = –66,55° entonces t = 23 horas 58 minutos y, por tanto, en todo el *Círculo Polar Antártico*, entre los 66°33´ y 90° de latitud sur, luce el sol todo el día. Si λ = 66,55° entonces t = 24 horas 2 minutos y, por tanto, en todo el *Círculo Polar Ártico*, entre los 66°33´ y 90° de latitud norte, es de noche todo el día.

Tiempo que transcurre entre la salida y la puesta de sol en el solsticio de verano

En este día la posición del sol respecto de la Tierra es la que se observa en la figura 4.

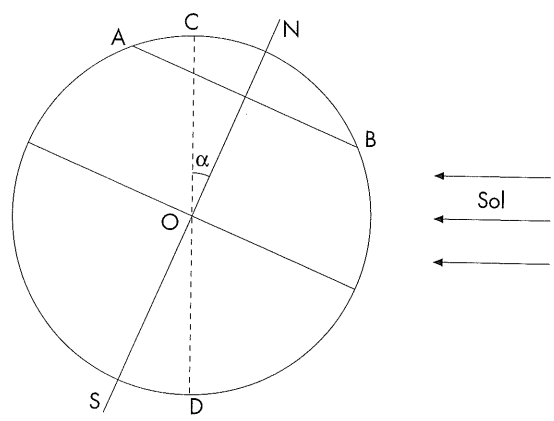


Figura 4

Observamos que la proporción de luz de este día, que tiene una duración de 24 horas y 2 minutos (Menzel y Pasachoff, 1990), es igual que la proporción de noche del solsticio de invierno. Luego la proporción de luz

$$p' = 1 - p$$

y el tiempo que transcurre entre la salida y la puesta de sol es

$$t = p' \cdot 24{,}0\widehat{3} \text{ horas}.$$

En el solsticio de verano en todo el *Círculo Polar Antártico* es de noche todo el día y en todo el *Círculo Polar Ártico* luce el sol todo el día.

Tamaño angular del sol y refracción de los rayos solares sobre la atmósfera

En los cálculos realizados hasta ahora no hemos tenido en cuenta que el Sol es una esfera y que los rayos solares se refractan en la atmósfera ascendiendo el Sol sobre el horizonte en un ángulo de 35' (Vorontsov-Veliamínov, 1985).

Veamos cómo influye el tamaño angular del sol y la refracción en la proporción de luz p en el solsticio de invierno.

Teniendo en cuenta la refracción resulta que la proporción de luz es

$$p = \frac{\beta + 35'}{180°}$$

Consideremos el modelo Sol-Tierra en el solsticio de invierno proyectado ortogonalmente sobre el plano meridiano (figura 5) y calculemos el ángulo *O* del trapecio HC'OK, donde el segmento HC' es tangente a las circunferencias.

En el solsticio de verano en todo el Círculo Polar Antártico es de noche todo el día y en todo el Círculo Pòlar Ártico luce el sol todo el día.

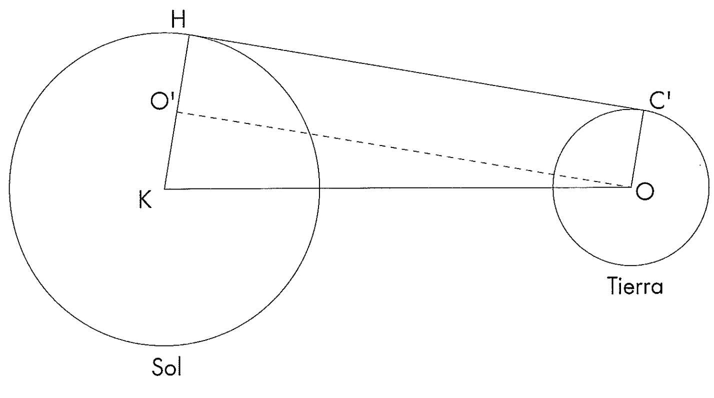


Figura 5

Sea *O'* la proyección del vértice *O* sobre el lado HK. En el triángulo OKO' obtenemos que cos K = KO'/KO. Ahora bien K = 180° – O y KO' = R_s – R (R_s es el radio del Sol y R el de la Tierra). Sea KO = d (distancia media de la Tierra al Sol), entonces

$$\cos(180° - O) = \frac{R_S - R}{d} \quad \Rightarrow \quad O = 180° - \arccos\frac{R_S - R}{d}$$

Con los datos d = 149.600.000 Km, R_S = 696.000 Km y R = 6.371 Km (Vorontsov-Veliamínov, 1985) obtenemos que O = 90,264124°.

Podemos concluir que los rayos solares no inciden perpendicularmente sobre nuestro planeta y que entre la línea sol-sombra CD que teníamos antes, y la que tenemos ahora C'D' existe una diferencia. Esta diferencia la podemos medir por el ángulo COC' = ε = 0,264124°. La misma diferencia podemos encontrar en el solsticio de verano entre las líneas CD y C"D" (figura 6).

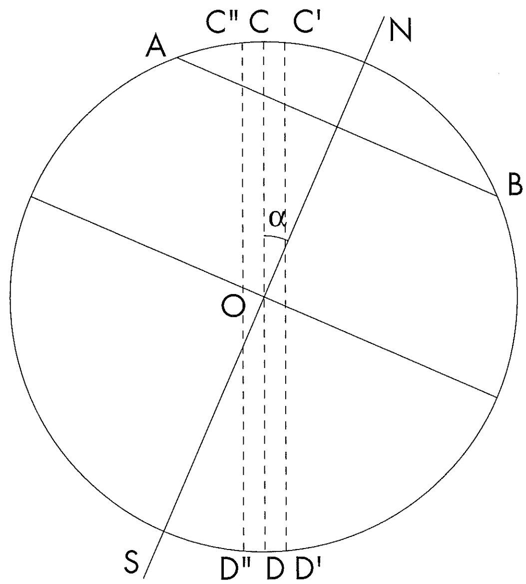


Figura 6

Determinemos el aumento angular de luz β' sobre el paralelo donde se encuentra el observador A, con lo que

$$p = \frac{\beta + \beta' + 35'}{180°}$$

Consideremos el sistema de referencia ortonormal,

$$R' = \{O, U_1, U_2, U_3\}$$

siendo O el centro de la Tierra. $\overrightarrow{OU_3}$ tiene el sentido del vector $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OU_2}$ el sentido contrario al sol, y $\overrightarrow{OU_1}$ el sentido del producto vectorial de $\overrightarrow{OU_2} \times \overrightarrow{OU_3}$.

Sea C_1 la circunferencia que pasa por los puntos C, D y el punto de coordenadas $P_1 = (R, 0, 0)$. Determinando su ecuación resulta

$$C_1 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sea C_2 la circunferencia paralela a C_1 y que contiene a C'y D'. Teniendo en cuenta ε determinamos su ecuación, resultando

$$C_2 \equiv \begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 - a^2 \\ y = a \end{cases}$$

siendo

$$a = \frac{R}{\sqrt{1+\cot^2 \varepsilon}}$$

Sea C_3 la circunferencia paralela a C_1 y que contiene a C'' y D''. Teniendo en cuenta ε determinamos su ecuación, resultando

$$C_3 \equiv \begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 - a^2 \\ y = -a \end{cases}$$

Sea π el plano que contiene al paralelo de latitud λ. Determinando su ecuación resulta que

$$\pi \equiv cy + b(z - c) = 0$$

siendo

$$b = \frac{R \cdot \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \alpha} \quad \text{y} \quad c = \frac{R \cdot \operatorname{sen} \lambda}{\cos \alpha}$$

Resulta que $P = C_1 \cap \pi$ (figura 2) y sea

$$P'' = \begin{cases} C_2 \cap \pi & \text{en el solsticio de invierno} \\ C_3 \cap \pi & \text{en el solsticio de verano} \end{cases}$$

Realizando los cálculos con las ecuaciones anteriores se obtiene

$$P = \left(\sqrt{R^2 - c^2}, 0, c\right)$$

$$P'' = \begin{cases} \left(\sqrt{R^2 - a^2 - \dfrac{c^2(b-a)^2}{b^2}}, a, \dfrac{c(b-a)}{b}\right) & \text{en el solsticio de invierno} \\ \left(\sqrt{R^2 - a^2 - \dfrac{c^2(b-a)^2}{b^2}}, -a, \dfrac{c(b-a)}{b}\right) & \text{en el solsticio de verano} \end{cases}$$

λ tiene las siguientes restricciones:

1) $\lambda \neq 0$ ya que tiene que ser $b \neq 0$. Si $\lambda = 0$ entonces $\beta = 90°$ y tomando como plano $\pi \equiv z - \operatorname{tg}\alpha \cdot y = 0$ resulta que $\beta' = 0{,}2879049°$.

2) Si nos encontramos en el solsticio de invierno entonces,

$$-66{,}55° + \varepsilon \leq \lambda \leq 66{,}55°$$

debido a las restricciones de λ expuestas anteriormente y del cálculo de P''. Para el resto de los valores podemos calcular *t* mediante interpolación o extrapolación de la siguiente forma :

- $-90° \leq \lambda \leq -66{,}55° + \varepsilon$. A partir de $\lambda = -66{,}55° + \varepsilon = -66{,}29°$ existe luz durante todo el día, es decir t = 23 horas y 58 minutos.
- $66{,}55° \leq \lambda \leq 90°$. Para $\lambda = 66{,}55°$ realizando los cálculos obtenemos que t = 51 minutos y para

  $$\lambda = 66{,}55° + \varepsilon = 66{,}81°$$

  sólo existe la luz debido a la refracción, es decir t = 5 minutos. Interpolando obtenemos que

  $$t = 51 - \frac{46 \cdot (\lambda - 66{,}55)}{0{,}26} \quad \text{minutos}$$

  Si $t < 0$ entonces $t = 0$.

3) Si nos encontramos en el solsticio de verano entonces,

$$-66{,}55° \leq \lambda \leq 66{,}55° - \varepsilon$$

debido a las restricciones de λ y del cálculo de P''. Para el resto de los valores podemos calcular *t* mediante interpolación o extrapolación de la siguiente forma :

- $-90° \leq \lambda \leq -66{,}55°$. Para $\lambda = -66{,}55°$ realizando los cálculos obtenemos que t = 51 minutos y para

  $$\lambda = -66{,}55° - \varepsilon = -66{,}81°$$

  sólo existe la luz debido a la refracción, es decir t = 5 minutos. Interpolando obtenemos que

  $$t = 51 + \frac{46 \cdot (\lambda + 66{,}55)}{0{,}26} \quad \text{minutos}$$

  Si $t < 0$ entonces $t = 0$.

- $66{,}55° - \varepsilon \leq \lambda \leq 90°$. A partir de $\lambda = 66{,}55° - \varepsilon = 66{,}29°$ existe luz durante todo el día, es decir t = 24 horas y 2 minutos.

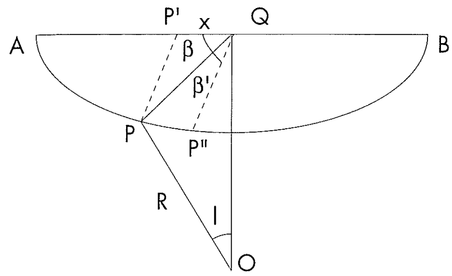


Figura 7

Consideremos el triángulo isósceles PQP'' y sea d' = d(P, P''). Aplicando el teorema del coseno obtenemos que

$$\beta' = \text{arc cos}\left(1 - \frac{d'^2}{2R^2 \cdot \text{sen}^2 l}\right)$$

Luego si tenemos que

$$p = \frac{\beta + \beta' + 35'}{180^\circ}$$

entonces

$$t = p \cdot 23{,}9\overset{\frown}{6}$$

Para el solsticio de verano definimos

$$p' = \begin{cases} \dfrac{180^\circ - \beta + \beta' + 35'}{180^\circ} & \text{si} \quad -\beta + \beta' + 35' < 0^\circ \\ 1 & \text{si} \quad -\beta + \beta' + 35' \geq 0^\circ \end{cases}$$

Con los datos que se han obtenido se ha elaborado el programa en QBASIC para la versión 6.0 de MS-DOS, que se reproduce a continuación.

Al ejecutar este programa nos pide la latitud del lugar del que se desea conocer el tiempo de luz solar durante los solsticios. Si la latitud es norte se dará en grados positivos y si es sur en grados negativos.

Utilizando el programa se obtienen los datos que aparecen en las tablas que aparecen más adelante de tiempo de luz solar para distintas zonas de la Tierra en los solsticios.

```
10 REM tiempo entre la salida y la puesta de sol en los solsticios
20 INPUT "Latitud norte en grados + y latitud sur en grados -"; k
30 IF -90 <= k AND k <= 90 THEN GOTO 40 ELSE PRINT "La latitud debe estar comprendida entre -90 y 90 grados": GOTO 580
40 IF 66.55 <= k THEN m1 = CINT(51 - 46 * (k - 66.55) / .26) ELSE GOTO 70
50 IF m1 < 0 THEN m1 = 0
60 t2 = 24.0333333#: GOTO 530
70 IF k <= -66.55 THEN m2 = CINT(51 + 46 * (k + 66.55) / .26) ELSE GOTO 100
80 IF m2 < 0 THEN m2 = 0
90 t1 = 23.9666666#: GOTO 510
100 pi = 3.141592654#
110 L = k * pi / 180
120 alfa = 23.45 * pi / 180
130 a1 = TAN(L) * TAN(alfa)
140 IF a1 = 0 THEN b1 = pi / 2: GOTO 180
150 IF a1 > 1 THEN b1 = 0: GOTO 180
160 IF a1 < -1 THEN b1 = pi: GOTO 180
170 IF a1 > 0 THEN b1 = ATN(SQR(1 / a1 ^ 2 - 1)) ELSE b1 = pi + ATN(-SQR(1 / a1 ^ 2 - 1))
180 r = 6371
190 e = .004609833#
200 A = r / SQR(1 + (1 / TAN(e)) ^ 2)
```

```
210 b = r * SIN(L) / SIN(alfa)
220 IF b = 0 THEN b2 = b3 = .005024888#: GOTO 430
230 c = r * SIN(L) / COS(alfa)
240 x1 = SQR(r ^ 2 - c ^ 2)
250 y1 = 0
260 z1 = c
270 IF k <= -66.29 AND k > -66.55 THEN GOTO 360
280 x2 = SQR(r ^ 2 - A ^ 2 - c ^ 2 * (b - A) ^ 2 / b ^ 2)
290 y2 = A
300 z2 = c * (b - A) / b
310 d1 = SQR((x1 - x2) ^ 2 + (y1 - y2) ^ 2 + (z1 - z2) ^ 2)
320 A2 = (1 - d1 ^ 2 / (2 * r ^ 2 * SIN(pi / 2 - L)))
330 IF A2 = 0 THEN b2 = pi / 2: GOTO 430
340 IF A2 > 0 THEN b2 = ATN(SQR(1 / A2 ^ 2 - 1)) ELSE b2 = pi + ATN(-SQR(1 / A2 ^ 2 - 1))
350 IF k >= 66.29 AND k < 66.55 THEN GOTO 430
360 x3 = SQR(r ^ 2 - A ^ 2 - c ^ 2 * (b + A) ^ 2 / b ^ 2)
370 y3 = -A
380 z3 = c * (b + A) / b
390 d2 = SQR((x1 - x3) ^ 2 + (y1 - y3) ^ 2 + (z1 - z3) ^ 2)
400 a3 = (1 - d2 ^ 2 / (2 * r ^ 2 * SIN(pi / 2 - L)))
410 IF a3 = 0 THEN b3 = pi / 2: GOTO 430
420 IF a3 > 0 THEN b3 = ATN(SQR(1 / a3 ^ 2 - 1)) ELSE b3 = pi + ATN(-SQR(1 / a3 ^ 2 - 1))
430 p1 = (b1 + b2 + .010181) / pi
440 p2 = (pi - b1 + b3 + .010181) / pi
450 IF k >= 66.29 AND k < 66.55 THEN p2 = 1
460 IF k <= -66.29 AND k > -66.55 THEN p1 = 1
470 IF p1 > 1 THEN p1 = 1
480 IF p2 > 1 THEN p2 = 1
490 t1 = p1 * 23.9666666#
500 t2 = p2 * 24.0333333#
510 h1 = INT(t1)
520 m1 = CINT((t1 - h1) * 60)
530 PRINT "Horas de luz en el solsticio de invierno ="; h1; "horas"; m1; "minutos"
540 IF k <= -66.55 THEN GOTO 570
550 h2 = INT(t2)
560 m2 = CINT((t2 - h2) * 60)
570 PRINT "Horas de luz en el solsticio de verano   ="; h2; "horas"; m2; "minutos"
580 END
```

Lugar	Latitud	Tiempo de luz solar
En el Polo Norte	90°	0 h. 0 min.
En el linde del Círculo Polar Ártico	66,55°	0 h. 51 min.
Reykjavik	64,2°	3 h. 42 min.
Oslo	59,9°	5 h. 42 min.
Edimburgo (Escocia)	55,9	6 h. 49 min.
Londres	51,5°	7 h. 43 min.
A Coruña	43,4°	8 h. 53 min.
Madrid	40,4°	9 h. 13 min.
Cádiz	36,5°	9 h. 37 min.
Las Palmas de G. Canarias	28,1°	10 h. 19 min.
En el Ecuador	0°	12 h. 4 min.
Río de Janeiro	–22,9°	13 h. 30 min.
Buenos Aires	–34,6°	14 h. 25 min.
En el linde del Círculo Polar Antártico	–66,55°	23 h. 58 min.
En el Polo Sur	–90°	23 h. 58 min.

Tabla para
el solsticio de invierno

Lugar	Latitud	Tiempo de luz solar
En el Polo Norte	90°	24 h. 2 min.
En el linde del Círculo Polar Ártico	66,55°	24 h. 2 min.
Reykjavik	64,2°	20 h. 45 min.
Oslo	59,9°	18 h. 39 min.
Edimburgo (Escocia)	55,9°	17 h. 29 min.
Londres	51,5°	16 h. 34 min.
A Coruña	43,4°	15 h. 23 min.
Madrid	40,4°	15 h. 2 min.
Cádiz	36,5°	14 h. 38 min.
Las Palmas de G. Canarias	28,1°	13 h. 55 min.
En el Ecuador	0°	12 h. 6 min.
Río de Janeiro	–22,9°	10 h. 44 min.
Buenos Aires	–34,6°	9 h. 49 min.
En el linde del Círculo Polar Antártico	–66,55°	0 h. 51 min.
En el Polo Sur	–90°	0 h. 0 min.

Tabla para
el solsticio deverano

Bibliografía

MENZEL, D. H. y J. M. PASACHOFF (1990): *Guía de campo de las estrellas y los planetas de los hemisferios norte y sur*, Omega, Barcelona.

VORONTSOV-VELIAMÍNOV, B. A. (1985): *Problemas y ejercicios prácticos de astronomía*, Mir, Moscú.

José Luis Sánchez
IES Los Azahares.
La Rinconada (Sevilla)

CONVOCATORIA PARA LA ELECCIÓN DE LA DIRECCIÓN DE LA REVISTA SUMA

Con la publicación del n.° 31 (junio de 1999) de la revista SUMA finaliza el plazo de cuatro años para el que fue nombrada la actual dirección de la revista SUMA. De acuerdo con los Estatutos y el Reglamento de Funcionamiento de la FESPM se procede a abrir el plazo de presentación de candidaturas a la dirección de SUMA para los próximos cuatro años.

Las candidaturas deberán dirigirse a:

Carmen Azcárate

Secretaria General de la FESPM

Departament de Didactica de la Matematica i les Ciencies Experimentals

Facultat de Ciencies de l'Educacio

Universitat Autonoma de Barcelona

08193 Bellaterra (Barcelona)

La solicitud deberá ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado del Secretario de la Sociedad correspondiente, en el que conste que el candidato es socio activo.

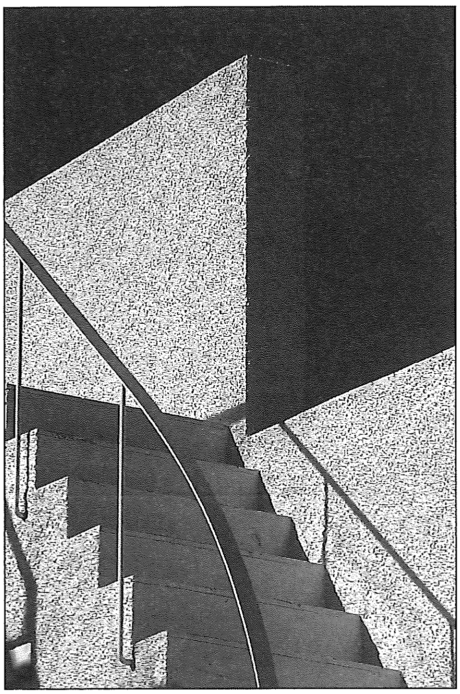
b) Proyecto en el que el candidato exponga su línea editorial, las características técnicas de la revista y un presupuesto económico de ingresos y gastos.

c) Relación nominal del Consejo de Redacción que propone para la realización de la revista.

El plazo de presentación de candidaturas finaliza el 15 de febrero de 1999.

La Secretaria General

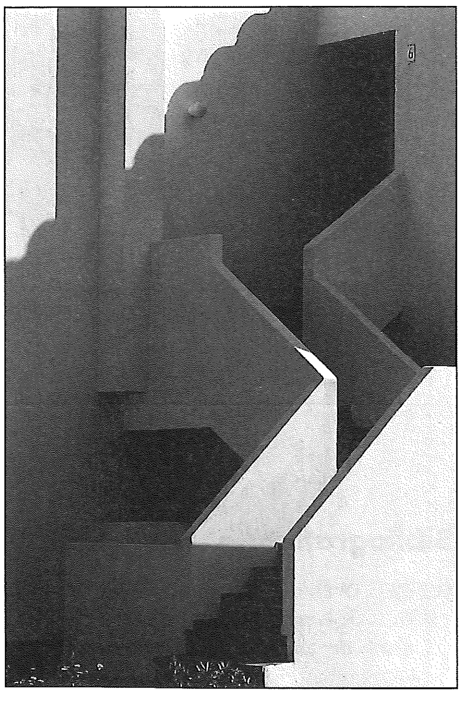
Carmen Azcárate



Chiclana

Fotos:
Pilar Noreno

Menorca



SUMA 29
noviembre 1998, pp. 43-45

Fíate de Φ

Miquel Albertí Palmer

MISCELÁNEA

HOY he quedado en el Zurich con Fidel. Seguramente será la última vez que tomemos algo allí antes de que lo echen abajo. Desde la facultad hay trece paradas hasta la plaza de Catalunya. Doce trayectos. No se trata pues de un viaje demasiado largo, aunque la línea verde no sigue el camino más corto entre los dos puntos, sino que se va hacia el puerto para remontar desde allí las Ramblas. Me da igual porque no tengo prisa. Hago campana. La cuarta sesión de los martes se me hace insoportable. A pesar de que tengo tiempo de sobra, una hora más o menos, prefiero esperarlo bebiéndome una birra bajo el Sol de invierno que dejar escapar los metros que han de llevarme hasta allí. En seguida que subo al vagón comienzo a contar las paradas, es un vício que tengo: la primera, «Zona Universitària»; la segunda, «Palau Reial»; la tercera, «María Cristina», etc. Al llegar a «Paral.lel» ya sólo me quedan tres: «Drassanes»; «Liceu», la penúltima; y la última, «Catalunya». La escalera mecánica me devuelve poco a poco y en silencio a la superfície, como si pretendiera suavizar el impacto de luz y bullcio que reina allá arriba.

En el Zurich, como siempre, no hay ninguna mesa vacía. Por suerte solo tengo que esperar un rato hasta que una queda libre. Quedamos a la una y no son más que las doce y media. Me voy a tomar una cerveza antes de que llegue. No tarda mucho. Me refiero a la birra. El primer trago se ha de saborear sin prisas, es el mejor. El segundo y el tercero no están mal, pero no son lo mismo. No me apetece leer. Aquí es inevitable mirar la corriente de gente que va y viene. Es como mirar el mar o el fuego, siempre cambiantes, siempre diferentes y en movimento. Igual que ellos la masa humana que desfila ante mí me provoca una especie de hipnosis, un atontamiento del que me cuesta espabilar. He de reconocer que la cerveza ayuda. ¡Glups!, me la estoy acabando. No quedarán en el vaso más que dos o tres tragos. Pediré otra.

Fidel no llega. Faltan cinco para la una y aún no asoma. Me extraña porque acostumbra a ser muy puntual, a menudo demasiado puntual. Si en veinte minutos no ha aparecido, me iré a casa.

Ya pasan dos minutos de la una y cuarto. Ahora tres, cuatro, cinco: la una y veinte. No quiero pedir nada más. Entre las *rubias* y las *cokes* que me he bebido criaré ranas en el estómago. Bien, cinco minutos y me largo. Cuatro, tres, dos, uno. Se acabó. Ya tengo bastante. ¡Son casi la una y media! Ya llevo una hora aquí y ni se le ve por el horizonte. No sé qué le puede haber sucedido. Al llegar a casa le llamaré.

Todo el mundo ha vivido alguna vez el aburrimiento que supone aguantar la última parte de un acto (película, concierto, partido, etc.) que no nos gusta. Llega un punto en el que empezamos a sentirnos incómodos en el asiento y miramos el reloj con la esperanza de leer en él que aquello se está acabando. También habremos vivido la situación opuesta: desear que el final se atrase cuanto más mejor porque disfrutamos de la película, el concierto o cualquier otro espectáculo o situación de la vida. ¡Qué decir de un partido de fútbol en el que nuestro equipo va ganando por la mínima!: anhelamos que el árbitro pite de una vez el final, mientras que los seguidores del equipo contrario se ilusionarán aún con la esperanza de que el tiempo restante sea suficiente para remontar el resultado. A diario se viven situaciones semejantes.

Todos estos sentimientos, tener prisa o no tenerla para que un acontecimiento se acabe o dure, son muy subjetivos y dependen tanto de quién los vive como de las circustancias que se dan al vivirlos. Las matemáticas enfocan las cosas al margen de los sentimientos. Es precisamente por eso que son tan y tanto refutables como irrebatibles. No tiene sentido plantearse si ante un determinado suceso podemos decidir de antemano cuándo comenzaremos a sentirnos aburridos o incitados, anhelando el final por un motivo u otro. Pero si miramos la situación desde la barrera, o sea, sin implicación pasional, con una mirada más fría, entonces sí que podremos decir cuando, en lugar de sumar minutos en aquello que hacemos o vivimos, empezamos a restarlos.

La persona (chico o chica, ¿quién lo sabe?) que protagoniza el relato anterior pasa varias veces por esta situación. Al contar las estaciones de metro primero las suma, después las resta. También lo hace al beberse la cerveza y al contar el tiempo que tiene que esperar a su amigo. ¿En qué momento ha cambiado el nombre de estación *trece* (Plaça Catalunya), para referirse a ella como la *última*? ¿Desde cuándo resta paradas en lugar de sumarlas? ¿Y a descontar los tragos de cerveza del vaso en lugar de sumarlos los que se iba bebiendo? ¿Y a restar minutos del tiempo de espera?

Todos estos sentimientos, tener prisa o no tenerla para que un acontecimiento se acabe o dure, son muy subjetivos y dependen tanto de quién los vive como de las circustancias que se dan al vivirlos. Las matemáticas enfocan las cosas al margen de los sentimientos. Es precisamente por eso que son tan y tanto refutables como irrebatibles.

Una observación. La popular cuestión de si vemos medio llena o medio vacía una botella en la que hay la mitad de su contenido no es del mismo tipo. Tendríamos que habernos bebido nosotros la parte que falta. Dicho de otra forma: hemos de vivir el acontecimiento como protagonistas o como espectadores implicados. Ante una botella de la que no hemos probado su contenido no hay vuelta de hoja: decir que está medio llena es exactamento lo mismo que decir que está medio vacía, una broma lingüística.

¿Podemos hallar el instante en el que uno pasa de sumar a restar el tiempo, la sustancia, etc., que le queda por probar o vivir de una experiencia? Sí.

Llamemos 1 a la mesura total del acontecimiento. 1 es el tiempo que dura, la cantidad de sustancia que contiene, etc., es decir, lo que representa la totalidad de su experimentación. Sea x la parte que hemos hecho, vivido o consumido del total. Entonces lo que aún nos queda será $1 - x$.

Para alguien que lo mire desde fuera, como un espectador sin sentirse implicado, el momento en que el suceso se acaba, cuando empieza la cuenta atrás, será aquel en que lo que falta se iguala con lo que queda: $x = 1 - x$. Luego $x = 1/2$.

Así que a partir de la mitad comienza el desenlace, el final. La botella comienza a vaciarse después de la mitad. No es ninguna sorpresa.

¿Y si uno mismo es quien vive o padece desde dentro la experiencia? Si soy yo quien se bebe el contenido de la botella la cosa cambia. Como ejemplo supongamos que me he bebido cinco séptimas partes de una botella de agua. Quedan en ella dos séptimos. Ahora bien, esto será mucho o poco según lo que ya me he bebido, según la sed que tenía y que todavía tenga, pero no en relación al contenido global de la botella, que es como lo vería un observador sin estar implicado. Entonces, el final de la experiencia se iniciará cuando se igualen las proporciones:

$$P_1 = \frac{\text{lo que uno ha vivido o consumido}}{\text{el total}}$$

$$P_2 = \frac{\text{lo que resta por vivir o consumir}}{\text{lo que ya uno ha vivido o consumido}}$$

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$$

La solución x de esta ecuación señala el punto en que comenzaremos a descontar lo que resta en lugar de sumar lo que vivíamos hasta entonces. Aparece así uno de los números más famosos e importantes de la matemática:

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} \Phi = 0,618\ldots \\ -(1+\Phi) = -1,618\ldots \end{cases}$$

Según esto, la persona que tenía que verse con Fidel, empezará a restar estaciones un poco más allá de la mitad del trayecto. Exactamente 12 trayectos serán:

$$12 \cdot \Phi = 7,4164\ldots$$

Después de casi siete tramos y medio, entre las estaciones de «Plaça d'Espanya» y «Poble Sec». Desde aquí solo le *quedarán* cinco estaciones.

Los puntos a partir de los cuales se inicia el fín se calculan multiplicando por $\Phi = 0,618\ldots$su medida global. He aquí unos cuantos ejemplos:

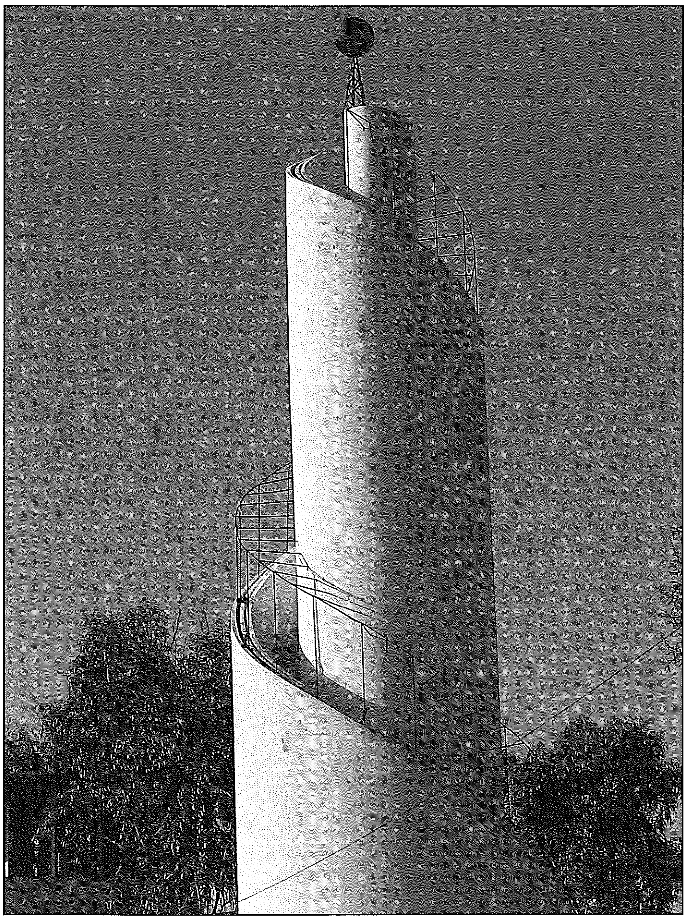
1. Esperanza de vida en España: 76 años. Entonces:

   $$76 \cdot \Phi = 46,97\ldots$$

   A partir de los 47 años empieza la cuenta atrás!
2. Un día, 24 horas, se acaba a partir de las 14h 50m.

   ¿Y una semana?, ¿y un mes? Un año inicia su final el 14 de agosto.
3. Partido de fútbol: partido entero: 55m 37 seg.; segunda parte: 27m 48seg.

Miquel Albertí
IES Pau Vila.
Sabadell (Barcelona)



Mallorca
Foto: Pilar Moreno

Convocatoria
I Premio
«Gonzalo Sánchez Vázquez»

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el I Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez», en homenaje de quien fue su Presidente de Honor. Se regirá por las siguientes:

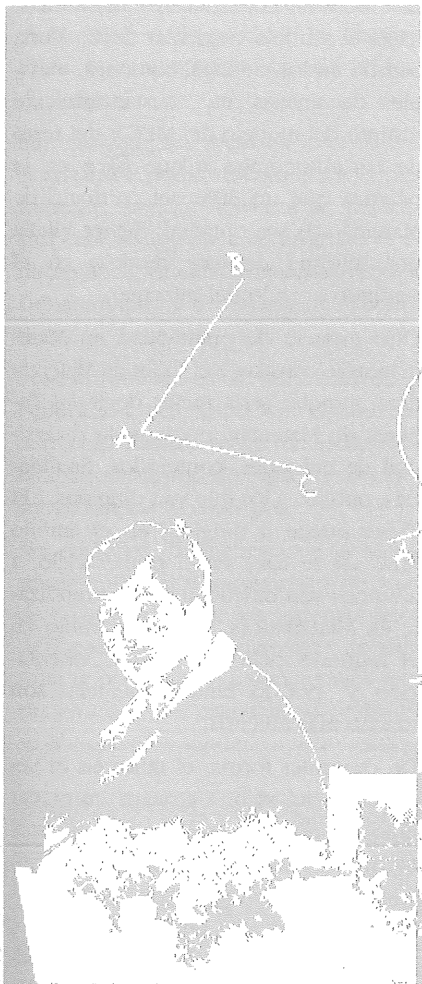
BASES

1. Se trata de premiar la labor docente y los «valores humanos»: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.
2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).
3. El Premio consistirá en el nombramiento de «Socio de Honor» de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.
4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.
5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada en la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.
6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de diciembre de 1998.
7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.
8. Para la concesión del Premio, la Junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:
   - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
   - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
   - Currículo con hechos, anécdotas, etc., referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.
9. SUMA publicará el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.
10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las IX JAEM que se celebrarán en Lugo en septiembre de 1999.

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 47-51

Las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria

Antonio Pérez Sanz (Coordinador)



INFORME

En el mes de noviembre de 1997 se celebró en El Escorial un Seminario de la FESPM para analizar la Implantación de las Matemáticas de la ESO. Las conclusiones se pueden leer en el número 27 de SUMA.

En ese seminario, la dirección de SUMA me propuso coordinar un informe sobre las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. Fruto de esa propuesta son las páginas que vienen a continuación.

Dos líneas se podían seguir a la hora de su realización:

a) Analizar las dificultades que en las distintas comunidades autónomas había producido una implantación atípica, comenzada por el entresuelo –empezando en la mitad de la etapa (3.°) con alumnos provenientes de EGB que no habían cursado 1.° y 2.° de ESO–, con dificultades de infraestructura de los centros, con anticipación del segundo ciclo sólo en algunos centros, conviviendo con el plan de estudios anterior, sin un plan efectivo de información y formación del profesorado, con notables diferencias de ritmos y propuestas educativas en cada comunidad...

b) Detectar los temas que más preocupaban al profesorado: el diseño del currículo, las matemáticas para todos los alumnos en el marco de una enseñanza obligatoria hasta los 16 años, los espacios de optatividad dentro de las Matemáticas, las nuevas metodologías y su vinculación con los recursos, sobre todo los tecnológicos, el tratamiento de la diversidad en el aula, la evaluación..., para poder iniciar una reflexión más profunda sobre los mismos; abordando estos temas desde un punto de vista teórico pero ofreciendo, al mismo tiempo, respuestas parciales desde la práctica del aula.

La primera línea constituía una seria amenaza de convertirse en una especie de «Muro de las Lamentaciones» con estructura de mosaico autonómico; lo que realmente es un gran problema para una publicación cuyo soporte es el papel, por aquello de los lloros. Así que optamos por la segunda.

Los temas elegidos, por problemas de espacio algunos se han tenido que quedar fuera, responden en parte a las cuestiones suscitadas en los grupos de trabajo de ese seminario, en parte a las respuestas de los centros y de los profesores a una encuesta previa al mismo realizada por la SMPM, y en una tercera parte a las charlas mantenidas con los autores.

A pesar de que en el seminario del Escorial no se debatió de forma específica sobre la adecuación de los contenidos del currículo, en la encuesta de la SMPM, a la que respondieron 19 centros de forma colectiva y 20 profesores a título individual, sí se planteó una pregunta sobre este tema: «Según tu experiencia, los contenidos del currículo en Matemáticas de la ESO son: escasos, suficientes o excesivos; poco ambiciosos, normales o muy ambiciosos; adecuados o inadecuados».

Las respuestas son las siguientes:

	Centros	*Individuales*
Escasos	2	0
Suficientes	12	9
Excesivos	1	3

	Centros	*Individuales*
Poco ambiciosos	11	12
Normales	1	2
Muy ambiciosos	1	2

	Centros	*Individuales*
Adecuados	10	10
Inadecuados	5	5

En resumen, los encuestados creen que los contenidos son suficientes, poco ambiciosos y adecuados. Las respuestas estaban acompañadas de interesantes matices, sobre niveles, número de horas, etc.

Con esta perspectiva nace el primer artículo del informe, en el que Vicente Rivière, que participó activamente en el diseño del currículo desde el Centro de Desarrollo Curricular, nos aporta una visión sobre la necesidad de adecuar los contenidos curriculares de matemáticas a las características, demandas y modos de actuar de una sociedad sustancialmente distinta de la de hace tres décadas.

Las nuevas condiciones sociales, la explosión del mundo de la información y de la comunicación y los nuevos conocimientos acerca de la forma de aprender matemáticas marcan las líneas generales del nuevo currículo, los contenidos del mismo, su enfoque y las metodologías de enseñanza-aprendizaje.

En resumen, los encuestados creen que los contenidos son suficientes, poco ambiciosos y adecuados. Las respuestas estaban acompañadas de interesantes matices, sobre niveles, número de horas, etcétera.

Los dos artículos siguientes vienen a plantearse dos respuestas diferentes a un mismo problema: todos los alumnos tienen que aprender matemáticas hasta al menos los 16 años de forma obligatoria; pero ¿todos los alumnos necesitan, demandan, están interesados y pueden aprender las mismas matemáticas?

La respuesta a esta pregunta la da la optatividad. Pero hay muchas formas de estructurar esta optatividad; desde la más elemental, la separación de opciones A y B en 4.° de ESO, adoptada en casi todas las comunidades autónomas, hasta el modelo curricular de Cataluña basado en los créditos, comunes, variables de síntesis, etc., sustancialmente distinto del modelo del MEC y del resto de las autonomías y que hace en la práctica que un 30% del currículo de Matemáticas sea optativo. Xavier Vilella nos informa de este modelo en el segundo artículo del informe.

Otro espacio de optatividad en Matemáticas lo constituye el Taller de Matemáticas, aunque sería mejor decir *los* Talleres de Matemáticas, dada su diversidad de enfoques, contenidos, finalidades, público a los que van dirigidos... El Taller puede ir dirigido, en el ámbito MEC así se hace en el primer ciclo, a alumnos con dificultades de aprendizaje en Matemáticas, pero en cambio en el segundo ciclo su enfoque, orientación y, por lo tanto, «clientela» son mucho más abiertos.

De cualquier forma, el taller en el segundo ciclo es una apuesta curricular innovadora que acerca las matemáticas al mundo real y cotidiano de los alumnos. La gran diferencia con las matemáticas troncales está en la metodología, que constituye otra forma de aproximarse a los contenidos matemáticos de la etapa a dos niveles: el cambio en el «hacer matemáticas» en los alumnos y el cambio en el *rol* del profesor. María Jesús Luelmo y los miembros del IES

Carmen Conde de Las Rozas, de Madrid, que han experimentado el Taller estos últimos cursos, nos ofrecen su visión sobre este tema.

En el mismo seminario hubo un grupo de trabajo dedicado a los recursos y materiales utilizados en el aula de Matemáticas en la ESO. En él se analizó el papel que las nuevas tecnologías informáticas y audiovisuales pueden desempañar en el aprendizaje de las Matemáticas, allí se dijo:

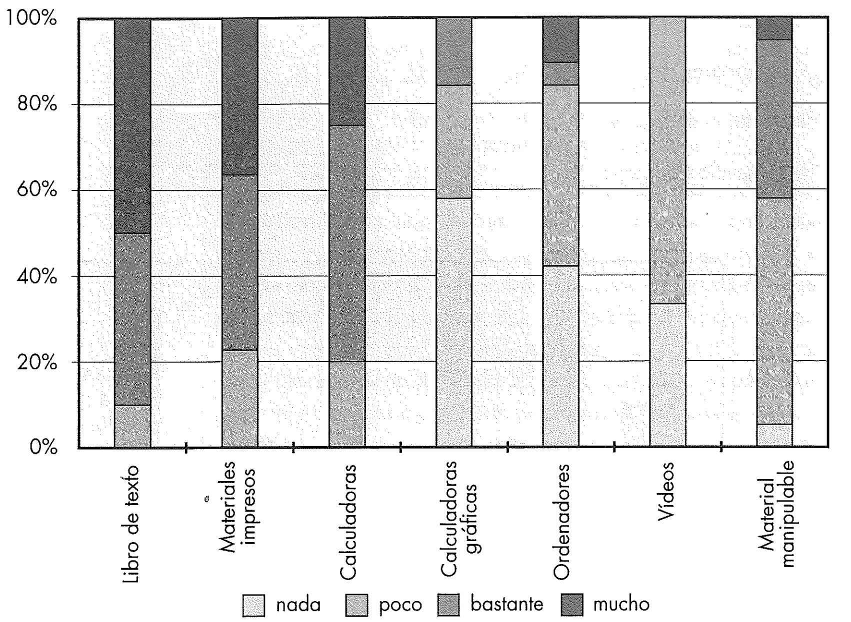
«En la actualidad nadie cuestiona, al menos a nivel intuitivo –no hay estudios serios al respecto en nuestro país–, la rentabilidad didáctica de estos recursos. No existe una tradición de utilización de recursos audiovisuales en Matemáticas, en gran parte debido al deficiente sistema de producción, distribución y comercialización de vídeos didácticos...

Sin embargo, los recursos informáticos sí gozan de predicamento entre el profesorado, aunque a veces se dedican casi exclusivamente a las asignaturas de informática, vinculadas muchas veces al Departamento o Seminario de Matemáticas.»

Posteriormente, en el seminario de la Federación celebrado en el mes de mayo en Granada sobre recursos, hubo también un grupo de trabajo específico sobre Nuevas Tecnologías.

Sin embargo, la encuesta de la SMPM revela unos datos inquietantes respecto de la utilización de los ordenadores y de los vídeos como materiales de aula. Ante la pregunta: «¿Qué materiales utilizas en clases de matemáticas de ESO?», se obtienen las siguientes respuestas:

	Nada	*Poco*	*Bastante*	*Mucho*
Libro de texto	0	2	8	10
Materiales impresos	0	5	9	8
Calculadoras	0	4	11	5
Calculadoras gráficas	11	5	3	0
Ordenadores	8	8	1	2
Vídeos	6	12	0	0
Material manipulable	1	10	7	1

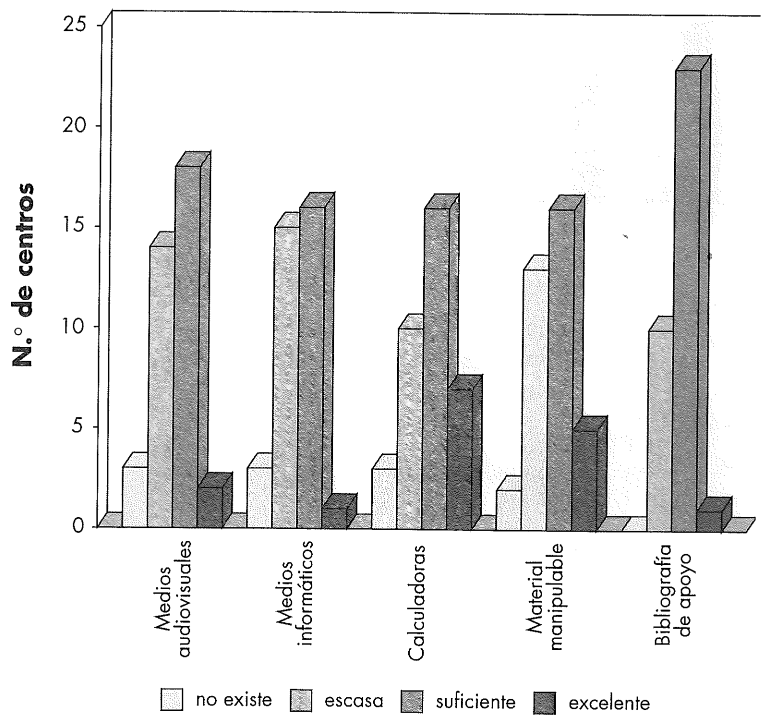


Materiales usados en Matemáticas en ESO

Como se ve en estos datos elaborados por departamentos de Matemáticas de centros de Madrid, la utilización de las «Nuevas Tecnologías» está en todos ellos entre «Nada» y «Poco». Y, por lo que parece, no son sólo conclusiones aplicables a Madrid. En el informe del INCE sobre la ESO, en el apartado sobre la utilización de los distintos recursos se obtienen unos datos muy parecidos, aunque esta vez no referidos a Matemáticas sino al conjunto de las asignaturas. En ese informe, en una escala de 0 a 5, los medios audiovisuales obtienen una puntuación de 2,92 –en Matemáticas seguro que aún menos– y los medios informáticos de 2,43, frente al 4,03 del libro de texto y el 4,19 de los apuntes propios.

Sin embargo, la opinión de los profesores, en la encuesta de la SMPM, sobre la dotación de los centros en medios audiovisuales e informáticos no parece indicar que la escasa utilización del ordenador y del vídeo se deba exclusivamente a una deficiente dotación. Cerca del 50% en ambos casos responden que es «Suficiente» o «Excelente». La pregunta «¿Hay en tu centro dotación material adecuada para la enseñanza de las Matemáticas?» es repondida por los encuestados de la siguiente manera:

	No existe	Escasa	Suficiente	Excelente
Medios audiovisuales	3	14	18	1
Medios informáticos	3	15	16	1
Calculadoras	3	10	16	7
Material manipulable	2	13	16	5
Bibliografía de apoyo	0	10	23	1



Dotación material del centro

Esta pobre utilización de recursos tecnológicos se produce además en una época en que todo lo relacionado con la información y la comunicación adquiere un peso creciente, hasta el punto de influir de manera clara en el diseño curricular general de la ESO, con la aparición de asignaturas directamente vinculadas a estas tecnologías y también en asignaturas concretas como las Matemáticas en las que la interacción con estos recursos es especialmente notable.

Quizás el problema surja al cubrir el camino de la teorización a la práctica cotidiana del aula. Por ello hemos incluido en el Informe tres artículos relacionados directamente con estos temas, uno de Leoncio Santos, ex asesor del PNTIC, sobre los medios informáticos, otro de José Muñoz, sobre los recursos audiovisuales y un tercero, creemos que ante la extensión y crecimiento del fenómeno no podía faltar, sobre la utilización didáctica de Internet en Matemáticas. Los tres contienen no sólo reflexiones teóricas sino que incluyen bastante información sobre materiales y metodología de aplicación en el aula.

Los dos siguientes artículos tratan sobre uno de los aspectos que en la actualidad más preocupan al profesorado: el tratamiento de la diversidad en el aula.

La extensión de la obligatoriedad hasta los 16 años, que se convierten en la práctica hasta los 18 en algunos casos, nos hace encontrarnos dentro de un aula con un amplio abanico de tipos de alumnos, con niveles de conocimientos dispares pero también con motivaciones, intereses, aptitudes y actitudes mucho más diversas que los que encontrábamos con el plan anterior.

La pregunta de muchos profesores es ¿qué hago yo para atender satisfactoriamente, dentro de una misma clase, al menos a cuatro o cinco colectivos tipificados de alumnos diferentes?, ¿cómo organizo y gestiono la clase para que la atención a esa diversidad de situaciones de aprendizaje sea un hecho y no meras palabras reflejadas en el proyecto educativo o en el proyecto curricular?, ¿qué hago para no volverme loco?

Las nada fáciles respuestas a algunas de estas preguntas nos las brinda Xaro Nomdedeu en su artículo. En él nos presenta el desarrollo concreto de una experiencia de aula sobre el tratamiento de la diversidad. Aunque esta experiencia se desarrolló con un curso de 3.° de BUP, pensamos que contiene suficiente información valiosa para poder aplicarla en la etapa de la ESO.

El último gran problema pedagógico del informe, que no de la realidad cotidiana de la enseñanza de las Matemáticas en esta etapa que seguro que presenta muchos más y quizás tan interesantes y complicados como los que hemos tratado, es el de la evaluación.

Si los cambios de contenidos inciden de una forma directa en la evaluación del saber de los alumnos, las propuestas metodológicas y sobre la misma evaluación del diseño currícular de Matemáticas nos hace enfrentarnos a una situación completamente nueva, en la que juzgar los conocimientos del alumno es uno más y quizás no el más importante del proceso de evaluación. La evaluación adquiere su verdadero sentido cuando se convierte en una herramienta más para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, cuando al mismo tiempo que la valoración de conocimientos ajenos el profesor ha de enfrentarse con la valoración y validación del propio proceso, de los recursos utilizados, de las metodologías puestas en práctica, de la organización de tiempos y espacios y, en fin, del sistema en su conjunto. No es una tarea simple y, sobre todo, no estamos acostumbrados a ser al mismo tiempo sujeto y objeto de evaluación.

Con el último artículo, de Salvador Guerrero, pretendemos iniciar una serie de reflexiones sobre el tema de la evaluación en Matemáticas, tema que el tiempo y la práctica irán perfilando, matizando y enriqueciendo.

Seguro que a todos se os ocurren muchos otros temas que deberían haber sido incluidos en este informe: formación inicial y permanente del profesorado, la adecuación al contexto, el número de horas de clase, la formación de actitudes y valores... Pero el espacio y el tiempo son limitados y, sobre todo, pensad que aún estamos en la fase de anticipación de la Reforma y que la realidad y la actividad docente durante estos años nos brindará bastantes ocasiones para poder dar respuesta a tanto problema abierto. Al fin y al cabo lo nuestro es la «resolución de problemas».

Antonio Pérez
IES Salvador Dalí. Madrid.
Sociedad Madrileña de
Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

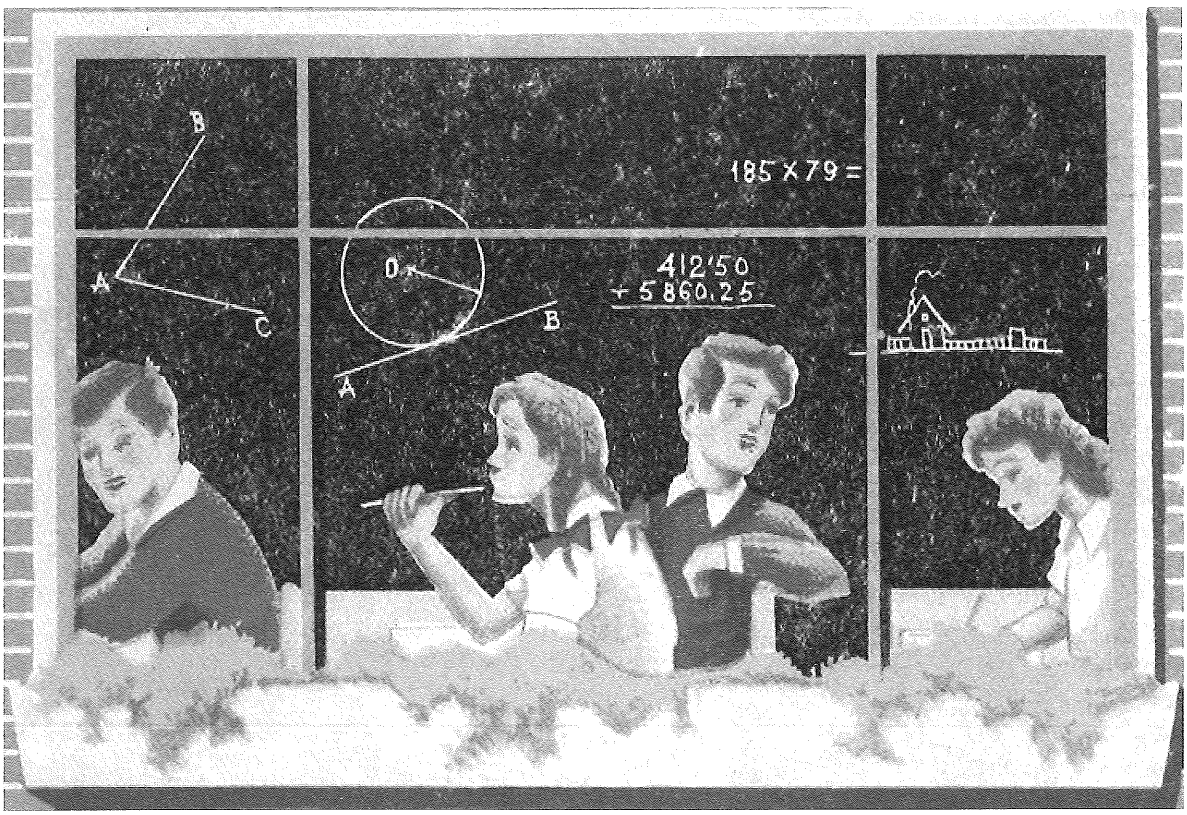
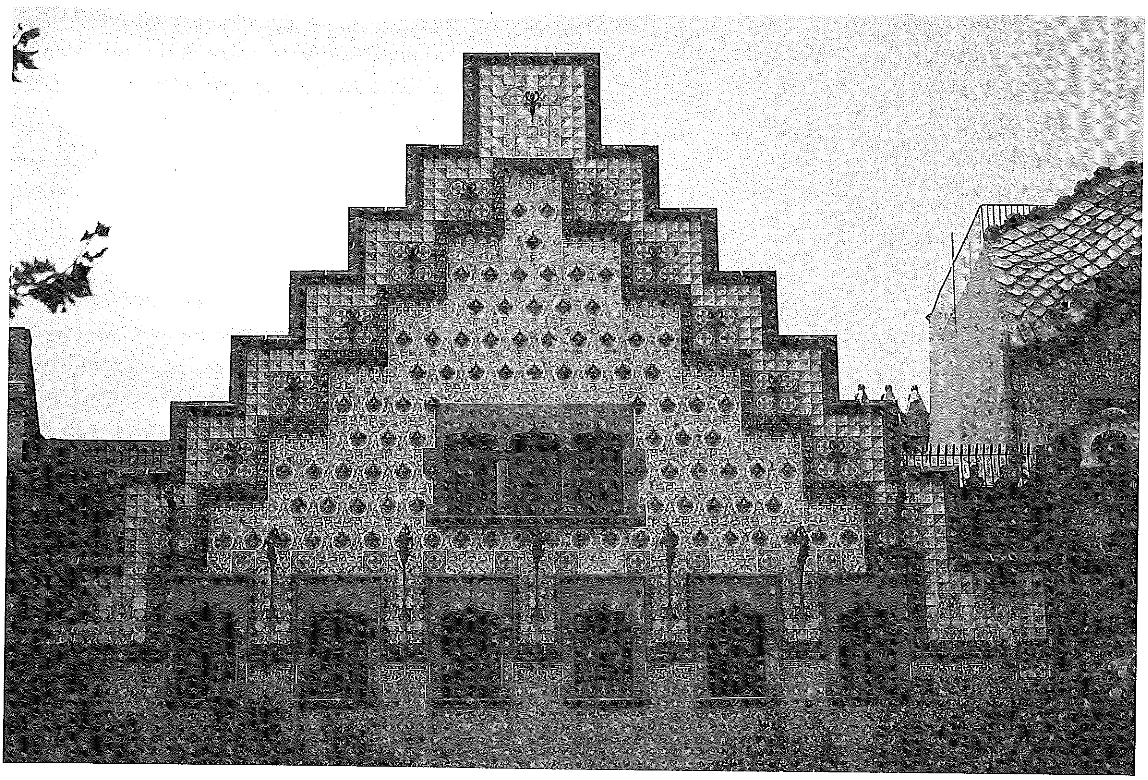


Ilustración de la portada del libro *Nueva Enciclopedia Escolar*,
Hijos de Santiago Rodríguez, Burgos, 33 edición, 1954.



Barcelona

Fotos: Pilar Moreno

Villajoyosa

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 53-59

El currículo de Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria

Vicente Rivière

INFORME

Los programas para la enseñanza de las matemáticas son habitualmente el producto de la conjunción de una serie de factores que influyen en cada una de las decisiones que contienen. A partir de la situación previa, se sitúa el actual currículo de matemáticas en el contexto espacial y temporal en el que ha sido elaborado. Aquellos factores han dado lugar en este caso a una orientación determinada, que se describe en sus rasgos más característicos, concretando las decisiones a que han dado lugar.
Este análisis se completa con algunas reflexiones acerca de las condiciones necesarias y reales en las que se pone en práctica el currículo y su incidencia en los resultados.

EL PUNTO de partida

Cualquier propuesta que pretenda determinar qué es lo que los alumnos deben aprender o qué es lo que los profesores han de intentar enseñar ha de ser necesariamente ambiciosa. Se parte de los deseos plasmados en listas de objetivos que engloban en un mismo paquete lo que deben conseguir profesores y alumnos en muy diferentes situaciones: con medios y sin ellos, con ganas y sin ellas, con facilidad y sin ella. A partir de estos objetivos, cuyo contenido sólo se cuestiona en ocasiones por ambicioso, se determinan los contenidos con diferente organización en cada caso, con mayor o menor detalle, con un formato u otro. El currículo de matemáticas es siempre una opción sobre lo que debe ser la educación matemática en las condiciones para las que está definido. Como tal opción, ha de responder a los presupuestos para los que ha sido elaborado, de acuerdo con una serie de criterios sobre qué se entiende que necesitan los alumnos, sobre cómo son y se aprenden las matemáticas y sobre en qué condiciones se produce su enseñanza. En todo caso, el currículo ha de atender, del mejor modo posible, a las necesidades de los alumnos a los que va dirigido y a los profesores que han de desarrollarlo y llevarlo a las aulas.

El currículo es siempre producto del momento en el que se elabora, de las tendencias de la época en relación con el aprendizaje y con la enseñanza, de las condiciones en que se imparte, de los alumnos a los que va dirigido y, sobre todo en los niveles básicos, de las demandas sociales sobre lo que deben aprender los escolares. Como no podía ser de otro modo, también la reforma de 1970 dio lugar a unos programas en gran medida producto de aquel momento. Y lo hizo con tal virulencia que el intervalo de tiempo transcurrido entre la publicación de los programas de la EGB, en el mismo año 1970, y los de

BUP, cinco años más tarde, ya fue suficiente para que estos últimos suavizaran el enfoque fuertemente estructuralista de los primeros. Mantenían, sin embargo, e incluso profundizaban, el fuerte peso del álgebra y del análisis que se había impuesto en los programas de la reforma anterior, de mediados de los años cincuenta.

Los programas de BUP y los de EGB compartían otras características. Por ejemplo, la eliminación de la geometría tal como se venía impartiendo desde hacía siglos hasta entonces. Lo que en aquel momento muchos consideraban excesos de la geometría euclídea en la enseñanza secundaria, dio lugar a una reacción que supuso la práctica desaparición de una parte de lo que, hasta esa época, se consideraba algo esencial en la enseñanza de las matemáticas. La geometría euclídea se sustituyó por una visión «cuantificada» de lo geométrico, que en EGB se reducía al cálculo de áreas y volúmenes y en BUP se limitaba a la geometría analítica. Se privó así a los alumnos de ocasiones en las que razonar sobre las formas y posiciones geométricas separadas de la medida o del álgebra.

Es indudable que el paso de los años permitió suavizar algunas de las propuestas, adaptándolas, en la medida de lo posible, a una realidad que parecía decir de manera incuestionable que algunos de los contenidos prescritos no se ajustaban adecuadamente a la evolución de los alumnos, o que determinadas orientaciones no permitían ofrecer unas matemáticas suficientemente utilizables, característica ésta esencial en una oferta educativa dirigida a toda la población escolar. Las propuestas oficiales de modificación de los programas, que se produjeron ya a finales de los setenta, se vieron interrumpidas en 5.° de EGB. No obstante, una mera comparación de los libros de texto de los primeros setenta con los de los últimos ochenta, en cualquier nivel, hace ver cómo cambia la importancia y la orientación de muchos aspectos del currículo. Este cambio se produce, además, tanto en el ciclo superior de EGB como en BUP.

Nuevas necesidades para la educación matemática

En los tres últimos decenios se han puesto de manifiesto una serie de cambios que han ido desajustando aún más los planteamientos del currículo anterior con la realidad. Las ideas aceptadas sobre lo que debe ser la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos han sufrido una considerable evolución. Se tiene ahora un mayor conocimiento sobre cómo se produce el aprendizaje, en general, y el de las matemáticas en particular; pocos defienden ahora, y en versiones muy modificadas, los presupuestos estructuralistas en que se basaban los currículos que se elaboraron en las décadas de los sesenta y setenta. Aun siendo la didáctica de las matemáticas un campo de conocimiento, aunque viejo, con pocos paradigmas universalmente aceptados, se va adquiriendo un volumen de investigación y reflexión que permite ajustar mejor las ideas sobre qué es lo que es más adecuado incluir en un currículo de matemáticas, cómo se debe organizar, etc.

En el tiempo transcurrido desde la publicación de los anteriores programas oficiales se han producido cambios de gran envergadura en la sociedad que deben también ser tenidos en cuenta en la enseñanza de las matemáticas.

En este contexto se dan algunas circunstancias, ajenas en principio a la propia enseñanza de las matemáticas, que exigen un nuevo currículo. Por una parte, la nueva organización de la estructura educativa que significa que la ESO impone condiciones hasta ahora inexistentes al currículo de matemáticas en estas edades. Le extensión de la escolaridad obligatoria supone la afluencia de alumnos con un perfil diferente y con necesidades distintas. En estas condiciones se han de perseguir también otros fines en la enseñanza de cualquier materia y, en particular, de las matemáticas. La educación secundaria obligatoria se centra en un intervalo de edades clave en la enseñanza de las matemáticas, por ser el momento en el que se inicia el desarrollo de la capacidad de formalizar y se hace posible algún grado significativo de abstracción. Es también cuando la relación con el mundo ajeno a su experiencia escolar proporciona experiencias de utilización, o sensaciones de inutilidad, de todo cuando se aprende dentro de las aulas. Y es, por último, cuando la experiencia con el aprendizaje de las matemáticas ha fijado en los adolescentes una imagen sobre lo que son capaces o no de conseguir, basadas en percepciones no siempre reales pero que, en todo caso, revelan las grandes diferencias que se producen en la relación de los humanos con las matemáticas.

En el tiempo transcurrido desde la publicación de los anteriores programas oficiales se han producido cambios de gran envergadura en la sociedad que deben también ser tenidos en cuenta en la enseñanza de las matemáticas. Especialmente en una etapa obligatoria, el currículo debe responder a las necesidades sociales, porque en buena medida debe ser lo que la sociedad pide al sistema educativo. Entre las muchas posibles muestras de estas nuevas condiciones que exigen respuesta de la educación matemática son las que se derivan del peso creciente que en la sociedad tiene todo lo relacionado con la información. Su posible exceso y el peligro de falta de control por parte de los ciudadanos piden, al currículo de cualquier materia, el desarrollo de procedimientos que permitan la valoración de la posible veracidad de lo que se recibe, de su influencia sobre nosotros o sobre otros o de la utilización que se hace de lo cuantitativo para arropar las ideas. Pero también la sociedad ha evolucionado en el modo en como se trata y se exige a los estudiantes. Todo ello ha ido produciendo un desajuste cada vez mayor entre las necesidades de los jóvenes y la forma de atenderlas a partir de su aprendizaje en matemáticas.

La creciente importancia de las nuevas tecnologías impone también nuevas condiciones a las que es preciso hacer frente en la enseñanza de las matemáticas. Si bien la presencia de los nuevos medios de cálculo, organización y transmisión de la información tiene una influencia notable en toda la enseñanza, su interacción con las matemáticas es especialmente notable. Actualmente se ha producido ya una generalización del uso de la calculadora en todos los ámbitos, y una cada vez mayor presencia de programas y calculadoras con aplicaciones matemáticas progresivamente más sofisticadas, tanto en cuanto al cálculo, como en el manejo del lenguaje simbólico o gráfico. Ello obliga a reconsiderar el papel y el peso que se asigna a los diferentes procedimientos de cálculo, numérico o simbólico; y lleva también a modificar el modo en que debemos enfrentarnos a su enseñanza.

Pero quizá el mayor cambio que se ha producido en la sociedad es, precisamente, la comprobación de que estamos, y seguiremos estando a partir de ahora, en una modificación permanente de las condiciones en las que se desarrolla la vida social. No sólo no hay seguridad sobre los contenidos concretos que «necesitarán» los estudiantes actuales. Podemos sospechar con bastante seguridad que en gran medida serán cosas diferentes de las que actualmente se pueden ofrecer. En estas condiciones, es imperativo orientar el currículo de modo que ofrezca a sus destinatarios los instrumentos para adaptarse a futuras necesidades, para aprender de manera más autónoma y para aceptar la utilización de las matemáticas cuando sea precisa. Es en este contexto en el que adquiere una mayor importancia la expresión antigua, y que en muchos casos ha sido un tópico sin mucho sentido, de que el aprendizaje de las matemáticas debe «enseñar a pensar». Para aprender a pensar es necesario asignar significado a los objetos sobre los que se piensa, es necesario adquirir estrategias de pensamiento, de resolución de problemas, que hagan más productiva la actividad pensante, es necesario, en fin, adoptar actitudes que favorezcan el éxito.

Se trata de un currículo dirigido a un colectivo de alumnos diferente, que se inserta en una sociedad distinta, que no pretende conseguir lo mismo que los anteriores y que debe recoger lo que se sabe sobre la educación matemática desde la elaboración del anterior. En este sentido, no parece factible describirlo en términos meramente comparativos con el anterior.

La profundización en los procesos de razonamiento matemático lleva a reconsiderar el papel de lo algorítmico en la educación matemática y, en general, de los procesos preestablecidos para resolver determinados tipos de problemas. El algoritmo basa su fuerza precisamente en que facilita la resolución de un tipo determinado de situaciones, asegurando su solución con exigencia menor de tiempo y esfuerzo y liberando así la mente, que puede dedicarse a tareas de búsqueda, de establecimiento de relaciones, de análisis, etc. Es, en este sentido, sólo un medio que facilita la tarea. Por más que en algunos casos, y en determinadas edades, se requiera un entrenamiento largo para adquirir determinadas destrezas algorítmicas, convertirlo en un fin en sí mismo desvirtúa su sentido.

Es necesario, en estas condiciones, unas nuevas previsiones para la enseñanza de las matemáticas que atiendan a los requerimientos que se deducen de lo anterior. Se trata de un currículo dirigido a un colectivo de alumnos diferente, que se inserta en una sociedad distinta, que no pretende conseguir lo mismo que los anteriores y que debe recoger lo que se sabe sobre la educación matemática desde la elaboración del anterior. En este sentido, no parece factible describirlo en términos meramente comparativos con el anterior. En la medida en que el nuevo currículo es más explícito en sus planteamientos y en la descripción de los contenidos, permite un análisis mayor de su ajuste y permitirá, en el futuro, la modificación de aquellos aspectos que hayan quedado superados.

El currículo

Las nuevas condiciones enumeradas más arriba exigen un nuevo planteamiento del currículo de matemáticas en la enseñanza secundaria. Es preciso, por una parte, incluir nuevos contenidos, hasta ahora ausentes, o recuperar algunas partes que en las últimas reformas fueron desapareciendo y que actualmente se valoran más. Es necesario también modificar el peso relativo que se asigna a determinados contenidos, que en unos casos han adquirido nueva importancia, de acuerdo con las consideraciones anteriores, y en otras la han ido perdiendo. Y hace falta, por último, buscar un nuevo equilibrio entre, por una parte, lo conceptual, las ideas sobre los objetos matemáticos y las relaciones que se pueden establecer entre ellos y, por otra parte, los procedimientos que permiten comunicarse con las matemáticas o resolver problemas y las destrezas de cálculo, de dibujo y de medida. La clarificación de cada uno de los tipos de contenido facilita esta labor de búsqueda de un equilibrio siempre difícil.

En relación con la situación previa, quizá el fenómeno que más haya incidido en la actividad matemática en general y en la enseñanza de las matemáticas en particular sea la presencia, masiva actualmente, de nuevos medios de cálculo y tratamiento de la información numérica, gráfica e incluso simbólica. El más simple, la calculadora, ha modificado los hábitos de la población y de los estudiantes. Esta circunstancia obliga a reformular los contenidos y métodos de la enseñanza de las matemáticas, reconsiderando el papel que en los últimos tiempos han jugado las destrezas de cálculo, escrito, mental y estimado, y definiendo las nuevas necesidades impuestas para enseñar el cálculo numérico a una población que va a utilizar la calculadora siempre que le sea posible. El sentido del aprendizaje de contenidos relacionados con los números necesariamente ha de verse afectado por los cambios producidos por la presencia de nuevos medios de cálculo. Estos medios hacen posible desplazar la atención, al menos a partir de ciertos niveles, hacia cuestiones diferentes del desarrollo de la destreza en los algoritmos de lápiz y papel. Pero también obligan a introducir nuevos contenidos, requeridos por su uso. La «alfabetización numérica» exige ahora, más que antes, el uso de diferentes formas de expresar los números, el cálculo mental, exacto o estimado según el caso y, sobre todo, la asignación de sus diferentes significados a cada una de las operaciones con cada una de las diferentes formas de expresar los números.

Ese sentido de los números se ha visto reducido en el pasado reciente por una especie de «efecto bocadillo», por el cual se reduce el tratamiento de lo numérico por la presión combinada de, por una parte, la gran dedicación a los algoritmos de cálculo, y, por otra, la anticipación en la introducción del álgebra. Por este efecto, se han reducido, en el currículo y en la práctica, los contenidos relacionados con el uso de los números y de sus relaciones, tales como la divisibilidad o la proporcionalidad.

La hipertrofia que ha sufrido el álgebra a lo largo de los años, y sobre todo su introducción temprana, han tenido consecuencias no sólo en la reducción de los contenidos sobre los números, esenciales en la formación matemática de todos los alumnos. También se ha reflejado en un desplazamiento hacia el virtuosismo en el uso de expresiones algebraicas, a costa de una reducción de su significado.

La hipertrofia que ha sufrido el álgebra a lo largo de los años, y sobre todo su introducción temprana, han tenido consecuencias no sólo en la reducción de los contenidos sobre los números, esenciales en la formación matemática de todos los alumnos. También se ha reflejado en un desplazamiento hacia el virtuosismo en el uso de expresiones algebraicas, a costa de una reducción de su significado. Para corregirlo, es necesario una nueva consideración del álgebra en el currículo, que permita centrar el esfuerzo en los procesos que facilitan la utilización de las expresiones algebraicas, entre ellos la simbolización, la dotación de sentido a las normas de actuación y a los símbolos que se utilizan o la interpretación de expresiones y soluciones.

Cualquier programa de matemáticas para la educación secundaria persigue la mejora de la capacidad de los alumnos para resolver problemas. Esta formulación genérica se ha traducido de distinta manera en los programas escritos y, sobre todo, en la práctica de los profesores. Nadie niega su importancia, en buena medida por la indefinición que ha existido hasta ahora sobre lo que debe entenderse por problema en este contexto. En unos casos se dice explícitamente, en otros se da por supuesto que, al ser la resolución de problemas una actividad inseparable a la matemática, es algo presente, casi de forma independiente a los contenidos concretos. Se presupone así que el manejo de objetos matemáticos por los estudiantes les permite desarrollar su habilidad para resolver problemas. Sin ser del todo incierta esta afirmación en algunos casos, parece haber cada vez más evidencia de que no basta con la realización de actividades matemáticas cualesquiera para desarrollar las capacidades relacionadas con la resolución de problemas. Requiere esta actividad que los alumnos se enfrenten a situaciones más abiertas de lo habitual, tanto en el contexto en que se presentan como en las técnicas concretas que deban utilizarse e incluso en la propia definición de lo que se busca. Todo ello justifica su inclusión en el currículo como un contenido más, algo que conviene que sea enseñado de forma intencionada, para lo que es bueno que haya actividades específicas, integradas o no con otros contenidos. En definitiva, la educación secundaria debe proporcionar instrumentos para enfrentarse fuera del aula a situaciones de resolución de problemas que pocas veces se presentarán en «forma matemática» aunque para su resolución pueda ser conveniente utilizar estrategias similares a las que se pueden poner en juego en las clases de matemáticas.

Sin duda la recuperación de la geometría puede propiciar muchas ocasiones para la resolución de problemas así entendida; pero, sobre todo, permite cubrir un aspecto muy importante de la formación requerida por los jóvenes de secundaria. Tiene, por una parte, un carácter menos algoritmizable que otros contenidos, lo que proporciona la ocasión de reforzar el carácter formativo del aprendizaje de las matemáticas. Aun con todas las salvedades que requiere el caso, conviene recordar que con la desaparición de la geometría clásica de los programas de matemáticas disminuyeron notablemente dos elementos esenciales: el desarrollo de la intuición y la capacidad de pensar sobre las formas y relaciones geométricas, por una parte, y, por otra, la ocasión de desarrollar procesos de razonamiento, más o menos simples según el nivel, pero en todo caso imprescindibles en la educación matemática de los estudiantes de secundaria.

La geometría se orienta en el currículo en un sentido dinámico: no se trata principalmente de asistir como espectador a la descripción del mundo geométrico, de sus objetos y de sus relaciones, aunque sea importante conocerlos. La presencia de la geometría persigue, sobre todo, desarrollar la capacidad de analizar lo que nos rodea, encontrar nuevas relaciones y estar abierto a la consideración y el estudio de formas geométricas desconocidas. Todo esto exige una geometría que, sin olvidarla, vaya más allá de la medida de longitudes, áreas y volúmenes y, desde luego, no se alcanza con una geometría algebrizada.

...la educación secundaria debe proporcionar instrumentos para enfrentarse fuera del aula a situaciones de resolución de problemas que pocas veces se presentarán en «forma matemática» aunque para su resolución pueda ser conveniente utilizar estrategias similares a las que se pueden poner en juego en las clases de matemáticas.

Bajo el nombre de tratamiento de la información se agrupan una serie de contenidos que persiguen la adquisición de capacidades relacionadas con la lectura, la interpretación, el análisis y la comunicación de información con soporte matemático y, en su caso, con la trasformación de esa información para obtener nuevos datos. El estudio de las relaciones entre magnitudes variables es un aspecto central en este objetivo. Pero, precisamente por tener esa finalidad se justifica su tratamiento en la medida en que se recojan los modos habituales de transmisión de esa información. Así, aun cuando el tratamiento algebraico de las relaciones tiene una relevancia grande y las hace especialmente útiles en el campo académico, es su aspecto gráfico y su tratamiento numérico, menos recogidos hasta ahora en el currículo, lo que hará funcional este aprendizaje. Junto a ello, la concepción conjunta de la dependencia aleatoria y las relaciones funcionales como formas complementarias de tratar los fenómenos en los que se presentan relaciones cuantificables, amplía notablemente las posibilidades de aplicación y permite completar la visión y el trabajo de los alumnos de esta etapa sobre las relaciones entre magnitudes.

En el marco descrito al principio de la evolución de los programas de matemáticas, aquí como en otros muchos lugares y a lo largo de casi todo el siglo, se puede entroncar el incremento en el peso que se asigna en el nuevo currículo al significado de la probabilidad y su cálculo. Se parte de la consideración del carácter cualitativamente diferenciado, dentro del pensamiento matemático en general, del llamado «pensamiento probabilístico», que permite analizar adecuadamente las situaciones en las que interviene el azar. El desarrollo de la capacidad para enfrentarse a lo incierto o el análisis de las concepciones previas sobre lo azaroso, muchas veces no adaptadas a la realidad, se considera parte esencial en la formación general que deben tener los alumnos. Precisamente por tratarse de una forma de pensar distinta que permite analizar situaciones diferentes, requiere una presencia en el currículo con un peso mayor del asignado hasta ahora.

Se conciben las matemáticas como un conjunto de instrumentos que proporcionan un modo de enfrentarse a las situaciones desconocidas, un medio para comunicar y comunicarse con los demás y también, como no, una vía para disfrutar, ya sea con el proceso de resolución o con la obtención de soluciones, con la optimización de los procedimientos, con la visión o el manejo de formas geométricas o de cualquier otro modo. Hacer efectiva cualquiera de estas tres finalidades exige que los estudiantes adopten ante las matemáticas una disposición al menos relativamente favorable. No parece fácil que nadie utilice las matemáticas para resolver problemas, para comunicar o recibir información o para disfrutar si su idea sobre su relación con las matemáticas es excesivamente pobre, si percibe las matemáticas como algo completamente ajeno, o si considera inabordable cualquier situación que parezca tener que ver con la utilización de las matemáticas. Desarrollar actitudes favorables debe ser, entonces, parte esencial en el currículo de matemáticas, independientemente de que hacerlo exija estrategias de enseñanza diferentes de las que pueda requerir, por ejemplo, el aprendizaje de destrezas de cálculo. Partiendo de la conveniencia de recoger en el currículo todo lo que es objeto de enseñanza, se hacen explícitas también las actitudes hacia las matemáticas. Se engloban entre las actitudes tanto las que se refieren a la idea que se obtiene sobre qué son las matemáticas y cuál es su utilidad, como otras de carácter más personal como la tendencia a utilizar lo que se sabe cuando la situación lo requiera o una percepción positiva de lo que uno es capaz de conseguir con las matemáticas.

El énfasis en las actitudes es, sin duda, uno de los aspectos clave de un currículo que, al menos en su concepción, trata de responder a las necesidades de toda o casi toda la población escolar entre los doce y los dieciséis años. Un programa para la educación matemática dirigido a todos los escolares debe ser suficientemente amplio y abierto como para permitir atender a estudiantes con perfiles muy distintos: en cuanto a su competencia inicial, en cuanto a su disposición para el aprendizaje, en cuanto a su forma de aprender, etcétera. Es este, quizá, el aspecto más complejo de la construcción y desarrollo del currículo y al que es necesario hacer frente combinando una elaboración e interpretación del currículo oficial suficientemente flexible, con estrategias metodológicas adecuadas. Desde el punto de vista del currículo, bastantes de los elementos comentados más arriba tienen que ver con la necesidad de atender a alumnos diferentes. Sirva de ejemplo el desplazamiento en el peso del álgebra hacia otros contenidos, lo que introduce una mayor variedad que facilita el acercamiento hacia las matemáticas de un mayor número de alumnos. Conviene señalar en todo caso que, aunque nada impide enseñar más de lo establecido, siempre que se considere posible, una lectura detallada parece indicar más bien que la relación de contenidos tiende a ser enormemente ambiciosa.

No puede analizarse el currículo sin considerar al mismo tiempo cuáles son las condiciones exigibles para ponerlo en práctica. Por señalar sólo algunas de las principales, conviene recordar que es necesario, en primer lugar, como en cualquier cambio, un esfuerzo de adaptación a la nueva situación por parte de los profesores, mayor del habitual en la medida en que se entre efectivamente en el análisis y organización de los contenidos, pero, sobre todo, por cuanto se deben enseñar contenidos nuevos o dar orientaciones distintas a otros ya presentes en programas anteriores. En la medida en que este esfuerzo de adaptación vaya acompañado de programas de formación, tendrá un menor coste personal y será más viable. Es preciso, también, establecer mecanismos organizativos en los centros que permitan a los profesores enfrentarse con garantías de éxito a las diferencias entre los alumnos, lo que exige un número adecuado de alumnos en el aula, servicios de orientación, recursos humanos y materiales para atender a los alumnos que presentan más dificultades o menos interés. Hacen falta, en fin, materiales curriculares que respondan a las exigencias descritas antes, en cuanto a su organización y estructura, su orientación y su formato.

Ningún currículo es universalmente válido. [...] Algunas de las circunstancias que dieron lugar al que se ha comentado cambiarán en un futuro más o menos próximo y aconsejarán igualmente el cambio en unas pocas o muchas de las características de este. En todo caso, el tiempo acaba convirtiendo en viejo lo nuevo.

Después del currículo

Ningún currículo es universalmente válido. No parece sensato pretender más que atender las necesidades de los estudiantes y profesores de un lugar determinado y en un tiempo concreto. Algunas de las circunstancias que dieron lugar al que se ha comentado cambiarán en un futuro más o menos próximo y aconsejarán igualmente el cambio en unas pocas o muchas de las características de este. En todo caso, el tiempo acaba convirtiendo en viejo lo nuevo. Precisamente el tiempo transcurrido desde la publicación del currículo, y sobre todo la experiencia que en estos años se ha tenido en los centros que han anticipado la etapa, permite ya ir avanzando en el análisis de su puesta en marcha. Es interesante, en este sentido, que se produzcan iniciativas como el seminario celebrado en el otoño pasado por la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, aunque en ese caso se trataba de analizar no tanto el currículo como su puesta en práctica.

La implantación de un nuevo programa para la enseñanza de las matemáticas, en todo caso, es siempre el resultado de la interacción entre ese currículo y una serie de factores estructurales del sistema educativo. Lo que ocurre en la aulas en las que se aprende y se enseña matemáticas responde al llamado currículo real, que es, en cierto modo, el resultado de esa interacción. El análisis de ese currículo real, cuando sea posible hacerlo con suficientes garantías, es lo que permitirá comprobar en qué medida se han ajustado las previsiones a la realidad. Este análisis parte de una dificultad: no es posible la comparación con la situación anterior, por cuanto ésta es radicalmente diferente en los alumnos a los que va dirigido y en la finalidad que se persigue.

Se observan ya, sin embargo, algunos factores que pueden afectar a los resultados, aunque actualmente no sea posible establecer el grado en que influyen. Por centrarlo únicamente en lo que atañe directamente a la enseñanza de las matemáticas, hay que recordar, en primer lugar, que la aplicación del currículo requiere unos medios que permitan atender adecuadamente a los alumnos que presentan mayores dificultades: la orientación en el momento adecuado y el apoyo, a menudo fuera del aula. Ambos exigen unos recursos que en pocas ocasiones están disponibles. Los medios materiales necesarios, aun siendo de menor coste, tampoco parece que estén siempre a disposición del profesorado.

Los programas de matemáticas presentan lo deseable, asignando a su enseñanza una dedicación horaria con la que se supone que, en condiciones normales, puede alcanzarse sustancialmente lo previsto. Es claro que siempre se podrá hacer más cuanto mayor sea el tiempo disponible. La información que se tiene actualmente permite asegurar que la dedicación horaria asignada actualmente a las matemáticas en los distintos cursos de la secundaria obligatoria no permite enfrentarse adecuadamente a los contenidos prescritos. A esto parecen contribuir varios factores. En primer lugar, algunos contenidos exigen en sí mismos un tiempo de dedicación considerable; ejemplos claros de ello son la resolución de problemas o la adquisición de un buen número de destrezas de cálculo numérico o algebraico. El aprendizaje de estrategias útiles en la resolución de problemas o el planteamiento de actividades que no sean meros ejercicios de aplicación exige tiempo, como también el aprendizaje de destrezas con suficiente precisión, con el uso adecuado de los símbolos, en su caso. Pero, en segundo lugar, la heterogeneidad en el alumnado requiere también estrategias docentes que, sean cuales sean, pasan por una mayor extensión de la enseñanza en el tiempo. La menor disposición de tiempo conduce, en bastantes ocasiones a organizaciones de la enseñanza que no tienen suficientemente en cuenta las necesidades de todos los alumnos. Se ve así cómo la menor disponibilidad de tiempo provoca el abandono de contenidos esenciales o una forma de enfrentarse a ellos que sólo permite el aprendizaje de algunos.

La información que se tiene actualmente permite asegurar que la dedicación horaria asignada actualmente a las matemáticas en los distintos cursos de la secundaria obligatoria no permite enfrentarse adecuadamente a los contenidos prescritos.

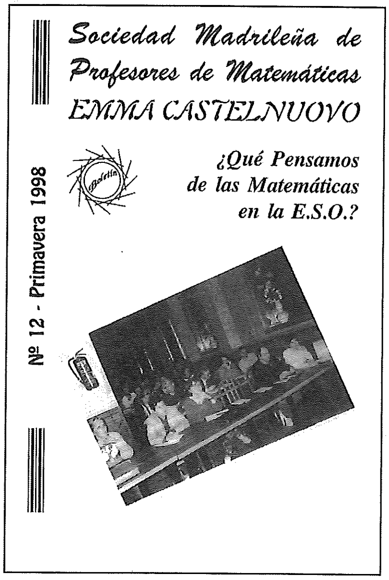
No parece que se hayan establecido, en todos los casos, los mecanismos de formación del profesorado necesarios para hacer frente a la aplicación de un currículo notablemente diferente en unas condiciones nuevas y a alumnos en muchos casos también distintos. Aun reconociendo la dificultad inherente a la formación permanente de un colectivo tan grande y heterogéneo, parece exigible un esfuerzo en formación de profesores, que no se está haciendo siempre ni en todas partes, que permita responder a las necesidades de la enseñanza de las matemáticas en este momento.

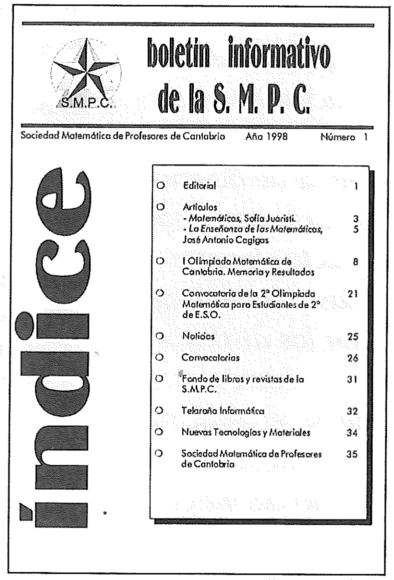
Sin duda uno de los factores que más influyen siempre en cuál es el currículo real son los materiales de los que disponen profesores y alumnos para apoyar su trabajo. La apertura del currículo ha tenido un efecto de diferenciación entre los materiales del mercado, buena en la medida en que permite una mejor adaptación a las condiciones concretas en las que se enseña y se aprende. Frente a la gran homogeneidad de los libros de texto anteriores, se pueden encontrar ahora materiales con una organización y un tratamiento de los contenidos radicalmente diferente, con un grado de profundidad variado y, en definitiva, más útil para más alumnos y profesores. No se puede ignorar, sin embargo, que no siempre los libros de texto han sido capaces o han querido recoger en todos sus términos las necesidades a las que el nuevo currículo pretende responder.

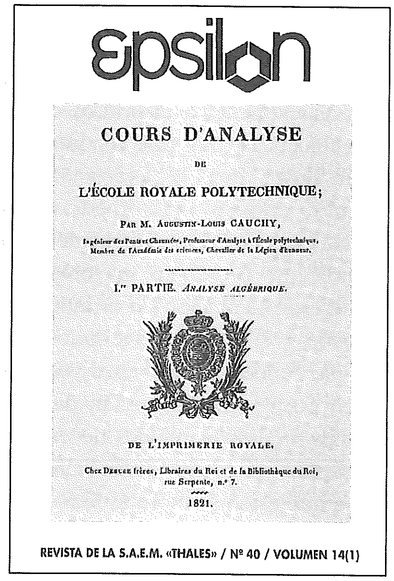
No es fácil, a la hora de analizar la implantación del nuevo currículo, determinar qué situaciones son efecto de la organización de la etapa y cuáles lo son de los cambios que se han producido en nuestra sociedad a lo largo de las últimas décadas. Aspectos tales como la influencia de los medios de comunicación, la presencia de nuevas formas de ocio y diversión de los jóvenes, la modificación de sus intereses, la variación en el modo en que son tratados los adolescentes por los adultos, el grado de exigencia o de «presión» que reciben de sus familias y del mundo adulto en general, sin duda han influido en la manera en que se enfrentan a su aprendizaje en general y a las matemáticas en particular.

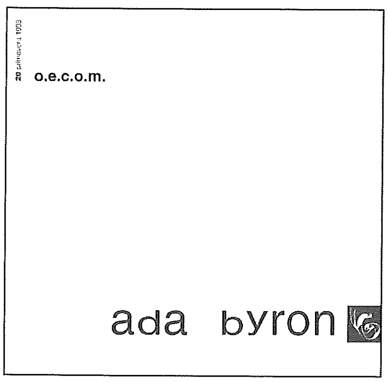
Vicente Rivière
Sociedad Madrileña de
Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

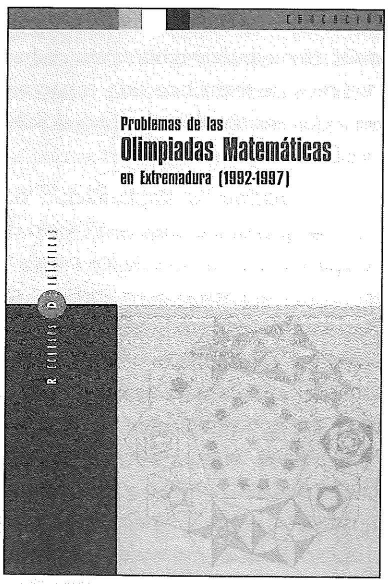
PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES

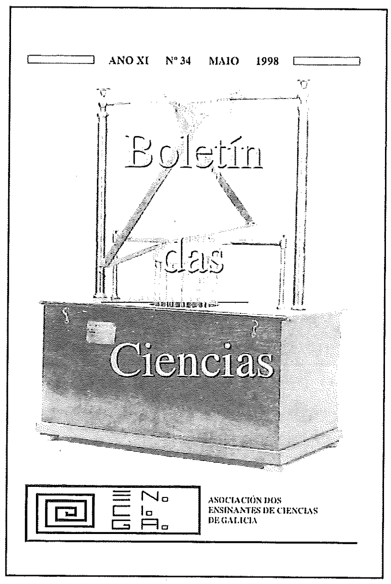












SUMA 29
noviembre 1998, pp. 61-72

Cataluña: un modelo curricular para la ESO

Xavier Vilella Miró

INFORME

El desarrolo curricular en Cataluña presenta diferencias respecto del resto de España, especialmente en la optatividad. Sin ánimo de exhaustividad, este artículo pretende informar sobre ello, y lo hace partiendo de la idea original, repasando el debate que suscitó su experimentación, y acabando en las opiniones, a veces enfrentadas, sobre su implantación generalizada. Por otro lado, el autor propone huir de posiciones maniqueas radicales e intenta aportar esfuerzo e ilusión para conseguir una mejora real y bien visible en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

DURANTE el Seminario sobre la implantación de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria, celebrado en El Escorial a finales de noviembre de 1997, pudimos percibir –también Antoni Vila representaba a FEEMCAT en aquel Seminario– el desconocimiento que había, en general, en el resto de España, respecto a la concreción de la Reforma en Cataluña. Participaba en una Mesa[1] Redonda cuando, explicando cómo se iba llevando a cabo la parte optativa del currículo de Matemáticas, algunas caras de los presentes mostraban cierta perplejidad cuando hablaba de «créditos variables, de síntesis...». Durante la misma Mesa Redonda y en las sucesivas jornadas de debate, pudimos explicar algunas diferencias fundamentales entre la Reforma en Cataluña y en otros lugares.

Sea como fuere, se me encargó la redacción de este artículo que yo entiendo debe ser informativo ante todo. Informativo especialmente de los aspectos principales que diferencian el modelo curricular catalán respecto del de otras comunidades autónomas. Y, sin lugar a dudas, la principal diferencia, aunque no la única, está en la optatividad. Un 30%, aproximadamente, del currículo de Matemáticas en la ESO es optativo, en los cuatro cursos. ¿De dónde vino la idea? ¿Cuándo se experimentó? ¿Qué se opinaba de los resultados de la experimentación? ¿Cómo funciona el modelo? ¿Cuál es la impresión general de su puesta en práctica? A estas preguntas pretende responder este artículo. Al final se propone una bibliografía por si esta pretensión no se logra en su totalidad.

Empecemos por algunas diferencias

Las diferencias en el currículo catalán no son producto de la improvisación, ni del deseo de mostrarnos diferentes

–que a menudo se nos adjudica–. Podemos encontrar algunas reflexiones que vienen de antiguo, aunque pocas veces tuvieron la oportunidad de quedar reflejadas en un currículo oficial. Me centraré en el periodo que va desde los inicios de la experimentación de la Reforma hasta la actualidad. En el año 1986 se habia aprobado la LODE, y ya en abril del año siguiente, Carbonell (1987) escribía: «Nos encontramos aquí con uno de los dilemas a dilucidar, planteado en términos simples: ¿es preciso ofrecer un primer ciclo obligatorio e igual para todos, con el fin de favorecer la integración y la igualdad de oportunidades de todos los adolescentes? O, al contrario, ¿es más conveniente ofrecer diversas opciones de estudios atendiendo a las diferencias individuales y académicas de los alumnos? Se han vertido argumentaciones de todo tipo en uno u otro lado, y se han ensayado propuestas con mil matices. La Generalitat ha optado, experimentalmente, por la primera vía, matizada por la oferta de créditos comunes y opcionales». Una justificación del currículo abierto se puede encontrar en Coll (1991).

Ya desde el inicio de la experimentación en Cataluña, el currículo se organizó en los llamados «créditos». La concreción de este término ha ido variando un poco a lo largo de los años, pero podemos intentar dar una explicación. El «crédito» viene a ser una secuencia didáctica de 35 horas que concreta un módulo de aprendizaje, y los hay de diversos tipos:

- *Comunes*: todos los alumnos deben realizarlos; desarrollan el primer nivel de concreción del Diseño Curricular de las áreas comunes y constituyen un plan estructurado para toda la etapa.
- *Variables*: propuestos por el centro, autorizados por la Generalitat y escogidos por los alumnos, dentro de ciertas limitaciones, forman las enseñanzas de carácter optativo. La mitad de la oferta debe ser del ámbito científico-técnico, un 30% del ámbito de humanidades y un 20% del de expresión. Los hay de tres tipos: de *ampliación*, de *iniciación* y de *refuerzo*. Además, hay limitaciones de «coherencia curricular»: un alumno no puede escoger todos sus créditos variables de deporte porque el deporte le guste mucho, el tutor debe orientarle adecuadamente; incluso, en el segundo ciclo de la ESO, se especifica un mínimo de créditos variables de lengua, lengua extranjera, matemáticas y ciencias sociales.
- *De tutoría*: destinados a la orientación, al debate y a superar dificultades personales o de grupo que puedan surgir.
- *De síntesis*: pretenden establecer si los alumnos han conseguido, y hasta qué punto, las capacidades formuladas en los objetivos generales establecidos en las diferentes áreas curriculares, mediante la aplicación a un proyecto concreto. Se trata de actividades interdisciplinares prácticas, que exigen trabajo en equipo, ingenio y habilidad.

Ya desde el inicio de la experimentación en Cataluña, el currículo se organizó en los llamados «créditos». La concreción de este término ha ido variando un poco a lo largo de los años... El «crédito» viene a ser una secuencia didáctica de 35 horas que concreta un módulo de aprendizaje...

La apertura del currículo catalán viene determinada por tres aspectos:

1) Se establecen unos contenidos comunes para todos los alumnos y otros contenidos optativos que el alumno escoge con ayuda de la orientación tutorial. Ello ha de permitir que todos consigan los objetivos generales al final de la etapa desarrollando al máximo sus posibilidades. Los centros pueden establecer créditos variables, distribuirlos de distintas maneras a lo largo de la etapa, intervenir más o menos en la elección de los alumnos, etc.
2) Los centros deben precisar la secuenciación y la ordenación de los contenidos de cada área, las prioridades y la organización de éstas en el conjunto de su Proyecto Curricular. El centro tiene autonomía para establecer los contenidos de los créditos comunes y de los variables, siempre y cuando se cumplan los objetivos generales de la etapa y los objetivos terminales.
3) La organización de los centros es flexible. Cada centro puede establecer las horas/trimestre de cada área, dentro de los límites establecidos en la normativa oficial: por ejemplo, si un centro decide dar una hora semanal de tutoría todo el año, cada trimestre habrá realizado un tercio de crédito; en tres trimestres, un crédito de tutoría entero (35 horas). Si decide poner dos horas semanales de, por ejemplo, Inglés o Educación Física, cada trimestre dará los dos tercios de un crédito, y en un curso entero serán 2 créditos en total (35 h x 2 trimestres, 70 horas). Para Matemáticas, se establecen generalmente dos modelos: los centros que dan 3 horas semanales durante dos trimestres (son dos créditos en un curso), y los que dan 2 horas semanales todo el año (también son dos

créditos en total). En los dos modelos, el total es el mismo.

En una entrevista con el Subdirector General d'Ordenació Curricular del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, que además es profesor de matemáticas, realizada en el mes de mayo de 1998, Pere Solà afirma que el currículo debe ser «arborescente», con un tronco y unas ramas, sin caer en el error de creer que la parte común quiere decir igual e idéntica para todos los alumnos. Insiste en que hay que trabajar por objetivos, adaptándose al alumno, con la finalidad de igualar oportunidades. En este contexto, la parte variable del currículo debe ser un complemento personal del desarrollo. En la parte común, habilidades instrumentales más básicas (cálculo, proporcionalidad...); en la parte variable, aquello que no será asequible a todos (abstracción, álgebra, formalización...). Preguntado sobre el porqué de las diferencias respecto de otras zonas de España, recuerda que se prentendía acabar con la separación entre BUP y FP y que, como consecuencia de ello, en la experimentación llevada a cabo en Cataluña, se vio necesaria la optatividad. El problema era que la definición de mínimos posterior no acabara con este enfoque. Para la optatividad se creó el crédito: se entendía simultáneamente como una herramienta y como una estrategia: flexibilizar y, a la vez, romper la uniformidad de la asignatura anual clásica. Ya se preveía que en los institutos sería dificil su implantación.

Evolución del debate sobre opcionalidad en el currículo

La verdad es que en los años de experimentación de la Reforma, el debate que se iniciaba quedaba muy lejos de las preocupaciones de los maestros y profesores que día a día afrontaban sus clases de EGB, de BUP o de FP. En los centros se constituían los Consejos Escolares, comenzaban los primeros ensayos de cierta autonomía económica, teníamos problemas de plantillas... La Reforma se veía como algo muy lejano.

Fernández Enguita (1988) se muestra ciertamente más crítico con respecto a la opcionalidad, aunque acaba expresando su convicción de que ésta no sería un riesgo si se diesen tres condiciones: «una programación curricular no atada a la idea de las asignaturas, mecanismos de reversibilidad adecuados y una sociedad más justa e igualitaria». Casi nada...

En 1988, bajo el título «Debate: la Reforma», aparece un artículo de Alsinet y Muñoz (1988) en el que analizan los resultados del modelo de opciones a partir de la experimentación realizada en sus dos centros. Al final del artículo, afirman: «...en nuestros centros, la reflexión sobre cómo atender la heterogeneidad del alumnado en el ciclo obligatorio está desplazando el punto de mira. De agotar las posibilidades, ciertas pero limitadas, de la opcionalidad curricular, estamos pasando a considerar otros elementos más centrales aún para el tratamiento de la diversidad: el conjunto del modelo didáctico, la preparación del profesorado, la organización escolar, la actuación de la administración educativa, la relación con el entorno... Si estos factores no se reforman también, y profundamente, acabaríamos el debate concluyendo que el currículum homogéneo no trata la diversidad y el flexible tampoco».

Esta realidad que ellos describen hace diez años, en pleno periodo de experimentación, ahora está de plena actualidad. Como más tarde explicaré, algunos centros han llegado a la conclusión de que la opcionalidad, por sí misma, no resuelve en absoluto el tema de la diversidad. Hay que ir mucho más lejos, y no es sencillo hacerlo. Es la primera vía, la reformista.

En el mismo debate, explica Badia (1988) la experimentación llevada a cabo por la Generalitat desde 1984 hasta 1988. En este artículo, se señalan los que a su entender son los cinco pilares sobre los que descansa la propuesta catalana: un núcleo común del 70%, una parte variable, una parte de refuerzo «a la medida», unas actividades de síntesis y la acción tutorial. Insiste el autor en la necesidad de equilibrar los cinco aspectos, al tiempo que es preciso buscar los métodos, recursos y materiales más adecuados.

Fernández Enguita (1988), en el mismo Debate, se muestra ciertamente más crítico con respecto a la opcionalidad, aunque acaba expresando su convicción de que ésta no sería un riesgo si se diesen tres condiciones: «una programación curricular no atada a la idea de las asignaturas, mecanismos de reversibilidad adecuados y una sociedad más justa e igualitaria». Casi nada...

Se aprueba la LOGSE

Tres años más tarde, con la LOGSE ya aprobada, Muñoz (1991) escribe en un monográfico sobre la Reforma que la experimentación da unos resultados positivos en cuanto a atención a la diversidad de intereses y motivaciones individuales y también en cuanto a facilitar la orientación del alumnado. Por otro lado, advierte que la aplicación práctica del currículo común/variable indica marcadas tendencias hacia la divergencia entre la parte común y la parte variable. Se denota una sobrecarga de contenidos, excesiva rigidez, una didáctica transmisiva, en la parte común, así como improvisación, irrelevancia social y académica, en la parte variable; o, simplemente, continuidad encubierta de la parte común. Afirma: «orden en el currículo común, desbarajuste en el currículo optativo».

Esta advertencia, de hacia dónde puede desviarse la aplicación del nuevo currículo catalán, ejemplifica la otra vía actual: muchos centros, ante la dificultad de rehacer sus referencias y, en consecuencia, sus objetivos y contenidos, ante la complicación organizativa, ante su propia ignorancia, deciden cerrar un currículo que estaba algo abierto. Es la segunda vía, la conservadora.

Nuestra querida María Antònia Canals (1993) se queja de la imposición de un vocabulario propio de expertos en psicología y pedagogía que puede provocar su uso sin plena conciencia del claro significado que entraña, y se centra en el que considera aspecto clave del currículo de Matemáticas: su funcionalidad. Se trata de un intento de clarificar las cosas, de reflexionar en torno a una de las ideas consideradas prioritarias de las Matemáticas en la Reforma. A lo largo del artículo, Canals va tocando temas como objetivos, significatividad, conocimientos previos, uso de estrategias segun el contexto, globalización, relación con el entorno, etc.

Esta denuncia, si puede llamarse así, se ha acentuado con el paso de los últimos años: parece ser que hay inspectores que persiguen como objetivo único, en sí mismo, que los centros elaboren los Proyectos Educativos de Centro (PEC), Proyectos Curriculares de Centro (PCC), los Planes de Acción Tutorial y, en cambio, no se muestran especialmente severos en su intervención cuando un centro pone en marcha prácticas completamente al margen de la la ley, de la LOGSE. Un ejemplo son los grupos llamados «flexibles» que, en realidad, son inflexibles y para todo un curso –cuando no para cuatro–, estables y duraderos.

En la misma publicación, Xifré (1993) plantea la problemática del área de Matemáticas en Secundaria, y resalta especialmente la autonomía de los centros: «Pero la novedad más importante, común a todas las áreas, es la posibilidad de que cada centro establezca su diseño curricular del área de acuerdo con sus necesidades y conveniencias». Y continúa: «Tal flexibilidad debe permitir a los profesores, hasta ahora programáticamente encorsetados, elaborar el desarrollo y la temporalización de la asignatura de acuerdo con su criterio y adaptarlo a la realidad social del centro, con la única limitación de los objetivos finales de etapa que cada alumno ha de llegar a conseguir». A pesar de mostrarse partidario de la Reforma, muestra su rechazo a los grupos heterogéneos: «Unas aulas con 35 alumnos, con una diversidad hasta el punto de tener cinco o seis niveles o grados diferentes de alumnado, colocados en el mismo grupo y que pueden ser completamente dispares, puede llevar a situaciones realmente angustiosas y estresantes para el profesor». A algunos puede sorprender que se hable de tener «cuatro o cinco niveles o grados diferentes» en la misma clase, como si esto fuera algo nuevo. Más aún, podríamos llegar a demostrar que casi cada alumno es un nivel, porque no hay una única diversidad sino muchas. Pero profesores y profesoras, que en su mayoría provienen del antiguo BUP, mantienen posturas parecidas: de acuerdo con la Reforma, pero no con los muchos niveles en clase. Este sector del profesorado necesita encontrar soluciones que resuelvan el problema: si la gestión de la clase con grupo heterogéneo no se resuelve, tomarán otro camino, el de la «homogeneización de niveles», separando y etiquetando.

María Antònia Canals (1993) se queja de la imposición de un vocabulario propio de expertos en psicología y pedagogía que puede provocar su uso sin plena conciencia «del claro significado que entraña, y se centra en el que considera aspecto clave del currículo de Matemáticas: su funcionalidad.

Tirado y Fernández (1994) insisten en las decisiones que se deben tomar sobre la diversidad, llamando especialmente la atención en «la importancia de la contextualización de los objetivos, del análisis y priorización de los contenidos, y de los procedimientos y estrategias de evaluación». En este artículo afirman que si se suscriben las bases y principios de la Reforma, «resulta improcedente distinguir o describir en qué consiste atender a la diversidad, puesto que se trata de algo inherente a los citados planteamientos». Respecto a las decisiones sobre opcionalidad, afirman: «El hecho de que la opcionalidad contribuya a la consecución de las capacidades diseñadas en los objetivos generales de etapa y/o a reforzar algunas de ellas, debe ser el elemento que garantice que todo el alumnado, durante este intervalo de tiempo, realice actividades relevantes y con valor social, evitando así que para unos alumnos sea ocasión de promoción y satisfacción, mientras que para otros se transforme en una forma de "pasar el tiempo" realizando actividades repetitivas y machaconas. Parte común y parte opcional comparten responsabilidad en cuanto a ofrecer experiencias en la direccion de las intenciones educativas diseñadas en los objetivos generales. Es más, para que estas intenciones sean efectivas, es necesario que los alumnos y alumnas encuentren realmente itinerarios que contemplen sus intereses y motivaciones, y se ajusten a su manera de aprender y a los recursos que para ello disponen; por otra parte es preciso que las capacidades y contenidos transversales de la etapa constituyan la base del diseño de la opcionalidad. Si el planteamiento se ajusta a características como las descritas, no debe ser motivo de preocupación que los alumnos escojan opciones de una u otra área de forma equilibrada durante toda la etapa».

La afirmación de que aplicar correctamente lo que la Reforma dice hace innecesario concretar la atención a la diversidad es un arma de dos filos: por un lado, no deja de ser cierto, si todos atendemos correctamente a cada alumno, también los alumnos más diferentes, más diversos, quedaran atendidos; pero la realidad es que partimos de donde partimos, no de la nada, y que estamos haciendo un cambio desde un punto hacia otro. Las posturas ante la diversidad van pasando de uno a otro escalón, en una imaginaria escalera en la que:

- El primer peldaño sería la negación del problema: indiferencia, comodidad, competitividad, selección.
- El siguiente, el etiquetaje: certificación, confirmación, inmovilismo.
- Después pasamos a la compensación: problema individual, personalización del aprendizaje.
- Y llegaríamos a la complejidad:
  - Aceptando las conexiones del problema con el entorno.
  - Dando la importancia que se merece al contexto.
  - Constatando la multidireccionalidad de la enseñanza.
  - Ayudando en la reconstrucción de la personalidad.
  - Atendiendo a la relación, comunicación y la posición en el grupo.

...es necesario que los alumnos y alumnas encuentren realmente itinerarios que contemplen sus intereses y motivaciones, y se ajusten a su manera de aprender y a los recursos que para ello disponen; por otra parte es preciso que las capacidades y contenidos transversales de la etapa constituyan la base del diseño de la opcionalidad.

No se trata de ver dónde se encuentra cada uno en esta virtual escalera, pero no está de más reflexionar sobre ello a partir de la realidad de nuestra práctica.

Por la misma época, César Coll (1994) confirmaba que el Diseño Curricular Base (DCB) tenía su origen en un informe encargado en 1982 por la Generalitat de Catalunya, en el que debía adaptar una propuesta de Diseño Curricular para elaborar Programas de Desarrollo Individual, provinentes del desaparecido Instituto Nacional de Educación Especial: «El grupo que había recibido el encargo valoró que, en la perspectiva de una política de integración de los alumnos con necesidades educativas especiales, era contradictorio proponer un currículo especial distinto del currículo ordinario. En contrapartida, sugirió que lo conveniente era proceder a revisar el currículum ordinario y dotarlo de la suficiente flexibilidad y apertura para que pudiera ser convenientemente adaptado en el caso de estos alumnos». Más adelante, afirma: «...algunos sectores hubieran preferido que no existiera DCB, ni Enseñanzas Mínimas ni Currículum Oficial alguno de naturaleza prescriptiva». Pero recuerda que «el currículum oficial, al menos el establecido por el MEC para ser aplicado en su ámbito de gestión directa, (no parece que) sea percibido por la mayoría del profesorado como excesivamente cerrado e intervencionista».

La constatación de que se aprende más de los que más dificultades encuentran, creo que es relevante. De hecho, todos tenemos ejemplos de alumnos que nos han dado pistas para saber enseñar mejor. Y estos alumnos siempre son los que presentan dificultades. Pero para que esto sea así hay que conseguir que los profesores reflexionen, y que los alumnos se manifiesten, porque habitualmente no lo hacen, se encierran en sí mismos con sus problemas. Una chica llegada de tierras lejanas, después de seis meses de estar en nuestras aulas, en ESO, le dice a una profesora a la que nota más abierta, más receptiva: «Señu, explícanos algo de aquí, que nadie nos explica nada». Habían pasado por su aula decenas de profesores durante semanas y «nadie nos explica nada». Evidentemente, se refiere a nada realmente importante sobre el país en el que se encuentra, nada respecto de esta tierra, esta gente, sus costumbres, su manera de ser y de actuar. Pero se les exige que se adapten, y que lo hagan deprisa. Mientras, se les da una tras otra raciones de lengua, matemáticas, sociales, física y química, biología, dibujo, tecnología, etc. Y una parte de todo ello, opcional... «y aún se quejan».

Se avanza la implantación de la Reforma en Cataluña

Estamos en el curso 1994/95: en Cataluña se avanza la Reforma. Pero de una manera peculiar: empiezan a cursar

3.° y 4.° de ESO muchos alumnos provinentes de 8.° de EGB. Algunos institutos se resisten a hacerlo, unos por conservar el BUP un poquito más, otros porque encuentran poco afortunado hacer una Reforma a medias: el 7.° y el 8.° de EGB no preparaba para seguir con 3.° y 4.° de ESO, ni estos dos cursos se han pensado para hacerlos después del 8.° de EGB. Se les obliga. Y empiezan una Reforma por la mitad. La valoración que algunos centros hacen de esta experiencia es negativa. En general, se piensa que tuvo otro efecto perverso: convivieron unos años tres posibles vías para el final de la EGB. Un alumno con graduado podía ir a BUP, pero sin graduado podía escoger entre FP o la parte de ESO que se impartía en muchos centros. Digo la parte de ESO y no el 2.° ciclo porque en absoluto se empezó un nuevo ciclo. Se comprimió –o, mejor sería decir, se intentó comprimir– el 1.° y el 2.° de BUP en unos créditos de matemáticas a todas luces insuficientes, con un resultado del que más vale olvidarnos. Pero debemos constatar que fue una manera de empezar a introducir la Reforma en Secundaria poco afortunada: imponiendo cambios que, además, eran más que discutibles; no es ésa la mejor forma de convencer a los profesores y profesoras de BUP de la bondad del nuevo sistema.

En noviembre de 1994, en un monográfico dedicado a «Experiencias sobre atención a la diversidad», Duran y Mestres, después de mostrar un panorama resumido de lo que podría ser la atención a la diversidad ideal en un centro de secundaria, afirman: «Ante esta realidad ha habido, al menos hasta ahora, dos maneras de obrar:

- El mantenimiento del discurso oficial, teórico, alejado de la realidad de los centros y de las aulas, que se plantaba con un salto en la escuela comprensiva como si se tratase de un cambio por arte de magia y que, encima, desarrollaba una tecnología educativa impracticable (como las Adaptaciones Curriculares Individuales); consecuencia de esta postura, mantenida por la administración catalana, ha sido que el discurso de la atención a la diversidad ha pasado desapercibido en muchos centros... [Y sigue:] ...o, peor aún, ha creado frustración entre miembros del profesorado...
- Una práctica basada en la necesidad real de dar respuesta a la diversidad existente en los centros a partir de los recursos limitados con que se cuenta. Esto ha comportado una gran variedad y riqueza de experiencias, de carácter más o menos persistente, desde los diferentes instrumentos curriculares, tanto de carácter intraaula como interaula. Algunas de estas experiencias han constituido verdaderos procesos de innovación y formación del profesorado, que no siempre han contado con la ayuda o el apoyo de la administración».

«No se puede reducir al alumnado de bajo rendimiento a hacer actividades rutinarias o simplistas, ya que así no mejorarán nunca. Y los créditos de refuerzo han de ser aún más motivadores que los comunes, porque van dirigidos a un público más difícil». (Burgués, 1995)

Un mes más tarde, Carme Burgués (1995) afirma: «A pesar de que es en secundaria donde hay más reticencias por parte del profesorado a los cambios curriculares, es cierto también que la dilatada experiencia ha ido haciendo más conscientes a los profesionales de la necesidad de un cambio de planteamiento en la enseñanza de las Matemáticas para llegar a formar matemáticamente a los ciudadanos y ciudadanas de hoy y del futuro inmediato». Y más adelante: «Resolver problemas, observar, recoger información y organizarla, encontrar relaciones, experimentar e investigar son aprendizajes básicos para todos. No se puede reducir al alumnado de bajo rendimiento a hacer actividades rutinarias o simplistas, ya que así no mejorarán nunca. Y los créditos de refuerzo han de ser aún más motivadores que los comunes, porque van dirigidos a un público más difícil».

No se puede negar esta realidad. A pesar de todos los errores y los defectos que pueda tener, el hecho es que en los últimos años soplan vientos de renovación, de reflexión, de autocrítica, de debate en los antes apacibles centros de secundaria. En los departamentos de matemáticas se debate sobre el currículo, sobre métodos, sobre enfoques, sobre materiales... Bien es cierto que a veces sólo se discute de los libros que se escogerán, pero incluso en estos casos habrá debate sobre evaluación. Por otro lado, las asociaciones de profesores de matemáticas de Cataluña aumentan su actividad con Jornadas, Encuentros, el *Fem Matemàtiques*, y ello va parejo al auge que empiezan a tener los temas como resolución de problemas, el trabajo con datos, o la comunicación en matemáticas. Recordemos también que en esta época se lleva a cabo la primera evaluación a cargo del Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE), y que cuando el informe salga a la luz provocará una fuerte polémica, especialmente en relación a las matemáticas.

Muñoz (1995) reflexiona: «El principal problema para desarrollar una pedagogía de la diversidad no es tanto los instrumentos didácticos necesarios como las convicciones sociales, culturales y pedagógicas del profesorado, del alumnado y de los mismos padres y madres. Esta afirmación (de Maruny y Muñoz en 1993) se nos confirma cada día. Por lo que respecta al profesorado y a los centros, lo principal es que su acción, el clima de aula y el clima de centro se basen en el reconocimiento y el respeto de la diversidad y no persigan la jerarquización/selección, sino el desarrollo y la promoción de todos». Y más adelante: «se está desarrollando más la estrategia de compensar la desigualdad, que la estrategia de respetar y compartir la diferencia» ...«El impulso innovador se ha dirigido de manera bienintencionada pero obsesiva a diagnosticar los problemas que presentan los alumnos escolarmente difíciles. Tanto el profesorado como las administraciones han desarrollado una concepción de la diversidad basada en considerar cualquier diferencia como un problema y orientada a identificar necesidades educativas especiales». En otro apartado: «La evolución del desarrollo curricular en Cataluña está confirmando la divergencia que anunciábamos entre lo común y lo optativo (se refiere a un estudio de 1994, con Gómez y Rué). Lo común tiende a la rigidez, lo prescriptivo, lo académico y lo menos motivador. Lo optativo sigue siendo muy valorado y deseado por el alumnado, mientras el profesorado tiende a reducirlo por la vía de la cuasiincorporación a los programas comunes o por la utilización de esa franja para las actividades compensatorias. Todo ello puede dar al traste con uno de los recursos más dinámicos y estimulantes del cambio curricular. En el caso de los proyectos integrados que deben organizarse como mínimo una vez por curso –créditos de síntesis–, la satisfacción del alumnado es altísima, así como también las innovaciones metodológicas que introduce el profesorado».

Masalles y Masip (1995), en el mismo monográfico, proponen dedicar esfuerzos a reflexionar en el aula ordinaria: «con la intención de descubrir elementos que permitan al conjunto del profesorado mejorar su práctica». Para ello, sugieren atender a las explicaciones que los propios alumnos dan sobre su fracaso y analizar los contenidos y métodos más valorados. Acaban: «Finalmente nos hemos preguntado hasta qué punto la mejora de la práctica ordinaria permitirá prescindir de estrategias compensatorias. Teniendo en cuenta las contradicciones del sistema educativo y de la propia sociedad, pensamos que será difícil prescindir de ellas».

«...la Generalitat, como responsable de la enseñanza, explícita o implícitamente está favoreciendo sólo las opciones familiares hacia la escuela concertada. La continuidad de esta política perjudicará al sector público y lo hará volver a su tradicional condición asistencial» (Calzada, 1996)

Un mes antes de la celebración del I Congreso de la Renovación Pedagógica en Cataluña, en el que participaron todos los sectores (profesorado, familias, sindicatos, ayuntamientos...), Calzada (1996) afirma en un artículo: «En la práctica, el abismo existente (entre centros privados y públicos) ha ido en aumento: hacen una hora más de clase diaria, las comisiones de matriculación de los centros concertados no han funcionado con el mismo rigor que en los centros públicos..». Más adelante: «El sector público ha incorporado de forma generalizada a nuevos sectores sociales que habían estado excluidos anteriormente del sistema escolar o que quedaban en los primeros peldaños sin posibilidad de continuar avanzando. Por otro lado, el proceso de integración del alumnado con dificultades se ha realizado mayoritariamente en centros públicos aunque las ayudas complementarias han sido muchas veces insuficientes». Continúa: «Esta situación se ha manifestado en Cataluña de forma espectacular». Y afirma: «...la Generalitat, como responsable de la enseñanza, explícita o implícitamente está favoreciendo sólo las opciones familiares hacia la escuela concertada. La continuidad de esta política perjudicará al sector público y lo hará volver a su tradicional condición asistencial».

Así pues, algunos institutos catalanes reciben la orden de empezar media reforma, sin preparación suficiente para la complejidad organizativa y funcional que se les viene encima, recibiendo una parte de alumnado que antes no llegaban a ver y, además, la guinda: integración de los que ni siquiera llegaban a FP. ¿A alguien le extraña que exista reacción? No se trata de justificar posiciones en contra de la Reforma, pero sí de reconocer que las cosas podrían haberse hecho mucho mejor y la situación actual sería posiblemente distinta.

Se publican evaluaciones del sistema educativo

Para acabarlo de arreglar, aparecen publicados los resultados de la primera evaluación del INCE. Cada cual hace su particular interpretación, a menudo poco reflexiva, sin conocer a fondo el instrumento ni la globalidad de los resultados. Para unos, confirmación del desastre: déficit escandaloso en matemáticas. Para otros, incluso mejor de lo que se esperaban. No deja de ser curioso que a la opinión pública no le acabe de llegar el mensaje sobre la muestra: son alumnos de EGB, a los que, teóricamente, no había llegado la Reforma. Pero esta evaluación se convierte en la calle en un juicio a la Reforma, que acaba con un mayoritario suspenso. Una vez más, los tics habituales aparecen de nuevo: la evaluación debería servir para descubrir qué hacemos bien y qué hemos de mejorar, pero termina certificando una u otra cosa. Como siempre ha sido. Y a la nueva administración del Estado le falta tiempo para soltar rumores sobre reformar la Reforma, o parar su aplicación.

En septiembre de 1997 está datado el escrito de Ricardo Luengo «Las matemáticas en la cresta de la ola. Buscando una salida». Enviado a decenas de periódicos, resulta difícil encontrar quien lo publique. Parece ser que las comparaciones internacionales de «niveles matemáticos» de dudoso objetivo sí son interesantes, sí son relevantes para el público, pero no lo son las reflexiones de quien representa a miles y miles de profesores de matemáticas.

Parece ser que las comparaciones internacionales de «niveles matemáticos» de dudoso objetivo sí son interesantes, sí son relevantes para el público, pero no lo son las reflexiones de quien representa a miles y miles de profesores de matemáticas.

Alsinet y Notó (1996) presentan dos maneras de organizar el primer ciclo de la ESO en dos centros distintos y se insiste en la necesidad de que cada centro disponga de un posicionamiento institucional sobre la adecuación de su actividad a la diversidad de su alumnado en un marco comprensivo, y diseñe respuestas coherentes con esta opción en el momento de decidir sobre el currículo, sobre el profesorado y sobre el funcionamiento interno.

Onrubia (1996), en el mismo monográfico, propone y ejemplifica cuatro estrategias básicas para llevar a término la atención a la diversidad: «la búsqueda de una relevancia personal mayor, para los alumnos, de los contenidos objeto de trabajo en el aula; el ofrecimiento a los alumnos de posibilidades de participación en la planificación, seguimiento y regulación de su propio proceso de aprendizaje; el trabajo cooperativo entre alumnos; la ampliación y diversificación de los itinerarios o recorridos de aprendizaje que pueden seguir los alumnos».

Implantación generalizada de la Reforma

Llegamos al curso 1996/97: implantación generalizada de la Reforma en Cataluña, acompañada del paso de miles de profesores de la antigua EGB a los centros de secundaria. ICME en Sevilla. XXIX Congreso de las Asociaciones de Padres y Madres de Secundaria de Cataluña, en Calella. En él se afirma: «Tenemos una inversión ínfima en educación, que nos obliga a arrastrar modelos de enseñanza que ya no son válidos, y menos en una sociedad que exige cada vez más una formación más completa de nuestros hijos», para exigir finalmente «una enseñanza pública y gratuita, pero de calidad». Casi no se entra en el tema de la ESO. ¿Por qué?

En septiembre de 1996, Fernández-Enguita realiza un balance de algunos aspectos de la Reforma, y compara las diversas concreciones en diferentes territorios, señalando la existencia a lo largo de los 10 años anteriores, de tres modelos principales: Cataluña, Euskadi y territorio MEC. Del modelo catalán considera positiva la opcionalidad, que provoca más motivación y una mejor transición al mundo laboral o a estudios posteriores; también la autonomía de centros y de profesores. En cambio, previene sobre el riesgo de que se establezcan diferencias y desigualdades en el tipo de educación que reciban unos y otros alumnos, en los mismos centros y entre centros. Considera que se produjeron correcciones posteriores al modelo catalán: mayor peso de la tutoría y de la orientación, limitación de la oferta de optativas, o su compartimentación y ponderación, todo ello para producir currículos individuales equiparables.

A finales de este curso llegan ya muchos alumnos a las pruebas de selectividad procedentes del nuevo bachillerato. Alguna información de prensa señala el «bajo nivel» que éstos muestran respecto de los procedentes del COU. No queda muy claro el patrón de comparación, parece ser bastante subjetivo. No se entra a discutir quién pone las pruebas de selectividad, con qué finalidad, si ésta persigue objetivos coherentes con la LOGSE o no, ni la participación de los profesores de secundaria en el establecimiento de las pruebas... Tampoco se discute acerca de los contenidos y las metodologías en la universidad. Llegan a menudo noticias concretas sobre las condiciones laborales de una parte importantísima del profesorado universitario, o sobre la peculiar forma de proveer plazas, se habla de endogamia, y de clanes, lobbys de presión, pero estos temas no interesan demasiado a la opinión pública, parece ser. Y de la misma manera que el paso de primaria a secundaria no mejora ostensiblemente, tampoco se debate sobre el paso de secundaria a la universidad. Quizás más adelante... Una excepción: la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca un Seminario en Jaca sobre este tema y hace públicas unas muy interesantes conclusiones que antes o después deberan ser consideradas por las administraciones correspondientes.

En un monográfico de *Cuadernos de Pedagogía*, «La ESO en la práctica» (1997), se recoge un debate en el que Muñoz reconoce que hay aspectos revisables: «Uno es la concepción del currículo que se ha aplicado: se ha tecnificado y se ha burocratizado. En ello se han perdido muchas energías, olvidando quizás temas más de fondo: una manera de entender al alumnado, la concepción de la evaluación». Y, en las conclusiones: «las opciones (que se han mencionado) de clasificación estable de alumnos por niveles están fuera del modelo de la Reforma. No sé por qué lo permiten. El gran cambio en los centros debiera ser [...]: por una parte, plantearse desarrollar el currículo a partir de los alumnos, de sus necesidades y las de su contexto y, entonces, inventarse cosas para conseguir lo máximo; por otra parte, construir una cultura de colaboración, facilitar el intercambio de experiencias, etc.». Sánchez-Enciso pide «aprovechar las posibilidades más innovadoras del sistema, potenciar proyectos educativos reales –no redacciones burocratizadas– y corregir las injusticias que crea el mercado educativo cuando funciona libremente». En la línea de oposición a la LOGSE, Isidro Cabello afirma: «Yo, personalmente, voy un poco más allá: creo que al acabar el primer ciclo se tendría que llevar a los alumnos a centros adecuados para hacer cursos preciclos formativos o prebachilleratos. Considero que es lo conveniente para poder tratar a unos y a otros como se merecen». Cabello es representante de la denominada Plataforma del Vallès, que ha elaborado un manifiesto con muchos puntos, de los cuales la mayoría serían suscritos por todos, pero algunos de ellos son considerados totalmente incompatibles con la LOGSE; por ello, se dice que pretenden acabar con ella.

...es práctica generalizada en nuestros institutos la creación de grupos de nivel estables durante un curso escolar, usando las horas de posibles refuerzos. Los contenidos que se imparten en estos gupos diferenciados dependen de los centros: en algunos, se tratan temas distintos (refuerzo de niveles anteriores, para unos; ampliación e introducción de nuevos temas, para otros); en otros centros tratan de dar los mismos temas pero diferencian la profundización, la complejidad.

¿Esto era la ESO?

Volvamos a la entrevista con Pere Solà. Le pregunté: «¿Esto es como se lo esperaba?» Afirma que no estaba claro cómo iba a ser. Se muestra optimista: «lo cierto es que se han abierto dinámicas de renovación en muchos institutos, así como también resistencias; en la práctica, el currículo no ha acabado tan abierto como queríamos: hay mínimos estatales y una inercia en el sistema que pretende reproducir las maneras de hacer anteriores; se potencia la estadística aplicada a la economía, a la producción, un poco la geometría, pierde peso el formalismo». Referente al debate sobre Humanidades, se queja que esconde un hecho: «las Matemáticas y las Ciencias en general se ven marginadas, con menos horas que antes; y con un debate mal enfocado, puesto que, por un lado, la alternativa a la religión, la ética, que era impartida por profesores de Filosofía, ha sido suprimida; por otro, en el balance de las horas que Ciencias o Humanidades han ganado o perdido se deja de lado que la ESO y los nuevos Bachilleratos sustituyen al BUP, pero también a la FP». «Pero no todos podemos tener más horas», por lo que sugiere que discutamos más sobre lo que se imparte en esas horas y sobre los recursos interdisciplinares, como los créditos de síntesis, hacia la integración de diversas materias, por el camino de los proyectos globales.

Llegados a este punto, cabe decir que los centros de secundaria, respecto de la organización del currículo, han adoptado, en general una de estas tres opciones:

- Dos horas de matemáticas semanales durante todo el curso: se corresponden con los 2 créditos comunes obligatorios.
- Tres horas semanales de matemáticas durante dos trimestres: un trimestre sin matemáticas obligatorias.
- La opción anterior, concentrando los créditos comunes obligatorios en el 1.^{er} y 2.° trimestres, pero convirtiendo una parte de la opcionalidad en común y obligatoria en el tercer trimestre.

Además, es práctica generalizada en nuestros institutos la creación de grupos de nivel estables durante un curso escolar, usando las horas de posibles refuerzos. Los contenidos que se imparten en estos gupos diferenciados dependen de los centros: en algunos, se tratan temas distintos (refuerzo de niveles anteriores, para unos; ampliación e introducción de nuevos temas, para otros); en otros centros tratan de dar los mismos temas pero diferencian la profundización, la complejidad.

Más experiencias que nunca

El hecho que estas sean las lineas mayoritarias no debe hacernos creer que no surjan experiencias nuevas, distintas, que merezcan atención. Una de las virtudes del modelo catalán, sin duda, es que abre la posibilidad de crear líneas de trabajo originales. Por ejemplo, en las Jornadas celebradas en diferentes poblaciones catalanas, como Reus o Girona, centradas en la didáctica de las matemáticas, o Mataró, en la Diversidad en Secundaria, hemos podido constatar que un buen número de centros ha desarrollado estrategias muy interesantes para trabajar las matemáticas y otras áreas, incluso algunos ejemplos de interdisciplinariedad: desde la preparación de las actividades de matemáticas, todas ellas, en tres niveles de profundización, para adecuarse al grupo heterogéneo sin tener que separar por niveles, hasta estrategias de trabajo en pequeño grupo cercanas a los rincones, pasando por la preparación de unidades didácticas motivadoras, matemática lúdica y recreativa (pero sabiendo qué se trabaja de matemáticas), matemáticas relacionadas con el contexto, matemáticas a partir del entorno, con visitas de carácter matemático, etc.

En septiembre de 1997, Escobar analiza algunas dificultades actuales de la Reforma en el final del ciclo 14-16 años. Señala que resolver estas dificultades está en la mano de las administraciones, pero también en el posicionamiento personal y profesional de maestros y profesores. Se pregunta cuáles son hoy en día los contenidos básicos de la formación que debemos dar hasta los 16 años, y responde a partir de textos de la Unión Europea –*Libro Blanco en materia de educación* (1995), el de Joan Majó (1997)– y de la UNESCO: la lectura, la escritura, la expresión oral, el cálculo, la resolución de problemas, los conocimientos básicos y funcionales para los alumnos, el entorno, el mundo, la vida, conocimientos teóricos y prácticos (aprender a conocer y a hacer). Además, relativizar los objetivos de la cultura elaborada y potenciar el «aprender a aprender», a pensar, a buscar información, crear, investigar, conocer las realidades cambiantes, a tener y decidir con criterios propios, a sentir, a tener opinión, ser consciente de los propios límites, aprender a ser y a desarrollar capacidades que permitan actuar como persona, como miembro de una familia, como ciudadano, como trabajador y a seguir aprendiendo toda la vida.

Afirma Bishop (1988) que el modelo de currículo pedagógico que da respuesta a las necesidades de la educación general en matemáticas, así como a la necesidad de desarrollar el conocimiento especializado de los estudiantes, se basa en tres constructos pedagógicos: las actividades, seleccionadas y planificadas por los profesores, en las cuales los estudiantes se impliquen; los proyectos y aplicaciones de las matemáticas; y las investigaciones, que involucran el razonamiento inductivo y deductivo. Pues bien, podemos decir que en los últimos años muchos profesores y profesoras se han animado a transitar por estos caminos, y los encuentros, jornadas, congresos, publicaciones, etc. lo demuestran.

Una de las virtudes del modelo catalán, sin duda, es que abre la posibilidad de crear líneas de trabajo originales.

Avanzado, pero difícil de implantar

La reforma ha acercado dos mundos que se daban mutuamente la espalda, el de la psicología y la pedagogía, por un lado, y el de la práctica del profesorado y, aunque a veces saltan chispas, creo que vale la pena. El modelo, sobre el papel, podríamos calificarlo de avanzado, pero su aplicación resulta difícil y compleja. Requiere grandes dosis de fe, de esperanza... y de inversión. Si lo que se pretende conseguir es un cambio real en la forma de trabajar en los institutos, más allá de documentos escritos rimbombantes, hará falta una mayor y mejor inversión: inversión que permita la mayor opcionalidad posible, la menor ratio, mucho más tiempo de dedicación de los equipos de profesores para organizar, para planificar, para reflexionar, para coordinar... Imaginemos un centro de secundaria, con casi 1.000 alumnos, decenas de profesores, que cada trimestre cambia su horario, entero: los esfuerzos organizativos, la atención a problemas de convivencia, la complejidad de cada engranaje, hace que a menudo los temas más «educativos» queden en un segundo plano. Todo esto exige un gran esfuerzo personal, no lo dudo, pero también institucional. Algunos ejemplos: unos centros de recursos pedagógicos que se integren en la red de apoyo a la Reforma; o una formación de alto nivel, que está lejos de la que se ha impartido desde el Departament d'Ensenyament; o, ¿por qué no?, prestar más atención a las opiniones de las asociaciones de profesores que se ofrecen para mejorar la aplicación de la Reforma, como la Federació d'Entitats per a l'Ensenyament de les Matemàtiques a Cataluña (FEEMCAT). De todos modos, debemos reconocer la defensa del modelo por parte del gobierno y de buena parte de la oposición catalanes, en un momento delicado, de mayoría relativa estatal que votó en contra de la LOGSE. Pero con esto no basta.

De todos modos, debemos reconocer la defensa del modelo por parte del gobierno y de buena parte de la oposición catalanes, en un momento delicado, de mayoría relativa estatal que votó en contra de la LOGSE. Pero con esto no basta.

Un aire nuevo

Para terminar, quisiera decir que la Reforma nos ha traído, además de un montón de problemas, un aire nuevo, que se percibe en general y en particular. La tercera edición del *Fem Matemàtiques 98,* con casi 2.000 participantes de toda Cataluña, las III Jornadas de Didàctica de les Matemàtiques de Reus y de Girona, con cerca de mil docentes inscritos, la riqueza del intercambio actual entre centros y profesores, el Trimestre Intensiu d'Educació Matemàtica (TIEM98), la posibilidad de organizar un gran evento sobre Educación Matemática en el año 2000, Año Internacional de la Matemáticas, pueden y deben redoblar nuestras energías para afrontar los retos que se presentan ante nosotros, con plena consciencia de que, un poquito, estamos participando en un momento clave para el futuro de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en nuestro país.

Referencias bibliográficas

ALSINET, J. y E. MUÑOZ (1988): «Currículo flexible y diversidad de alumnos», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 157, p. 71.

ALSINET, J. y C. NOTÓ (1996): «Organització del cicle. Organització del currículo», *Perspectiva Escolar*, n.° 205, 2-13.

BADIA, J. (1988): «Tratamiento de la diversidad», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 157, 72-73.

BISHOP, A. J. (1988): *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*, Kluwer, Dordrecht.

BURGUÉS, C. (1995): «Les matemátiques com a eina per comprendre i canviar el món», *Guix. Elements d'acció educativa*, n.° 211, 5-9.

C. de P. (1994): «César Coll: compromiso con la Reforma», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 224, 84-91.

C. de P. (1997): «Mesa Redonda: Radiografía de la ESO», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 260, 32-45.

CALZADA, T. E. (1996): «Diez años con la LODE», *El País, 5 de febrero de 1996, Suplemento Cataluña*, p. 6.

CANALS, M. A. (1993): «Reforma i Matemàtiques. Aspecte funcional», *Perspectiva Escolar*, n.° 174, 2-11.

CARBONELL, J. (1987): «La política pedagògica de la Generalitat», *Perspectiva Escolar*, n.° 114, p. 6.

DURÁN, D. y P. MESTRES (1994): «Diversitat, innovació i formació del professorat a secundària», *Guix. Elements d'acció educativa*, n.° 205, 7-10.

ESCOBAR, M. (1997): «El segon cicle de l'ESO, final de l'etapa obligatoria», *Perspectiva Escolar*, n.° 217, 35-45.

FERNÁNDEZ, E. M. (1988): «Unidad y diversidad en la escuela comprensiva», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 157, 65-66.

FERNÁNDEZ, E. M. (1996): «La reforma y nosotros... que la quisimos tanto», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 250, 68-76.

Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la Educación para el siglo XX: e-mail: edobserv@unesco.org 75352 París 07

Libro Blanco: Enseñar y aprender. Hacia la sociedad cognitiva, Oficina de Publicaciones Oficiales de las Comunidades Europeas, Luxemburgo, 1995.

LUENGO, R. (1997): «Las Matemáticas en la cresta de la ola. Buscando una salida», *SUMA*, n.° 26, 5-9.

MAJÓ, J. (1997): *Chips, cables y poder*, Planeta, Barcelona.

MASALLES, J. y M. MASIP (1995): «Estrategias compensatorias como respuesta a la diversidad», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 238, 64-69.

MUÑOZ, E. (1991): «Currículo comú, currículo optatiu», *Perspectiva Escolar*, n.° 160, 14-15.

MUÑOZ, E. (1995): «La respuesta democrática», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 238, 64-69.

ONRUBIA, J. (1996): «El tractament de la diversitat en el primer cicle de l'ESO», *Perspectiva Escolar*, n.° 205, 2-13.

TIRADO, V., FERNÁNDEZ, M. (1994): «Decisiones sobre la diversidad», *Cuadernos de Pedagogía*, n.° 223, 50-54

XIFRÉ, A. (1993): «Problemàtica de la didàctica de les matemàtiques a l'ensenyament secundari obligatori» *Perspectiva Escolar*, n.° 174, p. 23.

Otra bibliografía

COLL, C. (1986): *Marc Curricular per a l'ensenyament obligatori*, Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Cataluña.

COLL, C. (1991): *Psicologia y Currículo*, Ediciones Cuadernos de Pedagogía/Paidós, Barcelona.

FERNÁNDEZ ENGUITA, M. (1986): *Integrar o segregar: la enseñanza secundaria en los paises industrializados*, Laia, Barcelona.

FERNÁNDEZ ENGUITA, M. (1990): *Juntos pero no revueltos: ensayos en torno a la reforma de la educación*, Visor, Madrid.

GÓMEZ, I., E. MUÑOZ y J. RUÉ (1994): *Els crédits variables en l'experimentació a l'eduació secundària obligatòria a Catalunya*, ICE Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

JORNADES 12/16 (1991): *Una nova etapa per a l'ensenyament públic*, Document de treball, Federació de Moviments de Renovació Pedagògica de Catalunya, Sant Cugat del Vallès:

MUÑOZ, E., J. RUÉ e I. GÓMEZ (1993): «L'opcionalitat curricular i l'atenció a la diversitat», en E. MUÑOZ, y J. RUÉ (eds.) *Educar en la diversitat i escola democràtica*, ICE Universitat Autònoma de Barcelona, Bellaterra.

Xavier Vilella
IES Vilatzara
Vilassar de Mar (Barcelona)
Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques de Cataluña (FEEMCAT)

PLANAS, J. y J. M. TATJER (1982): *Implicacions i problemes de la reforma de l'ensenyament mitjà*, ICE Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.

SERVEI D'ORDENACIÓ CURRICULAR (1993): *Curriculum ESO. Àrea de Matemàtiques*, Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya, Barcelona.

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 73-79

El taller de Matemáticas como espacio para la reflexión

Matilde Moralejo, Amaia Basarrate, Antonio Caballero, Santiago Martín, Fernando de Diego, Ángel González, José M.ª Orihuel

INFORME

Es preciso seguir definiendo el papel de las materias optativas en la Secundaria y mejorando su organización práctica, aplicando para ello criterios de relevancia social, coherencia curricular y adaptación a los intereses de alumnos y alumnas. El Taller de Matemáticas puede jugar diferentes papeles en este contexto; aquí se muestra un ejemplo de cómo el Taller es un espacio privilegiado para el desarrollo del pensamiento reflexivo y de hábitos de trabajo, muy conveniente en los itinerarios conducentes al Bachillerato Científico o al Tecnológico.

EL PAPEL de las optativas: de la teoría a la práctica

La optatividad es una de las vías de atención a la diversidad que la ESO introduce, ofreciendo al alumnado la posibilidad de desarrollar las mismas capacidades siguiendo diferentes itinerarios de contenidos. Esta fue la primera intención de la LOGSE y así está recogida en el libro que sobre el Taller de Matemáticas editó el propio MEC[1]. Pero, ¿se está cumpliendo esta intención realmente? ¿Qué condiciones debe reunir una materia para tener el carácter de optativa? ¿Quién lo determina y en función de qué criterios? ¿Realmente desarrolla capacidades similares un alumno que cursa Taller de Teatro que otro que cursa Diseño Asistido por Ordenador? ¿Y entre una Astronomía ofertada por el departamento de Matemáticas y otra ofertada por el departamento de Geografía e Historia, por cuál debe decidirse un alumno? ¿Quién cumplirá mejor los objetivos previstos a la hora de impartir Energías Renovables, el Departamento de Geografía e Historia o el de Tecnología? ¿Por qué Taller de Teatro sí y no Taller Literario o Taller de Pintura o Escultura, o incluso, Mecánica Básica del Automóvil? ¿No estaremos ante una ensalada de optativas poco digerible?

Tomemos como ejemplo un centro que oferta a su alumnado, para la etapa post-obligatoria, los dos Bachilleratos (Ciencias Humanas y Sociales y Ciencias de la Naturaleza y de la Salud) a los que accederá la mayoría, salvo un pequeño porcentaje, que va a un Ciclo de grado Medio establecido en ese centro. Supongamos que en 4.° de ESO tienen para elegir entre cinco itinerarios de optativas de 3 horas semanales y, en cada uno de ellos, a su vez, pueden elegir 2 de entre 8 optativas de 2 horas semanales. Cabe preguntarse si con esta estructura se está orientando al alumnado o, justamente, todo lo contrario. Si además en la elaboración de esos itinerarios ha predominado el criterio de «igualdad de oportunidades» para todos los departamentos, es decir, que cada optativa ha de aparecer exactamente en dos de los cinco itinerarios, ¿seguiríamos pensando que las optativas de ese centro se ofertan en función de los alumnos?

Parece más acertado establecer un número corto de optativas, en función de unos criterios de orientación de alumnos, con unos objetivos determinados que habría que cubrir y unos contenidos muy explícitos y que cada centro determine de entre ellas cuáles va a implantar y en función de qué. Es decir, algo parecido a lo que se hace en el Bachillerato.

Cuando abrimos la puerta para que entre aire fresco, hemos de tener cuidado para que no nos entre ningún fresco que nos desvalije la casa, y es relativamente fácil desvalijar de contenidos un currículo sin más que un poco de arte en lenguaje farragoso. Un capítulo de una materia, que llevaría dos semanas del curso (esto es, 6 horas de clase) hábilmente trabajado puede convertirse, sobre el papel, en una optativa anual a razón de dos horas semanales. Ciertamente queda mucho por discutir acerca de la relevancia curricular o social que tienen determinadas materias ofertadas por algunos centros.

Desorientar a un adolescente de 14 o 15 años, pendiente fundamentalmente de su vida interior e inmediatamente próxima y para el que no existe otro tiempo que el instante actual, es tan fácil que todos los cuidados que se pongan en la comunicación con él suelen resultar siempre escasos. La elección de optativas está rodeada para ellos de un extraordinario ruido ambiente producido por rumores de que Tal o Cual profesor o profesora aprueba a todos, mientras Fulanita o Perenganito «te aprueba, pero antes te ha hecho sudar la camiseta», de que «mis amigos la cogen así que yo también», de que «si coges ésta ahora, en Bachillerato tal o cual casi la tienes aprobada», etc.

Por otra parte, no vamos a engañarnos: cuando un departamento oferta una optativa, previamente ha hecho un cálculo de horas totales, horarios a completar, profesores a repartir y otro cálculo de gustos o aficiones particulares de cada uno de sus miembros. Finalmente, están las restricciones que marca la Administración, impidiendo que se impartan optativas que no hayan sido elegidas por un determinado número mínimo de alumnos, y primando otras como, por ejemplo, el segundo idioma, de dudosa eficacia para una parte del alumnado.

El Taller de Matemáticas

¿Juegan un papel tan importante las optativas en la trayectoria escolar del alumnado que justifique que los profesores de Matemáticas nos pongamos en tensión cuando hablamos de ellas? Bien mirado, la elección de optativas debiera ser para los chicos y las chicas una cierta vía de escape de tanta seriedad como infunden las materias obligatorias y, desde ese punto de vista, cuantas más optativas y más imaginativas, tanto mejor. El problema es que al profesorado de Matemáticas se nos ha adjudicado como reto formar a alumnas y alumnos mucho mejor que antes, pero en mucho menos tiempo, y con una criba última –la entrada en la Universidad– en clara disfunción con la Secundaria; pero esta criba, como en cualquier sistema escolar, conseguirá agobiar y distorsionar la práctica cotidiana de una gran mayoría del profesorado.

¿Es necesaria una optativa dependiente de Matemáticas? ¿Qué es lo que aporta a diferencia de las Matemáticas? ¿Qué es lo que aporta a diferencia de otras optativas?

Así que no es extraño que nos «subamos por las paredes» cuando nuestros alumnos eligen materias que difícilmente encajan en su trayectoria escolar, o de contenidos irrelevantes o escasos, mientras que las Matemáticas siguen con un déficit tan importante de horas. En este contexto es explicable que haya surgido en algunos centros la tentación de utilizar el Taller para «completar» este déficit horario, bien como ampliación bien como refuerzo; pero finalmente estas experiencias resultan fallidas, no ya porque no se centren en los objetivos del Taller, sino que al ser materia optativa y no abarcar a todo el alumnado, el conjunto del grupo-clase no integra estos contenidos y la supuesta ganacia de tiempo no se produce.

Desde el punto de vista del propio departamento, hay otra serie de preguntas que cabe hacerse ante la posibilidad de tener una materia optativa dependiente del mismo. ¿Es necesaria una optativa dependiente de Matemáticas? ¿Qué es lo que aporta a diferencia de las Matemáticas? ¿Qué es lo que aporta a diferencia de otras optativas? Sin excluir que sea necesaria, parece cuando menos, muy conveniente. Igual que parece conveniente que exista la optativa Taller Literario donde lo importante, más que el análisis o el comentario, sea la producción de textos

1 Brihuega, J., M. J. Luelmo, A. Pérez y A. Salvador (1992): *Optativas: Taller de Matemáticas*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

literarios de sus participantes. Son dos materias ideales donde los alumnos pueden aprender que la creatividad se manifiesta mucho más frecuentemente y con más matices cuantas más horas se dedican al trabajo.

A diferencia de las Matemáticas, materia obligatoria, el Taller de Matemáticas aporta un relajo en la tensión tanto por parte del alumno como del profesor. Del primero porque al ser optativa, al elegirla, no acude a ella con miedo sino con expectativas. El miedo al fracaso es uno de los grandes enemigos de las clases de Matemáticas. Del segundo, porque ya no existen esos contenidos mínimos que todos los alumnos deben alcanzar sino que se trata de que, esos alumnos y alumnas a quienes gustan las Matemáticas, desarrollen su forma personal de resolver problemas, sus estrategias propias, las analicen y puedan disfrutar perfeccionándolas y comparándolas con las de sus compañeros.

El nuevo contexto de Taller implica un cambio de rol para el profesorado de Matemáticas. La función tradicional transmisora y sancionadora de conocimientos del aula se ve sustituida por otra de animación, de acompañamiento en el aprendizaje de alumnos y alumnas, siendo esta nueva función aceptada expresamente por la comunidad escolar. Este clima más relajado anima al profesor o profesora a practicar nuevos métodos, abordar contenidos nuevos, a trabajar con materiales; también el menor número de alumnos y la dinámica de trabajo del Taller facilitan la observación de lo que pasa en el aula. Por tanto, el Taller implica un aprendizaje también para el profesorado, una especie de «campo de pruebas» de nuevos comportamientos que posiblemente incorporará, mejorándola, al resto de su actividad docente.

No se trata de analizar aquí todos los objetivos que se pueden alcanzar con un Taller de Matemáticas, ni los diferentes enfoques que puede tener según se centre más en unos que en otros: el desarrollo de proyectos que permitan analizar de forma crítica los vínculos entre las Matemáticas y el entorno social del alumnado; la reflexión o la apreciación estética a partir de actividades manipulativas, el análisis de juegos entre otros. Para nosotros, una característica común y esencial de cualquier Taller reside en una componente de formación estrictamente personal: se trata de aprender a trabajar sobre retos propuestos y aceptados por uno mismo. Cada problema o proyecto constituye un reto y superarlo requiere madurez en la aceptación, constancia en el trabajo, valentía en la aceptación del error, petición de ayuda en muchas ocasiones, participación y colaboración en retos ajenos...

El nuevo contexto de Taller implica un cambio de rol para el profesorado de Matemáticas. La función tradicional transmisora y sancionadora de conocimientos del aula se ve sustituida por otra de animación, de acompañamiento en el aprendizaje de alumnos y alumnas, siendo esta nueva función aceptada expresamente por la comunidad escolar.

Una experiencia concreta

En el IES Carmen Conde de Las Rozas (Madrid), el Taller de Matemáticas se oferta en dos cursos, con orientación diferente en cada uno de ellos, aunque dedicados ambos a la resolución de problemas.

En el Primer Ciclo, el Taller se ha situado en el 2.° curso y tiene la única orientación que la normativa actual sobre optatividad en el llamado «territorio MEC» –a nuestro juicio empobrecedora– permite, a saber: como norma general el alumnado ha de cursar un segundo idioma extranjero, salvo quienes presentan o han presentado dificultades varias de aprendizaje, que entonces pueden realizar otra optativa siempre con una finalidad básica de refuerzo. De esta forma, en el Taller se han programado una serie de actividades encaminadas a trabajar algunos contenidos del área de Matemáticas, pero centrando la atención en la utilización de los procedimientos adecuados y al desarrollo de actitudes de confianza en el trabajo personal, orden, persistencia y meticulosidad, etc.

En el 2.° Ciclo de la ESO, el Taller se ha situado en el 4.° curso. Decidimos que los contenidos versarían sobre resolución de problemas, con una introducción previa de los programas informáticos Cabri-Geomètre II y Derive. Se trataba de desarrollar estrategias personales de resolución mediante la propuesta de una colección de problemas muy variada. Tras dos cursos con esta orientación, pasamos a comentar algunas ideas que nos surgen.

Hemos visto claramente que nuestro alumnado tiene muchas y muy diferentes formas de aprender, de establecer estrategias, de seguir trayectorias de pensamiento absolutamente personales, que sólo a veces se parecen a las de algunos de sus compañeros o pueden adaptarse en determinadas condiciones. Si después de una explicación general para una clase pasamos por las mesas para comprobar que desde cada una de ellas se han visto y entendido cosas diferentes, quizás no sea porque la explicación general no ha sido buena, sino porque hay que buscar alternativas a las explicaciones generales ya que limitan el sentido de lo que estamos explicando y, desde algunos puntos de vista (de nuestros alumnos) lo tergiversan. Luego, nosotros lo reinterpretamos diciendo que son nuestros alumnos los que tergiversan nuestras explicaciones.

El neurólogo y excelente comunicador Oliver Sacks en su libro *Un antropólogo en Marte* comenta una frase pronunciada por un físico, pero con la que están de acuerdo biólogos, médicos entre los que él mismo se encuentra y, en general, quienes se dedican en una u otra forma al estudio de la Naturaleza: «la imaginación de la naturaleza es mucho más rica que la nuestra». Y nosotros formamos parte de esa naturaleza. Existen infinitas formas de vida y a su vez, en cada una de ellas, infinitas adaptaciones a medios, circunstancias... Por otra parte, las investigaciones en psicología siguen evolucionando y apuntando ideas realmente curiosas. En el mismo libro, su autor menciona la teoría establecida por el psicólogo Howard Gardner, quien afirmó que en cada individuo no existe una sola inteligencia sino varias (inteligencia visual, musical, léxica...), separadas y separables, todas autónomas e independientes, cada una de ellas con su propia capacidad de aprehender las regularidades y estructuras en cada dominio cognitivo, sus propias «reglas» y probablemente sus propias bases neurales, con un nivel de desarrollo particular, o con predominio de unas sobre otras. Parece ser que estas hipótesis fueron ratificadas posteriormente por estudios realizados por neurólogos, a principios de los años ochenta. Pero además, una mente no es una yuxtaposición de talentos. Normalmente hay un poder unificador de todas las facultades de la mente que las integra y nos permite generalizar y reflexionar lo que, para algunos, es la capacidad de abstracción y categorización.

Probablemente, las Matemáticas constituyen uno de los campos más idóneos de observación de algunas de estas ideas y a veces es una pena no contar con la formación adecuada que nos permitiera interpretar, en toda su amplitud, determinadas estrategias o diferentes puntos de vista patentes en muchos cuadernos y trabajos de nuestro alumnado.

Parece claro que hemos de buscar otros métodos que sustituyan o completen los efectos de las explicaciones generales, de forma que la mayoría del alumnado llegue a captar cada concepto en su totalidad. Un buen problema pone en funcionamiento multitud de resortes en la mente de quien se compromete con él: pone en funcionamiento la intuición, pasando a la formulación de hipótesis; provoca la comprobación de esas intuiciones, certificando aprendizajes o rechazando errores; provoca la relación entre conceptos ya aprendidos, de campos muy dispares; obliga a aclarar y a delimitar conceptos, a ser sistemático en las observaciones, a explicitar y relacionar mucha información a un tiempo y, desde luego, produce satisfacción (proporcional al esfuerzo realizado en la resolución).

...es importante que, además de enseñar las estrategias básicas de resolución, se propongan problemas muy variados para dar oportunidad de «enganche» a cada una de las inteligencias de cada alumna o alumno.

Por todo ello es importante que, además de enseñar las estrategias básicas de resolución, se propongan problemas muy variados para dar oportunidad de «enganche» a cada una de las inteligencias de cada alumna o alumno. Se utilizan Derive, Cabri II y calculadoras porque permiten abordar muchos problemas que, hasta el momento, no eran accesibles de este tipo de alumnado, dada su escasa preparación tanto algebraica como geométrica. Ponemos como ejemplo las soluciones dadas a dos problemas por tres alumnos, en trabajos elaborados individualmente, para no extendernos demasiado.

Así, ante un problema numérico como:

¿Cuánto vale

$99-97+95-93+91-\ldots+7-5+3-1$?

hay algunos, como Carlos, que ven muchos números, pero no se asustan y los ponen todos, incluso algunos más, sobre la mesa, los ordena de diversas formas y observa:

–1	11	–21	31	–41	51	–61	71	–81	91
~~2~~	~~12~~	~~22~~	~~32~~	~~42~~	~~52~~	~~62~~	~~72~~	~~82~~	~~92~~
3	–13	23	–33	43	–53	63	–73	83	–93
~~4~~	~~14~~	~~24~~	~~34~~	~~44~~	~~54~~	~~64~~	~~74~~	~~84~~	~~94~~
–5	15	–25	35	–45	55	–65	75	–85	95
~~6~~	~~16~~	~~26~~	~~36~~	~~46~~	~~56~~	~~66~~	~~76~~	~~86~~	~~96~~
7	–17	27	–37	47	–57	67	–77	87	–97
~~8~~	~~18~~	~~28~~	~~38~~	~~48~~	~~58~~	~~68~~	~~78~~	~~88~~	~~98~~
–9	19	–29	39	–49	59	–69	79	–89	99
~~10~~	~~20~~	~~30~~	~~40~~	~~50~~	~~60~~	~~70~~	~~80~~	~~90~~	~~100~~

Quitamos los números pares, ya que en la suma sólo podemos ver los impares.

Si nos fijamos, nos damos cuenta que al poner el signo negativo a los números que en la suma lo llevan, los signos se van alternando.

Si vemos la 1.ª columna horizontal (sic.) de números impares, apreciamos que al restar

11–1, 31–21, 51– 41, 71–61, 91–81

nos irán dando como resultado

10, 10, 10, 10, 10, 10,

por lo que multiplicamos 5 x 10 = 50.

En la siguiente columna horizontal de números impares al restar

–13+3, –33+23, –53+43, –73+63, –93+83,

los resultados de las operaciones nos darán

–10, –10, –10, –10, –10,

por lo que multiplicamos –10x5 = – 50.

Así seguiremos repitiendo el proceso con la 3.ª, 4.ª, 5.ª... hasta que en la última columna de números impares, la que termina con el número 99, que es el primer número de la suma de impares, podemos ver que nos da como resultado 50.

Por tanto, la suma de los números impares nos dará 50.

Si el problema es numérico tardará más o menos, pero normalmente lo resolverá bien.

No todos los alumnos tienen la meticulosidad de Carlos, aunque haya olvidado una explicación final, pero es que él necesita ser meticuloso. Necesita despanzurrar, desmenuzar el problema para, a continuación, pasar sobre él como un «panzer» para entender y asimilar cada una de sus briznas. Es persistente, paciente, muy ordenado hasta en sus hojas de operaciones y necesita tiempo y soledad para pensar. Cuando se siente apremiado por el tiempo, o por compañeros con afán competitivo, sus supuestas buenas ideas le pueden resultar absolutamente desorientadoras.

En los problemas de geometría no se suele desenvolver bien. Intenta aplicar su método, que le lleva a ver los elementos de la figura pero, casi nunca, a ver la figura completa. Ante el problema:

Tenemos tres círculos de igual radio que se intersectan formando una especie de triángulo convexo. El área de este triángulo ¿es mayor o menor que 1/4 del círculo?

ha actuado de una forma similar: ha descompuesto, no ya el triángulo, sino

El estudio de estas dificultades, en una clase donde alumnas y alumnos tienen una serie de puntos comunes, en cuanto a gusto por las Matemáticas, interés en la resolución de problemas, ritmo de trabajo etc., nos ayudará mucho en las demás clases, porque reconoceremos formas de pensar de una parte de ellos, les atenderemos con mayor soltura y dispondremos de más tiempo para quienes más lo necesitan.

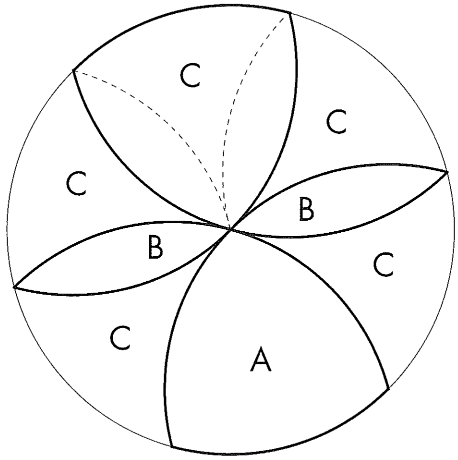


Figura 1

todo el círculo en figuras (figura 1) (el profesor les sugirió como «pista» que incluso gráficamente podían comprobarlo). A partir de ahí, trata de obtener una relación.

$S_{TOTAL} = 2A + 2B + 4C$

$A = 2B + 1C$

$S_T = 2(2B + C) + 2B + 4C$

$S_T = 4B + 2C + 2B + 4C$

$S_T = 6B + 6C$

$S_T = 6(B + C)$

$S_T/4 = 6(B + C)/4$

Superf. 1/4 círculo $= 6(B + C)/4$

Superf. Triáng. Convexo $= 2B + C$

A partir de aquí, él concluye precipitadamente, que el triángulo es menor que la cuarta parte del círculo.

¿Cómo ayudar a Carlos a buscar otras estrategias sin dirigirlo demasiado, buscando sus propios puntos de partida para que se sienta seguro? Siempre ha tropezado en los problemas de geometría, mientras en números se ha atrevido con tareas a veces complicadas. Parece como si no pudiera reconocer a un tiempo el todo y las partes que lo componen, aunque en algunos de los problemas propuestos fueran visualmente más evidentes.

El estudio de estas dificultades, en una clase donde alumnas y alumnos tienen una serie de puntos comunes, en cuanto a gusto por las Matemáticas, interés en la resolución de problemas, ritmo de trabajo etc., nos ayudará mucho en las demás clases, porque reconoceremos formas de pensar de una parte de ellos, les atenderemos con mayor soltura y dispondremos de más tiempo para quienes más lo necesitan. No hemos hecho hasta la fecha un seguimiento posterior del alumnado del Taller, y es una lástima, porque nos hubiera permitido algún dato más acerca de los efectos de la optativa en la trayectoria posterior de sus participantes.

Por otra parte, de la valoración justa del trabajo de cada uno depende en muchas ocasiones que el interés y los hábitos de curiosidad e investigación no se trunquen. Por eso es importante tener mayor preparación en psicología del aprendizaje. Un alumno que se siente valorado en su trabajo desarrolla una seguridad, una autoestima y una imagen de sí mismo fundamentales para multiplicar su rendimiento académico, no sólo en el área en la que se sienta valorado, sino también en las demás. Evidentemente, también hay alumnos menos interesados porque quizá no han elegido la materia por propia iniciativa o no han encontrado aún la forma de orientarse en la resolución de problemas. Y es difícil evaluar su trabajo y no calificar mejor únicamente a los alumnos que tienen más capacidad, y justamente por ella.

Luis es mucho más práctico. En el primer problema da una primera explicación sucinta:

$$\underbrace{99-97}_{2} + \underbrace{95-93}_{2} + \underbrace{91-89}_{2} + \ldots$$

Existen 50 números (no cien porque van de dos en dos). Cada resta vale 2 y hay 25 grupos luego el valor de la progresión en total es 25 x 2 = 50.

Posteriormente hace otra resolución considerando dos progresiones por separado, una de números positivos y otra de números negativos. Halla la suma de los términos en cada una y las resta, obteniendo el mismo resultado.

En el 2.° problema, como no ha visto clara la descomposición gráfica, decide hacer aproximaciones mediante superficies de triángulos (figuras 2 y 3) y sale del paso llegando a la conclusión de que «aproximadamente es mayor el cuarto de círculo».

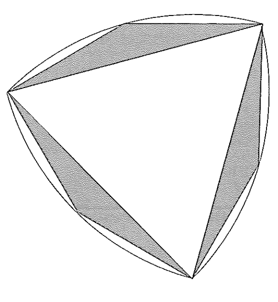


Figura 2

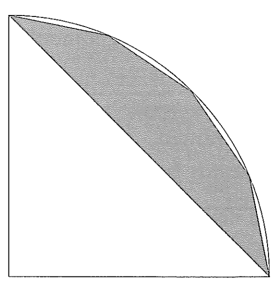


Figura 3

En cambio David, a primer golpe de vista concluye respecto al primer problema que se puede resolver de tres formas. La primera es inmediata para él:

Un alumno que se siente valorado en su trabajo desarrolla una seguridad, una autoestima y una imagen de sí mismo fundamentales para multiplicar su rendimiento académico, no sólo en el área en la que se sienta valorado, sino también en las demás.

El resultado es igual al número de números de dicha serie, con el signo del mayor y, si éstos se van alternando:

$$99-97+95-93+\ldots+7-5+3-1=50$$

La segunda coincide con la de Luis y en la tercera se observa que ha hecho algunas pruebas antes de contestar en la primera forma:

Lo que hacemos es operar con los números impares intermedios de cada decena, es decir, los números terminados en 5 de cada decena (+95 − 85 + 75 − 65...) Y operamos según indique su signo. ¿Por qué cogemos los intermedios de cada decena? Porque si vamos operando decena por decena, nos damos cuenta que el resultado es siempre el número impar intermedio:

$$+99-97+95-93+91=+95$$

$$-89+87-85+83-81=-85$$

$$+95-85+75-65+55-45+35-$$
$$-25+15-5=+50$$

En el segundo problema, David muestra que su capacidad visual le permite descomponer y componer figuras, verlas en su conjunto y en sus partes y lo resuelve de una forma muy fácil (figura 4).

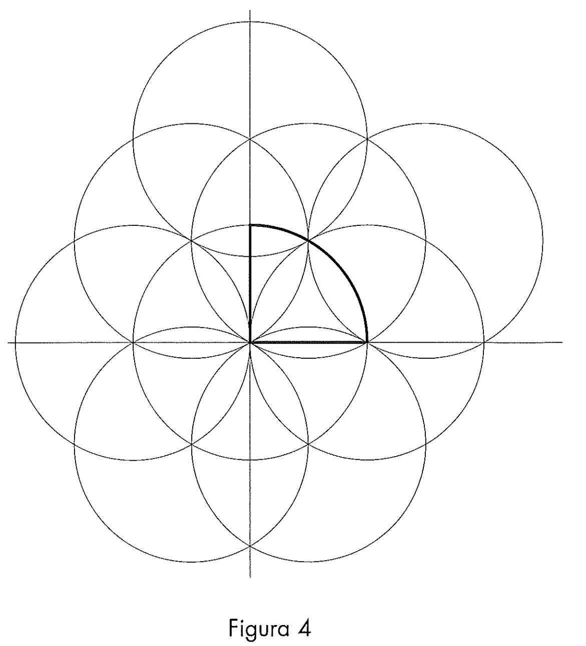
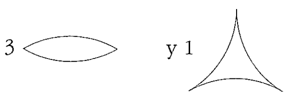


Figura 4

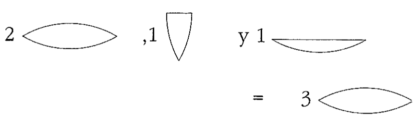
Es menor que 1/4 de círculo porque al dividir el círculo en cuatro partes, observamos que del triángulo convexo sólo se queda fuera del cuarto, la mitad de uno de los óvalos (sic.) Junto al eje horizontal, sin embargo junto al eje vertical, observamos que cabe la mitad de otro y la mitad de un «triángulo». Por lo tanto sobra la mitad de un «triángulo», por lo que es menor que 1/4 de círculo.

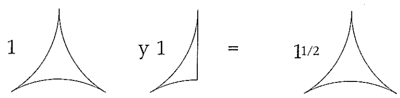
Pero, no conforme aún, decide descomponer cada una de las figuras en partes y compararlas:

El triángulo convexo está formado por:

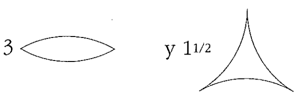


En un cuarto de círculo tenemos:

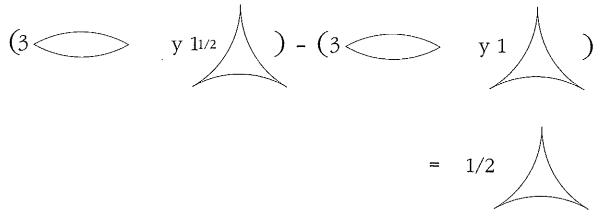




Total:



Diferencia:

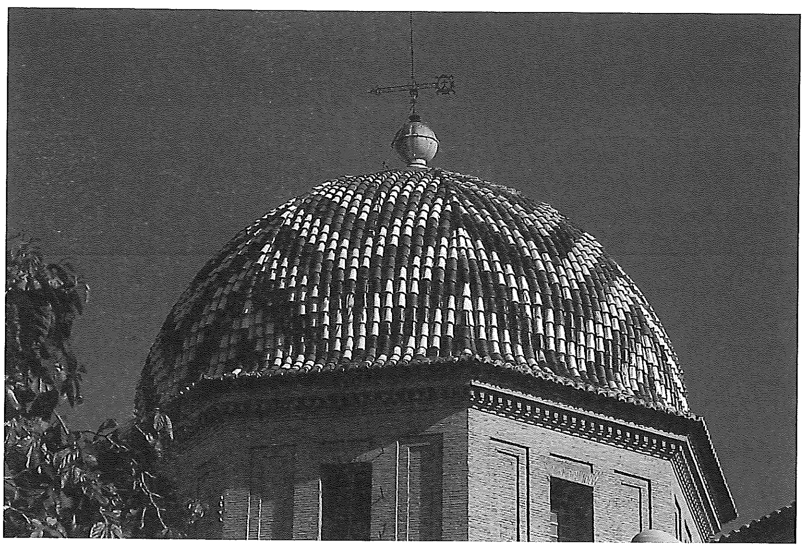


Conclusiones

Los alumnos que trabajan así ¿nacen o se hacen? Seguro que hay una parte innata importante, pero no es menos importante para su desarrollo global el tipo de experiencias a que ha debido enfrentarse y las ayudas con que ha contado para ello. Si acostumbramos a los adolescentes a hacer ejercicios rutinarios, probablemente no lleguen a hacerse preguntas nunca puesto que los ejercicios suelen ser limitados en sus planteamientos.

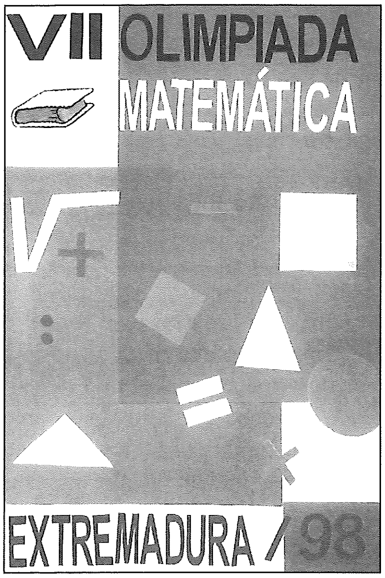
A lo largo de la ESO hay muy poco tiempo para hacer un correcto tratamiento de la resolución de problemas y más bien tenemos pocas oportunidades de poner de vez en cuando alguna situación que se sale de lo común. Para asentar los aprendizajes básicos también son necesarios los ejercicios de aplicación y de rutina, de modo que nos encontramos con falta de tiempo para cubrir debidamente todos los objetivos deseables, en especial aquellos que se desarrollan más a largo plazo. Por ello es necesario el Taller de Matemáticas, como espacio privilegiado para la adquisición de un pensamiento reflexivo e investigador. Es más, proponemos que esta materia debe formar parte de un itinerario obligado hacia los Bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y la Salud y Tecnológico.

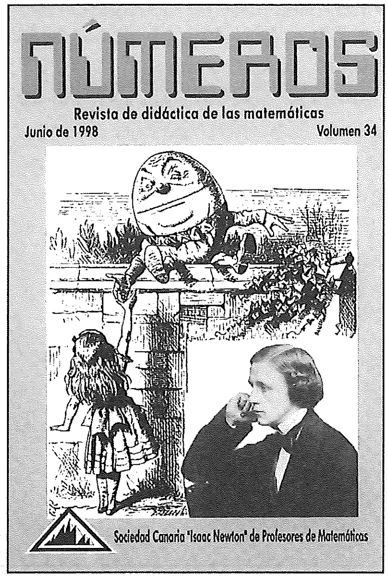
Matilde Moralejo
Amaia Basarrate
Antonio Caballero
Santiago Martín
Fernando de Diego
Ángel González
José M.ª Orihuel
IES Carmen Conde
Las Rozas (Madrid)

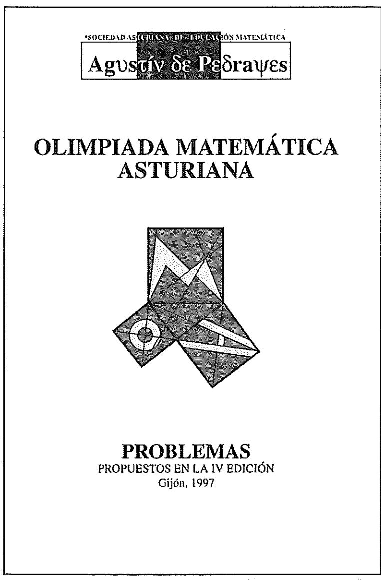


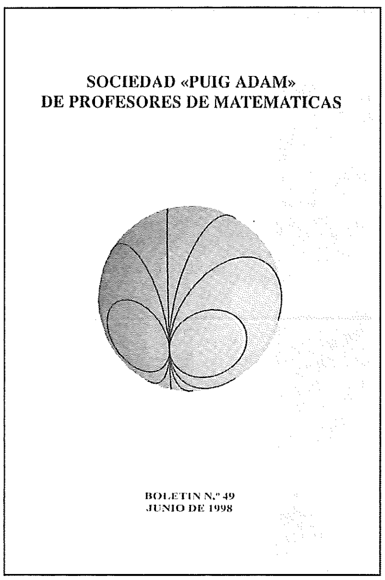
Valencia
Foto:
Pilar Moreno

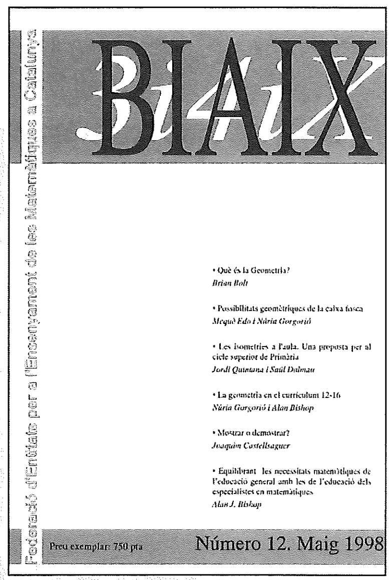
PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES











SUMA 29
noviembre 1998, pp. 81-88

El vídeo en clase de Matemáticas: ¡Vaya unas historias!

José Muñoz Santonja
Antonio Pérez Sanz

INFORME

El vídeo en clase es un medio educativo, nunca un fin

Carta de San Pablo a los Teleenseñantes

Vivimos indiscutiblemente en el Siglo de la Imagen en Movimiento, prácticamente desde que nacemos vivimos «adorando» al gran ojo de la Televisión. Para mirar la «tele» no se precisa ninguna preparación, pero aprovechar la imagen en movimiento dentro de la clase es otro aspecto diferente. Cuando se intenta utilizar vídeos en las aulas aparecen una serie de problemas. En este artículo se comentan, en tono jocoso, algunos de esos problemas y se dan algunas pautas para aprovechar este útil recurso didáctico que es el vídeo.

EL DIARIO del profesor

Texto extraído del diario personal de Federico, un profesor de Matemáticas.

«Caro diario:

Hoy he tenido un día terrible. Ya te comenté lo contento que estaba después de haber conseguido un vídeo de matemáticas para ponérselo a mis chavales. Como hoy tenía varios cursos de tercero de Secundaria seguidos, decidí llevar el vídeo y ponerlo en todas las clases, pero todo me ha salido mal. Te cuento esquemáticamente los malos tragos por los que he pasado.

Recogí al primer grupo y nos fuimos a la Sala de Usos Múltiples, pero resulta que la llave del aula no aparecía; al parecer, algún profesor se la había llevado sin darse cuenta en el bolsillo el día anterior. Mientras los conserjes me conseguían la copia de seguridad, te puedes imaginar cómo se han alborotado los alumnos en el pasillo, molestando a las aulas cercanas.

Cuando he conseguido entrar y calmar un poco el ambiente, he puesto el televisor y aquello no se veía. Por más que pasaba la cinta en el vídeo, sólo se veían interferencias en el televisor. He tenido que ir a buscar a uno de los profesores de Ética (que son los que más suelen usar el vídeo) para que me ayudara. Al parecer, alguien había tocado el aparato de vídeo y se había perdido la programación, por lo que al compañero le ha costado bastante tiempo volver a sintonizar el aparato (yo la verdad soy un inepto para estas cosas).

Mientras tanto, el nivel de murmullo en la clase aumentaba en proporción equivalente a la manera en que yo iba perdiendo los estribos. Cuando al fin conseguimos dar con la tecla, ya llevábamos casi la mitad de la clase perdida (igual que mis nervios). Inmediatamente rebobiné la cinta, la puse al principio y tras dejarla en funcionamiento me salí fuera del aula a fumarme un cigarrito, a ver si me calmaba. No llevaba ni dos minutos fuera cuando comencé a escuchar mucho jaleo en el aula. Al entrar me encuentro con que en el vídeo se estaba proyectando un episodio de «David el Gnomo». Al parecer, el compañero que me dejó la cinta había aprovechado una donde tenía otras cosas grabadas. Según me fijé, en la carátula interior del vídeo venían todas las cosas que tenía grabadas con su duración, por lo que volví a poner el vídeo al principio y estimé cuánto tenía que pasar para llegar al episodio que me interesaba, pero cuál fue mi sorpresa cuando al rebobinar la cinta, en el vídeo no aparecía el tiempo real que se iba consumiendo, sino el número de vueltas de la cinta (información que no figuraba en la misma), por lo que tuve que ir probando hacia adelante y hacia atrás hasta dar con el comienzo del episodio que a mí me interesaba. Pero para entonces ya se había acabado prácticamente la clase. Sólo me dio tiempo de poner cinco minutos y de volverlo a preparar para que en la clase siguiente no me pasara lo mismo. Te puedes imaginar el guirigay que se montó en el aula mientras yo buscaba. Algo horrible.

La segunda clase fue peor, porque como no se me había ocurrido fijarme en los horarios, me encontré con que a esa hora estaba ocupada el aula con la EATP de Danza, por lo que me tuve que ir al aula e improvisar la clase que no había preparado.

Para la tercera hora ya me había asegurado que estaba el aula libre, así que llevé al grupo que me correspondía y les puse el vídeo desde el principio y yo me puse al final del aula a corregir los exámenes de COU, ya que me corría prisa tener las notas para la recuperación. Después de diez minutos de vídeo hubo gente (sobre todo los del final) que comenzaron a hablar, otros a leer, incluso descubrí a uno que se estaba durmiendo. Así que poniéndome en mi lugar les advertí que estuvieran muy atentos, porque después les iba a preguntar cosas sobre el vídeo (en general, porque yo la verdad es que no lo había visto completo). De pronto, cuando llevábamos menos de media hora, el vídeo se acabó y me encontré con que me quedaba media clase que dar a unos alumnos que estaban ya un poco inquietos. Tuve que improvisar también las preguntas, aunque no quisieron dar nada más que evasivas al preguntarles sobre lo que habían visto y qué les había parecido. Por lo que recogí de sus respuestas, no habían sacado ninguna información válida del vídeo, así que tuve que empezar a explicar el tema desde el principio, como si no hubiese puesto la cinta.

Te prometo que después de la experiencia de esta mañana no vuelvo a utilizar nunca más un vídeo en mis clases, porque es una pérdida de tiempo y además, ese rollo de que motiva a los alumnos es un cuento, porque los míos no hacían más que hablar. Para colmo, me he dado cuenta de que con los nervios me he traído la llave de la Sala de Usos Múltiples en el bolsillo».

Para colmo, me he dado cuenta de que con los nervios me he traído la llave de la Sala de Usos Múltiples en el bolsillo.

La conversación

Conversación grabada (con micrófono oculto) entre dos limpiadoras del IES Menganito de San Serenín del Monte.

«*Limpiadora una*: Vengo hecha polvo.

Limpiadora otra: ¿Y eso por qué?

L. una: Es que vengo de la limpieza general del Seminario de Matemáticas.

L. otra: Ya, y te has infectado de bacilos matemáticos ¿no?

L. una: Déjate de cachondeo, vengo así porque me ha dado por limpiar el aparato de televisión y el de vídeo que tienen allí, y por la capa de polvo que tenían se ve que no lo han utilizado en todo el año.

L. otra: A mi me pasó lo mismo el curso pasado. Además no sé para que querrán esos aparatos si no tienen ni una sola cinta de vídeo salvo una del Pato Donald, y yo creo que los alumnos de aquí son muy mayorcitos para eso. Los de Inglés sí que tienen cintas de vídeo a mogollón.

L. una: Pues ya podrían intentar utilizar algo del vídeo porque, mi niño que está ya en segundo de la «eso», dice que se aburre como una ostra en las clases de matemáticas.

L. otra: Al mío le pasa lo mismo. El profesor todo el día venga a escribir cosas en la pizarra y ellos a copiar, aunque peor es en otras asignaturas, en las que el profesor se sienta a la mesa y se pone a hablar. Fíjate qué absurdo. Mi niño está acostumbrado a la televisión desde que nació, me acuerdo de que ya en el parque lo colocaba delante del televisor para que se entretuviera con la música y los colorines, y aquí los que explican, todavía utilizan los medios de antes de Cristo.

L. una: Si es lo que pasa. Nuestros niños están acostumbrados a la televisión en la que todo va tan rápido (¡hay que ver los cientos de anuncios que nos pueden meter en cinco minutos!) Mi niño, que es de la edad del tuyo, casi sólo se entretiene con los vídeos de música, esos que echan de vez en cuando y con la publicidad, porque dice que las películas que echan le parecen muy lentas, bueno, salvo las del «Suacerneger» y otras por el estilo, que están todo el tiempo con explosiones y tiros. Esas sí le gustan.

L. otra: Yo no comprendo cómo en estos tiempos en que se lleva sobre todo la imagen, la velocidad, el sonido, la música... y con las horas que pasan los niños delante de la tele, en la escuela siguen usando casi exclusivamente la palabra y la pizarra. ¡Qué aburrimiento!

L. una: Así les va».

Pausa publicitaria

La empresa de vídeo Pilipps y Miliss les ofrece una parte de la conferencia del experto en técnicas de la imagen Don Matías Plas.

Es innegable que vivimos en el siglo de la comunicación donde el componente icónico es muy importante. La juventud actual, nuestros alumnos, se han criado de una manera muy distinta a nosotros. En nuestros tiempos los niños entreteníamos nuestro tiempo libre jugando en la calle, al fútbol, a tirarnos piedras, a destrozar bichos, etc. Hoy en día los niños crecen «adorando» al Televisor-Niñera que es quien llena sus ratos libres.

Los alumnos están acostumbrados desde pequeños a recibir la información de una manera que no coincide con la que posteriormente se van a encontrar en la escuela. Según datos de la UNESCO, aproximadamente el 80% de la información que recibe un chaval proviene de los medios de comunicación. Sin embargo, en los centros educativos seguimos considerándonos como los grandes pilares del saber, donde vamos a «enseñar» a nuestros alumnos todo lo que les va a interesar en la vida para ser «personas de provecho».

Como indica Joan Ferrés: «la imagen se muestra más eficaz que la palabra a la hora de suscitar emociones y efectos. Las imágenes y los sentimientos se encuentran en una misma frecuencia de onda».

Los niveles de iconicidad son inversamente proporcionales a los de abstracción. Mientras más abstracto es un concepto más difícil resulta expresarlo mediante imágenes.

Por eso es peligroso olvidar en el proceso de enseñanza-aprendizaje la importancia de las actividades intelectuales visual-imaginativas.

Según Creswell, Gliford y Huffman:

«Nuestra enseñanza suele también presentar cierta preferencia por los aspectos lógico-verbales de la actividad intelectual frente a los visual-imaginativos...» (o del hemisferio derecho frente al hemisferio izquierdo del cerebro).

De modo esquemático podemos decir que forman parte de los componentes lógico-verbales: «el uso de símbolos abstractos, el lenguaje formalizado, el cálculo, la lógica formal, los procedimientos analíticos y secuenciales, etc.» (como se puede ver casi se describe la enseñanza tradicional de la matemática).

Forman parte de los componentes visual-imaginativos: «el dominio de las imágenes visuales, los aspectos intuitivos, la capacidad para detectar formas y regularidades, los modos de proceder sintético y holístico, etc.» (aspectos que debería incluir una enseñanza actualizada de las matemáticas).

El que en la enseñanza se prime uno de los aspectos sobre el otro es un error, pues los estudios realizados indican que «la mente opera a niveles óptimos cuando las emanadas de los procesos cognitivos son de una complejidad suficiente como para activar ambos hemisferios (...) Educativamente esto significa que los problemas repetitivos, simples y sin interés (tales como la mayoría de los cálculos matemáticos), serían comprendidos de manera pobre, con poco beneficio para ambos hemisferios».[1]

Si queremos que la imagen entre en nuestras clases, debemos tener claro que se debe modificar el enfoque de nuestra enseñanza. Los niveles de iconicidad son inversamente proporcionales a los de abstracción. Mientras más abstracto es un concepto más difícil resulta expresarlo mediante imágenes. En la escala de iconicidad de Moles, en una escala de 0 a 12, el nivel 0 correspondería a ecuaciones, fórmulas y textos. El nivel 1 a gráficos vectoriales y funcionales. Siguiendo en ese sentido, en la escala correspondería un nivel 9 a un cartel ilustrado y para un vídeo animado un nivel 10-11 (el nivel 12 corresponde al objeto real en sí). (Ver en la página siguiente la escala de iconicidad-abstracción de A. Moles).

Por tanto, si una de las ventajas de los medios audiovisuales es el contar con un alto nivel de iconicidad, su utilización en matemáticas no tiene mucho sentido, si la aproximación a hechos y conceptos matemáticos se realiza desde un punto de partida con un nivel de abstracción muy alto.

Tras esta Pausa Publicitaria continuamos con nuestra programación habitual.

1. J. L. Creswell, C. Gliford y D. Huffman: *Implications of right/left brain research of mathematics educators*, tomado de SUMA, n.° 3, Primavera 1989, en el artículo titulado «Por un enfoque holístico en la enseñanza de las matemáticas», escrito por Pere Mumbru i Rodríguez.

Iconicidad	Definición	Ejemplo	Abstracción
12	El objeto en sí mismo	La vitrina de una tienda	0
11	Modelo tridimensional a escala	Escaparates ficticios o virtuales	1
10	Esquema bi o trimensional	Globo terrestre, mapa geológico	2
9	Fotografía	Cartel	3
8	Perfiles en diseño	Catálogos, prospectos	4
7	Esquema de construcción	Mapa, corte de un motor	5
6	Vista«estallada»	Esquema de piezas por proximidad topológica	6
5	Esquema eléctrico. Paso de la topografía a la topología	Plano del Metro	7
4	Organigrama o esquema bloque	Flow chart de un programa.	8
3	Esquema de formulación	Sociogramas, fórmulas químicas desarrolladas	9
2	Esquema en espacios complejos	Esquema de fuerzas sobre una estructura metálica	10
1	Esquema en un espacio abstracto	Gráficos vectoriales, triángulo de las vocales	11
0	Fórmulas algebraicas	Ecuaciones y fórmulas matemáticas. Textos	12

Escala de iconicidad-abstracción (A. Moles)

Las recetas de la abuela para «torpes». Hoy: El vídeo como recurso didáctico

Como es tradicional en nuestros programas de recetas para «torpes», (surgidos al amparo del éxito obtenido por las publicaciones de «Informática para torpes» ilustradas por Forges) vamos a dar una serie de pasos que se deberían tener en cuenta a la hora de llevar un vídeo educativo a la clase. Vamos a explicar detenidamente cada uno de esos pasos. Como es tradicional en cualquier receta, los pasos que presentamos son meramente indicativos, el hecho de que el producto final sea mejor o peor dependerá de la originalidad, intuición, interés y capacidad del «cocinero» que siga estos pasos.

...los pasos que presentamos son meramente indicativos...

Ingredientes indispensables

- Un vídeo educativo (véase la tabla más abajo con una selección de vídeo matemáticos para Secundaria agrupados por ciclos y temáticas).
- Un televisor y un reproductor de vídeo.
- Una sala adecuada para visionar el vídeo y poder trabajar sobre lo visto.
- Ganas, interés y creencia en las posibilidades educativas del medio vídeo.

1) Conseguir un vídeo con suficiente calidad técnica

No suele ser extraño que nos presten una cinta que es copia de copia de copia del original, muchas veces hechas en malos equipos, con lo que el sonido y la imagen suelen ser malos. No hay nada más desmotivante que un programa al que «se le van» los colores o las explicaciones. Es conveniente conseguir un vídeo original o una primera copia como mucho. Si no se dispone de medios para comprarlos, en los CEP suelen tener vídeos que pueden prestar.

2) Ver previamente el vídeo completo y seleccionar la parte que nos interese

Por mucho que nos indiquen los compañeros que existe un vídeo muy bueno para la parte que queremos explicar, debemos visionarlo antes de llevarlo a la clase. Aunque muchos de los vídeos suelen ir acompañados de guías didácticas, es conveniente que nos hagamos nuestro propio guión, minutando muy bien los conceptos que aparecen y sobre todo dejando bien claro dónde lo vamos a englobar y cómo (para ello nos puede servir el cuadro que aparece más adelante, donde aparecen esquemas de guiones para visionar un vídeo y que deberíamos realizar siempre que cayese uno en nuestras manos). El minutar convenientemente el vídeo nos permitirá posteriormente seleccionar qué parte vamos a mostrar en la sesión de clase. Téngase en cuenta que en general todos los vídeos educativos, incluso los más cortos (por ejemplo la serie I.M. 10 de 10 minutos cada programa) contienen mucha información, más de la que se puede asimilar en una sesión de clase.

3) Conocer el aparato donde se va a reproducir

No es raro encontrarnos en el centro educativo con equipos que no son iguales a los que tenemos en casa, lo que nos puede llevar a problemas (es muy usual el problema de los equipos que cuentan por minutado y otros que es por número de vueltas de la cinta). Por ello, es conveniente que conozcamos y probemos la cinta previamente en el equipo al que vamos a llevar a nuestros alumnos.

4) Preparar una introducción al vídeo

Debemos hacer una serie de explicaciones o actividades que preparen el tema que vamos a tratar con el vídeo, así centramos la atención, creamos expectativas y preparamos el clima adecuado para que el visionado sea fructífero.

5) Visionar el programa con nuestros alumnos

No hay que caer en la equivocación de pensar que el vídeo atrae de una forma tal que nada le influye. Si el profesor se desentiende del programa que se está emitiendo, el alumno tiende a desentenderse también, por ello hay que ver el trozo de vídeo que se haya seleccionado con nuestros alumnos, anotando (aunque sea mentalmente) las reacciones que provoque en la clase.

6) Planificar el debate durante y después del visionado

El ver un vídeo educativo suele crear muchas inquietudes, reflexiones o preguntas que aflorarán en un debate posterior y que debe ser moderado y promovido por el profesor. En él pueden aparecer todas las dudas que haya provocado la visión del programa, detectar el nivel de aprehensión de los contenidos seleccionados y de los posibles aprendizajes paralelos. Este debate nos debe de llevar a una fase de reflexión crítica.

7) Plantear actividades post-visionado

Después de los puntos anteriores se deben tener preparadas una serie de actividades que permitan a los alumnos investigar sobre los objetos motivo del vídeo, de forma que se consoliden los conocimientos adquiridos, se amplíen y lleguemos a una recapitulación final sobre los elementos que queríamos estudiar. Esta última fase investigadora puede realizarse en gran o en pequeños grupos.

El ver un vídeo educativo suele crear muchas inquietudes, reflexiones o preguntas que aflorarán en un debate posterior y que debe ser moderado y promovido por el profesor.

8) Evaluar el documento y la metodología empleada

No siempre, a decir verdad pocas veces, las percepciones, los procesos de decodificación de los mensajes y hasta la sensibilidad y los gustos estéticos de los alumnos coinciden con los del profesor. Un material que a nosotros nos puede parecer sumamente interesante y apto para abordar un tema o desarrollar un contenido les puede resultar a los alumnos aburrido, extraño o simplemente incomprensible. Una evaluación seria del material utilizado y, sobre todo, la forma de utilizarlo nos puede ayudar a rentabilizar al máximo estos materiales en ocasiones futuras.

...Para llegar a ser usuarios avanzados

Esta serie de recomendaciones para «torpes» y las desventuras del pobre Federico confesadas a su caro diario nos sitúan ante las pautas elementales para una utilización no traumática y además positiva del vídeo en Matemáticas

Pero si realmente queremos sacarle todo su rendimiento a un documento audiovisual, será conveniente profundizar en una serie de aspectos de carácter metodológico.

Podemos dividir el proceso de integración del vídeo en el aula en tres fase bien diferenciadas:

- Fase de *diseño.*
- Fase de *desarrollo.*
- Fase de *evaluación.*

Cada una de estas fases lleva implícitas una serie de actuaciones del profesor que se detallan en el cuadro de la página siguiente.

Seguramente ante el cúmulo de tareas que aparecen en el cuadro a uno le entren tentaciones de seguir la reflexión de nuestro amigo Federico y no utilizar jamás un vídeo de Matemáticas. Por suerte la cosa no es tan grave, y si pensamos un poco no es nada distinto de los que hacemos cada vez que utilizamos con los alumnos un recurso no tradicional, es decir cualquier cosa distinta de la tiza y la pizarra.

Por fortuna, la mayoría de los documentos videográficos vienen en la actualidad acompañados de una breve guía didáctica en la que se ofrecen sugerencias de carácter muy general para la integración curricular del documento.

Este material la mayoría de las veces no es suficiente, ni pretende serlo, ya que es responsabilidad del profesor realizar la adaptación y diseñar las estrategias didácticas de utilización que se ajusten a sus intereses y a las condiciones específicas del centro y de los alumnos, pero constituye un buen punto de partida para determinar los objetivos, secuenciar y programar los visionados y fijar las actividades que se vayan a realizar.

Por ello, es conveniente que el profesor realice su propia ficha de aplicación didáctica (véase un posible modelo en

<table>
<tr><th colspan="3">FASES</th></tr>
<tr><th>DISEÑO</th><th>DESARROLLO</th><th>EVALUACIÓN</th></tr>
<tr>
<td rowspan="3">• Definición de objetivos generales y específicos que se pretenden conseguir con el material seleccionado.
• Visionado por el profesor.
• Evaluación previa del documento:
– Aspectos técnicos.
– Aspectos comunicativos.
– Aspectos didácticos.
• Secuencias de visionado:
– Selección de los bloques.
– Temporalización.
– Alteración del documento (cambio del orden, supresión de secuencias, cambio en sonido o imagen –edición–).
• Selección de espacios.
– Aula del curso.
– Aula de audiovisuales.
– Bibliotecas, otros.
• Preparación de los equipos técnicos.</td>
<td>Actividades previas al visionado de los alumnos
• Presentación del documento.
• Detección de los conocimientos previos de los alumnos:
– Preconceptos.
– Habilidades.
– Destrezas.</td>
<td>Del diseño
• Adaptación a los objetivos.
• Adecuación de las actividades programadas.
• Valoración de los recursos técnicos y didácticos utilizados.</td>
</tr>
<tr>
<td>Durante el visionado
• Observación por el profesor de:
– Interés.
– Actitudes.
– Reacciones.
• Actividades en las pausas del visionado:
– Análisis de información.
– Refuerzo de contenidos.
– Aplicación de procedimientos.</td>
<td>Del documento
• Adecuación del medio utilizado.
• Adecuación de contenidos.
• Presentación y secuencia utilizada.
• Uso autónomo por el alumnado.</td>
</tr>
<tr>
<td>Posteriores al visionado
• Comentario del profesor.
• Nuevos visionados:
– General.
– Por bloques.
– En grupo.
• Actividades de consolidación.
• Actividades de evaluación.</td>
<td>Del desarrollo
• Consecución de los objetivos.
• Evaluación del tipo y selección de las actividades propuestas.
• Interacción de los alumnos.
• Actuación del profesor.</td>
</tr>
</table>

Metodología de utilización del vídeo

Conviene tener claro...	***Para poder hacer...***
• Ideas generales del documento (Red de contenidos).	• Integración en la unidad didáctica. • Mapa conceptual del documento.
• Sumario del documento (Minutado aproximado).	• Puntos de discusión y debate. • Preconceptos, conocimientos previos.
• Utilización: – Visionados (tipos: en grupo, en equipos). – Secuencias y tiempos.	• Fichas de control del visionado.
• Actividades: – Previas al visionado. – Durante el visionado. – Complementarias (posteriores al visionado).	• Fichas de prácticas (ejercicios, problemas, actividades). • Materiales complementarios.
• Observaciones generales y concretas sobre el material y el proceso.	• Evaluación del material audiovisual y del modo de utilización. • Evaluación del aprendizaje. • Modificaciones ante futuros usos.

Ficha de aplicación didáctica

	Números y operaciones: significado, estrategias y simbolización	*Medida, estimación y cálculo de magnitudes*	*Representación y organización en el espacio*	*Interpretación, representación y tratamiento de la información*	*Tratamiento del azar*
ESO (Primer ciclo)	**OJO MATEMÁTICO** 2. Ecuaciones y fórmulas 3. Fracciones y porcentajes 6. Números 8. Razón y escala 12. Investigación sobre los decimales 16. Cálculos aproximados 17. Números de Fibonacci y números primos **SERIE MÁS POR MENOS** (La Aventura del Saber. TV2) 2. Fibonacci. La magia de los números **INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS 10** • En proporción • Siempre los números decimales	**OJO MATEMÁTICO** 1. Área y volumen 8. Razón y escala 9. Formas y ángulos 11. Círculos 14. Mapas y coordenadas 15. Medidas 16. Cálculos aproximados	**OJO MATEMÁTICO** 1. Área y volumen 8. Razón y escala 9. Formas y ángulos 10. Simetría 11. Círculos 13. Líneas y redes 14. Mapas y coordenadas LA AVENTURA DEL CUADRADO TRIÍNGULOS Y CÍRCULOS GEOMETRÍA Y PROYECCIÓN	**OJO MATEMÁTICO** 4. Gráficas 18. Estadística **SERIE MÁS POR MENOS** (La Aventura del Saber. TV2) • El lenguaje de las gráficas	**OJO MATEMÁTICO:** 7. Probabilidad **SERIE MÁS POR MENOS** (La Aventura del Saber. TV2) • Las leyes del azar
Ejes transversales	**OJO MATEMÁTICO** 5. Lógica y resolución de problemas 20. Cómo abordar los problemas				
ESO (Segundo ciclo)	**OJO MATEMÁTICO** 2. Ecuaciones y fórmulas 3. Fracciones y porcentajes 8. Razón y escala 12. Investigación sobre los decimales 16. Cálculos aproximados 17. Números de Fibonacci y números primos 19. Números triangulares y números cuadrangulares **SERIE MÁS POR MENOS** (La Aventura del Saber. TV2) 1. El número áureo 2. Fibonacci. La magia de los números. **INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS 10** • Progresiones aritméticas • El triángulo de Pascal	**OJO MATEMÁTICO** 1. Área y volumen 8. Razón y escala 9. Formas y ángulos 11. Círculos 14. Mapas y coordenadas 15. Medidas 16. Cálculos aproximados	**OJO MATEMÁTICO** 1. Área y volumen 8. Razón y escala 9. Formas y ángulos 10. Simetría 11. Círculos 13. Líneas y redes 14. Mapas y coordenadas **SERIE MÁS POR MENOS** (La Aventura del Saber. TV2) • Movimientos en el plano • La Geometría se hace Arte • El mundo de las espirales • Cónicas: del baloncesto a los cometas • Fractales... la geometría del caos TRIÁNGULOS Y CÍRCULOS TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS ENUNCIADO DE TALES DEL PLANO AL ESPACIO	**OJO MATEMÁTICO** 4. Gráficas 18. Estadística **SERIE MÁS POR MENOS** (La Aventura del Saber. TV2) • El lenguaje de las gráficas • Matemática electoral **INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS 10** • Consigue los datos	**OJO MATEMÁTICO** 7. Probabilidad **SERIE MÁS POR MENOS** (La Aventura del Saber. TV2) • Las leyes del azar
Ejes transversales	**OJO MATEMÁTICO** 5. Lógica y resolución de problemas 20. Cómo abordar los problemas **SERIE MÁS POR MENOS** (La Aventura del Saber. TV2) • Matemáticas y realidad				

la página anterior), que no consiste sino en plasmar por escrito de forma breve todas las reflexiones, intenciones, modo de utilización y resultados esperados y conseguidos referidos al documento utilizado. La realización de esta ficha didáctica de estas características puede exigir, en algunos casos, un notable esfuerzo por lo que es aconsejable su realización en equipo dentro del departamento.

Pero, ¿de verdad hay vídeos de Matemáticas?

A mediados de los años ochenta, el MEC se lanzó, a través del Programa de Nuevas Tecnologías –PNTIC–, a una ambiciosa política de introducción de los medios audiovisuales en los centros, el llamado Proyecto Mercurio. Las dos líneas que inspiraban este proyecto, no se basaban tanto en una fuerte dotación tecnológica, sino en dos aspectos fundamentales: desarrollo de proyectos por áreas, proporcionando a los profesores el material de paso inicial –vídeos didácticos y cuadernos de orientación– y formación inicial y básica del profesorado sobre utilización de los distintos recursos audiovisuales.

De hecho el PNTIC contrataba con distribuidoras privadas la traducción de documentos extranjeros y su posterior distribución a los centros. Muchos de los vídeos de matemáticas traducidos al castellano provienen de esta iniciativa.

El alto coste de las producciones audiovisuales hizo imposible acometer una línea seria de producción propia, que se limitó a apoyar productos artesanales de no muy alta calidad técnica de los CEP. En Cataluña la situación era un poco mejor al contar con una fundación, Serveis que con subvención de la Generalitat, y con grandes pérdidas mantuvo una producción de guiones elaborados por profesores.

A partir de 1992, la situación, al menos en lo que se refiere a Matemáticas, sufre un retroceso claro. La Administración deja de apoyar la traducción de nuevos vídeos y las distribuidoras, con un mercado francamente débil, no toman la iniciativa. De hecho tres de las principales distribuidoras de vídeos de Matemáticas desaparecen en los años siguientes, sólo Serveis y Ancora de una forma muy limitada ha seguido traduciendo materiales importados.

Sin embargo, a pesar de contar con una serie de limitaciones al ser productos elaborados en otros contextos socioculturales, sí existe un relativamente amplio catálogo de documentos audiovisuales de matemáticas susceptibles de ser utilizados en la ESO. En el cuadro anterior se proporciona una visión de conjunto de vídeos didácticos existentes en el mercado para los dos ciclos de la secundaria obligatoria. Como se puede observar, a pesar de la escasa producción propia (ese sería tema para otro artículo) haberlos «haylos». Ya sólo falta utilizarlos como un recurso cotidiano dentro del aula.

A partir de 1992, la situación, al menos en lo que se refiere a Matemáticas, sufre un retroceso claro. La Administración deja de apoyar la traducción de nuevos vídeos y las distribuidoras, con un mercado francamente débil, no toman la iniciativa.

José Muñoz
IES Macarena. Sevilla.
SAEM «Thales»
Antonio Pérez
IES Salvador Dalí. Madrid.
SMPM «Emma Castelnuovo»

Bibliografía

AGUILAR, P. (1997): *Manual del telespectador Inteligente*, Fundamentos, Madrid.

ALONSO, F. y otros (1987): *Aportaciones al debate sobre las matemáticas de los 90, Simposio de Valencia*, Mestral, Valencia.

ALONSO, M. y L. MATILLA (1990): *Imágenes en acción. Análisis y práctica de la expresión audiovisual en la escuela activa*, Akal, Madrid.

BURGUÉS, C. (1989): «Caleb Cattegno (1911-1988)», *SUMA*, n.° 3.

CAMPUZANO, A. (1992): *Tecnologías audiovisuales y Educación. Una visión desde la práctica,* AKAL, Madrid.

DEL RÍO, J. (1988): «Donald en el País de las Matemágicas, o el aprovechamiento didáctico de una película», *SUMA*, n.° 1.

FERRÉS, J. (1988): *Como integrar el vídeo en la escuela*, Ediciones CEAC, Barcelona.

FERRÉS I PRATS, J. (1988): *Vídeo y Educación*, Laia, Barcelona.

FERRÉS I PRATS, J. (1991): «La dimensión audiovisual en la enseñanza», *Comunidad Escolar*, 30-10-91.

FERRÉS I PRATS, J. (1994): «Televisión y Educación (I). Claves para la comprensión del medio», *Apuma*, n.° 5.

FERRÉS I PRATS, J. (1994): «Televisión y Educación (II). Claves para la comprensión del medio», *Apuma*, n.° 6.

GONZÁLEZ MONCLÚS, A. y otros (1989): *El vídeo en el aula, Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación*, MEC, Madrid.

HOWSON (1987): *Las Matemáticas en primaria y en secundaria en la década de los 90. Kuwait. 1986.* ICME, Mestral, Valencia.

La Televisión Educativa en España. Informe marco, MEC, 1996.

MUÑOZ SANTONJA, J. (1995): «Televisión y Matemáticas», *Actas de las VII Jornadas Andaluzas «Thales»*, Univ. de Córdoba-SAEM Thales, Córdoba.

PÉREZ SANZ, A. y otros (1994): *Guía de recursos didácticos. Matemáticas. ESO*, MEC, Madrid.

PÉREZ SANZ, A. (1995): «Las tecnologías audiovisuales: hábitos perceptivos y enseñanza de la geometría», *Uno*, n.° 4.

PÉREZ SANZ, A. (1998): «Audiovisuales: un recurso didáctico en la clase de Matemáticas», *SUMA*, n.° 28.

POSTMAN, N. (1991): *Divertirse hasta morir*, Ediciones de la Tempestad, Barcelona.

POSTMAN, N. (1992): *Tecnópolis. La rendición de la cultura a la tecnología*, Galaxia Gutenberg, Valencia.

SCHMIDT, M.: *Cine y vídeo educativo*, Ed. PNTIC, MEC, Madrid.

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 89-96

Las nuevas tecnologías y la enseñanza de las Matemáticas

Leoncio Santos Cuervo

INFORME

A partir del innegable hecho de la influencia de las nuevas tecnologías en la sociedad actual, se presenta aquí una reflexión sobre su influencia en la enseñanza de las matemáticas: desde los cambios metodológicos que su uso implica y los problemas que causa en la organización de los centros educativos, pasando por su presencia en el currículo de matemáticas y las sugerencias que se hacen para propiciar tal uso, hasta la presentación de algunos programas informáticos, contenidos y forma de utilización, así como los distintos bloques de contenidos del currículo de matemáticas a los que se ajustan.

LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS en la sociedad actual en general y en la enseñanza en particular

Durante los últimos 10-15 años estamos asistiendo a una irrupción, cada vez más acentuada, de las nuevas tecnologías, en adelante NT, (ya no tan nuevas por tanto) en una amplia gama de actividades cotidianas. En concreto, el ordenador ha pasado a ser una herramienta imprescindible en la mesa de cualquier despacho, en la consulta del médico o en las cajas del supermercado, sin contar su utilización en grandes empresas o en proyectos de investigación de todo tipo.

La educación no puede ser una excepción y no debe quedar al margen del uso de estos medios. Una de las misiones de la educación debe ser la de capacitar a los ciudadanos para la comprensión de la cultura de su tiempo. En este sentido las NT deben ser herramientas que deben colaborar para conseguir unas mayores cotas de calidad y, sobre todo, debe hacer que la educación utilice, en la medida de lo posible, métodos más cercanos a los del trabajo posterior y que supongan un acercamiento a la realidad.

La presencia de las nuevas tecnologías en la enseñanza se va haciendo patente, tal vez de una forma lenta, pero avanza inexorablemente. Su implantación, como asignatura obligatoria u optativa en algunos ciclos formativos de formación profesional y en el currículo de la Educación Secundaria, propicia en parte esta presencia. Quizás la gran batalla, aún no ganada, es conseguir que esté presente como apoyo en todas las áreas de todos los niveles educativos, desde el infantil al universitario.

El debate está abierto y los procedimientos para conseguir que el papel que deben desempeñar por las NT en la educación sea cada vez mayor no son fáciles de concretar curricularmente, ni son fáciles de desarrollar y asumir los cambios metodológicos y didácticos que supone.

Las NT y el profesorado

La utilización de los medios audiovisuales o informáticos en el aula requiere una predisposición «positiva» hacia ello por parte del profesorado. Predisposición que no se da en todos los casos.

Ello nos lleva a reflexionar sobre cuál es la actitud del profesor o profesora ante la posibilidad de utilizar estos medios con sus alumnos.

La primera reflexión que puede hacerse es que para la enseñanza no se cuenta sólo con los libros y la pizarra tradicional, hay que ser conscientes de que también se dispone de «otras herramientas»: retroproyector, vídeo, calculadora, ordenador... La actitud que tome el profesorado ante estos medios es fundamental para que su utilización sea posible y positiva.

Para introducir estos recursos en la enseñanza cotidiana es preciso que los consejos escolares, los equipos directivos y los claustros de profesores tengan ideas claras sobre las funciones que los mismos pueden cumplir, además, naturalmente, de contar con dichos medios. Se debe tener claro que ni el vídeo ni el ordenador van a sustituir al profesor en el aula, sino que serán unos medios de apoyo más, no competidores con el profesor, sino «aliados» unas veces en las tareas más mecánicas de transmitir información y otras en las más complejas de cálculo o representación.

También podemos reflexionar sobre el «espíritu» con el que el profesorado acoge el uso de las NT en el aula. En no pocos casos, el desconocimiento o la competencia mal entendida a que antes aludíamos hacen que el profesorado sea reticente ante el uso de las NT. A veces, subyace a ello una resistencia a abandonar la enseñanza tradicional, un cierto conformismo y comodidad con lo que se está haciendo... Otras veces, es la falta de formación en la utilización de los medios la que hace que no sea factible dicho uso, cuando no la falta material de dichos medios y los problemas para acceder a ellos en los centros.

Los medios tecnológicos en los centros educativos

Es evidente que un buen nivel de dotación material de los centros en medios tecnológicos influirá en que sea más factible su uso por parte del profesorado.

Los problemas que los centros educativos tienen para que en sus presupuestos se pueda incluir la adquisición de

La utilización de los medios audiovisuales o informáticos en el aula requiere una predisposición «positiva» hacia ello por parte del profesorado. Predisposición que no se da en todos los casos.

materiales audiovisuales o informáticos (especialmente de educación primaria, también los de secundaria y en menor medida los universitarios), se han visto paliados en alguna medida durante los últimos diez años por las dotaciones que el Ministerio de Educación les ha hecho llegar para la implantación de los nuevos ciclos formativos de formación profesional o a través de los proyectos Atenea y Mercurio, además de otros proyectos menores. Pero todo ello aún no ha sido capaz de hacer que todos los centros públicos dispongan de medios suficientes para que el profesorado pueda utilizarlos con todos sus alumnos y alumnas.

Problemas para el uso de materiales audiovisuales e informáticos, especialmente en el caso de estos últimos, son cotidianos en la mayor parte de colegios de enseñanza primaria o institutos de enseñanza secundaria. En muchos casos se ha de realizar un turno de utilización, especialmente del aula de informática, que suele entorpecer, cuando no desanimar al profesorado a su utilización.

Pero, a pesar de todo, muchos centros disponen de los medios suficientes y sólo hace falta que la dirección del centro y el profesorado sepan realizar un óptimo aprovechamiento de los mismos. No debe servir de excusa el decir «no tenemos medios suficientes». De hecho, se dan casos de centros con una buena dotación, por ejemplo de ordenadores en un aula destinada sólo para este fin, y en los que los alumnos casi nunca han realizado actividades en áreas que no sean la asignatura de informática.

Las NT y el currículo de Matemáticas

En el currículo oficial para el área de matemáticas, tanto para el nivel de la Educación Primaria como para el de Educación Secundaria, se señalan varios aspectos de contenidos y metodológicos que recogen la repercusión que los medios tecnológicos deben tener en la enseñanza de las matemáticas.

Entre las finalidades del currículo figura la incorporación de las nuevas tecnologías como contenido curricular y como medio didáctico de apoyo en las diferentes áreas. Para su incorporación como contenido curricular existe, como es sabido, la posibilidad de ofrecer una asignatura optativa en las distintas etapas de la educación secundaria. Como medio didáctico es posible su incorporación en cualquier área.

El área de matemáticas puede ser una de las más adecuadas para la incorporación de estos medios, especialmente de las calculadoras y del ordenador. En el currículo de matemáticas para la Educación Secundaria Obligatoria se dice «...la perspectiva histórica pone de manifiesto que las matemáticas han evolucionado en interdependencia con otros conocimientos...». En esta evolución han tenido que ver, y siguen teniéndolo, la aparición de los medios tecnológicos para el tratamiento y la resolución de problemas. Se cita de manera expresa que «...el uso de los medios tecnológicos ha de tener repercusiones en la manera de enseñar las matemáticas y en la selección de los contenidos y proporcionan una ayuda inestimable para el aprendizaje de determinados contenidos escolares...».

En la secuenciación de los objetivos y contenidos para las distintas etapas en el área de matemáticas, en general, no se hace referencia explícita a que la utilización de los medios tecnológicos sea objetivo o contenido específico, pero sí son varios los apartados de la secuenciación de los objetivos y contenidos, susceptibles de utilizar los medios audiovisuales o informáticos como apoyo para la consecución de los mismos.

En general, por tanto, queda a criterio de los departamentos didácticos y del profesor particular, en su programación de aula, incluir estos medios en los momentos que lo considere más oportuno. Temas adecuados para ello pueden ser prácticamente todos, aunque algunos son especialmente indicados, bien por la naturaleza de los mismos o por la mejor adaptación de los medios disponibles a ellos. En varios bloques de contenidos de las etapas educativas primaria y secundaria puede haber momentos en los que se puede introducir el uso del medio tecnológico adecuado.

Entre las finalidades del currículo figura la incorporación de las nuevas tecnologías como contenido curricular y como medio didáctico de apoyo en las diferentes áreas. Para su incorporación como contenido curricular existe, como es sabido, la posibilidad de ofrecer una asignatura optativa en las distintas etapas de la educación secundaria. Como medio didáctico es posible su incorporación en cualquier área.

Cambios metodológicos con el uso de las NT en la clase de Matemáticas

Sin variar en esencia los objetivos y contenidos curriculares, es posible la utilización de los medios tecnológicos en la clase de matemáticas. Ahora bien, ello supone un cambio metodológico evidente en la forma de «hacer matemáticas».

Los cambios metodológicos que el uso de las NT pueden propiciar en la enseñanza en general son de aplicación, naturalmente, en la enseñanza de la matemáticas. Sin embargo, en este caso las características especiales de una clase habitual, donde el uso de la pizarra es continuo e imprescindible, hace que el cambio sea mayor y, quizás en muchos casos, más conveniente.

Es indudable la utilidad de los medios audiovisuales, especialmente las transparencias, pero también el vídeo como materiales de apoyo para la clase de matemáticas, aunque aquí nos centraremos en el ordenador que, como herramienta más completa y compleja, puede suponer para las matemáticas el aliado permanente. El ordenador puede utilizarse en diversas situaciones y temas: puede complementar las explicaciones y las prácticas habituales, mediante nuevas exploraciones en cálculos y representaciones gráficas; puede actuar de calculadora, pizarra electrónica, constructor de gráficas y de formas geométricas, de generador de tablas a partir de fórmulas, etc.

Para el uso de los ordenadores, una complicación que surge es que, si se trabaja con todos los alumnos a la vez, se ha de hacer en un aula específica y, por lo tanto, no puede ser un medio integrado en la clase habitual, a no ser que se dé la situación (aún utópica) de que todas las aulas dispongan de ellos.

El cambio metodológico fundamental consiste en que el alumnado trabaja con el ordenador como «ayudante y guía» en lugar de ejercer esta función sólo el profesor, pero este último ha elaborado previamente la guía de trabajo, los ejercicios y los recorridos que los alumnos realizarán con los programas informáticos. Las sesiones de trabajo en el aula de informática se decidirán en función del tema objeto del estudio: unas veces servirán para introducir el tema, «investigar» sobre algún aspecto del mismo, y otras para practicar y resolver problemas.

Algunos recursos informáticos disponibles y posibilidades de utilización

Nos limitaremos aquí a comentar algunos recursos informáticos que son quizás, de todos los medios tecnológicos que se pueden poner a disposición del profesorado para su utilización con los alumnos, los que ofrecen una más variada gama de posibilidades de utilización, por la variedad de temas en los que se pueden utilizar y por la rapidez con que estos medios se desarrollan, tanto en la vertiente de la máquina (hardware), como por la cantidad de programas existentes, algunos en constante evolución y perfeccionamiento, y por los nuevos programas que van apareciendo.

Formas de utilización

Las formas de utilización de los ordenadores para enseñar matemáticas pueden ser varias: desde la más normal de trabajar en un aula específica destinada a ello (aula de informática), como contemplar la posibilidad de disponer de un ordenador permanente en el aula habitual.

La utilización del aula de informática para trabajar en algún tema de matemáticas exige la preparación previa de la actividad pero, sobre todo, exige dirigir perfectamente el trabajo de los alumnos y alumnas, planteando por escrito las cuestiones sobre las que ha de investigar, o los problemas que ha de resolver con el programa informático. Además, se han de proporcionar las ayudas necesarias para el manejo del programa. Esta forma de trabajo se adapta a todos los niveles educativos.

La utilización de un solo ordenador en el aula exige la realización de actividades paralelas en la propia aula. Por ejemplo, mientras la mayor parte del grupo trabaja sobre el papel, un pequeño grupo realiza una actividad concreta en el ordenador. Esta actividad puede ser el repaso de algún concepto o tipo de ejercicio o la profundización en el tema que está tratando el resto de la clase; este tipo de trabajo puede ser válido en cualquier nivel educativo, aunque es más habitual que se adapte a niveles inferiores (Educación Primaria o Secundaria Obligatoria), donde la cantidad de conocimientos que hay que transmitir a los alumnos es menor y permite el desarrollo de la programación con un mayor «sosiego».

Con la utilización de los ordenadores, la clase de matemáticas se puede convertir en un laboratorio experimental que permite al alumnado explorar alternativas y aplicar diferentes estrategias para resolver los problemas. La posibilidad de realizar variadas pruebas sobre un mismo problema con gran rapidez para observar los resultados, obtener resultados numéricos y gráficos de forma simultánea, simular otros modelos y, en fin, utilizar el método universal de ensayo-error, confiere al ordenador unas grandes y variadas posibilidades, no siempre aprovechadas, para la enseñanza de la matemáticas.

...sería aconsejable la utilización de programas abiertos, que permitieran la realización de actividades diversas y que no precisaran demasiado esfuerzo y conocimientos técnicos.

Ejemplos de programas, aspectos y temas en los que se pueden utilizar

Los programas de ordenador evolucionan a un ritmo tan acelerado que nos exigen continuas readaptaciones, ya que constantemente salen al mercado nuevos programas que mejoran las prestaciones anteriores. Esto hace que puedan surgir nuevas aplicaciones que, en general, facilitan el acceso a los mismos y a su manejo.

Desde la perspectiva del profesorado, sería aconsejable la utilización de programas abiertos, que permitieran la realización de actividades diversas y que no precisaran demasiado esfuerzo y conocimientos técnicos. A la vez, la elección de un programa debe adecuarse al nivel del alumnado.

Se realiza ahora un recorrido, que no pretende ser exhaustivo, sobre algunos programas informáticos disponibles y los aspectos de los diferentes temas en los que se pueden utilizar.

1) Programas de propósito general

Se engloba en este apartado a un gran número de programas que no sólo tienen utilidad para matemáticas sino también para otros muchos campos. Son programas abiertos en el sentido de que las aplicaciones y actividades se han de diseñar. Esto les otorga un grado de dificultad superior al de otros programas pero a la vez hace que el usuario pueda decidir las actividades que crea «a su medida».

a) *Lenguajes de programación y lenguajes de autor*

Antes de la aparición de programas específicos para matemáticas, existían y se utilizaban, por parte de algunos profesores los llamados lenguajes de autor (*Pilot*, *Plato*, etc.) y los lenguajes de programación sencillos (*Basic, Logo, Pascal,...*). Unos y otros permitían al profesor la elaboración de pequeñas aplicaciones «a su medida», generalmente tutoriales más o menos completos y complejos. La dificultad estriba en que requieren mucho más trabajo y unos mayores conocimientos técnicos que programas ya diseñados para actividades específicas. Hoy en día la programación orientada a objetos, y los entornos de programación multimedia (*Author Ware*, *Toolbook*, *Visual Basic*, *Lenguaje C*) se han convertido en cómodas y potentes herramientas para la creación de aplicaciones concretas. El manejo por parte del profesorado de estos programas, sin ser excesivamente complejo, también requiere un mayor esfuerzo y tiempo, lo que hace que no sea el método más extendido para la creación de aplicaciones de aula.

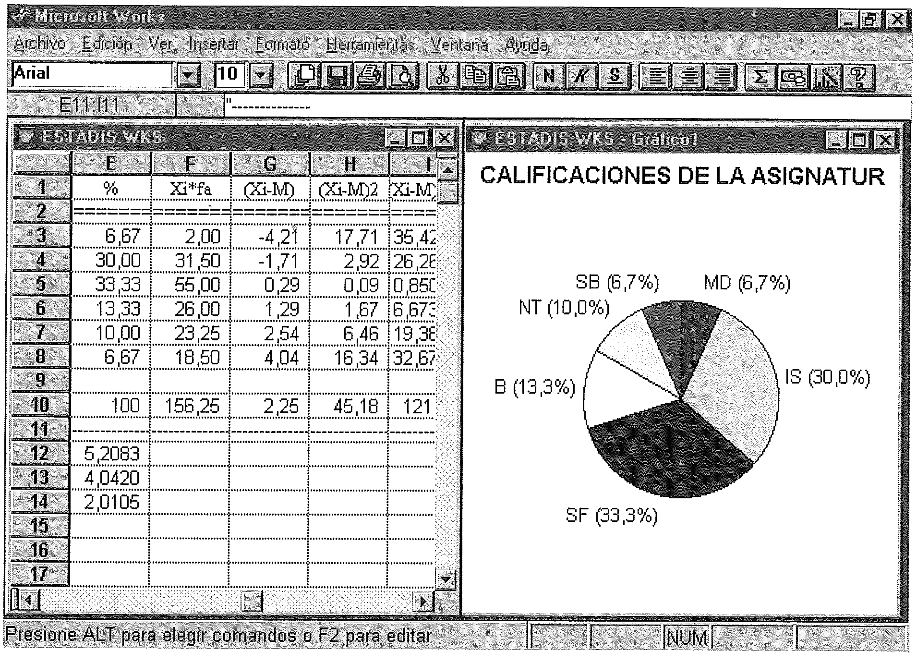
b) *Las Hojas de Cálculo*

Pueden considerarse como la «gran calculadora», la herramienta más poderosa que permite al profesorado preparar modelos a la medida de diversos contenidos sin un gran esfuerzo, y que admite un manejo posterior fácil por parte del alumnado. Algunos programas muy conocidos de hoja de cálculo son *Works* (muy adecuado en los niveles educativos primario y medio), *Excel* parecido al anterior aunque más completo, *Lotus*, etcétera.

Se pueden diseñar aplicaciones con una hoja de cálculo en todos los niveles educativos: desde niveles de alumnado de Educación Primaria a la Universitaria. En todos los casos la dificultad de manejo es pequeña, siempre que en los niveles inferiores se propongan a los alumnos modelos más simples y completados por parte del profesor.

En Educación Primaria o Secundaria, se puede utilizar la hoja de cálculo para el estudio de la *dependencia entre dos variables* en función de la «nube de puntos» formada por sus valores, relación entre ellos, la predicción de valores... Se pueden *crear gráficas de funciones o gráficas estadísticas*. En el primer caso se puede crear una tabla de valores y representar la función de forma similar a como lo haríamos en la pizarra, con la ventaja añadida de poder elegir una gran cantidad de valores para la variable independiente, y calcular, con poco esfuerzo y mucha rapidez, los de la función.

El tema de Estadística es quizás en el que más posibilidades ofrece la hoja de cálculo. Se puede utilizar para el cálculo de la *tabla de frecuencias y los gráficos estadísticos* de todos los tipos para una variable unidimensional o para el estudio de un problema de *regresión*.



Hoja de cálculo para estudiar las calificaciones de un grupo de alumnos (Microsoft Works)

También se puede utilizar la hoja de cálculo como apoyo al estudio de otros temas de funciones, como puede ser el cálculo del *límite de una función* en un punto, por aproximación de valores.

Igualmente se puede utilizar la hoja de cálculo para realizar simulaciones de modelos de *probabilidad*: lanzamiento de monedas o dados por ejemplo, en los que se puede apreciar la tendencia de la frecuencia relativa de un suceso a la probabilidad de que ocurra el mismo, a medida que el número de veces que se repite el experimento aumenta.

c) *Asistentes matemáticos*

Incluyo en este apartado programas específicos para el trabajo en matemáticas que permiten realizar tareas muy variadas: desde el cálculo y representación tradicionales, al cálculo simbólico (cálculo de funciones derivadas o primitivas por ejemplo), pasando por la resolución de ecuaciones o la representación de superficies en tres dimensiones.

Algunos programas de este tipo son difíciles de manejar para el alumnado de niveles medios y su finalidad es fundamentalmente la de investigación y resolución de problemas complejos, por lo que están más dirigidos al profesorado o a alumnos de enseñanza superior. Son los casos de *Mathemática* o *Maple* entre otros.

Otros son más sencillos de manejar y las actividades que se pueden realizar con ellos están más cercanas al nivel, por ejemplo, de Bachillerato; son los casos de *Mathcad* o de *Derive.* Ambos pueden ser bastante adecuados para la utilización en el aula, ya que realizan operaciones de muy variado tipo que van desde la *representación y cálculo de las propiedades generales de una función,* pasando por el *cálculo de su derivada o integral,* hasta el *cálculo de un determinante o la matriz inversa.* Las versiones antiguas de Derive funcionaban bajo DOS y en un ordenador de reducidas prestaciones, lo que le daban una gran versatilidad de uso. En la actualidad exista la nueva versión para Windows, lo que añade a la anterior todas las posibilidades de este entorno.

2) Programas para temas específicos

En este bloque se pueden incluir programas concebidos para el trabajo en temas concretos. Hay una gran variedad de ellos de distintos niveles y dificultad de manejo.

Además de los que se pueden encontrar en el mercado, existe una buena cantidad de ellos propiedad del Ministerio de Educación y por tanto de libre uso por parte del profesorado.

a) *Programas de Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO)*

Inicialmente los programas informáticos de matemáticas, para la Enseñanza Primaria o Secundaria, estaban casi limitados a aplicaciones de Enseñanza Asistida por Ordenador. Se trataba de tutoriales rígidos que, bien mostraban conceptos o planteaban preguntas tipo test y en los que la posibilidad de interacción con el usuario era limitada o nula. Hoy en día siguen existiendo en el mercado programas de este tipo bastante mejorados en cuanto a la presentación y cantidad de información y abarcan prácticamente todos los temas matemáticos de la Enseñanza Primaria y Secundaria. Son más adecuados para el trabajo del alumno en casa que en el aula ya que no precisan ni permiten la preparación de actividades por parte del profesor.

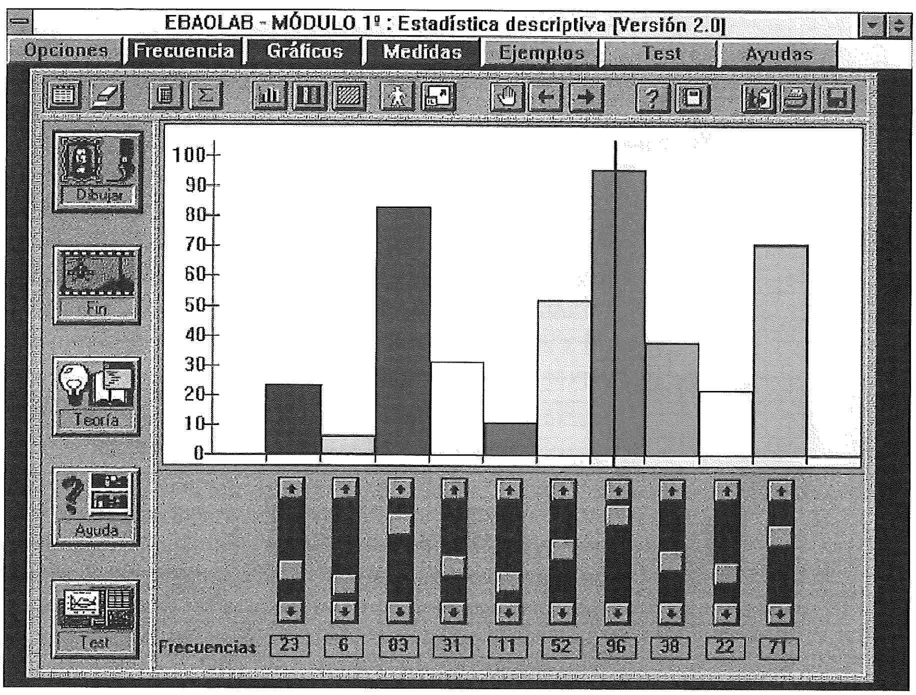
Inicialmente los programas informáticos de matemáticas, para la Enseñanza Primaria o Secundaria, estaban casi limitados a aplicaciones de Enseñanza Asistida por Ordenador.

b) *Estadística*

En este tema, quizás porque es muy adecuado para ser tratado con medios informáticos, se pueden utilizar varios programas en distintos niveles educativos:

Programas de nivel superior, cuyo uso está más recomendado para la Universidad o para Bachillerato-COU, tenemos varios ejemplos: *S.P.S.S.*, *Statgraphics*, *Systac*, etc. De ellos quizás sea el segundo el que tiene una versión para Windows más actualizada y asequible de manejar por parte del profesorado de enseñanza secundaria.

Para niveles inferiores, incluso para la Educación Primaria en su último ciclo, existen algunos buenos programas como *Ebaolab* y *Ebao.* Especialmente el primero, introduce de una forma muy completa y atractiva todos los conceptos y representaciones gráficas estadísticas para una variable de los diferentes tipos. Trabaja bajo Windows y la calidad y cantidad de los contenidos prácticos y teóricos de los que consta, lo hacen muy recomendable para introducir el tema.



Representación de la moda en el gráfico de barras (Programa Ebaolab)

c) *Estudio de funciones*

Como en el caso anterior, existe una buena cantidad y variedad de programas que tratan este tema.

Para niveles universitarios, cualquiera de los que antes se clasificaron como «asistentes matemáticos» permiten la representación de funciones y su estudio exhaustivo. También para estos niveles o para bachillerato, el programa ya antes comentado, *Derive*, permite trabajar con las funciones en varios aspectos, desde su representación y cálculo de propiedades varias, hasta el cálculo de su derivada o integral.

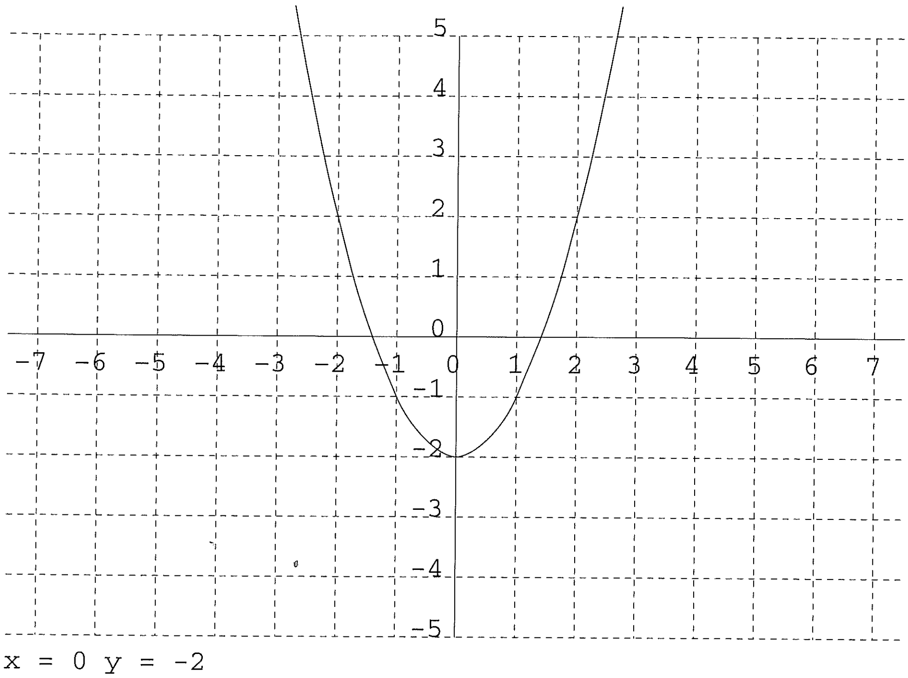
Para niveles inferiores, fundamentalmente para la Enseñanza Secundaria en todas sus etapas, podemos citar los programas *Funciones*, *Calcula* y *Gráficas*, como tres ejemplos, cada uno con sus características, en todos los casos de libre uso en la enseñanza pública que pueden ser utilizados para la representación de funciones, descubrimiento o muestra de sus propiedades fundamentales, trabajo con una o varias funciones a la vez, según los casos e incluso, como en el caso de *Funciones*, estudio de la regresión lineal para dos variables estadísticas discretas.

d) *Geometría*

Otro tema para el que existe variedad de programas informáticos de distintos niveles.

Para geometría plana, y en niveles de Enseñanza Secundaria en general, los programas específicos para el estudio de la geometría, suelen trabajar con los objetos básicos: puntos, segmentos, rectas, circunferencias, etc., permitiendo comprobar y utilizar propiedades como paralelismo, perpendicularidad, distancias, ángulos... En algún caso son programas de libre uso en educación como *Geomouse*, o programas comerciales como *Cabri*. Este segundo permite comprobar y representar un mayor número de elementos y propiedades geométricas que el anterior.

En este apartado se pueden englobar también los programas destinados al dibujo técnico o al diseño gráfico, pero que tienen gran utilidad y aplicación en matemáticas. Un caso es el de *Autosketch*, que además de trabajar con herramientas y realizar actividades propias del dibujo técnico, puede utilizarse para trabajar con la mayor parte de los elementos y propiedades de la geometría plana.



Representación gráfica y visualización del mínimo relativo de una función (Programa Funciones)

...para la Enseñanza Secundaria en todas sus etapas, podemos citar los programas Funciones, Calcula y Gráficas...

Para niveles superiores, como en casi todos los casos, son los potentes programas como *Mathemática*, los que permiten tratar la geometría no plana y por ejemplo representar superficies o cuerpos geométricos de todo tipo.

e) *Resolución de problemas*

En este campo es donde las empresas privadas tratan de sacar al mercado nuevos productos, cada vez con mayor propaganda y promesas de utilidad, algunos muy conocidos. Existen varios programas adquiridos, aunque de forma limitada, por el MEC para este tema y los niveles de Educación Primaria o Secundaria, como son: *ADI* o *Supermáticas*. En ambos casos se trata de conjuntos de problemas que abarcan temas variados, con posibilidad de consultar aspectos teóricos de los mismos y más o menos ayudas a la resolución de los problemas según los casos.

Programa	Propósito	Nivel educativo	Adquisición
WINLOGO	General (L. Prog.)	Todos	MEC/ Comercial
WORKS	General	Todos	Comercial
EXCEL	General	Todos	Comercial
MATHEMATICA	General	Universitario	Comercial
MATHCAD	General	Bachillerato y Superior	Comercial
DERIVE	General	Bachillerato y Superior	Comercial
STATGRAPHICS	Estadística	Bachillerato y Superior	Comercial
EBAO	Estadística	Secundaria	MEC
ABAOLAB	Estadística	Secundaria	MEC
CÓNICAS	Cónicas	Secundaria	MEC
FUNCIONES	Funciones	Secundaria	MEC
CALCULA	Funciones	Secundaria	MEC
CABRI	Geometría	Secundaria	Comercial
GEOMOUSE	Geometría	Secundaria	MEC
AUTOSKETCH	Geometría	Secundaria	Comercial
SUPERMÁTICAS	Resolución problemas	Primaria y Secundaria	MEC/ Comercial
ADI	Resolución problemas	Primaria y Secundaria	Comercial MEC
ECO	Aritmética	Primaria	MEC

Leoncio Santos
IES Giner de los Ríos. León
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas

La anterior tabla recoge algunos programas de distintos tipos y recomendados para distintos niveles educativos. En el apartado «adquisición» se señala si son o han sido distribuidos por el Ministerio de Educación y Cultura o si se han de adquirir en el mercado (comerciales)

Bibliografía

EVANS, B. y J. JOHNSON (1990): *Uses of Technology in the Mathematics curriculum,* Cipher systems.

GARCÍA, A. (1994): «Enseñanza experimental de la matemática», *Epsilon*, 91-92.

GARCÍA, A.: *Prácticas de Matemáticas con Derive*, GLAGSA, Madrid.

GARCÍA, A.: *Nuevas Tecnologías y la Enseñanza de las Matemáticas*, Síntesis, Madrid.

KILPATRICK, J. (1994): *Educación matemática e investigación*, Síntesis, Madrid.

MEC (1992): *Secundaria Obligatoria. Matemáticas*, Madrid.

MEC (1992): *Bachillerato*, Madrid.

MEC (1995): *Guía de recursos didácticos. Matemáticas. Secundaria Obligatoria*, Madrid.

PÉREZ, A. (1993): *Cabri-Geometre, un programa para trabajar en clase.*

PNTIC: *Catálogo de programas*, MEC, Madrid.

PNTIC: *Las Nuevas Tecnologías en la enseñanza de las matemáticas: Las funciones y las gráficas*, MEC, Madrid.

PNTIC (1996): *Ejemplificaciones de informáticas para la ESO,* MEC, Madrid.

SALVADOR, A. (1991): *La informática en la acción educativa*, Castalia-MEC, Madrid.

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 97-105

Internet y Matemáticas

Antonio Pérez Sanz

INFORME

Internet, la Red, ha dejado de ser un tema de interés exclusivo de los fanáticos de los ordenadores para convertirse en un fenómeno sociológico que está cambiando los parámetros de la información y de la comunicación en nuestra sociedad. El potencial de esta tecnología en el mundo de la educación es enorme. La oportunidad real de disponer de una herramienta que favorece el acceso a la información y los procesos de comunicación multidireccionales debería impulsar a las administraciones educativas a asumir el reto de democratizar el acceso de alumnos y profesores a la red e introducirla como una herramienta al servicio de la enseñanza.

INTERNET, correo electrónico, e-mail, página web, chat, ftp, videoconferencia, navegar... Lo que parece claro es que si no estás familiarizado con estos términos estás como fuera de juego, vamos como si no hubieses visto *Titanic*.

Esto de la Red, ¿es sólo una moda pasajera, a la que tan acostumbrados nos tienen las multinacionales de la informática?, ¿es un gran montaje de marketing para incrementar la espiral interminable de un consumo de material informático?

Todas estas novedades, ¿constituyen una especie de juego para adultos en el que la meta, inalcanzable, es estar a la última en el terreno tecnológico, una especie de sublimación del miedo a envejecer? O, por el contrario, ¿son algo interesante para el desarrollo de la educación?

Algunos cuestionan, cuando no arremeten frontalmente, el interés de estas novedades tecnológicas en el universo de la comunicación en general y en el mundo de la educación en particular.

Otros, a veces incluso las instituciones educativas, piensan que estas tecnologías de la comunicación serán la panacea universal en la educación o al menos una buena herramienta para, según los parámetros últimos del MEC, aumentar la productividad de la empresa educativa y abaratar costes en los centros y en ámbitos tan dispares como la formación del profesorado y la formación a distancia.

Probablemente la verdad no esté ni con unos ni con otros. Lo que es innegable es que Internet no es una moda pasajera. El pasado mes de febrero se celebró Mundo Internet 98, el primer congreso nacional celebrado en España sobre Internet. En él se dieron cifras sobre las que merece la pena reflexionar:

- En menos de un año y medio el número de usuarios de Internet en nuestro país ha pasado de 200.000 a más de 1.400.000, es decir se ha multiplicado por siete. De éstos más de un 7% son jóvenes de menos de 18 años.
- Nuestro país cuenta con más de 400 servidores, lo que supone un 10% del total mundial.
- El número de profesores que disponen de cuenta en Internet supera los 20.000. En este sentido hay que aplaudir las iniciativas de algunas administraciones como el Ministerio de Educación y la Generalitat de Catalunya.

Y los números siguen disparándose en progresión geométrica.

De lo que no cabe duda es que la red se ha convertido en un fenómeno sociológico sin precedentes en el mundo de la información y de la comunicación. Un fenómeno que, según recientes estudios, está empezando a competir seriamente con la televisión (la media de minutos ante el televisor durante enero de 1998 ha descendido de forma significativa respecto del mismo mes del año anterior, y una de las causas es Internet).

Por primera vez ante la aparición de una tecnología novedosa los responsables educativos, del mundo occidental al menos, no se han quedado con los brazos cruzados a esperar que un recurso tecnológico impregnase a nivel doméstico la sociedad para integrarlo en la escuela... con 10 o 15 años de retraso. Así Anthony Blair, primer ministro británico lanzó en octubre de 1997 un proyecto de más de 100 millones de libras para conectar a la Red más de 32.000 escuelas. Unos meses antes, en marzo del mismo año, Jacques Chirac, presidente francés, lanzó a su ministro de Educación Claude Allègre la consigna «todos los centros de enseñanza secundaria conectados a Internet», proyecto que el ministro tradujo en términos económicos cuantificando en 40 francos por alumno el coste del mismo. Nuestra Ministra de Educación tampoco se ha quedado atrás, al menos en lo de las declaraciones, que no en la dotación económica, para afirmar que en el año 2000 todas las aulas contarán con un ordenador, no sabemos si conectado a la Red o no.

Al menos lo que sí está claro es la política del MEC en su ámbito de gestión y de otras administraciones autónomas de facilitar cuentas a todos los profesores y espacio en un servidor propio para publicar páginas web a todos los centros de primaria y secundaria.

De hecho, el profesorado ha acogido Internet de una forma más que entusiasta, y no sólo en lo que se refiere a su uso más elemental, el correo electrónico y la «navegación deportiva».

Por primera vez ante la aparición de una tecnología novedosa los responsables educativos, del mundo occidental al menos, no se han quedado con los brazos cruzados a esperar que un recurso tecnológico impregnase a nivel doméstico la sociedad para integrarlo en la escuela... con 10 o 15 años de retraso.

El número de centros del ámbito MEC que cuentan con página web ha crecido de manera increíble; con lo que esto significa de formación o autoformación de muchos profesores en el manejo de herramientas informáticas más o menos sofisticadas, que revelan una utilización avanzada de la RED.

Los centros de primaria y secundaria que a principios del verano tenían una página web superan los 400, sin contar los de comunidades autónomas con transferencias educativas. Están recogidos en la tabla adjunta:

Comunidad autónoma	*N.º de centros*
Madrid	100
Castilla-León	73
Castilla-Mancha	61
Aragón	41
Asturias	34
Baleares	18
Cantabria	13
Extremadura	25
Rioja	8
Murcia	43
Total	416

Estos datos parecen indicar que Internet está llegando a los centros. Pero, ¿qué significa que un centro esté conectado a Internet? Que Internet llegue a un centro no es algo complicado ni siquiera desde el punto de vista económico, basta una línea de teléfono y un ordenador. De hecho ya hay en territorio MEC un 85% de centros de secundaria a los que llega la Red, pero sospechamos que se queda en la puerta, o para ser más exactos en el ordenador de la secretaría.

Los servicios del mec-router, que proporciona las estadísticas de uso del servidor del PNTIC nos brindan una información valiosa sobre el uso de Internet en el ámbito escolar.

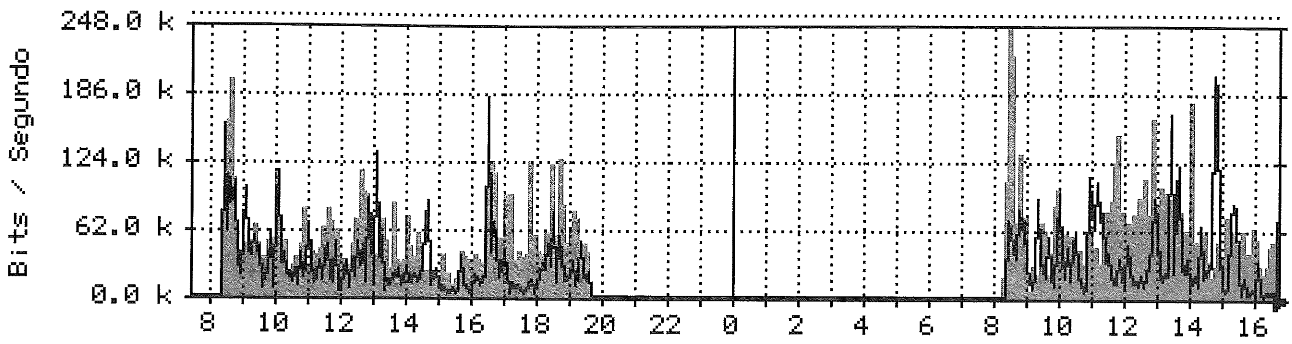


Gráfico diario de entradas y salidas del servidor del PNTIC

En el gráfico adjunto, vemos la gráfica diaria a intervalos de 5 minutos de entradas –sólido– y salidas –línea–. Si analizamos las horas de máxima utilización del servidor descubrimos tres picos: uno de 8 h a 9 h de la mañana, otro alrededor de las 13 h y el tercero cerca de las 17 h. Decididamente ninguno de los tres coincide con el horario escolar, al menos de los centros de secundaria. Curiosamente hay un descenso entre las 9 y las 13 horas.

Lo que nos lleva a una primera conclusión: *los profesores se conectan con este servidor mayoritariamente fuera del horario lectivo.*

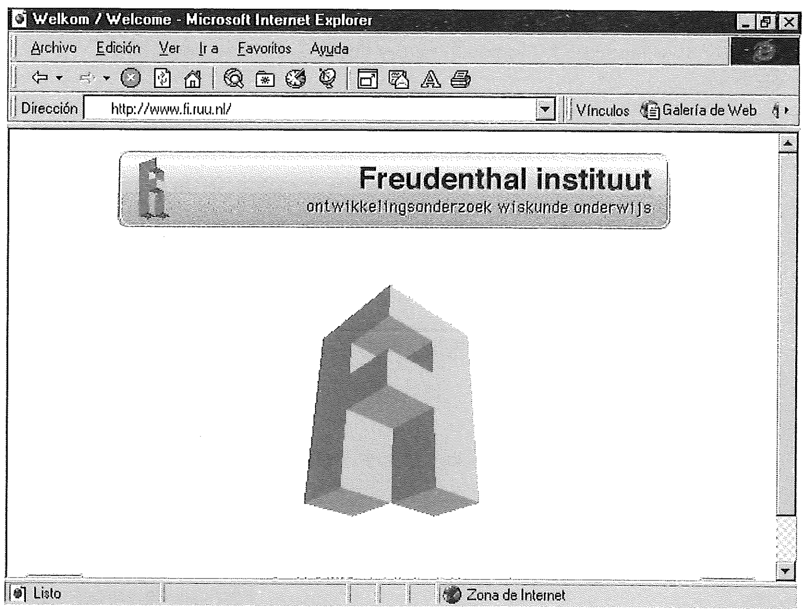
Utilización didáctica de la red

La gran pregunta que flota sobre las cabezas de muchos profesores es... Internet, ¿para qué? Las respuestas, seguro que hay muchas y muy distintas, incluso antagónicas, no son simples. Vayamos de las más simples a las más complejas.

Acceso a información matemática y extramatemática

Si realizamos una búsqueda con uno de los buscadores internacionales más conocidos introduciendo la palabra *matematicas* (sin acento) obtenemos 72.948 entradas. Si la palabra que se quiere buscar es *math* el número de lugares –web– que tratan del tema es de ¡4.390.717! (cifras de 29 de junio de 1998).

Internet hace posible el acceso a un volumen de información, de y desde cualquier parte del planeta, inimaginable hace tan sólo unos años. Además esta información tiene un carácter horizontal, es decir no está filtrada por las pautas, intereses y censuras de los grandes monopolios de la comunicación –cadenas de televisión, periódicos, multinacionales y gobiernos–. Por ahora, y esperemos que durante mucho tiempo, cualquiera puede volcar la información que le parezca en la red, sin grandes costes económicos.



Desde el punto de vista de las Matemáticas, permite acceder al profesorado, y esperemos que pronto al alumnado, a un gran banco de informaciones de los más variados aspectos: contenidos propiamente matemáticos, historia de las matemáticas, estudios sobre aspectos teóricos, modelizaciones... pero además permite acceder –en la línea preconizada por la LOGSE de búsqueda, selección y tratamiento de la información– a una ingente cantidad de datos de carácter extramatemático: estadísticas, informaciones económicas, sociológicas, climatológicas, demográficas... de cualquier país del mundo.

El exceso de información produce desinformación. Nada más descorazonador que al realizar una consulta nos den más de 70.000 sitios. Es imposible visitar todos y los criterios para seleccionar no nos lo proporciona la pequeña reseña de cada página que nos brinda el buscador. Por eso lo mejor es contar con una serie limitada de sitios interesantes ya que a partir de ellos encontraremos enlaces hacia lo que necesitamos.

En el cuadro aparcen las direcciones de páginas interesantes para encontrar, en ellas o en sus enlaces, casi cualquier cosa de Matemáticas.

Dirección	*Descripción*	*Idioma*
http://www.forum.swarthmore.edu/	Math Forum. Información variada sobre temas de Matemáticas	Inglés
http://www.maa.org/	Mathematical Association of America. Información por temas y sofware.	Inglés
http://www.fi.ruu.nl/en/verwijzingen/	Instituto Freudenthal de Holanda	Inglés y dentro de poco español
http://mathwww.uwc.edu./wwwmathes/files/math01.htm	Catálogo de Recursos de Matemáticas	Inglés
http://www.cirm.univ.mrs.fr/EMIS	EMIS. Servicio Europeo de Información Matemática	Inglés
http://www.teleline.es/personal/diez10/buscamat.htm	Lógica 10. Colección temática de enlaces con páginas de Matemáticas	Español
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/	Historia de los matemáticos, por temas, autores, cronológica...	Inglés
http://www.agnesscott.edu/lriddle/women/women.htm	Biografías de mujeres matemáticas	Inglés
http://www.li.net/~george/	Casi todo sobre poliedros. Animaciones	Inglés
http://www.ma:iup.edu/~gstoudt/history/ma350/sources_home.html	Historia de las matemáticas con ilustraciones de los originales de los libros	Inglés
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html	Fibonacci y el número de oro	Inglés
http://www.oei.es/oim.htm	Olimpíadas Matemáticas Iberoamericanas	Castellano
http://www.nctm.org/	National Council of Teachers of Mathematics	Inglés
http://www.xtec.es/recursos/mates/ aqui/index.htm	Página de Matemáticas del PIE, servidor de educación de Cataluña	Catalán
http://www.ine.es/	Instituto Nacional de Estadística	Castellano
http://www.bolsamadrid.es/rectora/estadist/estadist.htm	Bolsa de Madrid. Estadísticas	Castellano
http://www.pntic.mec.es/recaula/etapas/secundar/matemat/menu.htm	Página de recuros de Matemáticas del PNTIC-MEC. Enlaces	Castellano

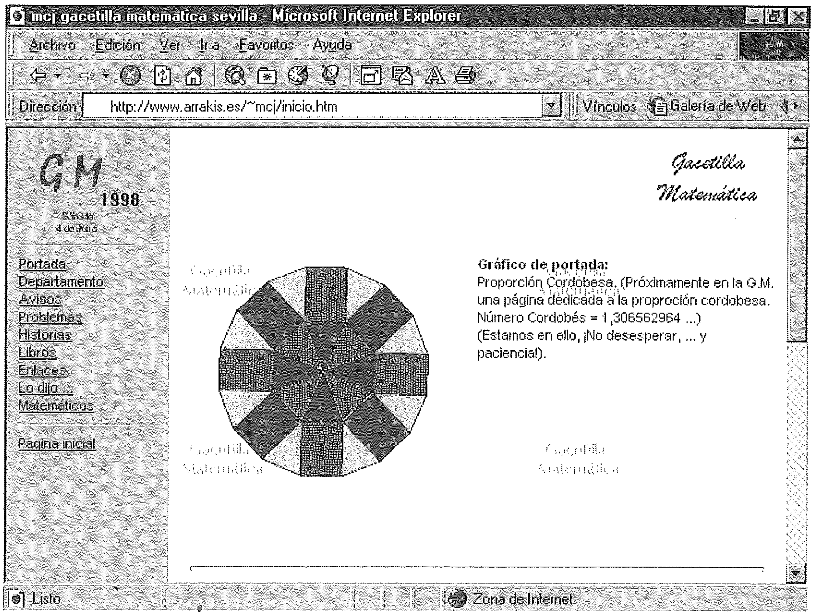
Páginas de carácter general

No pretende ser la anterior una relación exhaustiva, pero al menos sí es un buen comienzo para empezar a navegar sin perder el rumbo.

Sólo este aspecto de gran biblioteca de información y documentación ya hace de Internet un fenómeno interesante en el educación matemática: abre el camino para que los alumnos se aproximen a conceptos matemáticos, apliquen procedimientos, generen actitudes de investigación sobre datos reales encontrados por ellos mismos y sobre temas de su interés y no sobre datos artificiales más o menos preparados por el profesor o por el libro de texto.

Para el profesorado se está produciendo otro fenómeno interesante. La proliferación de páginas web de instituciones educativas, centros y personales hace posible el acceso e intercambio de materiales didácticos que hasta ahora sólo era posible a través de libros o revistas especializadas.

La red ofrece hoy más información sobre recursos didácticos, problemas, ejemplificaciones... y hasta exámenes de la que podíamos soñar hace sólo unos años.



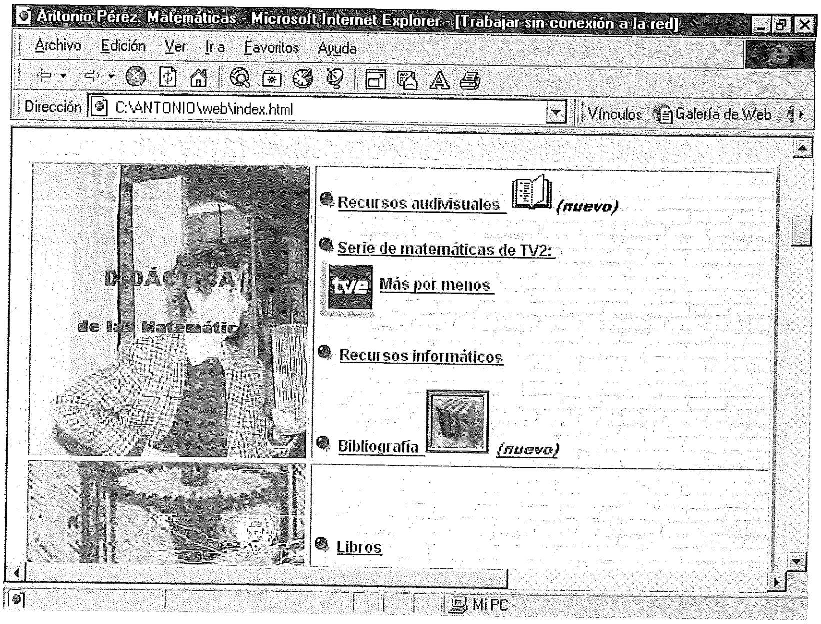
Es de esperar que los centros, superada la fase de presentación, comiencen a publicar, de hecho ya lo están haciendo, los materiales de aula más interesantes que han experimentado en el aula: A título de ejemplo es posible diseñar un taller de matemáticas sólo con los materiales de páginas de centros y de profesores y estudiantes de matemáticas existentes en la actualidad en castellano.

Dirección	*Descripción*	*Centro*
http://www.pntic.mec.es/agora/index.html	Relación de webs centros no universitarios	PNTIC-MEC
http://platea.pntic.mec.es/~aperez4/webinsti/dali.htm	Problemas, Taller de matemáticas, recursos	IES Salvador Dalí. Madrid
http://platea.pntic.mec.es/~migarcia/matcas.htm	Problemas, Taller, Matemáticas financieras	IES Arturo Soria. Madrid
http://www.dvnet.es/~rubia/rmat.htm	Proyecto Sócrates de intercambio de problemas	IES Pinar de la Rubia. Valladolid
http://www.ctv.es/USERS/rsv/depart/	Problemas, apuntes, matemáticas en directo	IES Alminares. Arcos de la Frontera
http://www.xtec.es/~cromero/divendre/	Problemas, investigaciones	IB Manuel Blancafort. La Garriga
http://www.arrakis.es/~mcj/inicio.htm	Gacetilla Matemática. Problemas, historia, matemáticos	IB San Isidoro. Sevilla

Páginas de centros de secundaria

Dirección	*Descripción*
http://www.teleline.es/personal/diez10/	Acertijos y matemáticas recreativas
http://platea.pntic.mec.es/~aperez4	Recursos audiovisuales, problemas, curiosidades, historia...
http://www.xtec.es/~jjareno/index.htm	Problemas y actividades para el primer ciclo de ESO
http://usuarios.iponet.es/rodoval/heureka/index.html	Calidociclos, juegos, problemas...
http://www.geocities.com/Athens/Oracle/4121/	Olimpiadas Matemáticas. Didáctica
http://www.arrakis.es/~mapelo/	Enlaces a páginas interesantes
http://www.xtec.es/~jcorder1/matema.htm	Colección de problemas, juegos matemáticos
http://members.xoom.com/Garz/aaaaaa~1.htm	Estudiante de matemáticas. Consejos, problemas, matemáticos...
http://www.redestb.es/personal/javfuetub	Matemáticas de un alumno de 2.° de BUP

Páginas personales



Acceso fácil a software de matemáticas

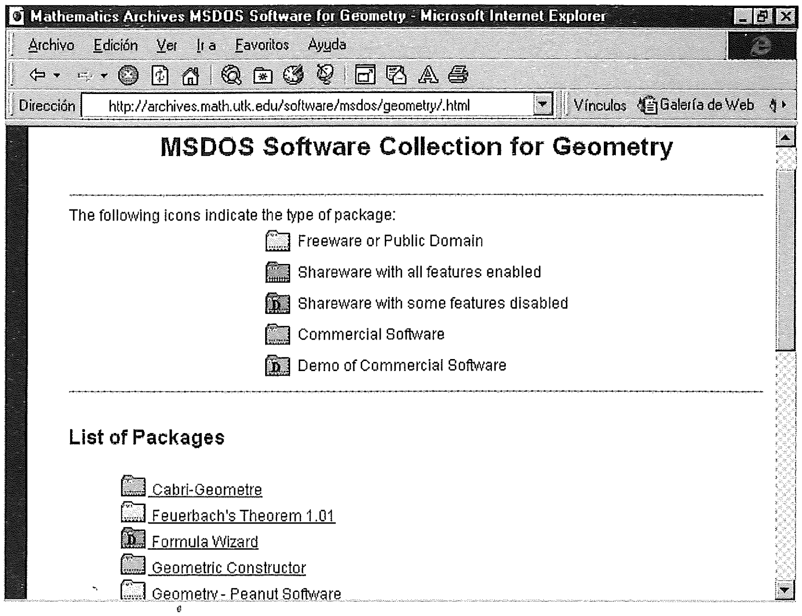
Pero Internet no es sólo una gran biblioteca. No sólo se puede acceder a información estática, es decir, consultar artículos, libros e informaciones de cualquier universidad o institución pública o privada o incluso de personas concretas.

La red permite el acceso a un gran volumen de software informático y a bancos de imágenes, fijas y animadas, directamente aplicables en el aula, en todos los niveles de enseñanza y no sólo en el universitario. Actualmente es posible, en un mismo día, realizar una visita guiada por el museo del Louvre, consultar estadísticas de población de América Latina, manejar un programa australiano de resolución de ecuaciones, leer y escuchar una obra de Molière en francés y hasta consultar cualquier periódico del día de cualquier parte del mundo. Y todo ello sin salir del centro.

La ventaja de las Matemáticas en este terreno sobre otras materias es que el software educativo es bastante más extenso y especializado que en otras áreas.

Además de programas shareware –programas que se pueden obtener de la Red y utilizarlos durante un período de tiempo limitado–, se está extendiendo la cultura de los programas freeware –programas de libre uso y difusión que se pueden utilizar en todos los ámbitos, por supuesto también en el aula, con el único compromiso de citar al autor. Las administraciones educativas y las universidades suelen ser los lugares en donde encontrar este tipo de programas.

Si uno es ya un especialista y sabe qué programa en concreto le interesa lo mejor es navegar en la otra red, la de los servidores FTP –*File Transfer Protocol*– que proporcionan todo tipo de software gratuito. Existen más de mil sitios (*sites*) que ofrecen la posibilidad de obtener archivos de dominio público. En España la manera más cómoda si uno no conoce directamente un servidor FTP es realizar una búsqueda a través de rediris, la Red Nacional de I+D. La búsqueda de un programa concreto se realiza mediante el enlace *archie*. Es aconsejable aunque no necesario contar con un programa específico del tipo WS_FTP o CUTE_FTP, aunque se puede hacer a través de un navegador convencional, Explorer o Nestcape. Estos programas también se pueden «bajar» de un servidor FTP. Casi todas las universidades españolas disponen de servidores FTP, con un directorio denominado *pub* en el que se pueden encontrar interesantes programas de libre uso. Rediris ofrece un listado completo de servidores FTP en nuestro país. Conociendo su dirección se puede acceder a ellos mediante cualquier navegador, sustituyendo las conocidas siglas *http://www._dirección* por *ftp://ftp._direccion.*



Dirección	*Descripción*
http://www.xtec.es/recursos/mates/aqui/mathsoft.htm	Programas de libre difusión de matemáticas. Castellano y catalán
http://www.pntic.mec.es/csoftwar/tabla2.html	Base de datos de programas del PNTIC
http://curriculum.qed.qld.gov.au/lisc/edsw/d-smath.htm	Colección de programas por temas y edades de Queensland Education. Inglés
http://archives.math.utk.edu/software	Colección de programas libres, shareware y comerciales
http://archie.rediris.es/archie/	Buscador de programas de la Red española de I+D
http://www.rediris.es/si/list-ftp/	Direcciones FTPs en España
ftp://ftp.uniovi.es/pub/	FTP de la Universidad de Oviedo
ftp://ftp.pntic.mec.es/pub/	FTP del PNTIC
http://download.com/	Buscador de programas de libre difusión en inglés
http://shareware.intercom.es/castellano.htm	Buscador de programas shareware en castellano
http://search.shareware.com/SW/Search/Simple/	Buscador de programas shareware en

Obtención de software

Canal de comunicación entre profesores y entre alumnos. Correo electrónico, chat, videoconferencias...

Internet es, al mismo tiempo, un canal de comunicación que puede romper el aislamiento tradicional de la institución escolar y acabar con los modelos de comunicación jerárquicos y autárquicos.

Desarrollar proyectos conjuntos con centros situados en otros países, intercambiando información de forma inmediata es hoy posible, no sólo a través del correo electrónico sino mediante chat y videoconferencias.

Desde el punto de vista del intercambio de materiales entre profesores el correo electrónico es una herramienta de un valor incalculable al permitir no sólo enviar mensajes escritos sino también cualquier tipo de archivo. De hecho la coordinación de este Informe se ha realizado desde Madrid, sin utilizar ni una sola vez para ello ni el correo normal –el correo lento le llaman los castizos– ni el teléfono o el fax.

Pero ya existen foros abiertos de discusión en directo, en tiempo real, mediante teclado, voz e incluso imagen, en los que los usuarios pueden realizar reuniones virtuales y abordar cuestiones con *feedback* automático. Son los famosos CHATs y videoconferencias de los que hay específicos de Educación y algunos concretos de matemáticas, incluso en nuestro país y algunos de alumnos.

Realidad y necesidades de los centros

Para que podamos afirmar que un centro está conectado es imprescindible garantizar que los profesores y los alumnos tengan facilidades de acceso real a esta tecnología. Y esta garantía hoy en día es más que dudosa.

Cuando las aulas de los centros estén de verdad conectadas a Internet y funcionando como una Intranet dentro del aula o mejor dentro de las aulas del centro, es decir, todos los ordenadores conectados entre sí y con el exterior, proyecto que puede sonar a ciencia ficción pero que realmente sólo exige el gasto de cableado, una línea telefónica preferiblemente RDSI y una conexión a Internet, el profesor y los alumnos dejarán de estar aislados de la realidad en el aula de informática o en su propia aula.

Las posibilidades educativas que abren son tentadoras: relaciones y proyectos conjuntos entre clases de distintos centros e incluso de distintos países, actividades matemáticas *on-line* (de hecho ya hay universidades americanas que ofrecen la posibilidad de utilizar su software de matemáticas en secundaria y primaria sin necesidad de traerse el programa a nuestro ordenador, utilizando el programa desde su servidor), debates en tiempo real y acumulativos, publicaciones de trabajos intercentros, juegos interactivos multidireccionales, revistas matemáticas en soporte telemático...

Para que podamos afirmar que un centro está conectado es imprescindible garantizar que los profesores y los alumnos tengan facilidades de acceso real a esta tecnología. Y esta garantía hoy en día es más que dudosa.

Que estas posibilidades didácticas pasen del mundo virtual de las buenas intenciones al mundo real de las aulas de nuestros centros exige una serie de esfuerzos en dos direcciones:

Equipamiento de los centros

La mayoría de los institutos de secundaria –los centros de primaria están todavía peor– disponen a lo sumo de un aula de informática dotada con 10-15 ordenadores bastante obsoletos, 286 y 386 en muchos casos, con uno o dos equipos más modernos, 486 o pentium, por supuesto no conectados entre sí. Con estas situaciones es francamente difícil que Internet pase de la puerta para llegar, al menos al aula de informática de forma accesible a profesores y alumnos. Ni imaginarse siquiera que cada aula pueda estar conectada a la red. A pesar del descenso continuo del precio de los equipos informáticos y del abaratamiento de la instalación de redes internas –Intranet–, dotar a los centros de equipos modernos conectados entre sí y con varias conexiones externas con RDSI supondría un desembolso de varios millones de pesetas; desembolso que los centros no pueden realizar con sus actuales presupuestos y que la administración tampoco parece dispuesta a llevar adelante. A pesar de las buenas palabras de la Ministra de Educación y del precioso nombre de conectar a todos los centros –ALDEA GLOBAL– las partidas presupuestarias necesarias no aparecen por ningún lado y ni tan siquiera se ha realizado como en Francia o Gran Bretaña una cuantificación de los costes y una asignación económica específica.

Formación de los profesores

Según el MEC más de 20.000 profesores tienen cuenta en Internet. Pero este dato, espectacular en sí mismo, no nos da mucha información. Muchas de estas cuentas no se han utilizado nunca o muy pocas veces y en su inmensa mayoría sólo en una de las aplicaciones menos didácticas de Internet, es decir, como correo electrónico.

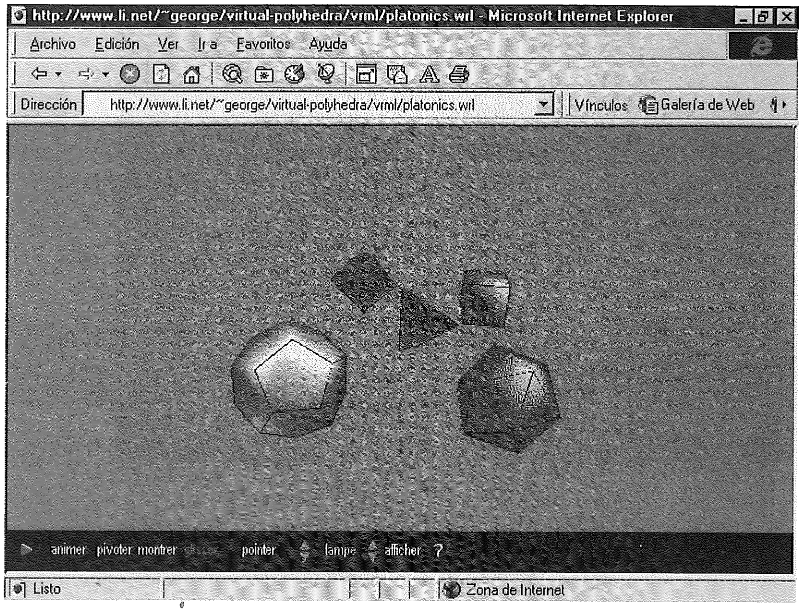
De hecho, a pesar de que según el PNTIC más de 30.000 profesores han recibido algún curso sobre medios informáticos (*El Mundo*, 8-3-98) a lo largo de los últimos años, muy pocos son los que han recibido una formación específica sobre Internet y cuando esta se ha producido ha sido fundamentalmente sobre aspectos tecnológicos y no didácticos.

Que Internet tiene, entre sus usuarios, una alta vocación autodidacta, quizás impuesta por las propias circunstancias en las que se produce el acceso a esta tecnología, es un hecho indudable. Esto no es garantía de que el profesorado vaya a estar preparado para una utilización educativa de la red. El autoaprendizaje se puede producir a partir de un umbral mínimo de conocimientos del tema por los usuarios y el verdadero problema es la adquisición de ese umbral mínimo, inalcanzable de forma autónoma por un alto porcentaje del profesorado.

El futuro inmediato

Estamos siendo testigos de uno de los cambios más profundos de los paradigmas de la comunicación y del acceso a la información. Estos cambios afectarán, ya están afectando, a la forma de trabajar, de comunicarse, de obtener información, de divertirse... pero también cambiarán la forma de aprender y de enseñar.

A la escuela le quedan dos opciones, como casi siempre ante cualquier nueva tecnología, o lucha por su integración racional y crítica, formando a



los futuros usuarios no sólo en los aspectos técnicos, sino también en los sociológicos, comerciales e incluso ideológicos, desde el principio cuando todavía es una tecnología emergente, aunque Internet aparece ya como un fenómeno consolidado a nivel mundial; o espera, de espaldas a la misma, a que lo que nos negamos a introducir por la puerta nos entre por la ventana, dentro de unos años, cuando esa tecnología haya impregnado a la sociedad desde el ámbito doméstico y perfilado, desde criterios fundamentalmente económicos y comerciales, la silueta de sus consumidores.

La decisión, otra vez, está en nuestras manos.

Antonio Pérez
IES Salvador Dalí. Madrid.
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

Bibliografía

ALÍ, I. y J. L. GANUZA (1997): *Internet en la Educación*, Anaya Multimedia, Madrid.

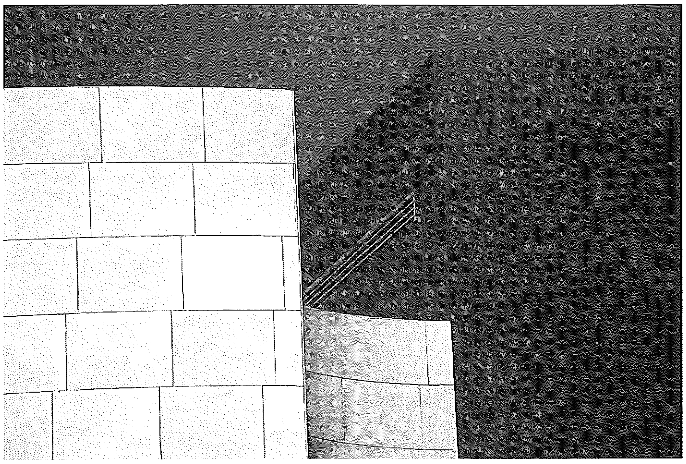
ALÍ, I. y R. LUNA, R. (1998): *Internet Chat. Charlas en la Red*, Anaya Multimedia, Madrid.

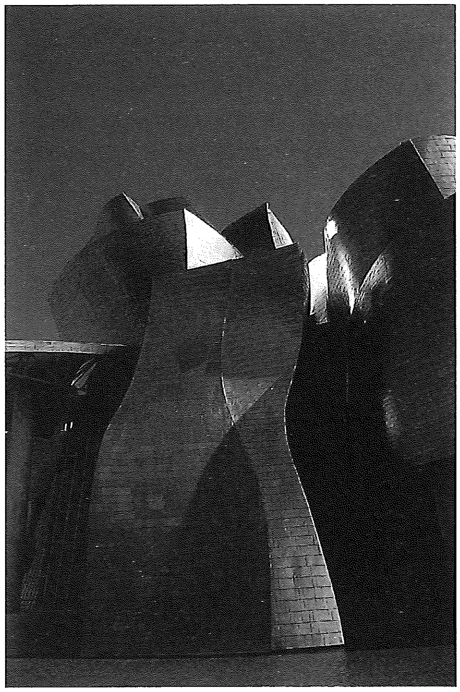
GISBERT, M., J. ADELL y R. RALLO (1996): *Training Teachers with Hypertext: Using HTML and Internet Tools as Didactic resources*.

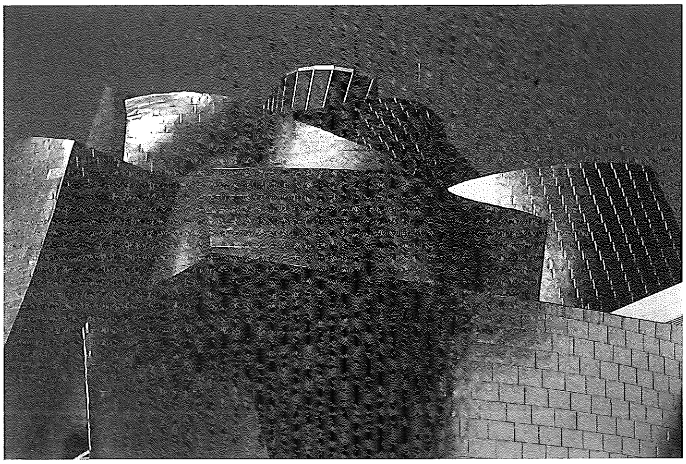
LUNA, R. (1998): «Internet en la educación. ¿Autopista de la información o camino de carretas?», *Educación y Medios*, n.° 6. Madrid.

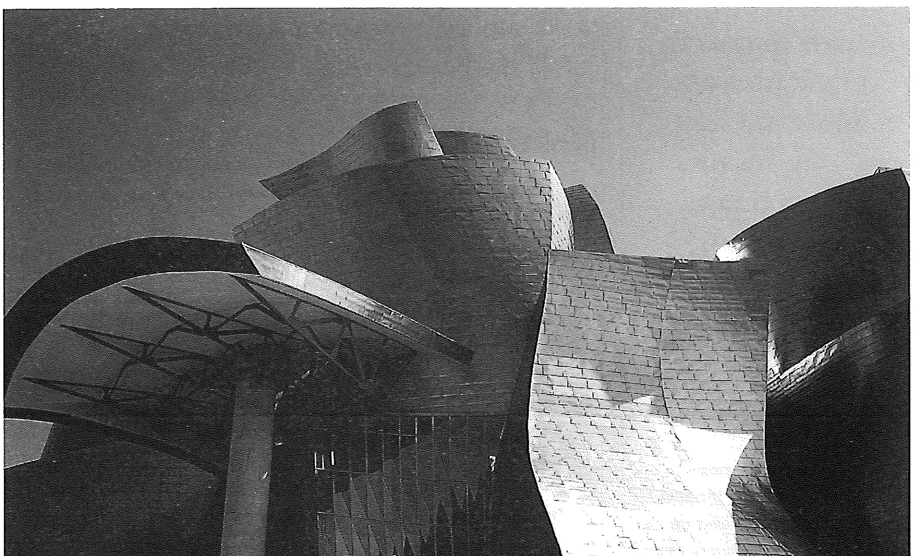
TERCEIRO, J. B. (1996): *Socied@d digit@l. Del homo sapiens al homo digitalis*, Alianza Editorial, Madrid.

TREJO, R. (1996): *La nueva alfombra mágica. Usos y mitos de Internet, la red de redes*, Fundesco, Madrid.









Bilbao

Fotos:
Pilar Moreno

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 107-116

La derivada y la integral a través del desarrollo sostenible

Rosario Nomdedeu Moreno

INFORME

El presente artículo pretende aportar una muestra de actividades realizadas en una clase de tercero de BUP, en las que la diversidad ha sido utilizada como un tesoro más que como un obstáculo, pues de la diversidad de deseos, intereses, ritmos y estilos cognitivos han surgido la multiplicidad de propuestas que luego los atractores han unificado permitiendo la integración de trabajos, diversos por su procedencia o por los distintos enfoques dados en cada momento.

Sus deseos

Entiendo que una clase es como Igrámul, el monstruo fantástico de la *Historia Interminable* de Michel Ende. Sus deseos, los de todas las personas de la clase, configurarán el trayecto a seguir.

Por eso comencé indagando cuáles eran esos deseos, tras haber consultado conmigo misma los míos, tarea nada fácil. Una explicación más detallada de cómo lo hice aparece en mi artículo «Al pentágono desde el deseo», publicado en el n.° 16 de la revista *UNO*.

Mi paradigma

Mi deseo nace de mi posición, desde donde estoy, desde mi aquí y ahora, donde resuenan continuamente las palabras de Victoria Camps, Begoña Sala, Evelyn Fox Keller, Alan Bishop y Paco Hernán, entre otras.

He tomado un valor en cada una de las propuestas de los autores y autoras arriba citados con la intención de seguir una recomendación, hallada tiempo atrás en un manual de psicopedagogía, que considero de total actualidad:

Los valores son categorías generales dotadas también de componentes cognoscitivos, afectivos y de elementos capaces de predisponer una determinada conducta, difiriendo de las actitudes por su generalidad. Unos pocos valores pueden encerrar una infinidad de actitudes... su generalidad y reducido número le ofrecería al psicólogo mayores facilidades de estudio que las actitudes que además de su especificidad son innumerables.

Sobre todo si la filtramos a través del prisma que nos ofrece Begoña Sala (1994). Parece ser que esta autora considera que unos pocos valores, los valores nucleares, no sólo ofrecen mayores facilidades a profesionales de la psicología sino también a profesionales de la educación.

Esos pocos valores que pueden ayudarme a trabajar una infinidad de actitudes, son para mí:

- El *Respeto Activo*, que aparece como valor fundamental en la ética del cuidado, defendida por Victoria Camps, y que tras algunas experiencias en el aula y en el claustro, ha quedado consensuado en nuestro centro.
- La *Autoestima*, que se perfila como asignatura pendiente en la coeducación y como capacidad mejorable y que mejora el aprendizaje de las matemáticas.
- La *Autoridad Circulante*, que no se instala definitivamente en nadie pero puede habitarnos a todos en algún momento, en esos momentos en que la otra persona te reconoce voluntariamente la autoridad, es una nueva forma de ver la autoridad. Por no residir definitivamente en ninguna persona, evita la confusión habitual entre autoridad y poder y disuelve el miedo a que nuestra identidad se vea socavada como consecuencia del sometimiento a la autoridad jerárquica típica en nuestra sociedad. También facilita el trabajo de la autonomía de las criaturas en el aula, pues desmonta la pasividad que nace de su dependencia de la autoridad establecida: la profesora o el profesor.
- La *Trasparencia* tal como la entiende Alan Bishop, es decir desveladora de misterios, de razones ocultas, de saberes iniciáticos, redistribuidora del poder que confiere el entendimiento, la comprensión, la posesión de información verdadera.
- El *Asombro*, que, como dice Paco Hernán, es el antídoto del aburrimiento que paraliza la actividad en el aula. Para crear situaciones con capacidad de asombrar, de maravillar o, al menos, de evitar el aburrimiento, se hace necesario disponer de un repertorio suficiente de estas situaciones, caracterizadas por uno o varios elementos inductores de esa emoción, el asombro, a los que Paco Hernán llama atractores.

Durante este curso han funcionado como atractores «El pentágono», «La concoespiral», «Las fractales», «El número de oro», «Las transformaciones geométricas» y «La iteración». Y hemos utilizado como recursos para la provocación cuentos, espejos, caracolas, sombras, catálogos de imágenes en la red, programas de matemáticas en el ordenador, calculadoras y diversos materiales domésticos como azucarillos, rollos de papel higiénico, patatas, plátanos, manzanas, cordeles, envases, palillos y materiales escolares convencionales.

Un poco de historia

Aunque una clase no tiene texto, como muy bien dice Paco Hernán en su maravilloso libro *Retrato de una profesión imaginada*, voy a intentar articular uno de los múltiples textos que podrían ser hilvanados con los materiales que las clases de tercero del curso 1997/98 han producido y que cuenta una historia que, por parcial, es imaginaria, aunque está consensuada con las personas que han protagonizado la actividad.

...unos pocos valores, los valores nucleares, no sólo ofrecen mayores facilidades a profesionales de la psicología sino también a profesionales de la educación.

Durante el primer trimestre trabajaron en los tópicos que yo elegí a partir de la formulación de sus deseos: no sé si mi deseo inconsciente de trabajar el pentágono habrá dirigido las tareas hasta revelarlo como centro de gravedad, pero lo cierto es que, a posteriori, aparece claramente como un muy buen atractor, sobre todo para la clase de 3.°C.

La clase se había organizado en 8 grupos:

El grupo 6 inició su trabajo haciendo juegos de «magia» apoyados en el nudo «trivial», siguió con el nudo simple confeccionado en papel y, por lo tanto, entraron ya de lleno en el trabajo sobre el pentágono. Fue espectacular ver sus caras de asombro ante la sencillez con que acababan de obtener el pentágono que tanto se les resistía (el resto de la clase ya llevaba varias sesiones hablando de pentágonos y por eso ellos se sentían incómodos, como fuera de juego).

Los grupos 3 y 7, tras varios intentos de resolver su tarea, durante cuyo transcurso pudieron ensayar y recordar diversas herramientas, exploraron las posibilidades que el programa Fractint les ofrecía. Unos y otros vieron que la ampliación del campo numérico a los complejos y la iteración permitían encontrar soluciones no sólo potentes sino bellas.

Los grupos 4 y 8 tropezaron con el pentágono tras el visionado de la cinta *Donald en el País de las Matemágicas*, donde los unos reconocieron las flores y estrellas de mar con que habían comenzado su tarea y se decantaron por aplazar el trabajo con caracolas que también habían iniciado. Los otros seleccionaron el tángram pentagrámico para seguir jugando, claro que ahora tenían que confeccionarlo a escala y reconocer en las distintas piezas las proporciones anunciadas por Donald.

Los grupos 2 y 5 confluyeron desde sus distintos planteamientos en el trabajo de grafos, polígonos, poliedros y mosaicos, en los que el pentágono se les presentaba como figura limítrofe.

El grupo 1 llegó al pentágono de una manera mucho más forzada, porque los pentágonos que les tenían ocupados no tenían el «atractivo» de la simetría

Algunas muestras de las fichas confeccionadas, se pueden ver en el artículo del pentágono antes mencionado.

A lo largo del segundo trimestre, se recogieron algunos de los deseos que permanecían aparcados, como el del grupo 8 acerca de las caracolas, o la necesidad del grupo 7 de trabajar las transformaciones geométricas para comprender mejor el algoritmo de construcción de un fractal por métodos geométricos. La caracola permitía también integrar los trabajos realizados con nudos, poliedros, polígonos y grafos, así como el análisis de su forma en relación al cono y sus gnomones recuerdan un poco la actividad con tangrams y con rompecabezas espaciales. El propio proceso de aprendizaje al que estábamos sometidas todas las personas en el aula, recordaba a las fractales y las caracolas. De modo que, para amplificar la necesidad de trabajar con estos atractores, comencé el trimestre llevando al aula dos caracolas enormes y maravillosas: una mediterránea, la otra caribeña: ¿Qué tiene que ver el diferente sonido con la forma? ¿Hay alguna resonancia entre el modelo matemático que explica los graves y agudos y la forma de las dos caracolas, una más alargada, la otra más esférica? Luego, tras un ejercicio de relajación, leí el cuento de NANA que aparece publicado en el número de junio de 1998 de *Números* de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton y procedí, como allí se indica, a recoger las propuestas surgidas de una lluvia de ideas posterior a la audición del cuento.

El trabajo sobre cómo es una caracola nos permitió trabajar con las ecuaciones de gráficas transformadas geométricamente y también sobre las formas más adecuadas de referenciar los puntos de esas gráficas. El trabajo en las distintas ecuaciones cartesianas y en polares ocupó una buena parte del tiempo y algunos de los resultados se pueden ver en el mencionado artículo.

El desarrollo del programa de sostenibilidad que lleva a cabo el centro, nos ha llevado a reflexionar sobre nuestro entorno y los cambios que ha ido sufriendo desde las primeras ocupaciones de este territorio por el ser humano.

El desarrollo del programa de sostenibilidad que lleva a cabo el centro, nos ha llevado a reflexionar sobre nuestro entorno y los cambios que ha ido sufriendo desde las primeras ocupaciones de este territorio por el ser humano. Salvo las últimas semanas que se han dedicado al refuerzo de técnicas de cálculo mediante juegos de contenidos confeccionados por las propias alumnas y alumnos, hemos desarrollado toda la última etapa del curso en este marco del desarrollo sostenible, como puede verse a continuación en los títulos de las fichas:

En las proximidades de Almassora existen dos lugares con elevado valor ecológico y cultural, ambos relacionados con el *riu* Millars, el más importante de la Plana de Castellón. Estos lugares son: «El Torrelló del Boverot» y «Les goles del Millars». En el Torrelló se han encontrado restos de varios asentamientos de población tan antiguos que entre los restos arqueológicos se han hallado piezas de cerámica cardial. El Cardium es abundantísimo en las playas próximas a *les goles* y es fácil imaginar a los antiguos pobladores del Torrelló pescando en el mar, recogiendo conchas en la orilla o amasando roja arcilla en las inmediaciones del poblado, que luego moldearían y decorarían con las conchas recogidas en la playa.

Les encargué la confección de fichas con las que poder ilustrar un paseo por la playa y desde allí al poblado del Torrelló.

El siguiente cuento es un arreglo, hecho por la profesora teniendo en cuenta las sugerencias del alumnado, sobre el escrito de una alumna, Paqui Pérez, en el que se han integrado parte de los trabajos que los distintos grupos han producido y expuesto.

Mi propuesta de tarea	*Tarea y agrupación*
• GRUPO 1: «Velocidad instantánea»	«Lanzamiento del cohete de agua» Sinisa Mukonjic, Jesús Muñoz y Jorge García
• GRUPO 2: «Tangentes a la parábola»	«Cocinas solares» Fernando Domínguez, José Muñoz, Julián Paños y Damián Simón
• GRUPO 3: «La función área y los recursos renovables»	«La pesca» Esther Fuentes, Javier Martínez, Nerea Sánchez y Pamela Tejero
• GRUPO 4: «La función área y los recursos renovables»	«Los incendios forestales» Sandra Moros, Carolina Rodríguez y Alberto Mollá
• GRUPO 5: «Crecimiento autosemejante»	«Conchas y caracolas» Daniel Fernández, Humberto Soler, José Roberto de los Rosales y Francisco García
• GRUPO 6: «Crecimiento autosemejante»	«Matemáticas aplicadas a las conchas» Sanja, Esther, Tania, Lidia y Cristina
• GRUPO 7: «La pendiente»	«El Torrelló» Pablo Vila, Javi Domínguez, Sandra Peña y A. Mallol
• GRUPO 8 «Proyecciones»	«El poblado» Paqui Pérez, Carmen Moreda y Natalia Rodríguez

La vida en el Torrelló

Goleta era una mujer que vivía en el poblado (ver anexo 1), dormía en la habitación mejor conservada actualmente. Junto a ella dormían también sus hijos y sus hijas. Goleta se levantaba al amanecer, como el resto del poblado.

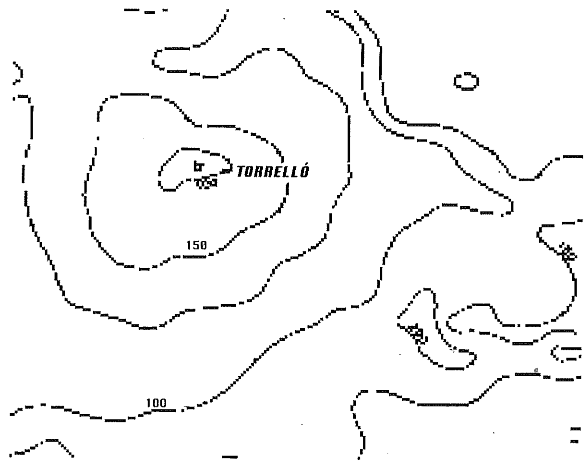


Figura 1

Cuando se asentaron en esa zona (ver anexo 2) (ellos eran la primera generación que había vivido allí), hicieron una división del trabajo; ella eligió hacer recipientes de barro para guardar alimentos. A esta actividad se dedicaba una cuarta parte de la comunidad. Entre ellos había mayor número de hombres que de mujeres.

Cuando veían que el sol (ver anexo 3) estaba en su punto más alto, dejaban esta actividad, a la que se dedicaban solamente por la mañana. Su comida habitual era la caza del día y la pesca (ver anexo 4). También los frutos recolectados y conservados en vasijas (ver anexo 5).

Ese día, después de comer, Goleta y el resto del poblado bajaron (ver anexo 2) al río porque estaban esperando la llegada de la embarcación griega que acostumbraba a visitarles cada tres lunas llenas (ver anexo 3), y la noche anterior la luna era llena por tercera vez desde la última visita de los griegos.

Los griegos iban para intercambiar productos con los habitantes del poblado: estos les daban metales, trigo, aceite y conseguían de los griegos productos de lujo como joyas y finas telas.

En esta ocasión sólo trajeron joyas pues en la última visita les abastecieron de telas para una temporada bastante larga.

Cuando se marcharon los comerciantes extranjeros, los habitantes del Torrelló subieron (ver anexo 2) al poblado. Los niños y niñas corrieron cuesta arriba, cortando en línea recta (ver anexo 2) campo a través, haciendo alarde de la vitalidad de sus jóvenes cuerpos, para repartirse las cuentas de colores y las conchas y caracolas (ver anexo 6) que siempre les traían como obsequio. La gente mayor se repartió las joyas y a Goleta le dieron un collar con piedras muy brillantes. Sus jóvenes hijos e hijas consiguieron brazaletes plateados y turbantes bordados muy coloreados con flores secas.

Tras el reparto, Goleta acudió a la asamblea del poblado para deliberar y planificar las reservas para el invierno que se avecinaba.

Tras la cena comenzó a oscurecer y se fue cada cual a su habitación a dormir. Con el próximo amanecer tenían que levantarse para ir a la próxima playa, río abajo, junto a «les goles», para pescar un poco de pescado para la conserva y recolectar aquellas almejas tan sabrosas con cuya cáscara gustaba de decorar sus vasijas (ver anexo 5). De vuelta a casa recogerían setas en el bosquecillo próximo, que las hambrunas (ver anexo 4) convirtieron más tarde en bancales, hoy abandonados por el declive de la agricultura en la sociedad industrializada de la actualidad.

La necesidad de interpretar las fotos y planos de la excavación del poblado, provocaron el interés por los métodos de representación plana de objetos tridimensionales.

Anexo 1

La necesidad de interpretar las fotos y planos de la excavación del poblado, provocaron el interés por los métodos de representación plana de objetos tridimensionales. La perspectiva fue trabajada con el apoyo de la exposición de Hernández y Hernández «Azucar en pancitos», actividades de *Bon dia Mates* como «Imagínatelo» y otras del repertorio sobre Visualización Espacial de Floreal García. El estudio de las sombras nos llevó a descubrir las cónicas, las isometrías y las semejanzas, con la ayuda del material gráfico de Pilar Moreno, actividades de *Bon dia Mates* como «L'home que mesurava ombres» y preparó el terreno para actividades de taller como la construcción de relojes solares.

Anexo 2

El grupo 7 abordó la actividad «Senderismo» bajo el lema «Conocer mejor la naturaleza para amarla más y cuidarla adecuadamente».

Con la ayuda de una patata les fue posible visualizar las curvas de nivel (figura 1), la línea de máxima pendiente (figura 2) o el perfil según una dirección (figura 3), imágenes sugeridas en el cuento con el trajín de las gentes del poblado en su continuo subir y bajar. Todo ello les habrá proporcionado imágenes concretas que probablemente les facilitará la interpretación de planos topográficos y la asimilación, en cursos superiores, de conceptos como gradiente, derivada direccional, etc.

En las figuras 1, 2 y 3 podemos ver algunas aportaciones de los grupos de trabajo que estudiaron el concepto de pendiente desde el recuerdo que guardan sus cuerpos de sus propias sensaciones en una actividad de senderismo.

Redescubrieron que cuesta arriba, cuando el cuerpo sufre más cansancio, en los tramos de ascenso es cuando vulgarmente decimos que hay pendiente, y descubrieron que en estos tramos, en los que la curva es creciente, el segmento que mide la pendiente en cada punto resulta tener orientación positiva (hacia arriba), la curva de las pendientes se mantiene en esos tramos sobre el eje de las x. Por el contrario, en los descensos, cuando no es necesario el esfuerzo para avanzar sino para contrarrestar la tendencia a caer, el mencionado segmento se orienta hacia abajo: cuesta abajo, es decir en los tramos decrecientes, la pendiente es negativa, la curva de las pendientes queda en estos tramos por debajo del eje OX. Es más, observando la gráfica de las pendientes, observaron que sobresalen los puntos de mayor y menor pendiente, puntos que en el perfil no se distinguen demasiado, pero que en sus cuerpos producen efectos fácilmente identificables y que todos recuerdan haber experimentado más de una vez: el punto en el que estamos tentados de abandonar por el excesivo esfuerzo que supone remontar ese «repecho» tan difícil, o aquel otro punto en el que parece que nos vamos a «despeñar» de lo vertical que parece el plano bajo nuestros pies.

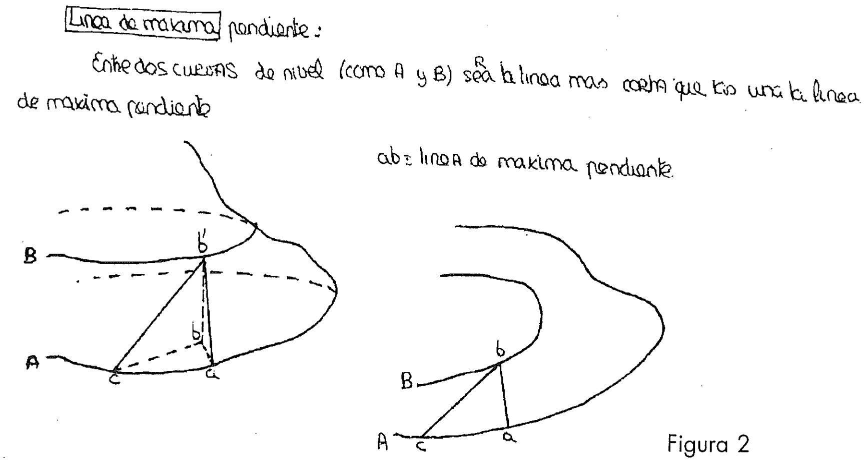


Figura 2

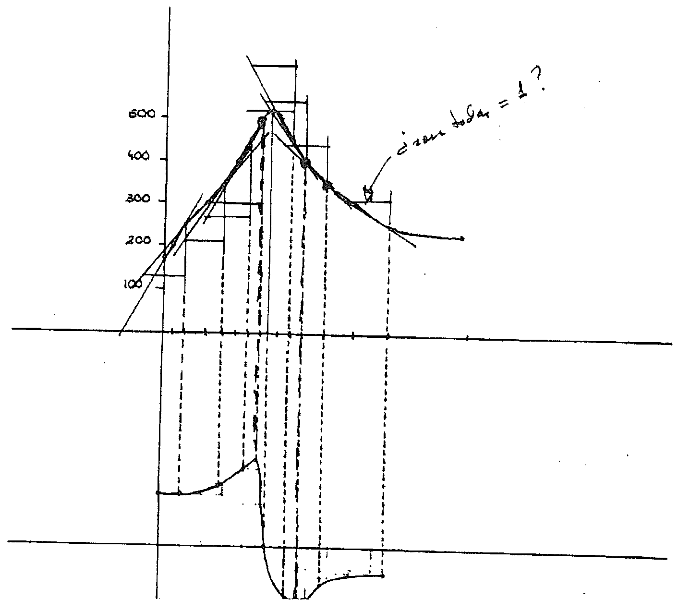


Figura 3

Tras el debate que se mantuvo durante su exposición, surgieron otras observaciones como la de considerar a su vez la curva de las pendientes como el perfil de otra montaña y aplicarle los mismos resultados. Esto condujo al descubrimiento de que los tramos ascendentes de esta segunda montaña coinciden con las crestas de la montaña inicial y los tramos de descenso de la segunda coinciden con los valles de la primera.

Todas estas observaciones les llevaron a las siguientes conclusiones:

1. Crecimiento: $p > 0$.
2. Decrecimiento: $p < 0$.
3. Máxima altitud: $p = 0$; Mínima altitud $p = 0$.
4. Punto de máxima pendiente: A.
5. Punto de mínima pendiente, máxima cuesta abajo B.
6. Concavidad: derivada creciente (su derivada positiva). En particular en un mínimo $p = 0$ y $p' > 0$.
7. Convexidad: derivada decreciente (su derivada negativa). En particular en un máximo $p = 0$ y $p' < 0$.
8. Entre el punto de máxima pendiente y el de mínima, se observa que la curva del perfil puede modelizarse mediante un arco de parábola, y su derivada resulta aproximarse, en ese tramo, bastante bien a una recta, que es la derivada de la parábola.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$A = (520, 200) \quad 200 = a520^2 + b520 + c$$

$$M = (500, 220) \quad 220 = a500^2 + b500 + c$$

$$B = (400, 320) \quad 320 = a400^2 + b400 + c$$

La última de las conclusiones llevó a la profesora a plantear la siguiente cuestión, con el apoyo de la figura 4 y un paseo por las montañas de la página Web *A Virtual SpaceTime TravelMachine*

En el modelo euclídeo habéis considerado que las montañas son paraboloides, por eso habéis supuesto que el perfil tiene la forma de una parábola y que su ecuación es un trinomio de segundo grado. Pero ¿qué pasaría si tomásemos un modelo más ajustado a la realidad?

Su respuesta puede verse en la figura 5. Un resultado que les parece interesante en este caso es que puede existir un punto de máxima altitud en el que *p* no puede valer cero porque no existe.

Anexo 3

Dentro de las actividades que hemos llamado «El sol y la sostenibilidad», han surgido propuestas como la construcción de relojes solares para minimizar el uso de pilas botón, calendarios solares y lunisolares que nos acerquen más al ritmo de la naturaleza y cocinas solares que no consumen recursos energéticos renovables ni no renovables. El grupo 2 ha trabajado sobre el fundamento de una cocina solar, intentando responder a la pregunta ¿Por qué es posible cocinar en ese artefacto (foto de una cocina solar)?

El grupo elaboró la respuesta en tres niveles:

1) Porque los rayos paralelos al eje de la parábola se reflejan pasando por el foco y así se produce en el foco un efecto amplificador del calor solar, suficiente para cocinar.

2) En la construcción de la parábola doblando el papel hasta hacer coincidir el foco con la directriz, el doblez actúa

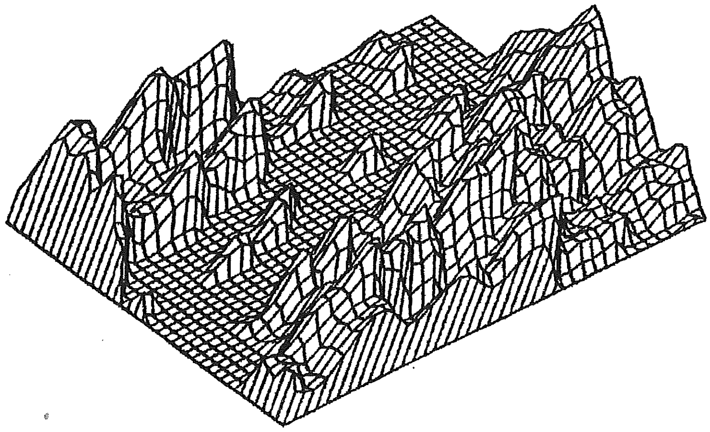
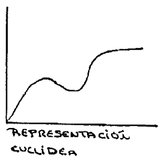
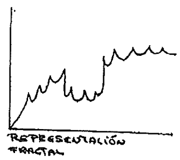


Figura 4

FRACTALES

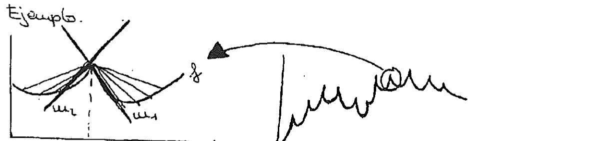
Profundizando sobre el tema de la representación de la montaña, hemos llegado a la conclusión que la representación euclidea que hicimos para la montaña, no se parece tanto a una montaño como la representación en fractales, ya que por muy desgastada que esté la montaña nunca será tan lisa como el modelo euclídeo.





Se hubiéramos representado la grafica en forma de fractal, para realizar la función derivada hubieramos tenido algunas variaciones debido a que hay puntos en los fractales que no se pueden derivar a causa de que estos puntos tienen dos rectas tangentes.

Ejemplo.



$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f(a)$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_1$ No son iguales y tendríamos 2 derivadas diferentes en un mismo pto

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_2$

f(a) no es derivable en este pto.

Figura 5

como eje de simetría (figura 6). Si el doblez en cada punto fuese el espejo, entonces ocurriría que:

A = B por opuestos por el vértice

A = C por simetría en la construcción

Luego B = C

Por tanto C sería el ángulo de reflexión pues cumpliría la propiedad fundamental de la reflexión:

ángulo de incid. = ángulo de reflexión.

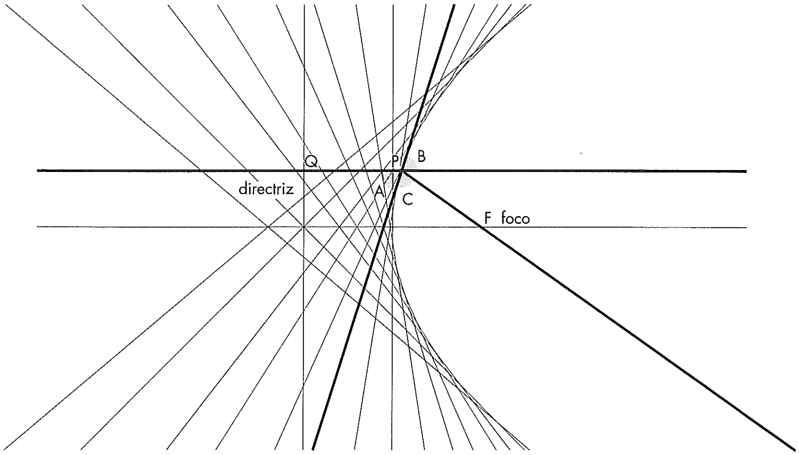


Figura 6

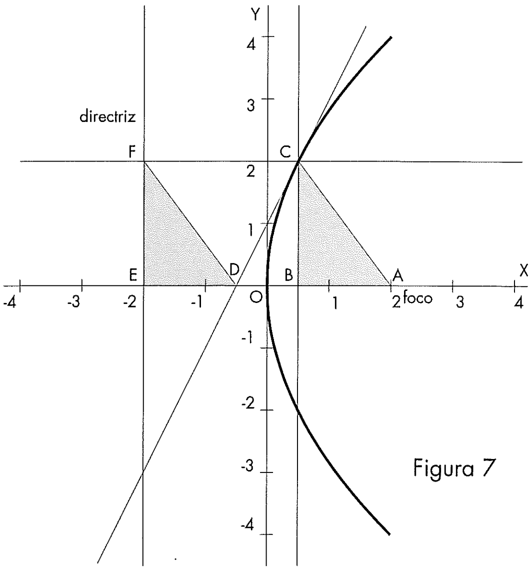


Figura 7

3) Pero, ¿es cierto que el doblez actúa como espejo? ¿Acaso el doblez coincide con la recta tangente?

Puesto que ambas pasan por el punto C, bastará comprobar que también tienen iguales las pendientes en ese punto. En la figura 7 la ecuación de la parábola es $y^2=2px$.

a) Pendiente de la recta tangente:

$$y^2 = 2px$$

$$2y\,y' = 2p$$

$$y' = 2p/2y$$

sustituyendo las coordenadas (a, b) de C:

pendiente de la tangente = p/b

b) Pendiente de la recta doblez:

b/h, donde h = BD, pero OB es a y OD = OB luego h=2a

Por tanto

pendiente doblez = b/2a

c) Si p/b = b/2a es cierto, ambas rectas coincidirán. Pero esto será cierto si lo es p·2a = b·b. Y esto último es válido pues equivale a decir que el punto de coordenadas (a, b) pertenece a la curva de ecuación $y^2 = 2px$. (Ver nota 1).

Las otras cuádricas cumplen propiedades análogas en cuanto a la reflexión, que permiten construir telescopios (espejos hiperbólicos) y arquitecturas con propiedades auditivas sorprendentes (máquina del eco).

Anexo 4

La propuesta de extender el cuidado, no sólo al planeta sino a las demás personas y a una misma en particular, hizo aparecer los deportes al aire libre como actividades para la sostenibilidad. Ello condujo al grupo 1 a plantearse la pregunta ¿Cómo descubrir la velocidad que lleva un deportista en el preciso momento en que aparece en una instantánea fotográfica? (foto de una niña en una competición de natación, un portero de fútbol saltando y parando un balón en el aire, un ciclista bajando a toda velocidad con una bicicleta de montaña,...). En cada uno de los trabajos se abordó el concepto de velocidad instantánea como límite de la velocidad media. Además en el caso del portero, hicieron el cálculo de la ecuación de la trayectoria estimándola parabólica y ajustando tres puntos a la ecuación del trinomio de segundo grado.

Para profundizar en el estudio del movimiento, utilizaron una estrategia de modelización geométrica que resultó clarificadora de las situaciones en que la medida es resuelta mediante la aplicación de la regla de Barrow, situaciones que pueden ser expresadas como producto de dos variables.

Ejemplo 1

Si la velocidad es constante, el espacio queda modelizado mediante un rectángulo de base el tiempo y de altura

1 OB=OD es cierto porque los triángulos CDF y CDA son simétricos respecto de la recta doblez.

FCD es un ángulo igual CDA por alternos internos e igual a DCA por simetría, luego el triángulo CDA es isósceles y el lado CA es igual al lado DA, como FC es igual a CA por simetría, entonces en el cuadrilátero ADFC todos los lados son iguales, por tanto los triángulos oscuros, que son rectángulos tienen iguales sus hipotenusas y también los catetos verticales por ser segmentos de paralelas entre paralelas. Luego los catetos horizontales son iguales y como el vértice de la parábola equidista de la directriz y el foco, por diferencias de pares de segmentos iguales dos a dos, se desprende la igualdad que queríamos probar.

la velocidad. Si la velocidad no es constante, el recinto plano que modeliza el espacio tendrá una forma de rectángulo mixto con la base superior curvilínea (figura 8), es decir, será un «recinto Barrow».

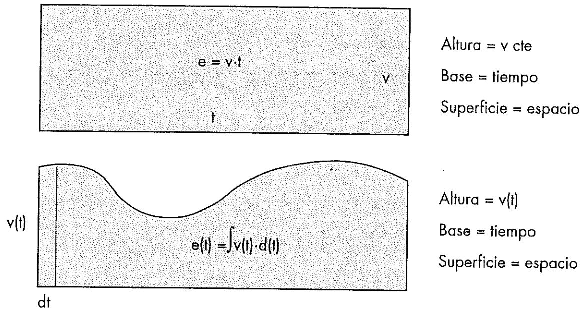


Figura 8

Si la velocidad no es constante sino igual a

$$3t^3 + 2t^2 + 5$$

la zona sombreada de la figura 9 modeliza el espacio recorrido. Y vale:

$$e = \int_2^6 \left(3t^3 + 2t^2 + 5\right) dt$$

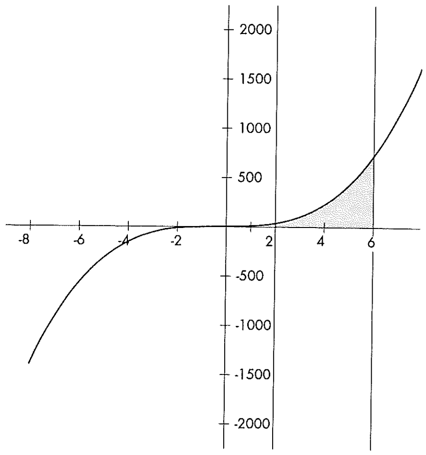


Figura 9

Ejemplo 2

Aunque no dispongamos de la ecuación, es posible estimar la gráfica v-t de un móvil. Por ejemplo de un coche conducido de modo razonable, en el circuito de la figura 10. Una vez dibujada la gráfica v-t (figura 11) podemos construir las gráficas del espacio (figura 12) y de la aceleración (figura 13)

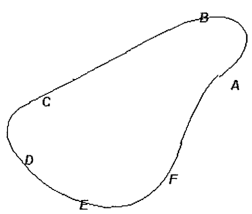


Figura 10

(2)

si el móvil empieza del pto C:

C-B = ~~v cte~~ acelerado

B-A = retardado

A-F = acelerado

F-E = retardado

E-D = acelerado

D-C = retardado

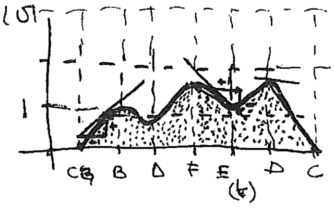
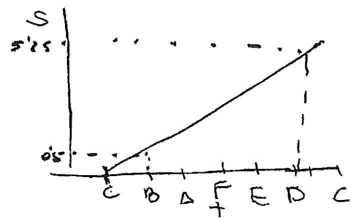
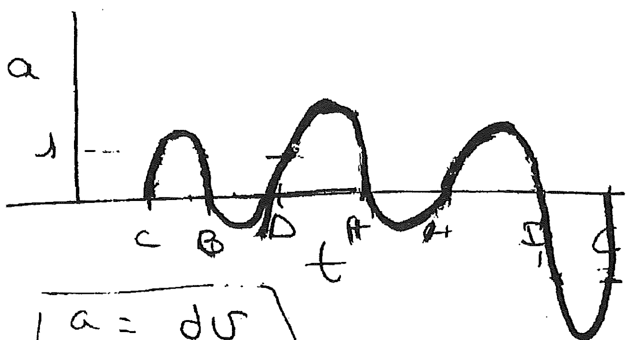


Figura 11



t	B	A	F	E	D
Area(t)	0'5	1'25	2'5	3'75	5'25



$$a = \frac{dv}{dt}$$

Figura 13

Ejemplo 3

El volumen de un cuerpo de revolución también se puede modelizar con un rectángulo en su caso más simple: el cilindro, ya que su volumen puede considerarse producto de dos variables: área de la base y altura (figura 14).

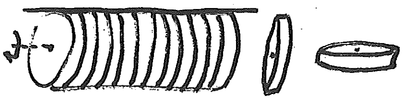


Figura 14

En los casos en que la generatriz no es una recta paralela al eje de rotación, el radio será variable r= f(x), con lo que (figura 15):

$$V = \pi \int f(x)^2 dx$$

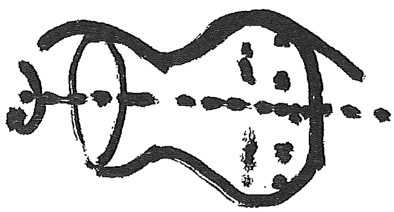


Figura 15

Este resultado les ha permitido medir la capacidad de los utensilios cerámicos que ya habían estudiado en lo referente a sus formas y a su decoración.[2]

Anexo 5

Bosques

El grupo 4, a partir de la figura 16 (página siguiente), que representa la velocidad de un incendio en hectáreas por día en un bosque, medida en tiempo real desde un centro de coordinación de emergencias, ha intentado responder a la pregunta ¿Cuántas hectáreas se habrán quemado entre el día 2 y el 5? También se han planteado cómo construir la gráfica días-hectáreas quemadas y cuál será su ecuación, si la ecuación de la tasa de incendio es:

$$y = \frac{3x^2}{x-1}$$

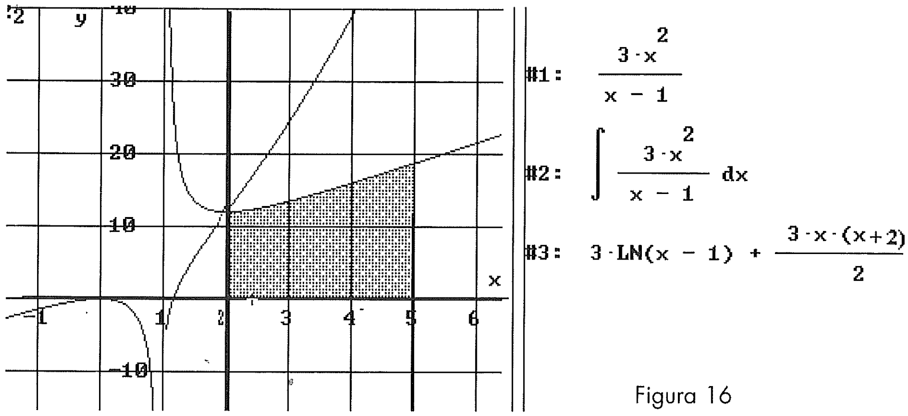


Figura 16

Pesca

El grupo 3 ha realizado un trabajo similar, pero en referencia a la pesca. La tasa de capturas de distintas especies en Tm/año ha sido extraída del *Atles del Medi Ambient* editado por Enciclopèdia Catalana.

Para ilustrar el equilibrio necesario entre la conservación de la riqueza biológica y el necesario desarrollo de los pueblos, han tratado de contestar a la siguiente cuestión:

Si consideramos que la calidad de vida en el planeta está representada por el área de un rectángulo de base igual al nivel de conservación y altura igual al nivel de desarrollo, y la suma de ambos la consideramos igual a la capacidad de carga del planeta, ¿cuales son los niveles de desarrollo y conservación correspondientes a la mejor calidad de vida?

El desastre que se muestra al confundir la maximización de una de las tendencias con la maximización objetivo es clarificador. Un cordel anudado, tensado con los dedos pulgar e índice de cada mano, simula el rectángulo del problema, su semiperímetro p significa la capacidad de carga del planeta, el área del recinto que delimita simboliza la calidad de vida C, y sus dimensiones x e y las dos tendencias antes citadas. Con este modelo es muy claro ver que la maximización unilateral de una u otra tendencia conduce irremisiblemente a la total anulación de la calidad de vida. Si cede algo cada tendencia, se mejora la calidad de vida y el máximo se da si:

$$C(x, y) = xy \; ; \; x + y = p$$

$$C(x) = x(p - x) = - x^2 + px$$

2 El trabajo de modelización realizado por este grupo les surte de una experiencia concreta que facilitará posteriormente la comprensión del teorema del valor medio del cálculo integral.

$$C'(x) = -2x + p = 0$$

$$x = p/2 \ , \ y = p/2$$

¡No es sorprendente que la máxima calidad de vida exija equilibrio entre las dos tendencias contrapuestas!

Anexo 6

Los grupos 5 y 6 han trabajado en torno al tema del crecimiento (biológico, autosemejante, etc.). Su trabajo aparecerá próximamente en la revista *Números* de la Sociedad Canaria Isaac Newton.

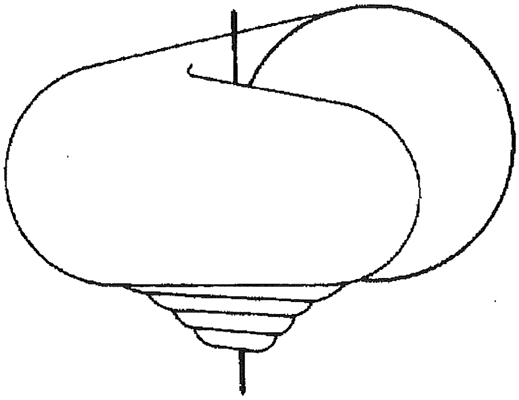


Figura 17

Conclusiones

Este método de trabajo ha permitido tratar contenidos conceptuales como los teoremas fundamentales de la trigonometría, el número complejo, las ecuaciones cartesianas de la recta y las cónicas, ecuaciones polares de curvas como la circunferencia y las espirales, ecuaciones paramétricas de la recta, la circunferencia y la elipse, la derivada, la integral, la función área. Contenidos procedimentales como resolución de triángulos, construcción de pentágonos, cálculo con números complejos, resolución analítica de problemas geométricos, representación de curvas, construcción de la función derivada y de la función área, resolución de problemas de optimización, modelización matemática de situaciones de la vida cotidiana, cálculo de derivadas e integrales, transferencia a otros contextos de los conocimientos aprendidos. En lo referente a actitudes valores y normas, todo el trabajo se ha orientado para conseguir la mejora en las capacidades de cuidar, confiar en las propias capacidades, reconocer y reconocerse autorizados, discernir las argumentaciones correctas de las erróneas, entender mejor el mundo que nos rodea y sobre todo mejorar la capacidad de disfrute con las actividades matemáticas.

Este método de trabajo ha permitido tratar contenidos conceptuales como los teoremas fundamentales de la trigonometría, el número complejo, las ecuaciones cartesianas de la recta y las cónicas, ecuaciones polares de curvas como la circunferencia y las espirales...

Los juegos con dados que proponen cuestiones y las cartas que ofrecen respuestas han resultado eficaces para evitar la falta de participación que se produce cuando la propuesta y la corrección de ejercicios de consolidación y de repaso se hacen al modo tradicional.

Los problemas de optimización y medida, los juegos de contenidos antes citados y la confección del libro de texto personal, se complementan para conseguir una revisión y reestructuración de los contenidos de matemáticas estudiados durante su vida escolar. Los problemas citados justifican la necesidad de una revisión, los juegos consolidan las técnicas y el libro reorganiza y completa el repertorio disponible a la hora de enfrentar la tarea de resolver los primeros.

Rosario Nomdedeu
IB de Almassora. (Castellón)
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»

Bibliografía

ALSINA, C., J. M. FORTUNY y J. GIMÉNEZ (1994): *Projecte Curricular de l'Àrea de Matemàtiques «Bon dia Mates»,* Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, Barcelona.

BISHOP, A. J. (1994): *Mathematical Enculturation,* 2ª edición, Kluwer. Netherlands.

CAMPS, V. (1993): *Virtudes Públicas,* Espasa Calpe, Madrid.

FOX KELLER, E. (1991): *Reflexiones sobre género y ciencia,* Ed. Alfons el Magnànim, Valencia.

HERNAN, F. (1991): *Retrato de una profesión imaginada,* Proyecto Sur de Ediciones, Granada.

MARCO, J. A. (Ed.) (1987): *Necesidades y valores en la construcción humana,* Gorfisa, Zaragoza.

RIVERA, M. M. (1994): *Nombrar el mundo en femenino,* Icaria, Barcelona.

SALAS, B. (1994): *Orientaciones para la elaboración del Proyecto Coeducativo de Centro. Desarrollo integral de la persona,* Ed. Maite Canal, Bilbao.

SUMA 29
noviembre 1998, pp. 117-120

Evaluación en Secundaria: algunas cuestiones cualitativas previas

Salvador Guerrero Hidalgo

INFORME

En ocasiones la «evaluación» se convierte en el eje máximo de la acción docente, causando un efecto pernicioso en el proceso de aprendizaje de los alumnos y generando a veces una sensación de ansiedad entre muchos profesores. Después de clarificar los términos de evaluación y calificación, se reflexiona sobre la relatividad de las calificaciones y sobre la imposibilidad de una medida plenamente objetiva del conocimiento matemático que impide el escalafonamiento de cara al acceso a la universidad.

LA EVALUACIÓN que realizan los profesores sobre el conocimiento matemático de los alumnos es una de las actividades más problemáticas en los institutos de Secundaria, pues en relación a ella gira una gran parte de la vida de los centros, y una de las que más ansiedad genera en muchos de esos profesores, hasta tal punto que un cambio curricular en dicha actividad parece dejar inermes a muchos de los profesores y profesoras. Sobre todo a los más jóvenes, con poca experiencia, rodeados de un clima de inseguridad permanente ante los alumnos y temerosos de las reclamaciones de los padres (que cierta prensa es tan rápida en airear aunque no de las resoluciones de la Inspección muchas veces favorable a las opiniones de los profesores).

A muchos profesores les provoca angustia cómo evaluar, de modo que por un «deslizamiento laboral» ello tiende a convertirse en el eje o referente máximo de su actividad docente, y explicando sólo lo que vaya a ser motivo de evaluación. «¿Esto entra en la evaluación?», «¿cómo nos va a evaluar?» son preguntas permanentes de los alumnos hacia el profesor –mucho más si es de Matemáticas– y en la normativa emanada de Ministerio y Consejerías se pone mucho énfasis en desmenuzar detalladamente, y para todos los casos posibles, las normas, procedimientos y modos para desarrollar esta actividad. En definitiva, parece que la llamada «evaluación» fuese la actividad más importante de todo el ámbito escolar, y no digamos cuando en el curso correspondiente se encuentra próxima la prueba de acceso a la Universidad.

Mi opinión en este asunto queda resumida básicamente en las dos proposiciones siguientes:

1) El objetivo básico de las actividades de Matemáticas –y de cualquier otra materia– en un centro de secun-

daria es el aprendizaje de los alumnos, y si se quiere matizar un poco más, su formación –educación–.

2) La evaluación no es la actividad básica del aprendizaje de los alumnos.

Para aclarar todo ello, quisiera en principio precisar la terminología. En los párrafos anteriores he empleado el término «evaluación», y con esta palabra se designan dos tipos de actividades distintas que se realizan en los institutos, y que al menos para poder entendernos en este artículo, con nombres distintos, aunque tradicionales: *calificación* y *evaluación*. (No quiero cuestionar si los nombres que propongo son acertados, o si en determinados ámbitos teóricos los nombres deban ser los contrarios. Paso a precisarlas).

Por *calificación* entiendo un proceso de tipo social que se nos exige a veces a los profesores del sistema educativo desde su exterior, desde la sociedad. En el sistema social en el que estamos inmersos existen varios subsistemas (el económico, el cultural, el escolar/educativo, etc.) y hay exigencias y relaciones de unos con otros, y de cada subsistema con el total. Una exigencia actual del sistema social al subsistema educativo preuniversitario es su actuación como filtro, de modo que al final de aquél los alumnos salgan clasificados de forma que cada alumno esté dirigido hacia la Universidad, los ciclos formativos, el mundo laboral, etc.; y en el caso de los alumnos que vayan a ir hacia la Universidad, estén escalafonados secuencialmente de modo que cada par de ellos se puedan comparar de forma inequívoca si es necesario hacerlo cuando ambos opten a lo mismo, y no pueda ser concedido a los dos. (He dicho que es una exigencia «actual», porque hace unos años no existía. El carácter no-educacional sino social se observa fácilmente al considerar que si no existiera esa exigencia el aprendizaje de los alumnos –y por tanto, el subsistema educativo– podría continuar sin crear ningún problema).

Con el término *evaluación* quiero denotar un proceso didáctico (parte del proceso de enseñanza/aprendizaje) por el que el profesor o profesora adquiere información sobre el modo, calidad y cantidad del aprendizaje de sus alumnos con objeto de tomar las decisiones pertinentes para continuar la planificación de modo que se haga óptimo el aprendizaje. Es una información necesaria para actuar sobre el proceso e imprescindible para la mejora del aprendizaje. Naturalmente es el profesor quien fija los modos y formas de obtener esa información, (que no tiene por qué ser la misma para todos los profesores, ni en los mismos tiempos). No cabe duda de que cuanto mayor sea la información de que disponga el profesor sobre el aprendizaje de sus alumnos, más acertadas serán las decisiones que haya que adoptar, pero ni siquiera en esta «evaluación» se puede desvirtuar el aprendizaje de los alumnos, de manera que evaluar ocupe la mayor cantidad de tiempo del curso de matemáticas; la toma de datos ha de hacerla el profesor en el tiempo dedicado a ese curso, y es él quien debe integrarla en el desarrollo general, decidiendo el tiempo que invierte en ello y la forma de hacerlo. Es de todo punto claro que si el profesor tiene personas que le ayuden a ello, o si logra que el propio proceso evaluador forme parte del aprendizaje (es decir, si con la propia evaluación el alumno aprende), o si logra organizarlo de modo que puedan simultanearse el propio desarrollo del aprendizaje con la toma de información para la evaluación, ésta puede ser mucho más continua que si ambos procesos (aprendizaje y evaluación) han de hacerse de modo independiente.

La evaluación no es la actividad básica del aprendizaje de los alumnos.

Esta evaluación se usa muchas veces para *medir* el nivel matemático de cada alumno, pretendiendo (es la presunción básica de la actual situación) que ello produzca una ordenación que justifique el escalafonamiento social citado que se quiere conseguir. No veo que desde el ámbito educativo sea posible saber cuál de entre dos alumnos tiene mayor capacidad matemática que otro con precisión numérica de una centésima. Pudiera ser posible que sea posible calibrar cuál se desenvuelve mejor en las construcciones teóricas necesarias para el trabajo universitario, y cuál trabaja mejor en el ámbito de lo concreto, o cuál tiene mayor capacidad matemática en ciertos aspectos matemáticos deseables en la formación de una persona; todo ello clasificándolos en tres o cuatro grandes bloques (¿sobresaliente, notable, suficiente?). La relación entre el cúmulo de conocimientos de una persona en su etapa de la Educación Secundaria y su rendimiento en su trabajo profesional no es tan fuerte como para hacernos olvidar que el esfuerzo personal, la voluntad y la motivación vocacional e interés de una persona en un campo de trabajo que le agrade son variables importantes en la consecución de las metas personales, y que los nuevos aprendizajes no dependen sólo de lo conocido sino de la actitud hacia el conocer. Cuando «medimos» –si pudiéramos– el nivel en una materia no medimos su relación con las otras ni la fortaleza de esa relación.

La posibilidad de medir el conocimiento matemático de un alumno es algo que ha de tomarse también con las debidas precauciones. Tradicionalmente se intentan medir los procedimientos algorítmicos (utilizando el porcentaje de resultados correctos sobre el de propuestos, o cualquier otro método que se proponga), pero no toda la matemática son algoritmos, sino que éstos son una pequeña parte de todo el cúmulo de conocimientos matemáticos. ¿Dónde quedan las estrategias? ¿Y la capacidad de seleccionar qué conocimientos son útiles y aplicarlos con precisión para resolver las situaciones problemáticas planteadas? ¿Puede eso medirse? Ante la imposibilidad de una medida de la capacidad matemática se ha optado muchas veces por medir la capacidad algorítmica con la esperanza de que ésta estuviera fuertemente correlacionada con aquélla; pero también sabemos que muchas veces eso no es cierto. De modo que la capacidad algorítmica, que sólo es un indicio de aquélla, justo cuando se desarrolla excesivamente –hipertrofiándose y dando un alto valor– se puede convertir paradójicamente en un verdadero obstáculo para el desarrollo de las otras componentes de la capacidad matemática.

Es cierto que muchas veces, y con la aquiescencia de nuestros alumnos, establecemos unos mecanismos de calificación que nos permiten obtener una nota final mediante un procedimiento pretendidamente objetivo y rápido. El que establezcamos un contrato social con nuestros alumnos sobre el modo de calificación, y se aplique con la suficiente honradez como para ser aceptado por todos ellos, no invalida nada de lo que hemos dicho sobre si eso mide realmente lo que se pretende medir: la potencia matemática de cada uno.

...hay muchos indicadores que nos permiten referencias sobre el tipo y grado de conocimiento y capacidad matemática de un alumno, y que en esos términos es posible utilizarlos como términos comparativos, pero no existe modo de integrar todos esos factores en un único valor que pudiéramos asignar a cada alumno.

La pretensión de calificar la potencia matemática de cada alumno tiene también dificultades que responden al sustrato ontológico de lo que se pretende medir: es muy difícil determinar de forma exhaustiva los factores que integran dicha potencia, y poder determinar la aprehensión (o no) de cada uno de ellos por cada alumno. En los *Estándares de Evaluación* se proporcionan algunos y es posible una cierta información sobre el grado de dominio de ellos. Pero no debemos olvidar tampoco que la consideración de esos factores va a depender del concepto que cada profesor tenga de lo que es la matemática. No son los mismos factores para quien estima que la resolución de problemas es el corazón de la actividad matemática, que para quien cree que la potencia matemática consiste en el conocimiento del entramado teórico (definiciones y demostraciones de teoremas) de diversas estructuras fundamentales.

Por supuesto que hay muchos indicadores que nos permiten referencias sobre el tipo y grado de conocimiento y capacidad matemática de un alumno, y que en esos términos es posible utilizarlos como términos comparativos, pero no existe modo de integrar todos esos factores en un único valor que pudiéramos asignar a cada alumno. En todo caso, existe bastante bibliografía sobre modos, procedimientos y usos de la evaluación de algunos de estos factores (y ello no es la intención de este artículo y puede encontrarse con las consultas adecuadas), y de las dificultades que puede plantear utilizarlos, sin olvidar que el problema último de cualquier instrumento de observación es el de saber si el correspondiente proceso no modifica lo que se trata de observar.

Aun así, si la estructura organizativa (o social) de la universidad exigiera el escalafonamiento social citado, ello sería una exigencia (un obstáculo) que se impone a los alumnos que opten por esa posibilidad, y de ningún modo tiene por qué gravitar sobre todo el tramo educativo, ni trasladarse necesariamente a los escalones inferiores de la Secundaria (y mucho menos de la Primaria), cuyos objetivos no deben traspasar el ámbito de lo educativo centrado en su formación global como ciudadanos y en el desarrollo máximo de sus potencialidades.

Que fuera claro para los profesores –sobre todo para los más jóvenes– la imposibilidad de medir el conocimiento con una escala de medida, (que nos permita decidir qué cantidad es el doble de otra), y todos estos problemas que hacen relativizar la calificación de un alumno, evitaría mucha ansiedad y enconadas discusiones de salas de profesores sobre la pretendida objetividad de una calificación, y permitiría que los profesores, autónomos en su labor, pudieran influir sobre el sistema social de modo que no llevara a las perversiones en que nos encierra el sistema económico (y la presión política que ejerce sobre los otros subsistemas) cuando pretende llevar a sus últimas consecuencias el dirigismo sobre la vida profesional de cada alumno con el pretexto de la optimización de recursos humanos que impone la competitividad que exige el máximo beneficio empresarial.

Salvador Guerrero
CPR. Málaga.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía citada

N.C.T.M. (1987): *Estándares curriculares y para la evaluación*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales», Sevilla.

París

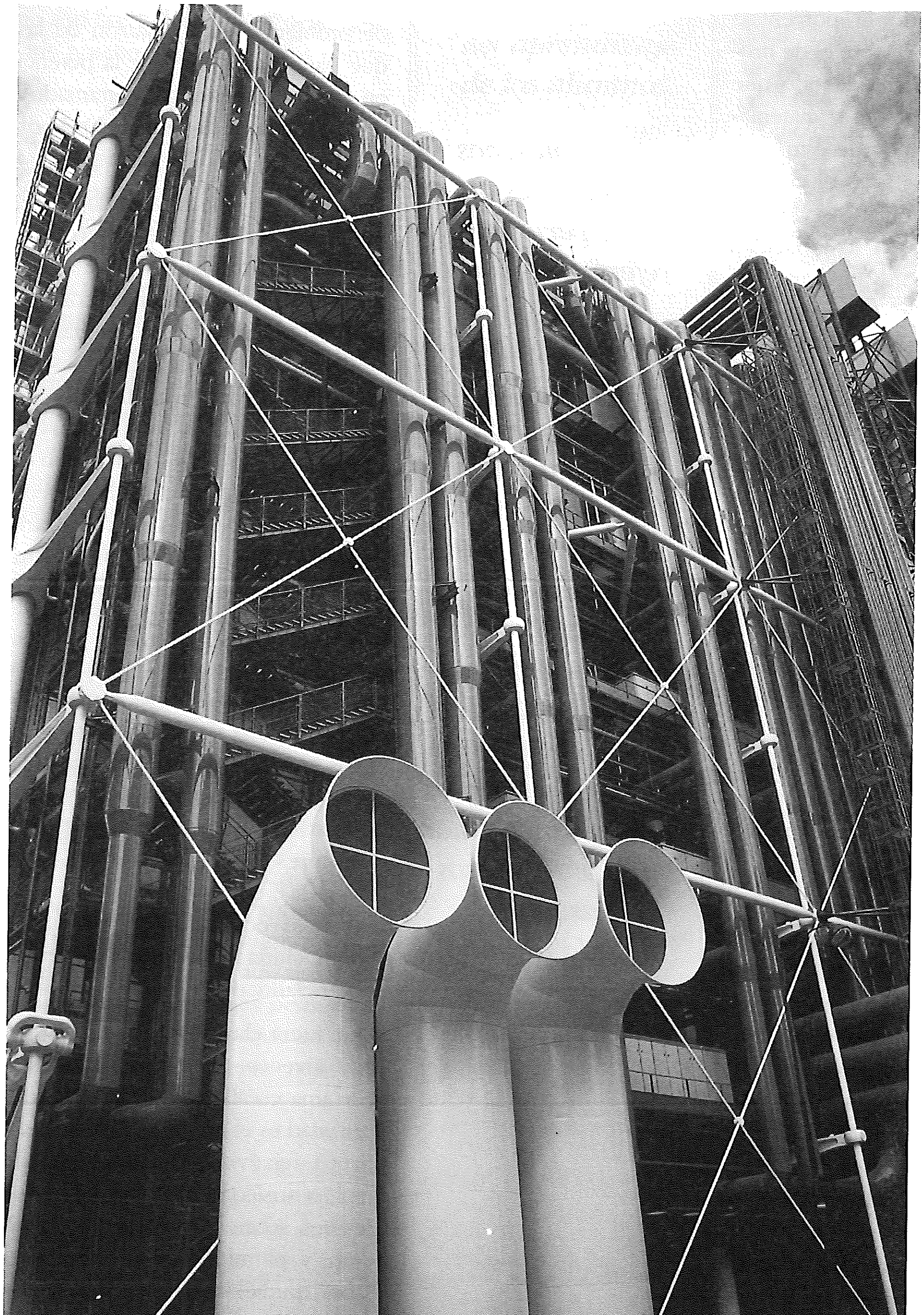
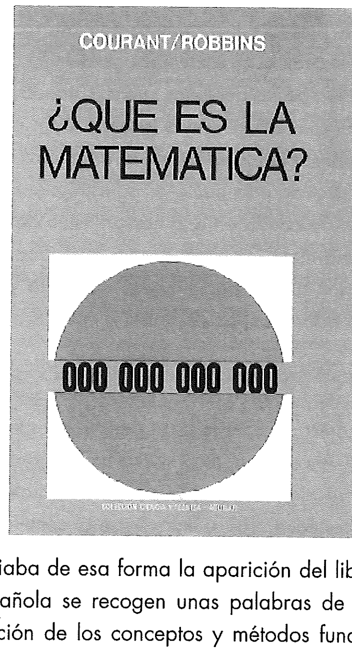


Foto:
Pilar Moreno

SUMA 29
noviembre 1998

Este libro es una obra de arte

¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA? Una exposición elemental de sus ideas y métodos
Richard Courant y Herbert Robbins
Traducción del inglés de Luis Bravo Gala de la primera edición inglesa de 1941
Editorial Aguilar (Colección Ciencia y Técnica)
Madrid, quinta edición - segunda reimpresión, 1979
ISBN: 84-03-20032-3
xx+533 páginas
Segunda edición en inglés revisada por Ian Stewart
Oxford University Press
New York, 1996



El título corresponde a una cita de M. Morse que elogiaba de esa forma la aparición del libro el año 1941. En la contraportada de la edición española se recogen unas palabras de A. Einstein acerca de esta obra: «Una acertada exposición de los conceptos y métodos fundamentales de la matemática. Constituye una introducción que puede leer sin dificultad el profano, en tanto que al iniciado en matemáticas le ofrece un panorama general de sus métodos y principios básicos». No son las únicas personalidades que hablan de *¿Qué es la matemática?* en términos elogiosos. El *Courant/Robbins*, como se le suele nombrar coloquialmente, se ha convertido en poco tiempo en un clásico entre las obras de introducción al pensamiento y métodos de las matemáticas.

RECENSIONES

Desde su primera edición en inglés de 1941, y su traducción al castellano en 1955, ha sido un libro de éxito como lo prueban sus abundantes reediciones. En realidad, todas esas ediciones son idénticas en lo esencial y tan sólo contienen correcciones de errores menores y erratas y, hablando con propiedad, se debería decir de ellas que son reimpresiones. R. Courant, en sus últimos años de vida, quería actualizar el texto pero no llegó a hacerlo. La revisión ha llegado de la mano de Ian Stewart, pero como él reconoce, el libro ha envejecido muy bien, tanto en sus puntos de vista, la elección de los tópicos tratados, el énfasis en la resolución de problemas, como en la terminología usada, lo que ha hecho innecesario modificar el propio texto. Por ello, en esta segunda edición, sólo ha añadido comentarios y extensiones a varios capítulos de la obra original que recogen los progresos alcanzados en los últimos años y los actualizan.

Richard Courant, nació en 1888 en Lublinitz (Polonia) y se formó como matemático en las universidades de Breslau, Zurich y Gatinga. En esta última llegó a ser el sucesor de Félix Klein cuando accedió a la dirección del prestigioso Instituto Matemático. En esta época colaboró con D. Hilbert en el libro *Métodos de la Física Matemática,* que aún hoy día sigue siendo de obligada referencia. Como a otros científicos de origen judío (Emmy Noether, Hermann Weyl, Max Born, etc.), el fascismo alemán le prohibió ejercer la docencia. Pudo emigrar a los Estados Unidos donde se incorporó a la universidad de New York, llegando a ser director del Instituto de Ciencias Matemáticas. Dentro de este ambiente es donde planeó la obra que nos ocupa, que elaboró conjuntamente con su colaborador Herbert Robbins.

En el prólogo a la primera edición, Courant se lamenta de que las matemáticas estuviesen perdiendo su lugar dentro de la formación de las personas cultas. Cuando analiza las causas, parecería que estuviésemos leyendo a un crítico actual: Parte de la responsabilidad recae en la enseñanza de las matemáticas que ha degenerado hacia el adiestramiento en técnicas de cálculo que no conducen a la comprensión de los conceptos ni ayudan a una mayor independencia intelectual. También a una investigación muy especializada, abstracta y carente de conexiones con otros campos del saber y con las aplicaciones.

Los autores, conscientes del gran valor del saber matemático, se plantean la tarea de escribir un texto que lo presente como un todo orgánico y como la base para el pensamiento y la acción científicas. Ahora bien, dicha tarea no la abordan indirectamente, desde la historia, la biografía de grandes matemáticos o la divulgación matemática. Van a enfrentarse al contenido real de las matemáticas, apuntando directamente a las metas que éstas persiguen y los motivos de sus desarrollos, de modo que sea posible vislumbrar los logros y métodos de la matemática moderna. Además, lo hacen sin caer en los excesos que un malentendido rigor impone a los textos habituales. No por ello evitan las dificultades, sino que exigen del lector una actitud atenta y un pensamiento crítico. Aunque nos gustaría que fuese así, quizá su pretensión de considerar que se presuponen tan sólo los conocimientos de la enseñanza media resulte excesivamente optimista.

La separación entre la matemática pura y las aplicaciones y en particular el excesivo predominio del carácter axiomático-deductivo de las matemáticas es un tema que preocupa profundamente a los autores...

La introducción de *¿Qué es la matemática?* comienza con la siguiente descripción de la actividad matemática:

> La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son: lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad. Aunque diversas tradiciones han destacado aspectos diferentes, es únicamente el juego de estas fuerzas opuestas y la lucha por su síntesis lo que constituye la vida, la utilidad y el supremo valor de la ciencia matemática.

A lo largo de la historia el peso ha recaído en una u otra de estas fuerzas opuestas. Así, durante el gran periodo de creación que siguió a la invención de la geometría analítica y el cálculo diferencial e integral, los razonamientos lógicamente rigurosos, la formulación axiomática, etc. cedieron el paso a las conjeturas intuitivas y a los razonamientos convincentes. Fruto de ello fue un cúmulo de hallazgos impresionante. La necesidad de consolidar los hallazgos y de facilitar la educación matemática superior, llevó a revisar los fundamentos y a cargar el peso sobre los aspectos lógicos y la axiomática. En la época en la que se escribe el libro está en pleno auge esta inclinación hacia la pureza lógica y la abstracción. La separación entre la matemática pura y las aplicaciones y en particular el excesivo predominio del carácter axiomático-deductivo de las matemáticas es un tema que preocupa profundamente a los autores:

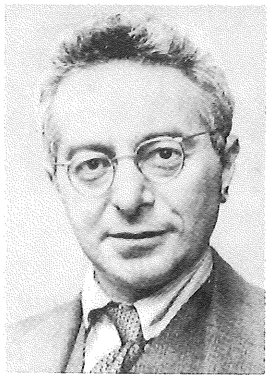
> Una amenaza seria para la vida de la ciencia aparece contenida en la afirmación de que la matemática no es más que un sistema de conclusiones derivadas de definiciones y postulados que deben ser compatibles, pero que, por lo demás, pueden ser creación de la libre voluntad del matemático. Si esta descripción fuera exacta, las matemáticas no podrían interesar a ninguna persona inteligente. Sería un juego de definiciones, reglas y silogismos, sin meta ni motivo alguno.

Claro está que de lo que abominan es de esas matemáticas puras que exploran las consecuencias lógicas de conjuntos de axiomas más o menos arbitrarios, de pequeñas modificaciones de un conjunto de axiomas, de la generalización, especialización y abstracción sin sentido. Ahora bien, son plenamente conscientes de que el enfoque logicista y la abstracción han permitido una comprensión más profunda de los hechos matemáticos y una mayor penetración en los resultados, de que muchas de las dificultades básicas desaparecen cuando se abandona el prejuicio metafísico de que los conceptos matemáticos deban ser descripciones de una realidad esencial.

Se encuentran a lo largo del libro numerosos ejemplos en los que queda reflejada esta posición filosófica. Así, después de haber expuesto la definición del número irracional como encaje de intervalos encajados, reflexionan sobre la pertinencia de dicha definición y encuentran la justificación en el hecho de ser razonable desde el punto de vista intuitivo, ya que corresponde a la abstracción del proceso físico de determinación de una cantidad mediante sucesivas aproximaciones. También está justificada por su utilidad para construir el sistema numérico de forma consistente. El proceso que lleva a esta definición pasa por un acercamiento más intuitivo a través de las expresiones decimales indefinidas, definición que no encuentran plenamente satisfactoria ya que depende de la base de numeración elegida. La búsqueda de una definición más general e independiente de la base de numeración decimal es lo que conduce a las sucesiones de intervalos encajados. Se empieza en la intuición, pero se termina en el rigor lógico:

> Prescindir del ingenuo punto de vista "realista", que considera los objetos matemáticos como *cosas en sí* de las cuales pretendemos modestamente determinar las propiedades, y, en cambio, comprobar que el único modo de existir de los objetos matemáticos que nos importa reside en sus propiedades matemáticas y en las relaciones que los ligan. Estas propiedades y relaciones agotan todos los aspectos posibles bajo los cuales puede intervenir un objeto en el mundo de la actividad matemática.

Para los números irracionales definidos con sucesiones de intervalos encajados es posible extender las operaciones numéricas, la relación de orden, etc. de manera que las leyes que cumplían los números racionales se sigan cumpliendo. Sin embargo, los autores que valoran sumamente este proceso que conduce a una construcción rigurosa del sistema de números reales, piensan que empezar con la definición abstracta y la demostración rutinaria, aunque sencilla, de las propiedades del sistema numérico no aporta gran cosa al estudiante. Lo importante es asentar bien las intuiciones que permiten avanzar como si se partiese de un concepto ingenuo de número irracional.



Richard Courant

El punto de partida siempre es un problema. A través de su análisis y de la búsqueda de soluciones se llega a la formulación precisa de definiciones o a los procedimientos generales de resolución.

Los diferentes capítulos y apartados del libro tienen una estructura similar. Evitan en todo momento hacer una exposición fría de los contenidos matemáticos, tal como puede verse en los libros de texto al uso. El punto de partida siempre es un problema. A través de su análisis y de la búsqueda de soluciones se llega a la formulación precisa de definiciones o a los procedimientos generales de resolución. Además, los autores hacen siempre referencia a los matemáticos que históricamente se enfrentaron a la situación y la resolvieron, reconociendo el mérito del descubrimiento a quien le corresponde. Una vez que han establecido el concepto con toda precisión formal, analizan diversos ejemplos con lo que pretenden ahondar en la teoría, en sus logros y en las dificultades a las que debe enfrentarse. En todo este proceso no evitan las dificultades, aunque hagan pequeñas concesiones con algunos detalles técnicos. La exposición tiene siempre un carácter claramente didáctico, resaltando los puntos claves de las demostraciones y exponiendo con claridad y sencillez cada paso que dan. Por último, siempre que la situación lo permite reflexionan sobre los métodos empleados y sus limitaciones.

Un ejemplo significativo se puede encontrar casi al principio del libro en el epígrafe dedicado al principio de inducción matemática. La infinitud del conjunto de los números enteros positivos conduce a la presentación de la inducción matemática en contraposición con la inducción empírica. Analizan dos ejemplos de tipo geométrico (número de partes en que se divide el plano mediante varias rectas y suma de los ángulos de un polígono convexo) para extraer lo esencial de los argumentos que establecen los teoremas generales. Ello les conduce a la formulación precisa del principio de inducción. Siguen con una reflexión sobre la necesidad del uso de la inducción matemática como procedimiento de demostración en las matemáticas superiores. Después de exponer con brillantez diversos ejemplos de aplicación del principio de inducción (progresiones aritméticas y geométricas, suma de cuadrados, la desigualdad $(1 + p)^n \geq 1 + np$ y el binomio de Newton) terminan el apartado con una reflexión importante: la inducción matemática permite probar una fórmula una vez es conocida, pero no da ningún tipo de indicación sobre cómo dicha fórmula puede encontrarse. Es crucial la formulación de algún tipo de hipótesis y para ello el papel del ensayo, las analogías, la intuición e incluso la inducción empírica tienen un papel importante, hasta el punto que:

> En tanto que una demostración no proporcione una indicación para el acto del descubrimiento, debe llamarse más propiamente una *comprobación*.

El primer capítulo del libro está dedicado a los números enteros. Éstos son una creación de la mente humana, que permite contar los elementos de un conjunto, al perder toda relación con los objetos contados son el punto de partida para la construcción del edificio de las matemáticas. Un breve repaso de las propiedades de los números naturales inicia la aritmética. En ella es fundamental la representación decimal de los números y el concepto de base de numeración, uno de los mejores ejemplos de adelanto científico que ha facilitado enormemente la vida cotidiana. El capítulo se completa con el estudio del principio de inducción matemática, que se ha citado antes. Termina con un amplio suplemento sobre la teoría de números en el que se tratan los siguientes temas: Los números primos y su infinitud, la descomposición factorial en producto de primos, la distribución y densidad de los números primos, la conjetura de Goldbach y los pares de primos gemelos. También, el estudio de las congruencias, las ternas pitagóricas y el último teorema de Fermat, el algoritmo de Euclides y el teorema fundamental de la aritmética, y una breve mención a las ecuaciones diofánticas y a las fracciones continuas.

Vamos a ver como, dentro del estudio de los números primos, introducen un importante teorema. Cabe destacar varios aspectos del estilo expositivo de los autores que son comunes a las diferentes partes del libro: el reclamo a la experiencia para justificar lo pertinente del resultado que se estudia, la mención a una demostración clásica y la descripción de cómo será la demostración que se va a exponer antes de acometerla con todo su rigor. El lector que desee saltarse la demostración formal, o tenga dificultades en comprenderla, habrá captado la esencia, la forma empleada para establecer el resultado:

> Si un número ha sido expresado como producto de números primos, podemos disponer dichos factores primos en un orden cualquiera. La experiencia demostraría que, salvo la arbitrariedad en la ordenación, la descomposición de un número N en factores primos es única: *Todo entero* N, *mayor que 1, puede descomponerse en producto de números primos, y solamente de una forma.* Esta proposición parece a simple vista tan evidente que un profano podría inclinarse a admitirla sin prueba. Sin embargo, no es una trivialidad y la demostración, aunque elemental, requiere algunos razonamientos sutiles. La demostración clásica, dada por Euclides, de este "teorema fundamental de la aritmética" está basada en un método o "algoritmo" para el cálculo del máximo común divisor de dos números. (...) En vez de dicha demostración, daremos aquí otra de cosecha más reciente: más breve, pero quizá más artificiosa que la de Euclides. Será un ejemplo típico de demostración indirecta. Supondremos la existencia de un entero susceptible de dos descomposiciones esencialmente diferentes, y de esta hipótesis resultará una contradicción. Esta contradicción demostrará que la hipótesis de que existe un entero con dos descomposiciones esencialmente diferentes en factores primos es absurda, y como consecuencia, resultará que la descomposición en factores primos de un entero cualquiera es única.

Otros de los temas que complementan este segundo capítulo es el análisis del concepto matemático de infinitud, en el que introduce la teoría de conjuntos de Cantor, los cardinales y la hipótesis del continuo.

El segundo capítulo está dedicado a los sistemas numéricos, es decir a la exposición del proceso por el que se establecen los distintos campos numéricos sobre una base lógica rigurosa. Se trata de una exposición bastante clásica, pero siempre guiada por una intención que es llevar al lector al convencimiento de que no se trata de un juego puramente formal, sino que las decisiones tomadas al definir están guiadas por la necesidad de crear un instrumento útil desde el punto de vista práctico, así como por la exigencia de que las sucesivas ampliaciones conserven las propiedades aritméticas de las operaciones del sistema numérico que se ha ampliado. Destaca dentro de este capítulo, por la claridad y profundidad en la exposición, el apartado dedicado a la introducción de los números irracionales. También el cuidado de presentar las relaciones con otras partes de la matemática. Por ejemplo, una vez se ha establecido el continuo numérico, y se han presentado su interpretación geométrica, dedican un apartado a la geometría analítica, y esto está bien justificado ya que es precisamente la relación entre números reales y longitudes de segmentos sobre la recta la que permite referir todos los objetos y operaciones geométricas a los números.

Otros de los temas que complementan este segundo capítulo es el análisis del concepto matemático de infinitud, en el que introduce la teoría de conjuntos de Cantor, los cardinales y la hipótesis del continuo. También reflexionan sobre el método de demostración indirecta y sus limitaciones, las paradojas de la teoría de conjuntos y los fundamentos de las matemáticas. Otros temas, que no suelen ser habituales en las exposiciones elementales de las ampliaciones del concepto numérico y hablan elocuentemente de la profundidad de este libro, son la exposición del teorema fundamental del álgebra o la distinción entre números algebraicos y trascendentes incluyéndose la demostración de Liouville de la existencia de números trascendentes.

El suplemento de este capítulo está dedicado a exponer el álgebra de conjuntos, y una breve mención a sus aplicaciones a la lógica matemática y a la teoría de las probabilidades.

El siguiente capítulo trata de las construcciones geométricas. En la primera parte se analizan, desde el punto de vista algebraico, las construcciones con regla y compás. Todo problema de construcción lleva a plantear una ecuación en la que la incógnita es el segmento que se debe construir. Pero lo que resulta decisivo es la caracterización de los números que pueden construirse. El uso de la regla sólo permite construir todas las cantidades resultado de sumar, restar, multiplicar o dividir los datos. Ahora bien, con el uso del compás es posible salir del cuerpo al que pertenecen los datos, por ejemplo, escogiendo una cantidad k de dicho cuerpo y formando los números de la forma $a + bk$ donde a y b son del cuerpo inicial. Estas nuevas cantidades pertenecen a una *ampliación* del cuerpo inicial cuyos elementos son a su vez construibles. Este proceso evidentemente se puede iterar de forma que un número es construible si se puede establecer una sucesión de ampliaciones de forma que el número esté en uno de esos cuerpos ampliados. La caracterización positiva de los números construibles con regla y compás permite abordar, como consecuencia, los problemas clásicos de construcción de los griegos y así establecer la irresolubilidad de la duplicación del cubo, la trisección del ángulo o la construcción del heptágono regular. El problema de la cuadratura del círculo exige disponer de técnicas para demostrar que π es un número trascendente, y por tanto no construible.

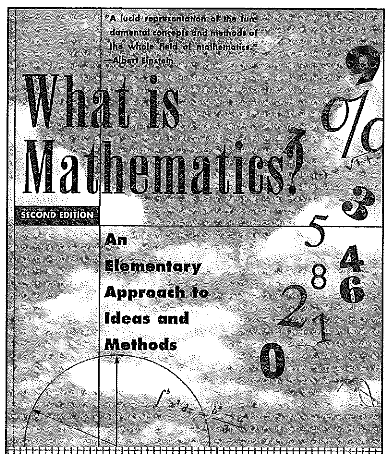
La segunda parte del capítulo está dedicada a estudiar otros procedimientos de construcción: las transformaciones geométricas y en particular la inversión; las construcciones con sólo un compás y el teorema general de Mascheroni; las curvas mecánicas y sus aplicaciones a la construcción de *conexiones*. Por último se aplican las inversiones a la resolución geométrica del problema de Apolonio (hallar un círculo tangente a tres círculos dados).

El cuarto capítulo comienza con la clasificición de las propiedades geométricas de acuerdo con su invarianza respecto de determinados grupos de transformaciones, según la idea introducida por F. Klein. Rápidamente se pasa a las transformaciones proyectivas y al estudio de la geometría asociada. El concepto de razón doble y su invarianza mediante proyecciones es el punto de partida, pero donde de nuevo observaremos el interés didáctico de los autores es en su introducción de los *puntos y recta del infinito*. Así, su explicación de cómo sus propiedades se eligen de forma que las leyes de incidencia entre puntos y rectas sigan cumpliéndose en el espacio ampliado. Con ello se consigue evitar los casos anómalos de las demostraciones provocados por las proyecciones paralelas y por tanto, simplificarlas. Todo ello se completan con la demostración de los teoremas clásicos de la geometría proyectiva: teoremas de Desargues, Pascal y Brianchon, así como el tratamiento proyectivo de las cónicas y cuádricas.

Los autores exponen de forma sencilla los modelos de Klein, Poincaré o Riemann como ejemplos de geometrías que incumplen el axioma de las paralelas y están exentas de contradicción.

El capítulo termina con una incursión en la axiomática de la geometría y en particular la aparición de las geometrías no euclídeas. El conjunto de axiomas dan una definición implícita de los objetos y términos básicos de la geometría (punto, recta, incidencia,...). Todos los axiomas euclídeos son aserciones físicamente verificables sobre objetos, excepto el axioma de las paralelas ya que se refiere a toda la extensión de la recta que imaginamos como indefinida. La duda sobre su independencia o no, respecto de los demás axiomas, lleva a la construcción de geometrías que no lo verifican. Los autores exponen de forma sencilla los modelos de Klein, Poincaré o Riemann como ejemplos de geometrías que incumplen el axioma de las paralelas y están exentas de contradicción.

Dentro de la perspectiva iniciada en el capítulo cuarto, el siguiente lo dedican al estudio de las propiedades de las figuras que subsisten cuando se las somete a deformaciones que les hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas: las propiedades topológicas. La primera que estudian es la fórmula de Euler. Una demostración hecha para poliedros demuestra seguir siendo válida cuando sus aristas y caras se deforman sin producir fracturas. Estas consideraciones llevan a la definición precisa de las transformaciones topológicas. El resto del capítulo está dedicado a presentar diversas propiedades topológicas: la conexión, el teorema de la curva de Jordan, el problema de



los cuatro colores y la demostración del teorema de los cinco colores, el concepto de dimensión topológica, el teorema del punto fijo de Brower, la clasificación topológica de las superficies o el teorema fundamental del álgebra. Todos ellos están expuestos con rigor y de forma clara e intuitiva.

Los tres últimos capítulos del libro tratan de lo que llamaríamos análisis matemático. El sexto capítulo está completamente dedicado a la discusión de dos conceptos claves: continuidad y límite. Lo más interesante del mismo lo podemos encontrar, además de en la clara exposición de los conceptos, en la discusión sobre las dificultades que bloquearon el camino hasta la comprensión clara y la definición precisa de los mismos. Así, por ejemplo, respecto del límite de una función en un punto, resaltan la dificultad de expresar como «aproximar» la variable x a un valor x_0 recorriendo todos los valores del intervalo de definición. El mérito de la definición de Cauchy está en alejarse hasta un punto de vista estático, que no presupone ninguna intuición de movimiento, sino tan sólo la reducción a algo observable: la existencia de un entorno de x_0 en el que la función alcanza valores dentro del entorno del límite prefijado, cualquiera que sea éste. Conscientes de las dificultades para la compresión de estas definiciones, llegan a afirmar que:

> No es de extrañar que cuando se encuentra por primera vez [la definición de límite de una sucesión] no sea posible captarla inmediatamente en toda su profundidad. Algunos autores adoptan una actitud poco feliz, presentando esta definición al lector sin una preparación adecuada, como si dar una explicación no resultara honroso para la dignidad de un matemático.

La exposición de los conceptos se completa con unas cuantos teoremas sobre sucesiones y funciones continuas (teoremas de Bolzano y de Weierstrass), además de algunas aplicaciones. Por cierto que en una de las aplicaciones del teorema de Bolzano que se exponen en este artículo existe un error, el único a lo largo del libro, que ha sido detectado y explicado en el capítulo añadido en la segunda edición por I. Stewaart (véanse pp. 505 a 507).

El capítulo séptimo está dedicado al estudio de un tipo de problemas: aquellos que tienen una formulación en términos de lo «óptimo» y lo «peor», es decir la teoría de los valores extremos. Se dan múltiples ejemplos que permiten exponer la importancia que para el estudio de las leyes físicas tiene el principio del mínimo, que proporciona una solución general a una gran cantidad de problemas particulares. Se introducen junto a los problemas de máximos y mínimos que estuvieron en el origen del cálculo diferencial, el cálculo de variaciones o la teoría de los valores estacionarios, todo ello desde un punto vista completamente elemental. La parte final del capítulo aborda la solución experimental de problemas de mínimo con experimentos con películas jabonosas, en las que presentan resultados propios sobre las superficies mínimas que adopta la solución jabonosa cuando el contorno es una estructura de alambre flexible y el efecto de las deformaciones del contorno sobre la película.

Como apostilla I. Stewart en su prólogo, estamos ante una obra única.

El último capítulo da una introducción elemental del cálculo infinitesimal insistiendo en la comprensión de los conceptos de integral y derivada más que en su manipulación formal que puede vaciar de sentido los contenidos de la teoría. El uso de un lenguaje intuitivo no es óbice para presentar los conceptos con claridad y precisión. Cabe destacar que contra las costumbres al uso se introduce primero la integral y luego la derivada, justificado por su aparición histórica. Se resalta sobre todo que la relación entre ambos conceptos permitió el gran desarrollo de las matemáticas a partir del siglo XVII.

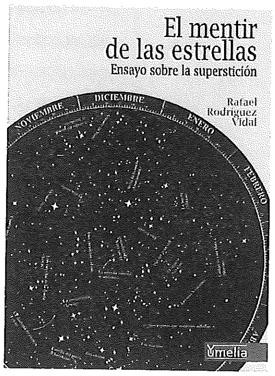
En la segunda edición, Ian Stewart, acomete la puesta al día de la obra de Courant y Robbins. El capítulo titulado «Desarrollos recientes», contiene los comentarios que actualizan los temas tratados en *¿Qué es la matemática?*, sin introducir otros nuevos tópicos de los que han adquirido relevancia en la última parte del siglo, ya que sobre ellos puede encontrarse una abundante bibliografía reciente entre la que cabría destacar las obras del propio I. Stewart. Además del comentario al error encontrado en la obra original, no podía faltar entre otros las demostraciones recientes del teorema de los cuatro colores y del último teorema de Fermat.

¿Qué es la matemática? cayó por primera vez en mis manos en los últimos años de la carrera, cuando buscaba lecturas que dieran sentido a las materias que se me explicaban desde el más duro estilo axiomático. Me interesaba tener una visión de conjunto de los métodos y temas de las matemáticas, entender el porqué de las definiciones abstractas y el hacia dónde iban los desarrollos formales. Creo que entonces, y aún ahora, el libro cumplía a la perfección con estos objetivos. Es una pena que desde hace años no haya vuelto a reeditarse en nuestro país y que la aparición de esta segunda edición revisada en inglés debería animar a la editorial a volver a imprimirlo.

Como apostilla I. Stewart en su prólogo, estamos ante una obra única.

Julio Sancho

EL MENTIR DE LAS ESTRELLAS. ENSAYO SOBRE LA SUPERSTICIÓN
Rafael Rodríguez Vidal
Eiunsa
Barcelona, 1998
ISBN: 84-89893-18-7
197 páginas



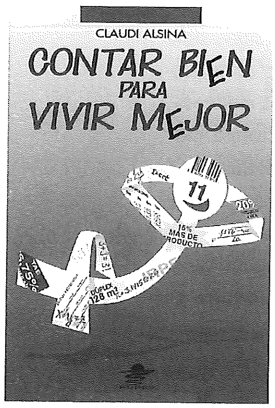
De forma póstuma acaba de aparecer un nuevo libro del profesor Rafael Rodríguez Vidal. Pienso que es un buen momento para, además de glosar el libro, recordar a la persona y a la obra de este pionero de los pasatiempos y de la divulgación matemática en nuestro país.

Aunque de origen catalán, el profesor Rodríguez Vidal fue catedrático de la Facultad de Matemáticas de Zaragoza (y también dio clases de matemáticas en otros centros zaragozanos, en tiempos en los que el pluriempleo era norma, ante lo exiguo de los sueldos –y es bueno recordarlo ahora para ahuyentar las frecuentes quejas en el sector– y la escasez de matemáticos) desde el año 1951 hasta su jubilación, aunque continuó trabajando en ella hasta su muerte en 1993, tras una rápida enfermedad. Y fruto de esa labor en sus últimos años es el libro al que nos referimos, dedicado a las diversas supersticiones, las «mancias» (de etimología griega: adivinación), en el que se le ve mucho más libre de ataduras que en sus obras anteriores, escritas cuando era profesor en activo. En este libro aparecen la quiromancia y la numerología, la astrología y los horóscopos, la nigromancia y la cábala, entre otras, hasta acabar en la doctrina pitagórica de los números. A todas ellas se refiere con un gran conocimiento y erudición, y variadas citas literarias e históricas siempre pertinentes, a las que explora con un punto de vista científico, con ojos del matemático que siempre fue. Y nos deja un regusto del contertulio cercano, del lector impenitente, del recolector de citas de fuentes diversas, de quien tiene intereses diversos y profundos, que sin prisas y con el poso de los años va desgranando en los distintos capítulos del libro, para comunicarnos visiones nuevas.

Y me viene el recuerdo de los años, ya un tanto lejanos, en que fue mi profesor en la Facultad, tan mal apreciado matemáticamente en ese momento por el conjunto de los estudiantes. Y es que el movimiento de la matemática moderna, el «bourbakismo» arrasaba, era la ideología no sólo dominante, sino con el furor de la emergencia; y a ella el Dr. Rodríguez Vidal era muy poco adicto. Pero fue, al menos en ese momento, los finales de los años sesenta, uno de los pocos profesores que, de cuando en cuando, daba visiones personales, elaboraciones propias, apuntes de los destellos de los grandes genios que hicieron avanzar las matemáticas y que suponían puntos de mira en los que soñar y gozar entre la árida teoría bourbakista, que el resto nos presentaban (con un dominio reciente, pero dudoso) como caída del cielo y sin ancestros, sin historia. Por eso, pasado un tiempo, y con la distancia y el poso que dan los años, yo fui considerando que, algunas de sus clases, eran de lo más aprovechable que me había pasado en mi estancia en la Facultad. Algo que nunca tuve la oportunidad de decirle (por pudor seguramente o tal vez por su prematura desaparición), y que ahora, tarde como tantas otras cosas, reflejo.

También recuerdo los otros libros de divulgación del autor, pioneros en la recreación matemática, y me produce una cierta pena que su editorial de siempre, a la que dio lustre, no haya sido capaz de editar este último destello de su quehacer. Pero de cualquier forma aquí está al alcance de todos, y seguro que el mejor homenaje que podemos hacerle sea leerlo, paladearlo y disfrutarlo.

Fernando Corbalán



CONTAR BIEN PARA VIVIR MEJOR
Claudi Alsina
Rubes
Barcelona, 1998
ISBN: 84-497-0013-2
143 páginas

Hay un déficit bastante acusado en nuestro país de libros de divulgación matemática cuyos autores sean profesores de Universidad y/o investigadores profesionales. O sea que quienes transitan por los territorios más modernos de la disciplina nos hurtan las posibilidades que les dan su conocimiento de los nuevos campos de la matemática y su relación con otros expertos de fuera de nuestro país. Y lo mismo pasa cuando se trata de explorar las posibilidades pedagógicas de las nuevas situaciones que plantean los avances matemáticos y la variante importancia relativa de cada una de las partes de las matemáticas, así como de las necesidades futuras de los ciudadanos en una sociedad cambiante en la que cada vez es mayor la importancia relativa de los conocimientos científicos. Y también creo que debería ser mayor la presencia de los enseñantes universitarios en la necesaria actualización y puesta a punto del profesorado de las etapas primaria y secundaria para afrontar con éxito los retos que tienen planteados.

Y puede parecer extemporáneo referirse a esas ausencias cuando nos estamos refiriendo a un libro del profesor Claudi Alsina que es uno de los pocos investigadores que suponen una excepción a la situación que acabamos de plantear (y por cierto que si no hacemos una lista exhaustiva de las excepciones es porque no es pertinente en este contexto, pero no por miedo a que sea demasiado larga), pero si lo traemos aquí es por llamar la atención una vez más de la importancia social que podría tener una conexión más fluida entre los colectivos educativos de los diferentes niveles.

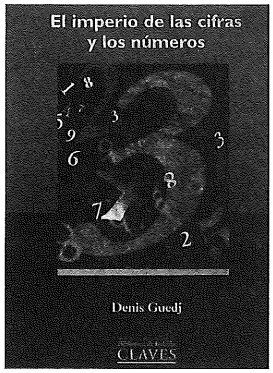
Claudi Alsina es suficientemente conocido por los profesionales de la enseñanza como para tener que comentar unas virtudes que son bien conocidas. Pero quisiera destacar que siempre busca puntos de vista novedosos, estimulantes y placenteros en sus libros y conferencias, que sirven de solaz y diversión, pero también de acicate para mejorar en la práctica diaria, para enriquecer los puentes matemáticos con la sociedad, esos que el colectivo de profesores de matemáticos tenemos la misión y la obligación de tender. Y es de agradecer que si en un determinado momento trató en una de sus memorables conferencias (esperadas y disfrutadas a ambos lados del Atlántico, por lo menos) de las «Matemáticas felices», no pararon ahí sus relaciones con ellas, sino que las esparce en cada una de sus charlas y comunicaciones en diferentes rincones del país. Y siguiendo en esa línea, ahora nos propone métodos de contar bien «para vivir mejor», loable empeño que debería estar en la base de todas las actividades humanas, y desde luego tendría que ser uno de los objetivos primeros de la enseñanza.

Y es que si, como dice Muñoz Molina, «la educación sigue siendo un acto de valor y de optimismo, porque se basa en la creencia ilustrada de que es posible y necesario hacernos mejores», el conocimiento nos tiene que permitir vivir de una forma más plena, más rica, más humana. Para vivir mejor, en definitiva. Y por eso tenemos que esforzarnos en encontrar las vías de profundización en el conocimiento de la realidad desde todos sus ángulos, también desde el matemático. Y no cabe ninguna duda de que el libro que reseñamos supone una ayuda importante en ese sentido.

Pero no sólo eso, sino que lo hace de una forma amena y divertida. Quizás para todos los que le hayan oído alguna vez, el mejor elogio que puede hacerse del libro *Contar bien para vivir mejor* sea que al leer sus páginas nos resuenan los ecos de las charlas de su autor, que se detecta en él la facilidad de comunicación, el impacto directo que desarrolla en sus conferencias. Y lo hace en siete capítulos que tocan aspectos muy diferentes del entorno social, en forma de consejos para mejorar la vida del lector. Son consejos muy personales; sobre familia, sociedad y entorno; para compras y viajes; para imagen y sonido; para ahorros e impuestos: para dejar de apostar y, por fin, para razonar. Y que como en los preceptos de nuestra niñez, resume en uno: «Las matemáticas fueron creadas y siguen vivas para que personas como usted gocen de sus resultados, ya sea como placer intelectual o como método para mirar, resolver, decidir o informarse... Las matemáticas no agotan los recursos intelectuales que usted debe combinar con ellas, pero a ellas les gustaría ir siempre con usted».

Sólo me queda añadir el deseo de que disfruten del libro. Durante su lectura y con la prolongación de sus consejos a su vida posterior.

Fernando Corbalán



EL IMPERIO DE LAS CIFRAS Y LOS NÚMEROS
Denis Guedj
Biblioteca de bolsillo
CLAVES N.° 10
Ediciones Grupo Zeta
Barcelona, 1998
ISBN: 84-406-3903-1
176 páginas

Siempre hay que dar la bienvenida a libros de divulgación matemática que se puedan leer por todos, es decir, que no sea necesario el conocimiento previo matemático y que acerquen las matemáticas a la gente normal que las teme u odia ya que le parecen inaccesibles para su cerebro.

Esta obra, aunque se publica en español en este año de 1998, es una traducción de la versión original en francés, de la editorial Gallimard del año 1996.

El libro, con una presentación muy cuidada, va dirigido a toda clase de lectores, grandes y chicos que se interesen por el origen del concepto de número, desde su uso como herramienta para contar, pasando por la abstracción y las distintas representaciones que se han utilizado por los diferentes pueblos del mundo y a través de la historia.

Esta dividido en siete capítulos: I Expresar la cantidad. II De los números a las cifras. III La numeración india de posición. IV Los enteros naturales. V El imperio se extiende. VI El cero y los infinitos. VII La imposible definición, más una sección de Testimonios y Documentos.

Todos los temas son tratados de forma amena con un gran despliegue visual a todo color que engancha al lector, pero con escasos rigor científico y profundidad matemática, ¿quizá no requeridos por tratarse de una obra de divulgación?

También, desde un punto de vista de un profesional de las matemáticas, cabría discutir mucho sobre el orden de presentar los conceptos, pero esto sólo sería un motivo más de discusión entre diferentes opiniones.

En particular, yo echo mucho en falta la interconexión entre los diferentes problemas que se plantean en cada apartado, parecen aislados, no tienen una cierta «continuidad».

Sus fotografías son impresionantes y muy bellas, muy bien elegidas para atraer al lector e intentar abstraer la idea de número. Van desde El códice maya de Dresde, relieves en piedras o huesos de la época del Paleolítico, pinturas egipcias,... hasta la «cabeza mecánica» del artista dadá Hausmann o el «límite circular» de Escher y el rostro sonriente de Andrew Wiles, que acaba de demostrar la conjetura de Fermat en 1995.

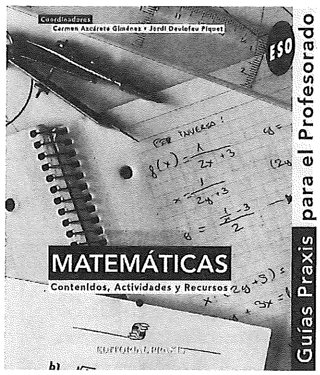
Sin embargo, no están bien determinadas: en algunas es posible descubrir exactamente de qué se trata gracias a un pequeño comentario relativo a la fotografía en la misma página o en la página siguiente, pero en otras no es posible encontrar ninguna referencia sobre la misma que indique su procedencia, véase por ejemplo las páginas 24, 43, 44, 45, 135, o bien no esta nada clara, véase las páginas 72 (abajo), 73, 84 (arriba y abajo), 110-111. Pero que no cunda el pánico, todo está bien detallado en un índice de ilustraciones que ocupa las páginas de la 170 a la 173. Además, en la penúltima página aparecen una serie de créditos fotográficos de donde se han tomado algunas de las fotografías.

El último apartado relativo a testimonios y documentos es una nómina de citas, muy bien seleccionada y agrupadas en diecisiete apartados, de diferentes autores matemáticos (Arquímedes, Cantor, Carnot, Dedekind...) y no matemáticos (Aristóteles, Piaget, Rousseau, Paul Válery...) entre los que se incluye un extracto de un guión de ficción, del propio autor Denis Guedj, que a la vez de profesor de historia de las ciencias en la Universidad de Paris VIII, donde enseña matemáticas y cine, es escritor y cineasta.

En las últimas páginas hay un pequeño glosario de términos, una breve cronología y la bibliografía que tampoco es muy extensa, junto con el ya mencionado índice de ilustraciones (mayor en extensión que el conjunto de glosario, bibliografía y cronología), y un índice alfabético para terminar con el también mencionado de créditos fotográficos.

En definitiva, un empujón a la deteriorada imagen social de las matemáticas, por lo que hay que felicitar a su autor, aunque sin rigor científico, lo que quizá lo haga más ameno a la gente «normal».

M.ª Carmen Escribano



MATEMÁTICAS: CONTENIDOS, ACTIVIDADES Y RECURSOS
Carmen Azcárate y Jordi Deulofeu (Coords.)
Praxis (Col. Guías Praxis para el profesorado de ESO)
Barcelona, 1998
ISBN: 84-7197-456-8
479 páginas

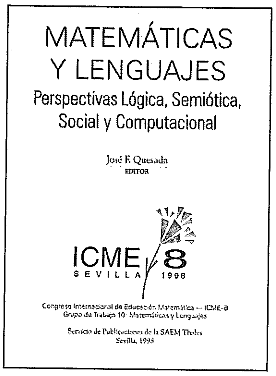
Una idea inicial de la Reforma consistía en que cada profesor, o mejor el profesorado de cada departamento de un centro, elaborase sus propios materiales que iba a utilizar en el aula con sus alumnos, incluso se llegó a decir que los libros de texto iban a desaparecer. La realidad ha mostrado que esto no ha sido así y el manual de texto ha seguido siendo casi el único referente para una buena parte de docentes. Entre estas dos posiciones hay un espacio intermedio muy amplio, que consiste en que en el propio departamento didáctico se elabore un proyecto propio, pero a partir de diferentes propuestas concretas, utilizando materiales ya elaborados pero enmarcados en un plan racional y coherente. Este libro pretende, y lo consigue, situarse en este espacio.

La Guía se presenta como una carpeta con anillas de forma que se puedan ir incorporando los materiales que sucesivamente irán apareciendo. Se inicia con un primer apartado de cuestiones generales sobre las dimensiones psicopedagógicas y curriculares referidas al conjunto de la etapa y que son comunes a las guías de las diferentes materias. Sigue con unas breves, pero acertadas, reflexiones acerca de la enseñanza y aprendizaje de la matemática, así como la estructura y filosofía que inspira la propuesta.

El cuerpo principal de la publicación lo constituyen las unidades didácticas. En la primera entrega han aparecido cuatro: Números naturales, Geometría del espacio, Estadística y azar y, entre los temas transversales, uno titulado Matemáticas y vida cotidiana, aunque en realidad se trata de una faceta del mismo, como es la prensa en la clase de Matemáticas. Todas ellas presentan una estructura similar: presentación, selección y secuenciación de contenidos, desarrollo de la propuesta y recursos e incluye tres tipos de documentos distintos y perfectamente identificables: orientaciones para el profesorado, documentos y actividades para el alumno.

Precisamente porque la edición es muy correcta, es una lástima que algunas ilustraciones de la unidad de geometría no estén perfectamente reproducidas; este pequeño detalle se debería cuidar en las sucesivas entregas de la obra. Las unidades didácticas, al ser elaboradas por distintos autores, no son totalmente homogéneas como es lógico, pero al seguir unas mismas pautas y criterios y ajustarse a la filosofía del proyecto forman una unidad bastante coherente dentro de la diversidad de enfoques. En definitiva, se trata de una obra muy valiosa que puede resultar útil al profesorado de secundaria obligatoria, que puede aprovecharla de diferentes formas, asumiendo la propuesta en su totalidad o seleccionando determinadas unidades o partes de ellas para incorporarlas a su proyecto personal o de departamento.

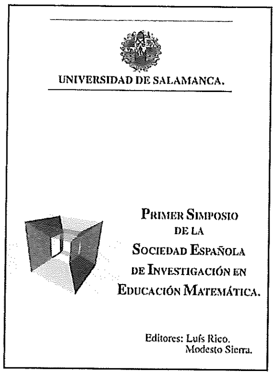
Emilio Palacián



MATEMÁTICAS Y LENGUAJES.
Perspectivas Lógica,
Semiótica, Social y Computacional
José F. Quesada (Editor)
SAEM Thales
Sevilla, 1998
ISBN: 84-923760-1-5
189 + 175 páginas

Este volumen consiste en la edición bilingüe (español e inglés) de las ponencias del Grupo de Trabajo 10: «Matemáticas y Lenguajes», presentadas en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME 8), celebrado en Sevilla en el verano de 1996.

Se recogen trabajos presentados por Bill Atweh, Phyllis August-Rothman, Robert Bleicher, Dhamma Susan Colwell, Tom Cooper, Pablo Guerrero, Francisco Gutiérrez, Patricio G. Herbst, Rosalyn M. Hyde, José F. Quesada, Blas C. Ruiz y Adam Vile.



PRIMER SIMPOSIO
DE LA SOCIEDAD
ESPAÑOLA
DE INVESTIGACIÓN EN
EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Luis Rico y
Modesto Sierra (editores)
SEIEM
Granada, 1998
ISBN: 84-920554-8-0
190 páginas

Actas del I Simposio de la SEIEM, celebrado en Zamora los días 12 y 13 de septiembre de 1998. El contenido gira alrededor de tres seminarios:

- Profesor de Matemáticas y contextos de investigación. ¿Cómo abordar la investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido en los profesores de matemáticas? Opciones y líneas.
- ¿Cómo estructurar las tareas que aparecen en un campo conceptual? Discusión de un caso: clasificación de problemas aditivos.
- Metodología e investigación en Educación Matemática: estrategias del análisis estadístico para tratamiento de cuestiones de didáctica.

Asimismo aparecen los correspondientes informes de los distintos grupos de trabajo de la SEIEM que se reunieron durante el simposio.

SUMA

ENVÍO DE COLABORACIONES

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA
Fax: 976 76 13 45
E-mail: palacian@posta.unizar.es

SUMA 29
noviembre 1998

IX Olimpiada de la Federación y III CIBEM

CRÓNICAS

IX Olimpiada Matemática Nacional

Mar y Matemáticas

Del 21 al 27 de junio se desarrolló en Carboneras (Almería) la Fase Nacional de la 9.ª Olimpiada Matemática que convoca la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. En esta ocasión fue la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, a través de su delegación provincial de Almería, la encargada de organizar este evento. Un equipo de más de 50 profesoras y profesores de toda Andalucía coordinados desde la SAEM Thales de Almería han trabajado durante dos años para tratar de conseguir los grandes objetivos que se proponen con este tipo de actividades:

1. Fomentar entre las chicas y chicos el gusto por las Matemáticas mostrando una visión de las mismas alternativa (y más agradable, divertida y útil) a la que se suele dar en las aulas.
2. Favorecer las relaciones de amistad entre los participantes.
3. Propiciar la innovación en el campo de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas entre el profesorado (hay por tanto en esta actividad una fuerte componente de perfeccionamiento para el profesorado).

Debajo de todo esto subyace la idea de entender la Matemática como una parte más de la formación integral de nuestras chicas y chicos y de utilizarla como excusa para inculcarles valores tan importantes como la solidaridad, el compañerismo, el trabajo en equipo, la tolerancia, el espíritu crítico,... Y, al final, también se detectan genios.

A lo largo de los siete días que ha durado esta actividad se han compaginado las pruebas de contenido matemático, potenciando siempre el trabajo en equipo y proponiendo problemas o situaciones problemáticas abiertas en las que lo importante no era encontrar la solución o las soluciones sino el camino o la estrategia seguida, con una serie de actividades culturales, lúdicas y recreativas que han generado entre los 46 participantes de 2.° de ESO de toda España, los 16 profesores que les acompañaban y el equipo organizador, una serie de relaciones y lazos de unión indescriptibles; sólo es posible entenderlo si se ha vivido. Es todo un regalo y un gozo para cualquier profesional de la enseñanza tener la oportunidad de convivir unos días con un grupo de chicas y chicos de la categoría humana y de la talla intelectual de los participantes en esta actividad. Tal es así que se contagió al personal del Hotel El Puntazo en Mojácar, volcado siempre con nosotros; al equipo profesional de Vídeo y Fotografía de Fotosur que habíamos contratado, que al final se involucraron en la organización como dos miembros más; a Juan Carlos y al «pillagatos» de la imprenta Dimar; al personal que nos atendió en todas las visitas a los patrocinadores y a los lugares de interés tanto en Almería como en Granada; y a todas aquellas personas que nos han visitado.

Los responsables de todo esto

Desde el momento en que hace dos años la Federación da el visto bueno, los culpables de todo esto hemos sido: Pedro José Martínez Fernández (Coordinador Nacional), Francisco Morales Haro (Coordinador de las exposiciones), José Villegas Alcántara y Ricardo Contreras Calvache.

Pero la idea que teníamos al principio de lo que podía ser esta Fase Nacional de la Olimpiada Matemática, fue creciendo más y más y más gracias a que encontramos apoyo económico y, por supuesto, humano. En Almería hemos contado con un equipo fijo de personas que han colaborado y han estado al pie del cañón antes, durante y después: Juan Enrique González Jiménez, Pedro González Ventura, José Miguel López Fernández, Francisco José Villegas Martín, Catalina Serrano Meca, María García Zamora, Carmen Pino Villalba, José Ignacio Tijeras Uclés y Gema María Caro Márquez.

Aparte de eso, en Almería hemos contado con innumerables colaboraciones esporádicas que sería larguísimo de exponer aquí.

En Granada han trabajado un equipo de compañeras y compañeros hasta lo indecible para que uno de los días de la Olimpiada se dasarrollase íntegramente en Granada. este equipo estaba compuesto por: Javier Berenguer Maldonado, M.ª Isabel Berenguer Maldonado, Purificación Cobo Mérida, Belén Cobo Merino, Pablo Flores Martínez, Miguel Ángel Fresno Martínez, M.ª de la Villa García Miranda, Antonio Moreno Verdejo, Juana María Navas

RESULTADOS 9.ª OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

REGULARIDAD

(Ganadores absolutos por orden alfabético)

- Juan Botias Agea (Andalucía).
- Juan Marín Lahoz (Aragón).
- Francisco Viña Pérez (Canarias).

INDIVIDUAL

(Cinco primeros puestos. Por orden alfabético)

- Juan Botias Agea (Andalucía).
- Noemí Esteras Gallego (Castilla-León).
- Juan Marín Lahoz (Aragón).
- Alfredo Ruiz Jiménez (Andalucía).
- Francisco Viña Pérez (Canarias).

1.ª PRUEBA POR EQUIPOS

Primer puesto

Equipo n.° 9 (GRIS)

- Isabel Cabezas Martín (Andalucía).
- Pablo de la Viuda González (Castilla-León).
- Hasier Morras Aranoa (Navarra).
- Juan Marín Lahoz (Aragón).

Segundo puesto

Equipo n.° 1-NARANJA

- Juan Botias Agea (Andalucía).
- Cristina Fernández Ibáñez (Cantabria).
- Ángel Ramón Torrado Pérez (Madrid).
- Fernando Sánchez Rodríguez (Extremadura).
- Clara Serra Juhe (Cataluña).

Tercer puesto

Equipo n.° 7 (AMARILLO)

- Elia Ruiz Sandoval (Andalucía).
- Pelayo Cantera Tolivia (Asturias).
- Irmina Gonzalbo Ejarque (Valencia).
- Carlos Sanz Bescos (Aragón).
- David Agra Martínez (Cataluña)

2.ª PRUEBA POR EQUIPOS
¡PRUEBA MATEMÁGICA!

Primer puesto

Equipo n.°2 (ROSA)

- José Luis Callejón Calvente (Andalucía).
- Verónica González Romero (Cantabria).
- Patricia Gilabert Sanz (Valencia).
- Javier Continente García (Albacete).
- Narciso Sánchez Marcos (Andorra).

Segundo puesto

Equipo n.° 10 (BLANCO)

- Jacinto García Martínez (Melilla)
- Noemí Esteras Gallego (Castilla-León).
- Vanessa Gómez Pérez (Madrid).
- Francisco Viñas Pérez (Canarias).
- Aleix Bondía Sedo (Cataluña)

Tercer puesto

Equipo n.° 1 (NARANJA)

- Juan Botias Agea (Andalucía).
- Cristina Fernández Ibáñez (Cantabria).
- Ángel Ramón Torrado Pérez (Madrid).
- Fernando Sánchez Rodríguez (Extremadura).
- Clara Serra Juhe (Cataluña).

Pleguezuelos y Manuel Toquero Molina.

Debo mencionar también la inestimable y cariñosa colaboración de Rafael Pérez Gómez que además de impartir una charla maravillosa a las chicas y chicos, nos ayudó hasta lo indecible para que todo cuanto se le pidió desde Almería se hiciese realidad; y de Ceferino Ruiz que dio sugerencias y buscó datos interesantísimos para poder llegar a diseñar el poliedro que reflejaba el programa.

Por último debemos mencionar al grupo de coordinadoras y coordinadores de la Olimpiada Matemática Thales de Andalucía que ha colaborado con el equipo organizador de Almería aportando ideas, ayudando en el diseño de las pruebas, acudiendo a reuniones en Carboneras, etc., durante estos dos años: Cristóbal Macías Gil (Coordinador Regional de la Olimpiada Matemática Thales), Francisco Anillo Ramos, Luis Berenguer Cruz, Esther González Ramos, Pilar Rodríguez Peña, José María Sánchez Molina, José Vázquez García y Salvador Guerrero Hidalgo.

Y cómo no, a toda la Junta Directiva Regional de la SAEM Thales de Andalucía que también aportó ánimos, ideas y todo cuanto fue necesario. Menciono especialmente a Sixto Romero por su inestimable e inapreciable apoyo.

En total más de 50 personas trabajando durante dos años para un único objetivo: «que esto saliera lo mejor posible».

Participantes

Participaron 46 chicas y chicos de 2.° de ESO procedentes de Albacete (2), Andalucía (9), Andorra (2), Aragón (3), Asturias (3), Canarias (3), Cantabria (3), Castilla-León (3), Cataluña (3), Extremadura (3), Madrid (3), Melilla (1), Murcia (2), Navarra (3) y Valencia (3). Iban acompañados de 17 profesoras y profesores.

Las pruebas

Se efectuaron tres pruebas, dos por equipos y una individual, aparte de la prueba de fotografía matemática que no contaba para la regularidad.

Todos los participantes en Calar Alto

Participaron 46 chicas y chicos de 2.° de ESO

La primera prueba por equipos se desarrolló el lunes 22 de junio, cada equipo llevaba un color identificativo y debía compaginar la orientación con la resolución de problemas dentro de la Central Térmica de ENDESA.

El miércoles 23 se desarrolló la prueba individual que consistió en la resolución de 3 problemas escritos más uno sobre Geometría Imaginativa. Después de la prueba se desarrolló un encuentro-debate sobre la misma al que asistieron todos los participantes en la Olimpiada. Es digno de ver el vídeo que se grabó de dicho encuentro por lo interesante de las intervenciones de las chicas y chicos.

Prueba individual

El jueves 24 se hizo la prueba por equipos en el Parque de las Ciencias de Granada. Fue una prueba en la que había que manipular materiales didácticos, papel, tijeras, pentominós, fichas, tangram, etc.

El lunes 21 se repartieron cámaras entre los equipos para fotografiar motivos que estuviesen relacionados con el lema de la Olimpiada «Mar y Matemáticas», cada equipo escogió las tres mejores y la peor, se expusieron y se hizo una votación de la que salieron las tres mejores y la peor.

Las actividades

Aunque hubo alguna que no se pudo hacer (observación astronómica, paseo en barco por el Cabo de Gata...); sí pudieron desarrollarse la mayoría.

1. *Visitas didácticas*

- Central térmica de ENDESA en Carboneras.
- Fábrica de cemento de HISALBA en Carboneras.
- Central Solar experimental de Tabernas.
- Observatorio Astronómico de Calar Alto.
- Visita Artístico-Matemática a la Alhambra de Granada.
- Parque de las Ciencias de Granada.
- Parque Natural Marítimo Terrestre de Cabo de Gata-Níjar.
- Centro de Interpretación de la naturaleza del Cabo de Gata.
- Fábrica de antibióticos de DSM DERETIL en Villaricos.
- Exposiciones de la 9.ª OMN (Las menciono más tarde)

2. *Actividades lúdico-recreativas*

- Playa y piscina en el Hotel.
- Canal de comunicación con Internet en el Hotel.
- Salón de juegos didáctico-matemáticos en el Hotel.
- Visita turística a Carboneras.
- Visita al poblado del Oeste en Tabernas.
- Partido de fútbol alumnos-profes.
- Proyección de películas y vídeos con contenido matemático en los viajes.
- Seguimiento de la Olimpiada por Internet.
- Discoteca.

3. *Otras actividades*

- Recepción en el Ayuntamiento de Carboneras.
- Partida simultánea de Ajedrez con el campeón de España D. Alfonso Romero.
- Reunión Nacional de coordinadores
- Charla del Profesor D. Rafael Pérez Gómez en el Parque de las Ciencias de Granada.
- Exposición de los trabajos presentados a la prueba de Fotografía Matemática.
- Entrega de premios percha a los coordinadores.
- Acto de Homenaje al profesor D. Gonzalo Sánchez Vázquez.
- Entrega de obsequios y acto de clausura.

Con motivo de la Fase Final se han llevado a cabo antes de la misma una serie de actividades culturales, una de las cuales consistió en el montaje de cuatro exposiciones: Fotografía y Matemáticas, Instrumentos de medidas tradicionales, Mujer y Matemáticas, y Mar y Matemáticas.

4. *Vídeo y Fotografía*

Se ha encargado a un equipo profesional la realización de un reportaje de vídeo y fotográfico. Se va a entregar a cada participante y a los patrocinadores un CDROM con más de 400 fotografías digitalizadas; asimismo a cada sociedad y a la Federación se entregará un reportaje en vídeo de 30 minutos de duración. Además, se editará un vídeo-clip de corta duración, 4 o 5 minutos, sobre la OMN.

5. *Página web de la Olimpiada*

Desde enero de 1998 ha estado actualizándose una página web a través de la cual se ha podido hacer un seguimiento por INTERNET de esta actividad, en ella podrás encontrar toda la información que se precise sobre esta 9.ª OMN, esta es la dirección:

www.arrakis.es/~fvillegas/

IXOlimpiada.htm

6. *Exposiciones*

Con motivo de la Fase Final se han llevado a cabo antes de la misma una serie de actividades culturales, una de las cuales consistió en el montaje de cuatro exposiciones:

- Fotografía y Matemáticas.
- Instrumentos de medidas tradicionales.
- Mujer y Matemáticas.
- Mar y Matemáticas.

Las exposiciones estuvieron abiertas al público en general por las tardes desde el 18 de mayo al 19 de junio en las instalaciones del que será el nuevo Ayuntamiento de Carboneras, y por las mañanas se abrió a colegios para explotar sus múltiples aplicaciones didácticas.

7. *El rincón de Thales-Tai*

Desde el primer momento cuidamos el tema de los medios de comunicación creando un gabinete de prensa. Esta 9.ª OMN ha estado en prensa, radio y TV desde un año antes de la Olimpiada y hasta meses después de acabada la misma. Pero queremos destacar que durante toda la semana que duró la

Olimpiada se publicó al menos una página completa en la que, además de la información pertinente sobre las actividades desarrolladas el día anterior, aparecía una sección de divulgación popular de las matemáticas en la que se proponían acertijos cuya solución aparecía al día siguiente. El éxito de dicho rincón fue manifiesto; en el próximo número de SUMA se publicarán algunos junto con las pruebas de la Olimpiada.

Infinito elevado a infinito

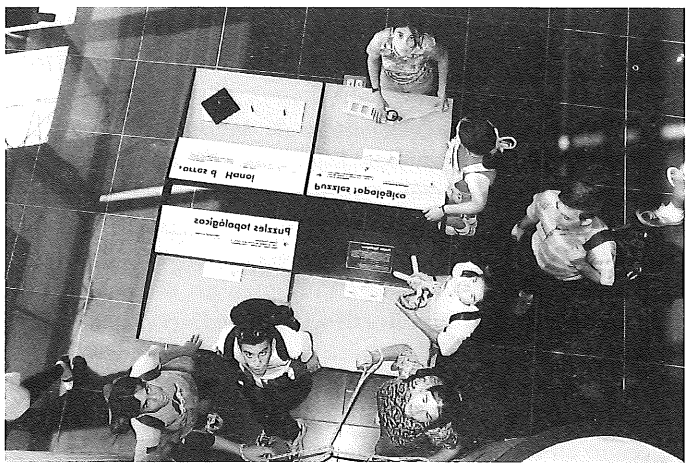
Todos han sido ganadores en esta Olimpiada Matemática, todos han recibido su diploma de participación, todos (sin distinción) han recibido montones de obsequios y todos han ganado el poder haber tenido la ocasión de estar aquí, y eso todo el mundo lo entendió, aunque suene algo duro de oír en una sociedad como la nuestra en la que continuamente se potencia la competitividad y el individualismo. Y todo el mundo se dio cuenta también de lo significativo que ha sido el hecho de que las empresas y entidades patrocinadoras hayan apostado fuerte y decididamente por una actividad cultural minoritaria; y, cómo no, del seguimiento que desde los medios de comunicación se ha hecho a diario de esta 9.ª OMN, dando a conocer a mucha gente una idea que comparten muchos miles de profesoras y profesores de toda España, y que propició y defendió siempre nuestro homenajeado profesor D. Gonzalo Sánchez Vázquez.

Pruebas por equipos

Cuando el último día nos despedíamos, nos abrazábamos y nos besábamos, muchos con lágrimas en los ojos, inmediatamente se nos olvidaron los fallos, los errores, las fatigas, el cansancio, el enorme esfuerzo que ha supuesto organizar todo esto, y con la mirada clavada en el horizonte que flotaba sobre el mar infinito que teníamos delante pensábamos en silencio que había merecido la pena.

Pedro José Martínez Fernández

Coordinador Nacional (∞^{∞}TESM)



III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (III CIBEM)

El CIBEM, congreso de periodicidad cuatrienal, es máximo referente para la comunidad Iberoamericana en cuanto a lo que a la Educación Matemática se refiere. Recientemente en la ciudad de Caracas (Venezuela), durante los días 26 al 31 de Julio de 1998, se celebró la tercera edición del CIBEM. Organizado por la ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática) y el Comité Interamericano de Educación Matemática, fue coordinado por los profesores Cipriano Cruz y Walter Beyer de la Universidad Central de Venezuela (UCV). La UCV es la Universidad más antigua del país. Cuenta con más de 275 años y desde la década de los cincuenta está instalada en la Ciudad Universitaria de Caracas. El recinto fue diseñado por el arquitecto Carlos Raúl Villanueva, quien impregnó arte a cada uno de sus espacios. En este bello lugar, en el que además sorprende la exhuberante vegetación, se desarrollaron las actividades del III CIBEM. Asistieron unos seiscientos profesores procedentes de Portugal, España y el resto de países de Iberoamérica. La solemne sesión de apertura se celebró en un impresionante y bello salón de actos de la Universidad con cabida para 2.500 personas y fue presidida por las autoridades académicas de la U. Central de Venezuela; en ella se rindió homenaje a título póstumo a D. Gonzálo Sánchez Vázquez, que fue presidente honorario de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y que había impulsado la organización del I CIBEM (Sevilla/España 1990) asistiendo también al II CIBEM (Blumenau/Brasil 1994) donde ya se le rindió homenaje. Recogió el Diploma acreditativo el Presidente actual de la FESPM que se encontraba representando a España en la mesa de presidencia. El programa científico del III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática se estructuró en torno a las siguientes actividades: 5 Conferencias Centrales, 4 Paneles de Expertos, 7 Grupos de Trabajo, 24 Conferencias Paralelas, 16 Carteles y 185 Comunicaciones Breves.

...en ella se rindió homenaje a título póstumo a D. Gonzálo Sánchez Vázquez, que fue presidente honorario de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) y que había impulsado la organización del I CIBEM (Sevilla/España 1990).

Conferencias Centrales

Se celebraron en el magnífico Salón de Actos y tuvieron una hora de duración y fueron dictadas por renombrados especialistas en Educación Matemática de Iberoamérica seleccionados por el Comité Científico. La conferencia de inauguración corrió a cargo del Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), D. Ricardo Luengo, teniendo por título «Una panorámica sobre la Educación Matemática en España». Su intervención se inició tomando el Sistema Educativo Español como marco de referencia, a continuación se centró en temas tan importantes como la propia enseñanza de la matemática en los distintos niveles educativos (Primaria, Secundaria y Universidad) y la formación inicial y permanente de los profesores de Matemáticas. Se hizo especial mención del papel que juegan las organizaciones autónomas de base (como son los grupos de trabajo/renovación, las sociedades de profesores y la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas –FESPM–). No faltó la alusión a las variadas actividades que se llevan a acabo por el colectivo de educadores matemáticos en España (reuniones, jornadas y congresos, visitas e intercambios). Tras aludir a la investigación en Educación Matemática y las publicaciones sobre la enseñanza de las Matemáticas se apuntó la similitud de los problemas que se detectan en casi todos los países iberoamericanos. Terminó la exposición con algunos retos que se presentan a la Comunidad de Educación Matemática Iberoamericana, señalando que hay un camino delante y podemos recorrelo juntos, y apostando por la mutua colaboración como la mejor manera de resolver los problemas planteados; en este sentido propuso crear una Federación Iberoamericana de Sociedades con horizonte en el año 2000.

Las cuatro conferencias centrales fueron:

- «Modelagem Matemática e suas Implicações no Ensino» a cargo de la profesora brasileña María Salett Biembengut.
- «Principios Constructivistas para la Educación Matemática» a cargo de la profesora Guillermina Waldegg (México).
- «La investigación sobre el conocimiento práctico del profesor de matemática» a cargo del Profesor Julio Mosquera (Venezuela).
- «Filosofia da Matemática/ Sociologia da Matemática e Educação Matemática» a cargo del Profesor José Manuel Matos (Portugal).

Todas las ideas de las cuatro conferencias fueron interesantes y muy comentadas en los «corrillos». Especialmente se comentaba la idea de «modelaje», expuesto por la profesora María Salett, entendida como una estrategia para enseñar y aprender Matemática y cómo la Matemática está en todo pero el problema es «sacar» la Matemática de las cosas. Gustó también su comparación del modelaje matemático con la obra de un escultor donde la creatividad y la intuición juegan un papel importante. Fueron comentadas también las ideas de la Dra. Guillermina Waldegg no tanto en cuanto a su exposición sobre el constructivismo como teoría epistemológica, sino en cuanto a las consecuencias de su utilización sobre el aula de Matemática, los alumnos, el docente, la evaluación, textos, materiales y la propia formación de los profesores. Tuvo mucha aceptación, por su energía, énfasis y convencimiento la exposición del profesor Julio Mosquera en un tema de tanta actualidad como el que se refiere al conocimiento práctico del profesor de matemática. Se comentó la especial dificultad que presentan, para el educador matemático, los temas de Filosofía y Sociología de la Matemática expuestos por el Profesor José Manuel Matos, aunque se reconocía su importancia y la necesidad de su estudio.

Paneles de Expertos

Cada panel contó con varios expertos y la discusión fue dirigida por un moderador. Tuvieron una duración total de dos horas, en dos días consecutivos, una hora por día. El primer día cada experto dispuso de 15 minutos para hacer su planteamiento sobre el tema del panel. Al finalizar la sesión los asistentes formularon preguntas por escrito y las entregaron a los expertos, y el segundo día los expertos respondieron a las preguntas del primer día. Los cuatro paneles fueron:

PE1. Etnomatemática versus Matemática Crítica.

PE2. La Formación de Docentes.

PE3. La Enseñanza del Cálculo.

PE4. Los Estándares e Iberoamérica ¿Son necesarios unos estándares iberoamericanos?

La conferencia de inauguración corrió a cargo del Presidente de la FESPM, Ricardo Luengo, teniendo por título «Una panorámica sobre la Educación Matemática en España».

Grupos de Trabajo

Los Grupos de Trabajo (GT) fueron propuestos por un investigador o grupo de investigación interesado en un tema en particular. Cada grupo estaba integrado por: un coordinador, un organizador local, un grupo de ponentes y por congresistas que manifestaron su deseo de pertenecer al grupo. Se reunieron durante cuatro sesiones de dos horas cada una y elaboraron unas conclusiones del grupo que fueron leídas el último día y formarán parte de las actas del congreso. Los 7 grupos fueron:

GT-01. A História da Educação Matemática na América Latina, coordinado por Maria Ângela Miorim.

GT-02 Etnomatemática, coordinado por Samuel E. López Bello.

GT-03 Formación del Profesor de Matemática para la Enseñanza Media, coordinado por Hernán E. González Guajardo.

GT-04 Educación Estadística, coordinado por Audy Salcedo.

GT-05 La Educación Matemática como Campo Profesional de Producción del Saber, coordinado por Fredy E. González.

GT-06 Resolución de Problemas y Análisis de Juegos, coordinado por Cecilia Tirapegui.

GT-07 La Comunicación en el Aula, coordinado por Dora Inés Calderón y Olga Lucía León.

Conferencias Paralelas

En el III CIBEM se celebraron tres jornadas de Conferencias Paralelas (CP), a razón de ocho por día. Abarcaron una amplia gama de temas y reunieron a especialistas de Educación Matemática de toda Iberoamérica. El conferenciante disponía de cuarenta y cinco minutos, seguida de un derecho de palabra de quince minutos. Las preguntas se formulaban por escrito y se entregaban al conferenciante por el personal de apoyo logístico. Las conferencias paralelas (por orden alfabético de conferenciantes) fueron:

- Alson, Pedro: «La inmersión de un conjunto de objetos en un campo de significantes: el caso de las gráficas de R en R».
- Andonegui, Martín: «Algunas consideraciones sobre los sistemas de representación en matemática».
- Beyer, Walter: «La interacción comunicativa en el aula de matemática y su relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje».
- Bonomi Barufi, Maria Cristina: «A construção do significado no cálculo».

- Cruz, Cipriano: «Paradigmas de investigación y Educación Matemática».
- Dos Santos Dos Santos, José Manuel: «Experimentalidade na matemática: Uma abordagem».
- Gaulin, Claude: «Los grafos: un tema descuidado en la enseñanza de la matemática a nivel escolar».
- Gómez, Pedro: «Investigación en Educación Matemática».
- González, Fredy: «Metacognición y tareas intelectuales exigentes».
- González, Fredy: «Historia de la Educación Matemática en Venezuela: Apuntes para su reconstrucción histórica».
- Macedo Santos, Vinicio de: «Parâmetros e referencias curriculares de matemática no Brasil».
- Mancera Martínez, Eduardo: «Errores y horrores matemáticos».
- Matos, José Manuel: «Aprendizagem da Matemática».
- Mosquera, Julio: «Una Didáctica de las Matemáticas para Iberoamérica».
- Orellana, M.; R. Bervíns y otros: «Modificación del plan de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Centro Occidental "Lisandro Alvarado"».
- Oteyza, Elena de: «Álgebra: Resolución de problemas y mecanización con ayuda de la computadora».
- Páez, Lelis: «Etnomatemática amerindia ¿Otra clase de abstracción numérica?».
- Parra, Hugo: «La cultura matemática en el aula».
- Pita, Claudio: «El cálculo vectorial: una antesala de la geometría diferencial. Estudio de las curvas paralelas».
- Poblete Alvaro y Díaz, M. V.: «Categorías en la resolución de problemas matemáticos».
- Salett, Maria: «Uma proposta de qualidade para o ensino».
- Scott, Patrick: «La contrarreforma en la Educación Matemática».
- Vasco, Carlos E.: «El archipélago angular».
- Waldegg, Guillermina: «La incorporación de los números racionales al dominio numérico. Análisis histórico-epistemológico».

Carteles

Se presentaron en un área anexa a la de la exposición comercial y trataban de mostrar, por parte del autor, una experiencia o un tema de actualidad en Educación Matemática, mediante un poster de 1,5 m por 1 m. Los posters trataron diversos temas como: Proyectos de Perfeccionamiento y capacitación de docentes en Matemática; propuestas metodológicas inovadoras, materiales y recursos para la enseñanza de la Matemática (mosaicos, uso de calculadora grafica, fotografía matemática, historia de la Matemática etc.); investigación en Educación Matemática; Matemática recreativa; Etnomatemática y otros temas relativos a la enseñanza del infinito e infinitudes, de la estadística, etc.

[Las Comunicaciones Breves] mostraron en su conjunto el trabajo de un gran número de especialistas de Educación Matemática de toda Iberoamérica y se estructuraron en torno a 21 áreas temáticas.

Comunicaciones Breves

Se desarrollaron durante tres jornadas, a razón de alrededor de sesenta por día, distribuidas en sesiones de tres por aula; tuvieron una duración de veinte minutos, seguida de un derecho de palabra de diez minutos. Las preguntas se formularon por escrito y se entregaban al ponente por el personal de apoyo logístico. Mostraron en su conjunto el trabajo de un gran número de especialistas de Educación Matemática de toda Iberoamérica y se estructuraron en torno a 21 áreas temáticas:

1. Actividades Extracurriculares en Matemática.
2. Cambios Curriculares en la Enseñanza Primaria.
3. Cambios Curriculares en la Enseñanza Secundaria.
4. Cambios Curriculares en la Enseñanza Universitaria.
5. Comunicación en el Aula.
6. Educación Matemática como Campo Profesional de Producción del Saber.
7. Elaboración de Materiales Instruccionales.
8. Enseñanza de la Aritmética.
9. Enseñanza de la Estadística.
10. Enseñanza de la Geometría.
11. Enseñanza de la Probabilidad.
12. Enseñanza del Álgebra.
13. Enseñanza Matemática en la Universidad.

14. Etnomatemática.
15. Evaluación en Matemáticas.
16. Formación de Docentes.
17. Historia y Educación Matemática.
18. Modelación Matemática y Aplicaciones.
19. Psicología y Educación Matemática.
20. Resolución de Problemas.
21. Tecnología y Enseñanza de la Matemática.

Los temas de más interés, tomando como criterio el número de comunicaciones y conferencias regulares referentes a éstos fueron sin duda las áreas temáticas: 21. Tecnología y Enseñanza de la Matemática (32); 16. Formación de Docentes (29); 13. Enseñanza Matemática en la Universidad (21); y 20. Resolución de Problemas (16). Las que menor número de aportaciones recibieron fueron: 1. Actividades Extracurriculares en Matemática (3); 2. Cambios Curriculares en la Enseñanza Primaria (3); 4. Cambios Curriculares en la Enseñanza Universitaria (3); y 18. Modelación Matemática y Aplicaciones (3).

Otras actividades

Exposiciones

Durante el horario del III CIBEM se pudieron visitar las exposiciones instaladas al efecto paralelamente a las actividades. Hubo exposiciones comerciales de editoriales y distribuidoras venezolanas de textos, software educativos y demás materiales y recursos relacionados con la Educación Matemática. En el mismo lugar (cercano al Aula Magna) se instalaron también las exposiciones (no comerciales) de las Asociaciones de Educación Matemática de Iberoamérica; entre ellas se encontraba el stand de la Sociedad Andaluza Thales en la que se mostraban las publicaciones españolas de la Federación y de la propia Thales, que contó con gran número de visitantes.

Reuniones diversas

En el horario se dejaron dos horas destinadas a presentaciones de Proyectos y a reuniones de asociaciones profesionales. Merece destacar la presentación del Proyecto PROVEDEM (Programa Venezolano de Doctorado en Educación Matemática) a cargo del profesor Fredy González. Y en cuanto a reuniones la de la asociación ASOVEMAT (Asociación Venezolana de Educación Matemática) y la reunión preparatoria del primer encuentro de profesores de Matemática en Economía.

La propuesta de crear una Federación Iberoamericana de Sociedades con horizonte en el año 2000.

Reunión de la Comisión Coordinadora de los CIBEM

Fue continuación de la celebrada en el II CIBEM de Blumenau. En ella se había acordado nombrar una Comisión Internacional para coordinar los congresos iberoamericanos y mantener relación en los cuatro años que median entre los congresos CIBEM; la comisión estaba formada por Brasil, República Dominicana, Portugal, España y el país organizador del siguiente CIBEM (que finalmente fue Venezuela). La comisión dio cuenta de la labor realizada, valorada muy positivamente por todos y a continuación se trataron dos temas: a) La celebración del siguiente IV CIBEM y b) La propuesta de crear una Federación Iberoamericana de Sociedades con horizonte en el año 2000. Los acuerdos a los que se llegaron, tras larga discusión fueron:

1. Mantener la Comisión Internacional, que quedó compuesta por: Cipriano Cruz (Venezuela), Ricardo Luengo (España), Eduardo Mancera (Méjico), María Salett (Brasil), Hernán González (Chile) y Alicia Villar (Uruguay).
2. Fijar la fecha del IV CIBEM para el año 2002.
3. Encargar a la comisión tanto el estudio de la propuesta de la creación de la Federación Iberoamericana de Sociedades, como recibir y decidir (previa consulta a las distintas Sociedades) sobre el lugar de celebración y sociedad organizadora del IV CIBEM. En principio, en la propia reunión ya se presentaron dos candidaturas para el año 2002 (Salta/Argentina y Bolivia) y además Portugal se ofreció para organizar el V CIBEM en el año 2006.

Anuncios de otros eventos

Durante el III CIBEM se anunciaron también los siguientes eventos:

- III Taller Internacional sobre la enseñanza de la Matemática para Ingeniería y Arquitectura. La Habana (Cuba) del 23 al 27 de Noviembre de 1998.
- RELME-13 (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa) en la República Dominicana, Julio de 1999.
- X CIEAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática) en Periapolis, Maldonado, Uruguay, Julio-Agosto de 1999.
- V Reunión Didáctica del Cono Sur. Santiago de Chile, Enero del 2000.

Actividades culturales y paralelas

Como es habitual en un congreso de tan amplia duración (toda una semana), se hizo un día de descanso en el que los CIBEM-gresistas (término acuñado por Fredy González /participantes del CIBEM) pudieron disfrutar de las maravillosas playas y aguas transparentes del Caribe, pero sobre todo en la que se pudo disfrutar de la hospitalidad de los venezolanos y de la amistad y charla amena de los compañeros iberoamericanos con los que nos unen tantas cosas, pero sobre todo la misma lengua.

Al final de cada jornada de trabajo se celebró cada día un acto cultural. De los seis actos realizados cinco eran de grupos propios de la Universidad lo que da una idea del movimiento cultural de la UCV. La calidad de los mismos fue sorprendente y muy variada y fue valorada muy positivamente por los asistentes. Grupos vocales, estudiantinas, corales, orquesta típica y el último día el espectáculo «La poesía Latinoamericana hecha canción» hicieron las delicias de los asistentes.

En conclusión, el III CIBEM mereció la pena, estuvo bien organizado, con un programa científico muy digno en el que se renovaron algunas figuras habituales en todos los congresos internacionales, y en el que se constata la consolidación del movimiento de profesores Iberoamericanos de Educación Matemática, iniciada en Sevilla y Blumenau, con la continuidad asegurada del mismo para las dos siguientes ediciones en uno y otro lado del Atlántico.

Ricardo Luengo

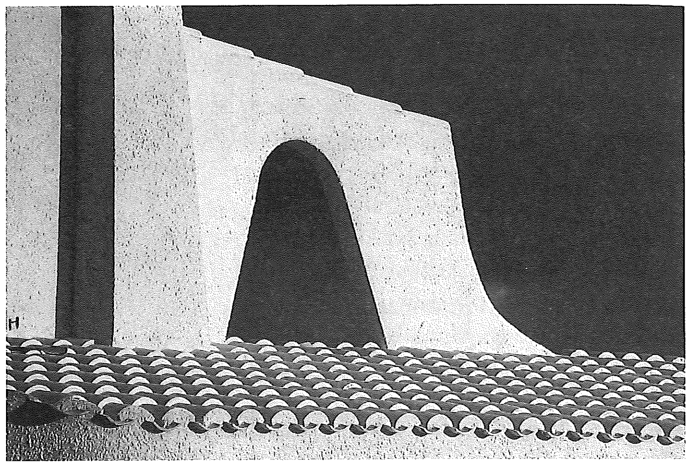
Presidente de la FESPM

39 OLimpiada Internacional de Matemáticas

Se ha celebrado recientemente la 39 Olimpiada Internacional de Matemáticas, para estudiantes de 17-18 años, con la siguiente participación española:

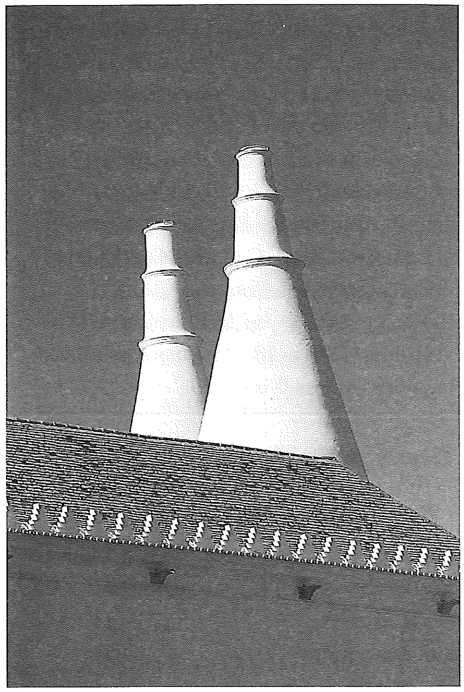
- Mario Andrés Montes García.
- Ramón José Aliagas Varea.
- David Martín Clavo.
- María Pe Pereira.
- Beatriz Sanz Merino.
- Jaime Vinuesa del Río.

Mario Andrés Montes recibió Mención y Jaime Vinuesa, fue Medalla de Bronce.

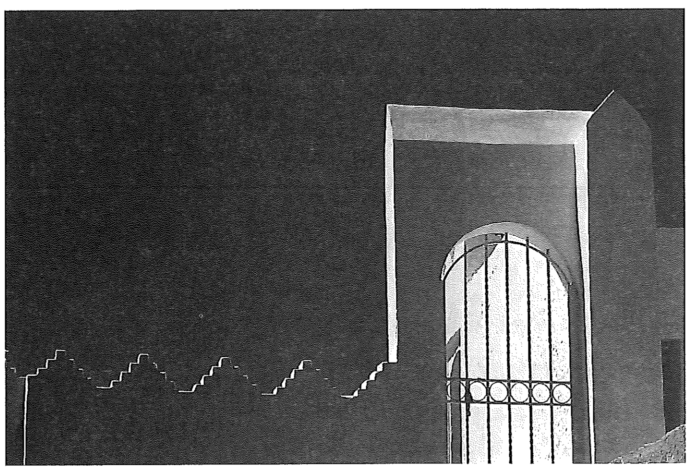


Menorca

Sintra



Fotos: Pilar Moreno



Marruecos

SUMA 29
noviembre 1998

IX JAEM, CIEAEM 51 y X CIAEM

CONVOCATORIAS

IX JORNADAS de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) convoca para los días 9, 10 y 11 de septiembre de 1999 las IX JAEM que serán organizadas por la Asociación de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA) y se celebrarán en Lugo.

En estas jornadas se presentarán ponencias y comunicaciones sobre una serie de mesas temáticas además de otras actividades como exposiciones, conferencias plenarias, talleres, pósters, presentación de conclusiones de seminarios de la Federación y excursiones.

Avance de programa

Lugar de celebración: Facultad de Veterinaria. Campus de Lugo, Universidade de Santiago de Compostela.

Estructura general:

- Conferencias plenarias.
- Conferencias en las mesas temáticas.
- Comunicaciones de los participantes.
- Paneles.
- Talleres.
- Exposiciones.
- Excursiones.

Mesas temáticas:

- Tecnologías en la Enseñanza de la Matemática. Calculadoras gráficas y ordenadores.
- La enseñanza de la estadística: un reto pendiente.

- Talleres y optativas de Matemáticas.
- Matemáticas en la vida real y en relación con otras materias escolares.
- Del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.
- Bases del aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil y primaria.
- Enseñanza de las matemáticas en la universidad.
- Formación del profesorado de Matemáticas.
- Matemáticas en la ESO y el Bachillerato.
- Matemáticas recreativas.

Plazos para la presentación de trabajos y resúmenes: 15 de abril de 1999.

Información y recepción de documentos:

Manuel Díaz Regueiro
IX JAEM-LUGO
Cefocop de Lugo
Apdo 595 LUGO

Consultas vía e-mail:

cflugo@teleline.es (indicando Asunto: IX JAEM).

Información actualizada de las IX JAEM: Puede consultarse en la página:

http://www.cesga.es/cefocop-lugo/jaem.

IX JAEM
Lugo
Septiembre 1999

Organiza:
ENCIGA

Convoca:
FESPM

Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza de las Matemáticas (CIEAEM 51)

Se celebrará en Chichester (Inglaterra), del 21 al 26 de julio de 1999, con el lema «La diversidad cultural en relación con la enseñanza de las Matemáticas».

El objeto de este 51.° encuentro de la CIEAEM es enriquecer y mejorar la enseñanza de las Matemáticas compartiendo experiencias, interpretaciones y perspectivas que provienen de culturas y de puntos de vista pedagógicos diferentes.

El Congreso abordará, en las conferencias, ponencias y grupos de trabajo, los siguientes sub-temas:

- Panorama histórico: contribución de las diferentes culturas a la evolución del pensamiento matemático.
- La cooperación entre los enseñantes de Matemáticas y las personas que utilizan las Matemáticas.
- ¿Cómo actuar ante la variedad de intereses, niveles, aptitudes, procedencia social y cultural de nuestro alumnado?
- El conocimiento de las Matemáticas en diferentes sectores escolares.
- Valores, actitudes y técnicas en la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Para más información y/o recibir sucesivos anuncios, dirigirse a:

Nicola St Clair
The Mathematics Centre
Chichester Institute of Higher Education
Upper Bognor Road
Bognor Regis
West Sussex, PO21 1HR
Reino Unido
Mail: maths@chihe.ac.uk

X Conferencia Interamericana de Educación Matemática (X CIAEM)

Con el título «Educación matemática para un mundo mejor» y auspiciada por la Sociedad de Educación Matemática del Uruguay se celebrará la X CIAEM en los meses de julio-agosto de 1999 (las fechas no estás fijadas exactamente) en la ciudad de Piriápolis (departamento de Maldonado –Uruguay–). Los temas previstos inicialmente son:

- Formación de docentes en todos los niveles.
- Metodologías: Módulos didácticos, Resolución de problemas, Juegos, etc.
- Etnomatemática.
- Relaciones con otras disciplinas: Arte, Historia, Geografía, etc.
- Enseñanza de la Geometría.
- Enseñanza de la Aritmética.
- Enseñanza del Álgebra, Cálculo, Topología.
- Uso de las calculadoras y Computadoras como herramienta para mejorar la Educación Matemática.
- Didáctica de Matemática en distintos niveles.
- Hacer que a los estudiantes les guste Matemáticas como parte de la Cultura.

Para más información dirigirse a:

Prof. Alicia Villar
Coordinadora General del X CIAEM
Instituto de Profesores «Artigas» (I.P.A.)
Avda. Rivera 5760 C.P. 11400
Montevideo
Uruguay
Telefax: (598-2) 6001275

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)

☐ N.os sueltos: ______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM