SUMA 29
noviembre 1998, pp. 107-116

La derivada y la integral a través del desarrollo sostenible

Rosario Nomdedeu Moreno

INFORME

El presente artículo pretende aportar una muestra de actividades realizadas en una clase de tercero de BUP, en las que la diversidad ha sido utilizada como un tesoro más que como un obstáculo, pues de la diversidad de deseos, intereses, ritmos y estilos cognitivos han surgido la multiplicidad de propuestas que luego los atractores han unificado permitiendo la integración de trabajos, diversos por su procedencia o por los distintos enfoques dados en cada momento.

Sus deseos

Entiendo que una clase es como Igrámul, el monstruo fantástico de la *Historia Interminable* de Michel Ende. Sus deseos, los de todas las personas de la clase, configurarán el trayecto a seguir.

Por eso comencé indagando cuáles eran esos deseos, tras haber consultado conmigo misma los míos, tarea nada fácil. Una explicación más detallada de cómo lo hice aparece en mi artículo «Al pentágono desde el deseo», publicado en el n.° 16 de la revista *UNO*.

Mi paradigma

Mi deseo nace de mi posición, desde donde estoy, desde mi aquí y ahora, donde resuenan continuamente las palabras de Victoria Camps, Begoña Sala, Evelyn Fox Keller, Alan Bishop y Paco Hernán, entre otras.

He tomado un valor en cada una de las propuestas de los autores y autoras arriba citados con la intención de seguir una recomendación, hallada tiempo atrás en un manual de psicopedagogía, que considero de total actualidad:

Los valores son categorías generales dotadas también de componentes cognoscitivos, afectivos y de elementos capaces de predisponer una determinada conducta, difiriendo de las actitudes por su generalidad. Unos pocos valores pueden encerrar una infinidad de actitudes... su generalidad y reducido número le ofrecería al psicólogo mayores facilidades de estudio que las actitudes que además de su especificidad son innumerables.

Sobre todo si la filtramos a través del prisma que nos ofrece Begoña Sala (1994). Parece ser que esta autora considera que unos pocos valores, los valores nucleares, no sólo ofrecen mayores facilidades a profesionales de la psicología sino también a profesionales de la educación.

Esos pocos valores que pueden ayudarme a trabajar una infinidad de actitudes, son para mí:

- El *Respeto Activo*, que aparece como valor fundamental en la ética del cuidado, defendida por Victoria Camps, y que tras algunas experiencias en el aula y en el claustro, ha quedado consensuado en nuestro centro.
- La *Autoestima*, que se perfila como asignatura pendiente en la coeducación y como capacidad mejorable y que mejora el aprendizaje de las matemáticas.
- La *Autoridad Circulante*, que no se instala definitivamente en nadie pero puede habitarnos a todos en algún momento, en esos momentos en que la otra persona te reconoce voluntariamente la autoridad, es una nueva forma de ver la autoridad. Por no residir definitivamente en ninguna persona, evita la confusión habitual entre autoridad y poder y disuelve el miedo a que nuestra identidad se vea socavada como consecuencia del sometimiento a la autoridad jerárquica típica en nuestra sociedad. También facilita el trabajo de la autonomía de las criaturas en el aula, pues desmonta la pasividad que nace de su dependencia de la autoridad establecida: la profesora o el profesor.
- La *Trasparencia* tal como la entiende Alan Bishop, es decir desveladora de misterios, de razones ocultas, de saberes iniciáticos, redistribuidora del poder que confiere el entendimiento, la comprensión, la posesión de información verdadera.
- El *Asombro*, que, como dice Paco Hernán, es el antídoto del aburrimiento que paraliza la actividad en el aula. Para crear situaciones con capacidad de asombrar, de maravillar o, al menos, de evitar el aburrimiento, se hace necesario disponer de un repertorio suficiente de estas situaciones, caracterizadas por uno o varios elementos inductores de esa emoción, el asombro, a los que Paco Hernán llama atractores.

Durante este curso han funcionado como atractores «El pentágono», «La concoespiral», «Las fractales», «El número de oro», «Las transformaciones geométricas» y «La iteración». Y hemos utilizado como recursos para la provocación cuentos, espejos, caracolas, sombras, catálogos de imágenes en la red, programas de matemáticas en el ordenador, calculadoras y diversos materiales domésticos como azucarillos, rollos de papel higiénico, patatas, plátanos, manzanas, cordeles, envases, palillos y materiales escolares convencionales.

Un poco de historia

Aunque una clase no tiene texto, como muy bien dice Paco Hernán en su maravilloso libro *Retrato de una profesión imaginada*, voy a intentar articular uno de los múltiples textos que podrían ser hilvanados con los materiales que las clases de tercero del curso 1997/98 han producido y que cuenta una historia que, por parcial, es imaginaria, aunque está consensuada con las personas que han protagonizado la actividad.

...unos pocos valores, los valores nucleares, no sólo ofrecen mayores facilidades a profesionales de la psicología sino también a profesionales de la educación.

Durante el primer trimestre trabajaron en los tópicos que yo elegí a partir de la formulación de sus deseos: no sé si mi deseo inconsciente de trabajar el pentágono habrá dirigido las tareas hasta revelarlo como centro de gravedad, pero lo cierto es que, a posteriori, aparece claramente como un muy buen atractor, sobre todo para la clase de 3.°C.

La clase se había organizado en 8 grupos:

El grupo 6 inició su trabajo haciendo juegos de «magia» apoyados en el nudo «trivial», siguió con el nudo simple confeccionado en papel y, por lo tanto, entraron ya de lleno en el trabajo sobre el pentágono. Fue espectacular ver sus caras de asombro ante la sencillez con que acababan de obtener el pentágono que tanto se les resistía (el resto de la clase ya llevaba varias sesiones hablando de pentágonos y por eso ellos se sentían incómodos, como fuera de juego).

Los grupos 3 y 7, tras varios intentos de resolver su tarea, durante cuyo transcurso pudieron ensayar y recordar diversas herramientas, exploraron las posibilidades que el programa Fractint les ofrecía. Unos y otros vieron que la ampliación del campo numérico a los complejos y la iteración permitían encontrar soluciones no sólo potentes sino bellas.

Los grupos 4 y 8 tropezaron con el pentágono tras el visionado de la cinta *Donald en el País de las Matemágicas*, donde los unos reconocieron las flores y estrellas de mar con que habían comenzado su tarea y se decantaron por aplazar el trabajo con caracolas que también habían iniciado. Los otros seleccionaron el tángram pentagrámico para seguir jugando, claro que ahora tenían que confeccionarlo a escala y reconocer en las distintas piezas las proporciones anunciadas por Donald.

Los grupos 2 y 5 confluyeron desde sus distintos planteamientos en el trabajo de grafos, polígonos, poliedros y mosaicos, en los que el pentágono se les presentaba como figura limítrofe.

El grupo 1 llegó al pentágono de una manera mucho más forzada, porque los pentágonos que les tenían ocupados no tenían el «atractivo» de la simetría

Algunas muestras de las fichas confeccionadas, se pueden ver en el artículo del pentágono antes mencionado.

A lo largo del segundo trimestre, se recogieron algunos de los deseos que permanecían aparcados, como el del grupo 8 acerca de las caracolas, o la necesidad del grupo 7 de trabajar las transformaciones geométricas para comprender mejor el algoritmo de construcción de un fractal por métodos geométricos. La caracola permitía también integrar los trabajos realizados con nudos, poliedros, polígonos y grafos, así como el análisis de su forma en relación al cono y sus gnomones recuerdan un poco la actividad con tangrams y con rompecabezas espaciales. El propio proceso de aprendizaje al que estábamos sometidas todas las personas en el aula, recordaba a las fractales y las caracolas. De modo que, para amplificar la necesidad de trabajar con estos atractores, comencé el trimestre llevando al aula dos caracolas enormes y maravillosas: una mediterránea, la otra caribeña: ¿Qué tiene que ver el diferente sonido con la forma? ¿Hay alguna resonancia entre el modelo matemático que explica los graves y agudos y la forma de las dos caracolas, una más alargada, la otra más esférica? Luego, tras un ejercicio de relajación, leí el cuento de NANA que aparece publicado en el número de junio de 1998 de *Números* de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas Isaac Newton y procedí, como allí se indica, a recoger las propuestas surgidas de una lluvia de ideas posterior a la audición del cuento.

El trabajo sobre cómo es una caracola nos permitió trabajar con las ecuaciones de gráficas transformadas geométricamente y también sobre las formas más adecuadas de referenciar los puntos de esas gráficas. El trabajo en las distintas ecuaciones cartesianas y en polares ocupó una buena parte del tiempo y algunos de los resultados se pueden ver en el mencionado artículo.

El desarrollo del programa de sostenibilidad que lleva a cabo el centro, nos ha llevado a reflexionar sobre nuestro entorno y los cambios que ha ido sufriendo desde las primeras ocupaciones de este territorio por el ser humano.

El desarrollo del programa de sostenibilidad que lleva a cabo el centro, nos ha llevado a reflexionar sobre nuestro entorno y los cambios que ha ido sufriendo desde las primeras ocupaciones de este territorio por el ser humano. Salvo las últimas semanas que se han dedicado al refuerzo de técnicas de cálculo mediante juegos de contenidos confeccionados por las propias alumnas y alumnos, hemos desarrollado toda la última etapa del curso en este marco del desarrollo sostenible, como puede verse a continuación en los títulos de las fichas:

En las proximidades de Almassora existen dos lugares con elevado valor ecológico y cultural, ambos relacionados con el *riu* Millars, el más importante de la Plana de Castellón. Estos lugares son: «El Torrelló del Boverot» y «Les goles del Millars». En el Torrelló se han encontrado restos de varios asentamientos de población tan antiguos que entre los restos arqueológicos se han hallado piezas de cerámica cardial. El Cardium es abundantísimo en las playas próximas a *les goles* y es fácil imaginar a los antiguos pobladores del Torrelló pescando en el mar, recogiendo conchas en la orilla o amasando roja arcilla en las inmediaciones del poblado, que luego moldearían y decorarían con las conchas recogidas en la playa.

Les encargué la confección de fichas con las que poder ilustrar un paseo por la playa y desde allí al poblado del Torrelló.

El siguiente cuento es un arreglo, hecho por la profesora teniendo en cuenta las sugerencias del alumnado, sobre el escrito de una alumna, Paqui Pérez, en el que se han integrado parte de los trabajos que los distintos grupos han producido y expuesto.

Mi propuesta de tarea	*Tarea y agrupación*
• GRUPO 1: «Velocidad instantánea»	«Lanzamiento del cohete de agua» Sinisa Mukonjic, Jesús Muñoz y Jorge García
• GRUPO 2: «Tangentes a la parábola»	«Cocinas solares» Fernando Domínguez, José Muñoz, Julián Paños y Damián Simón
• GRUPO 3: «La función área y los recursos renovables»	«La pesca» Esther Fuentes, Javier Martínez, Nerea Sánchez y Pamela Tejero
• GRUPO 4: «La función área y los recursos renovables»	«Los incendios forestales» Sandra Moros, Carolina Rodríguez y Alberto Mollá
• GRUPO 5: «Crecimiento autosemejante»	«Conchas y caracolas» Daniel Fernández, Humberto Soler, José Roberto de los Rosales y Francisco García
• GRUPO 6: «Crecimiento autosemejante»	«Matemáticas aplicadas a las conchas» Sanja, Esther, Tania, Lidia y Cristina
• GRUPO 7: «La pendiente»	«El Torrelló» Pablo Vila, Javi Domínguez, Sandra Peña y A. Mallol
• GRUPO 8 «Proyecciones»	«El poblado» Paqui Pérez, Carmen Moreda y Natalia Rodríguez

La vida en el Torrelló

Goleta era una mujer que vivía en el poblado (ver anexo 1), dormía en la habitación mejor conservada actualmente. Junto a ella dormían también sus hijos y sus hijas. Goleta se levantaba al amanecer, como el resto del poblado.

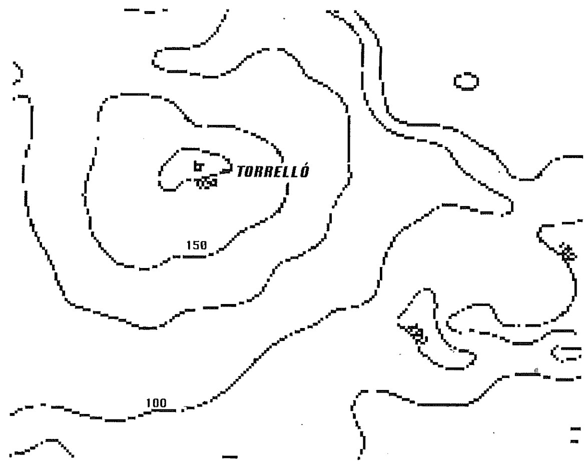


Figura 1

Cuando se asentaron en esa zona (ver anexo 2) (ellos eran la primera generación que había vivido allí), hicieron una división del trabajo; ella eligió hacer recipientes de barro para guardar alimentos. A esta actividad se dedicaba una cuarta parte de la comunidad. Entre ellos había mayor número de hombres que de mujeres.

Cuando veían que el sol (ver anexo 3) estaba en su punto más alto, dejaban esta actividad, a la que se dedicaban solamente por la mañana. Su comida habitual era la caza del día y la pesca (ver anexo 4). También los frutos recolectados y conservados en vasijas (ver anexo 5).

Ese día, después de comer, Goleta y el resto del poblado bajaron (ver anexo 2) al río porque estaban esperando la llegada de la embarcación griega que acostumbraba a visitarles cada tres lunas llenas (ver anexo 3), y la noche anterior la luna era llena por tercera vez desde la última visita de los griegos.

Los griegos iban para intercambiar productos con los habitantes del poblado: estos les daban metales, trigo, aceite y conseguían de los griegos productos de lujo como joyas y finas telas.

En esta ocasión sólo trajeron joyas pues en la última visita les abastecieron de telas para una temporada bastante larga.

Cuando se marcharon los comerciantes extranjeros, los habitantes del Torrelló subieron (ver anexo 2) al poblado. Los niños y niñas corrieron cuesta arriba, cortando en línea recta (ver anexo 2) campo a través, haciendo alarde de la vitalidad de sus jóvenes cuerpos, para repartirse las cuentas de colores y las conchas y caracolas (ver anexo 6) que siempre les traían como obsequio. La gente mayor se repartió las joyas y a Goleta le dieron un collar con piedras muy brillantes. Sus jóvenes hijos e hijas consiguieron brazaletes plateados y turbantes bordados muy coloreados con flores secas.

Tras el reparto, Goleta acudió a la asamblea del poblado para deliberar y planificar las reservas para el invierno que se avecinaba.

Tras la cena comenzó a oscurecer y se fue cada cual a su habitación a dormir. Con el próximo amanecer tenían que levantarse para ir a la próxima playa, río abajo, junto a «les goles», para pescar un poco de pescado para la conserva y recolectar aquellas almejas tan sabrosas con cuya cáscara gustaba de decorar sus vasijas (ver anexo 5). De vuelta a casa recogerían setas en el bosquecillo próximo, que las hambrunas (ver anexo 4) convirtieron más tarde en bancales, hoy abandonados por el declive de la agricultura en la sociedad industrializada de la actualidad.

La necesidad de interpretar las fotos y planos de la excavación del poblado, provocaron el interés por los métodos de representación plana de objetos tridimensionales.

Anexo 1

La necesidad de interpretar las fotos y planos de la excavación del poblado, provocaron el interés por los métodos de representación plana de objetos tridimensionales. La perspectiva fue trabajada con el apoyo de la exposición de Hernández y Hernández «Azucar en pancitos», actividades de *Bon dia Mates* como «Imagínatelo» y otras del repertorio sobre Visualización Espacial de Floreal García. El estudio de las sombras nos llevó a descubrir las cónicas, las isometrías y las semejanzas, con la ayuda del material gráfico de Pilar Moreno, actividades de *Bon dia Mates* como «L'home que mesurava ombres» y preparó el terreno para actividades de taller como la construcción de relojes solares.

Anexo 2

El grupo 7 abordó la actividad «Senderismo» bajo el lema «Conocer mejor la naturaleza para amarla más y cuidarla adecuadamente».

Con la ayuda de una patata les fue posible visualizar las curvas de nivel (figura 1), la línea de máxima pendiente (figura 2) o el perfil según una dirección (figura 3), imágenes sugeridas en el cuento con el trajín de las gentes del poblado en su continuo subir y bajar. Todo ello les habrá proporcionado imágenes concretas que probablemente les facilitará la interpretación de planos topográficos y la asimilación, en cursos superiores, de conceptos como gradiente, derivada direccional, etc.

En las figuras 1, 2 y 3 podemos ver algunas aportaciones de los grupos de trabajo que estudiaron el concepto de pendiente desde el recuerdo que guardan sus cuerpos de sus propias sensaciones en una actividad de senderismo.

Redescubrieron que cuesta arriba, cuando el cuerpo sufre más cansancio, en los tramos de ascenso es cuando vulgarmente decimos que hay pendiente, y descubrieron que en estos tramos, en los que la curva es creciente, el segmento que mide la pendiente en cada punto resulta tener orientación positiva (hacia arriba), la curva de las pendientes se mantiene en esos tramos sobre el eje de las x. Por el contrario, en los descensos, cuando no es necesario el esfuerzo para avanzar sino para contrarrestar la tendencia a caer, el mencionado segmento se orienta hacia abajo: cuesta abajo, es decir en los tramos decrecientes, la pendiente es negativa, la curva de las pendientes queda en estos tramos por debajo del eje OX. Es más, observando la gráfica de las pendientes, observaron que sobresalen los puntos de mayor y menor pendiente, puntos que en el perfil no se distinguen demasiado, pero que en sus cuerpos producen efectos fácilmente identificables y que todos recuerdan haber experimentado más de una vez: el punto en el que estamos tentados de abandonar por el excesivo esfuerzo que supone remontar ese «repecho» tan difícil, o aquel otro punto en el que parece que nos vamos a «despeñar» de lo vertical que parece el plano bajo nuestros pies.

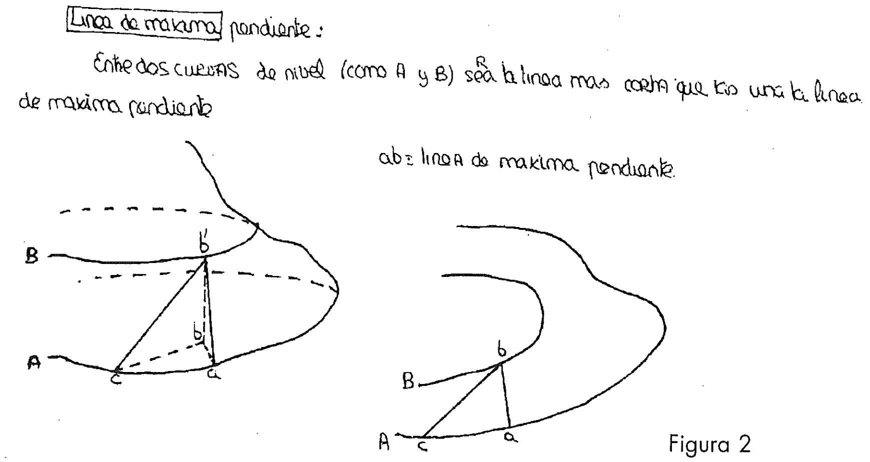


Figura 2

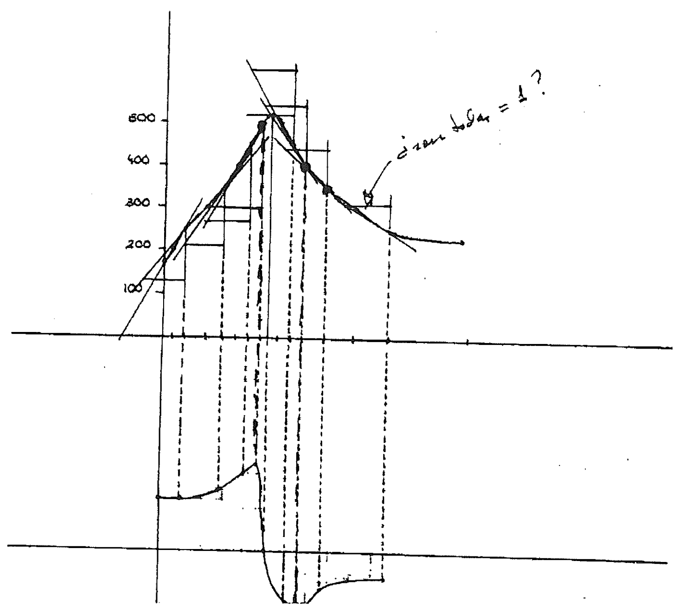


Figura 3

Tras el debate que se mantuvo durante su exposición, surgieron otras observaciones como la de considerar a su vez la curva de las pendientes como el perfil de otra montaña y aplicarle los mismos resultados. Esto condujo al descubrimiento de que los tramos ascendentes de esta segunda montaña coinciden con las crestas de la montaña inicial y los tramos de descenso de la segunda coinciden con los valles de la primera.

Todas estas observaciones les llevaron a las siguientes conclusiones:

1. Crecimiento: $p > 0$.
2. Decrecimiento: $p < 0$.
3. Máxima altitud: $p = 0$; Mínima altitud $p = 0$.
4. Punto de máxima pendiente: A.
5. Punto de mínima pendiente, máxima cuesta abajo B.
6. Concavidad: derivada creciente (su derivada positiva). En particular en un mínimo $p = 0$ y $p' > 0$.
7. Convexidad: derivada decreciente (su derivada negativa). En particular en un máximo $p = 0$ y $p' < 0$.
8. Entre el punto de máxima pendiente y el de mínima, se observa que la curva del perfil puede modelizarse mediante un arco de parábola, y su derivada resulta aproximarse, en ese tramo, bastante bien a una recta, que es la derivada de la parábola.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$A = (520, 200) \quad 200 = a520^2 + b520 + c$$

$$M = (500, 220) \quad 220 = a500^2 + b500 + c$$

$$B = (400, 320) \quad 320 = a400^2 + b400 + c$$

La última de las conclusiones llevó a la profesora a plantear la siguiente cuestión, con el apoyo de la figura 4 y un paseo por las montañas de la página Web *A Virtual SpaceTime TravelMachine*

En el modelo euclídeo habéis considerado que las montañas son paraboloides, por eso habéis supuesto que el perfil tiene la forma de una parábola y que su ecuación es un trinomio de segundo grado. Pero ¿qué pasaría si tomásemos un modelo más ajustado a la realidad?

Su respuesta puede verse en la figura 5. Un resultado que les parece interesante en este caso es que puede existir un punto de máxima altitud en el que *p* no puede valer cero porque no existe.

Anexo 3

Dentro de las actividades que hemos llamado «El sol y la sostenibilidad», han surgido propuestas como la construcción de relojes solares para minimizar el uso de pilas botón, calendarios solares y lunisolares que nos acerquen más al ritmo de la naturaleza y cocinas solares que no consumen recursos energéticos renovables ni no renovables. El grupo 2 ha trabajado sobre el fundamento de una cocina solar, intentando responder a la pregunta ¿Por qué es posible cocinar en ese artefacto (foto de una cocina solar)?

El grupo elaboró la respuesta en tres niveles:

1) Porque los rayos paralelos al eje de la parábola se reflejan pasando por el foco y así se produce en el foco un efecto amplificador del calor solar, suficiente para cocinar.

2) En la construcción de la parábola doblando el papel hasta hacer coincidir el foco con la directriz, el doblez actúa

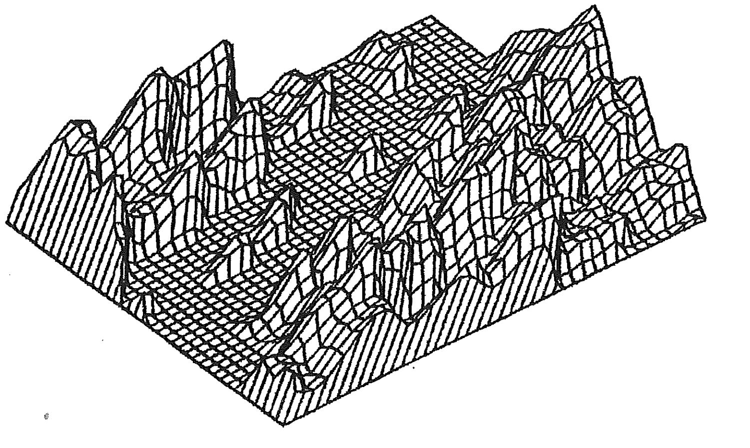
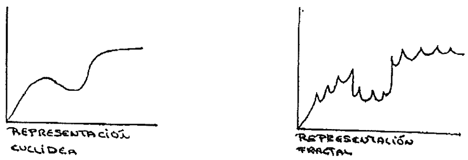


Figura 4

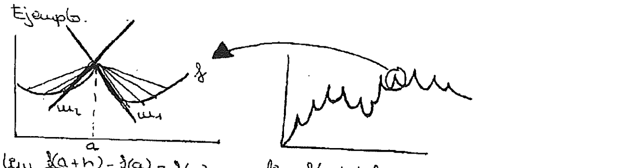
FRACTALES

Profundizando sobre el tema de la representación de la montaña, hemos llegado a la conclusión que la representación euclidea que hicimos para la montaña, no se parece tanto a una montaño como la representación en fractales, ya que por muy desgastada que esté la montaña nunca será tan lisa como el modelo euclideo.



Se hubiéramos representado la grafica en forma de fractal, para realizar la función derivada hubieramos tenido algunas variaciones debido a que hay puntos en los fractales que no se pueden derivar a causa de que estos puntos tienen dos rectas tangentes.

Ejemplo.



$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f(a)$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_1$ No son iguales y tendríamos 2 derivadas diferentes en un mismo pto

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = m_2$

$m_1 \neq m_2$

f(a) no es derivable en este pto.

Figura 5

como eje de simetría (figura 6). Si el doblez en cada punto fuese el espejo, entonces ocurriría que:

A = B por opuestos por el vértice

A = C por simetría en la construcción

Luego B = C

Por tanto C sería el ángulo de reflexión pues cumpliría la propiedad fundamental de la reflexión:

ángulo de incid. = ángulo de reflexión.

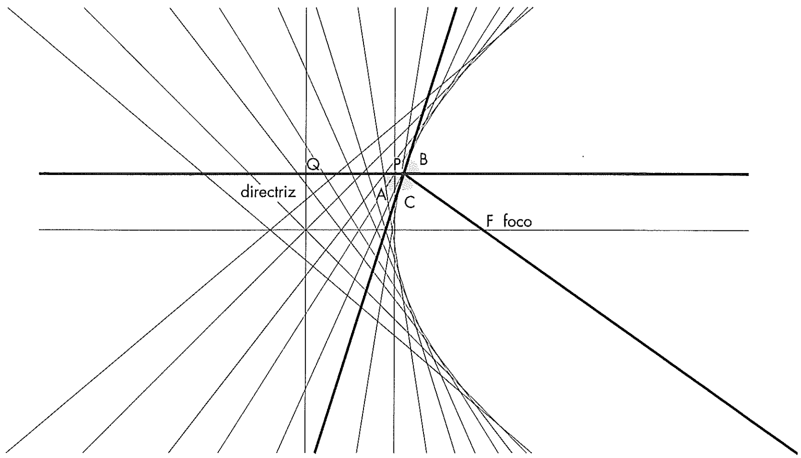


Figura 6

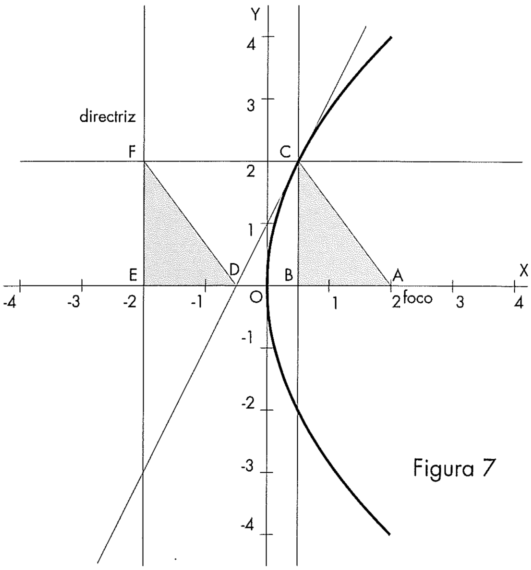


Figura 7

3) Pero, ¿es cierto que el doblez actúa como espejo? ¿Acaso el doblez coincide con la recta tangente?

Puesto que ambas pasan por el punto C, bastará comprobar que también tienen iguales las pendientes en ese punto. En la figura 7 la ecuación de la parábola es $y^2=2px$.

a) Pendiente de la recta tangente:

$$y^2 = 2px$$

$$2y\, y' = 2p$$

$$y' = 2p/2y$$

sustituyendo las coordenadas (a, b) de C:

pendiente de la tangente = p/b

b) Pendiente de la recta doblez:

b/h, donde h = BD, pero OB es a y OD = OB luego h=2a

Por tanto

pendiente doblez = b/2a

1 OB=OD es cierto porque los triángulos CDF y CDA son simétricos respecto de la recta doblez.

FCD es un ángulo igual CDA por alternos internos e igual a DCA por simetría, luego el triángulo CDA es isósceles y el lado CA es igual al lado DA, como FC es igual a CA por simetría, entonces en el cuadrilátero ADFC todos los lados son iguales, por tanto los triángulos oscuros, que son rectángulos tienen iguales sus hipotenusas y también los catetos verticales por ser segmentos de paralelas entre paralelas. Luego los catetos horizontales son iguales y como el vértice de la parábola equidista de la directriz y el foco, por diferencias de pares de segmentos iguales dos a dos, se desprende la igualdad que queríamos probar.

c) Si p/b = b/2a es cierto, ambas rectas coincidirán. Pero esto será cierto si lo es p·2a = b·b. Y esto último es válido pues equivale a decir que el punto de coordenadas (a, b) pertenece a la curva de ecuación $y^2 = 2px$. (Ver nota 1).

Las otras cuádricas cumplen propiedades análogas en cuanto a la reflexión, que permiten construir telescopios (espejos hiperbólicos) y arquitecturas con propiedades auditivas sorprendentes (máquina del eco).

Anexo 4

La propuesta de extender el cuidado, no sólo al planeta sino a las demás personas y a una misma en particular, hizo aparecer los deportes al aire libre como actividades para la sostenibilidad. Ello condujo al grupo 1 a plantearse la pregunta ¿Cómo descubrir la velocidad que lleva un deportista en el preciso momento en que aparece en una instantánea fotográfica? (foto de una niña en una competición de natación, un portero de fútbol saltando y parando un balón en el aire, un ciclista bajando a toda velocidad con una bicicleta de montaña,...). En cada uno de los trabajos se abordó el concepto de velocidad instantánea como límite de la velocidad media. Además en el caso del portero, hicieron el cálculo de la ecuación de la trayectoria estimándola parabólica y ajustando tres puntos a la ecuación del trinomio de segundo grado.

Para profundizar en el estudio del movimiento, utilizaron una estrategia de modelización geométrica que resultó clarificadora de las situaciones en que la medida es resuelta mediante la aplicación de la regla de Barrow, situaciones que pueden ser expresadas como producto de dos variables.

Ejemplo 1

Si la velocidad es constante, el espacio queda modelizado mediante un rectángulo de base el tiempo y de altura la velocidad. Si la velocidad no es constante, el recinto plano que modeliza el espacio tendrá una forma de rectángulo mixto con la base superior curvilínea (figura 8), es decir, será un «recinto Barrow».

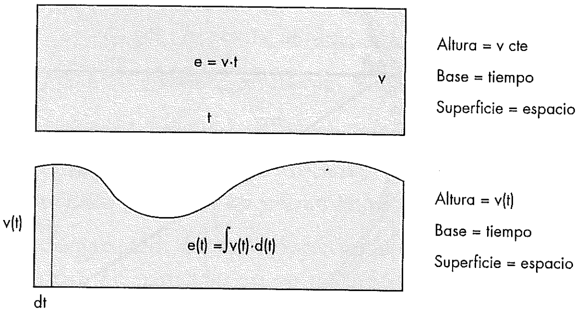


Figura 8

Si la velocidad no es constante sino igual a

$$3t^3 + 2t^2 + 5$$

la zona sombreada de la figura 9 modeliza el espacio recorrido. Y vale:

$$e = \int_2^6 \left(3t^3 + 2t^2 + 5\right) dt$$

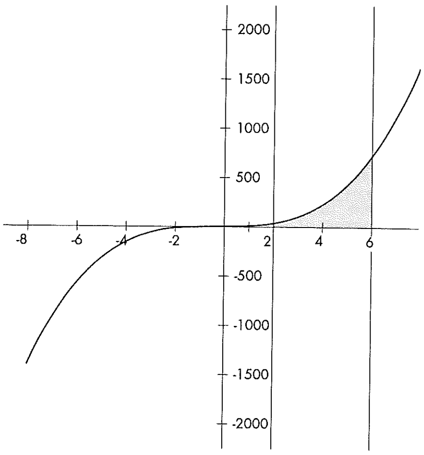


Figura 9

Ejemplo 2

Aunque no dispongamos de la ecuación, es posible estimar la gráfica v-t de un móvil. Por ejemplo de un coche conducido de modo razonable, en el circuito de la figura 10. Una vez dibujada la gráfica v-t (figura 11) podemos construir las gráficas del espacio (figura 12) y de la aceleración (figura 13)

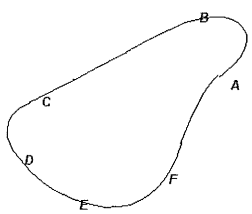


Figura 10

(2)

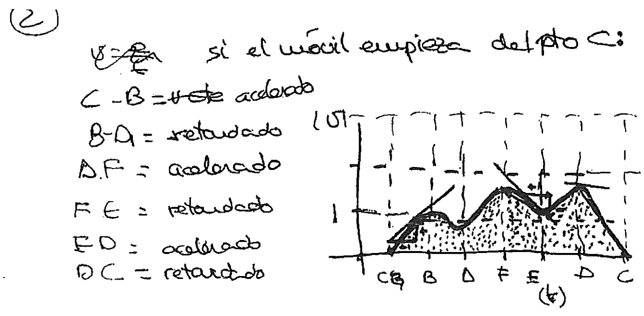


Figura 11

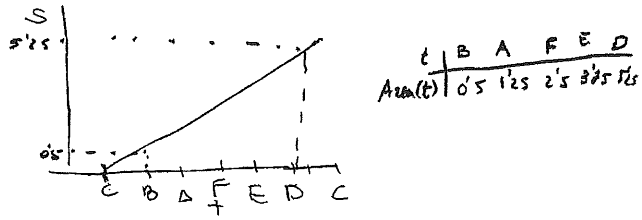


Figura 12

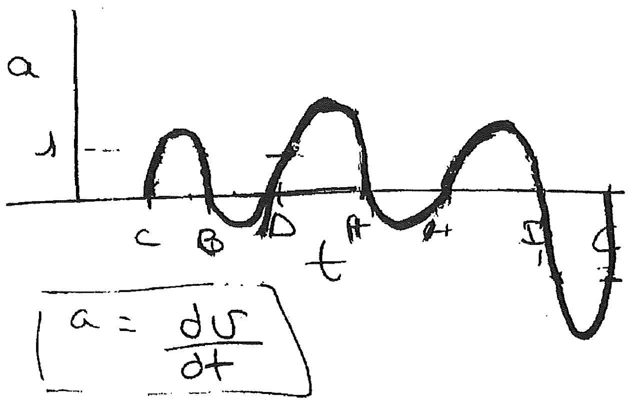


Figura 13

Ejemplo 3

El volumen de un cuerpo de revolución también se puede modelizar con un rectángulo en su caso más simple: el cilindro, ya que su volumen puede considerarse producto de dos variables: área de la base y altura (figura 14).

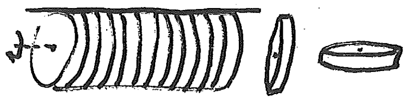


Figura 14

En los casos en que la generatriz no es una recta paralela al eje de rotación, el radio será variable r= f(x), con lo que (figura 15):

$$V = \pi \int f(x)^2 dx$$

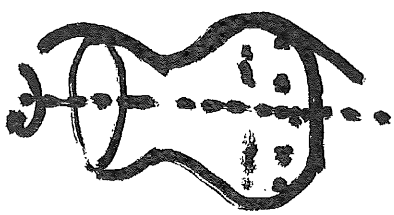


Figura 15

Este resultado les ha permitido medir la capacidad de los utensilios cerámicos que ya habían estudiado en lo referente a sus formas y a su decoración.[2]

Anexo 5

Bosques

El grupo 4, a partir de la figura 16 (página siguiente), que representa la velocidad de un incendio en hectáreas por día en un bosque, medida en tiempo real desde un centro de coordinación de emergencias, ha intentado responder a la pregunta ¿Cuántas hectáreas se habrán quemado entre el día 2 y el 5? También se han planteado cómo construir la gráfica días-hectáreas quemadas y cuál será su ecuación, si la ecuación de la tasa de incendio es:

$$y = \frac{3x^2}{x-1}$$

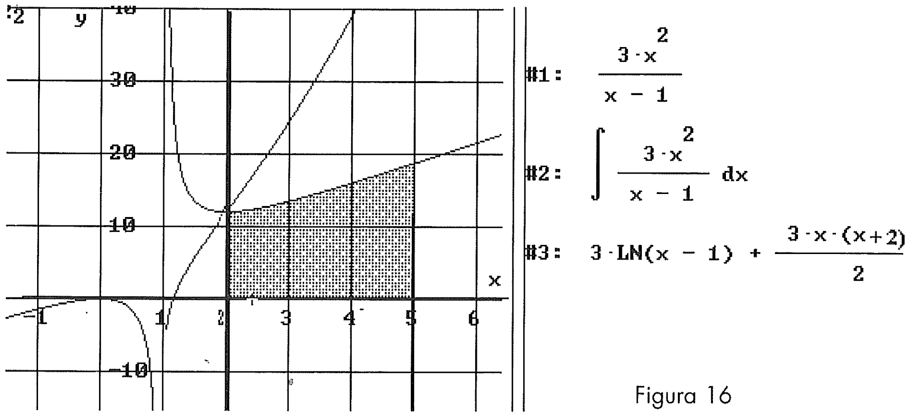


Figura 16

Pesca

El grupo 3 ha realizado un trabajo similar, pero en referencia a la pesca. La tasa de capturas de distintas especies en Tm/año ha sido extraída del *Atles del Medi Ambient* editado por Enciclopèdia Catalana.

Para ilustrar el equilibrio necesario entre la conservación de la riqueza biológica y el necesario desarrollo de los pueblos, han tratado de contestar a la siguiente cuestión:

Si consideramos que la calidad de vida en el planeta está representada por el área de un rectángulo de base igual al nivel de conservación y altura igual al nivel de desarrollo, y la suma de ambos la consideramos igual a la capacidad de carga del planeta, ¿cuales son los niveles de desarrollo y conservación correspondientes a la mejor calidad de vida?

El desastre que se muestra al confundir la maximización de una de las tendencias con la maximización objetivo es clarificador. Un cordel anudado, tensado con los dedos pulgar e índice de cada mano, simula el rectángulo del problema, su semiperímetro p significa la capacidad de carga del planeta, el área del recinto que delimita simboliza la calidad de vida C, y sus dimensiones x e y las dos tendencias antes citadas. Con este modelo es muy claro ver que la maximización unilateral de una u otra tendencia conduce irremisiblemente a la total anulación de la calidad de vida. Si cede algo cada tendencia, se mejora la calidad de vida y el máximo se da si:

$$C(x, y) = xy \; ; \; x + y = p$$

$$C(x) = x(p - x) = - x^2 + px$$

2 El trabajo de modelización realizado por este grupo les surte de una experiencia concreta que facilitará posteriormente la comprensión del teorema del valor medio del cálculo integral.

$$C'(x) = -2x + p = 0$$

$$x = p/2\ ,\ y = p/2$$

¡No es sorprendente que la máxima calidad de vida exija equilibrio entre las dos tendencias contrapuestas!

Anexo 6

Los grupos 5 y 6 han trabajado en torno al tema del crecimiento (biológico, autosemejante, etc.). Su trabajo aparecerá próximamente en la revista *Números* de la Sociedad Canaria Isaac Newton.

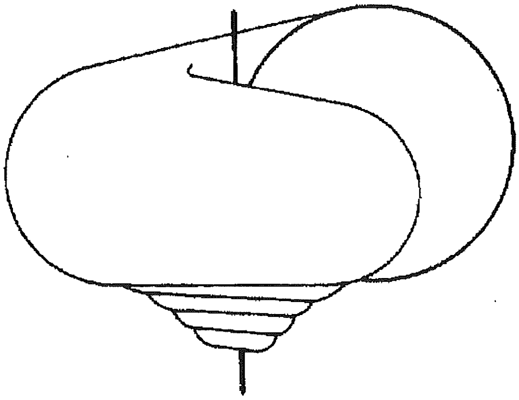


Figura 17

Conclusiones

Este método de trabajo ha permitido tratar contenidos conceptuales como los teoremas fundamentales de la trigonometría, el número complejo, las ecuaciones cartesianas de la recta y las cónicas, ecuaciones polares de curvas como la circunferencia y las espirales, ecuaciones paramétricas de la recta, la circunferencia y la elipse, la derivada, la integral, la función área. Contenidos procedimentales como resolución de triángulos, construcción de pentágonos, cálculo con números complejos, resolución analítica de problemas geométricos, representación de curvas, construcción de la función derivada y de la función área, resolución de problemas de optimización, modelización matemática de situaciones de la vida cotidiana, cálculo de derivadas e integrales, transferencia a otros contextos de los conocimientos aprendidos. En lo referente a actitudes valores y normas, todo el trabajo se ha orientado para conseguir la mejora en las capacidades de cuidar, confiar en las propias capacidades, reconocer y reconocerse autorizados, discernir las argumentaciones correctas de las erróneas, entender mejor el mundo que nos rodea y sobre todo mejorar la capacidad de disfrute con las actividades matemáticas.

Este método de trabajo ha permitido tratar contenidos conceptuales como los teoremas fundamentales de la trigonometría, el número complejo, las ecuaciones cartesianas de la recta y las cónicas, ecuaciones polares de curvas como la circunferencia y las espirales...

Los juegos con dados que proponen cuestiones y las cartas que ofrecen respuestas han resultado eficaces para evitar la falta de participación que se produce cuando la propuesta y la corrección de ejercicios de consolidación y de repaso se hacen al modo tradicional.

Los problemas de optimización y medida, los juegos de contenidos antes citados y la confección del libro de texto personal, se complementan para conseguir una revisión y reestructuración de los contenidos de matemáticas estudiados durante su vida escolar. Los problemas citados justifican la necesidad de una revisión, los juegos consolidan las técnicas y el libro reorganiza y completa el repertorio disponible a la hora de enfrentar la tarea de resolver los primeros.

Rosario Nomdedeu
IB de Almassora. (Castellón)
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»

Bibliografía

ALSINA, C., J. M. FORTUNY y J. GIMÉNEZ (1994): *Projecte Curricular de l'Àrea de Matemàtiques «Bon dia Mates»*, Generalitat de Catalunya, Departament d'Ensenyament, Barcelona.

BISHOP, A. J. (1994): *Mathematical Enculturation*, 2ª edición, Kluwer. Netherlands.

CAMPS, V. (1993): *Virtudes Públicas*, Espasa Calpe, Madrid.

FOX KELLER, E. (1991): *Reflexiones sobre género y ciencia*, Ed. Alfons el Magnànim, Valencia.

HERNAN, F. (1991): *Retrato de una profesión imaginada*, Proyecto Sur de Ediciones, Granada.

MARCO, J. A. (Ed.) (1987): *Necesidades y valores en la construcción humana*, Gorfisa, Zaragoza.

RIVERA, M. M. (1994): *Nombrar el mundo en femenino*, Icaria, Barcelona.

SALAS, B. (1994): *Orientaciones para la elaboración del Proyecto Coeducativo de Centro. Desarrollo integral de la persona*, Ed. Maite Canal, Bilbao.