SUMA 29
noviembre 1998, pp. 35-41

Matemáticas aplicadas a la Astronomía: tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del Sol en los solsticios

José Luis Sánchez Almécija

IDEAS Y RECURSOS

En este artículo se resuelve un problema de astronomía mediante la utilización de la trigonometría elemental y del espacio euclideo tridimensional. Se aspira a tener una idea de cómo varía la luz solar en los solsticios a lo largo de las latitudes de nuestro planeta, de polo a polo, y se concluye con un programa informático y una tabla para las latitudes de varias ciudades del mundo.

LA TIERRA describe una órbita elíptica en su movimiento de traslación alrededor del sol. Los solsticios tienen lugar en los momentos en los que la Tierra se encuentra en los vértices del eje mayor de la elipse. Estos dos momentos son conocidos como solsticio de invierno, sobre el 21 de diciembre, y solsticio de verano, sobre el 22 de junio.

Tiempo que transcurre entre la salida y la puesta del sol en el solsticio de invierno

Vamos a calcular la proporción de luz p que recibe un observador A situado a una latitud λ. Si multiplicamos p por el número de horas de este día, 23 horas 58 minutos[1] (Menzel y Pasachoff, 1990) obtendremos las horas de luz solar del solsticio de invierno.

Consideremos la proyección ortogonal de la Tierra sobre el plano meridiano[2] (figura 1). Los puntos N y S repre-

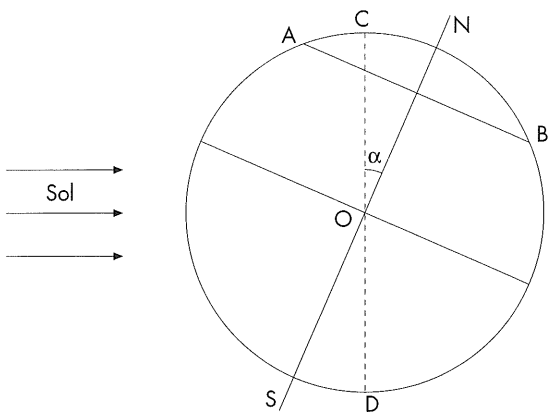

Figura 1

1 Realmente las 24 horas de un día es la media de todas los días, es decir, es un día medio. La duración de un día cualquiera del año podemos encontrarla en un analema, curva aparente que describe el centro del sol durante un año a las 12:00 horas de Greenwich.

2 Plano que contiene la línea NS y al observador A.

sentan el polo norte y sur de la Tierra respectivamente, la línea NS representa el eje de rotación de la Tierra, el segmento AB el paralelo de latitud λ donde se encuentra el observador A, el segmento CD la circunferencia que separa el día de la noche, el punto O el centro de la Tierra y el ángulo $\alpha = 23°27'$ la inclinación del eje de la Tierra.

Tomemos la mitad del paralelo que pasa por A y por B, donde se encuentra el observador A (figura 2). Sea $l = 90° - \lambda$, AP el arco de luz , PB el arco de sombra, P´ la proyección ortogonal de P sobre el segmento AB, β el ángulo que abarca el arco AP y R el radio de la Tierra.

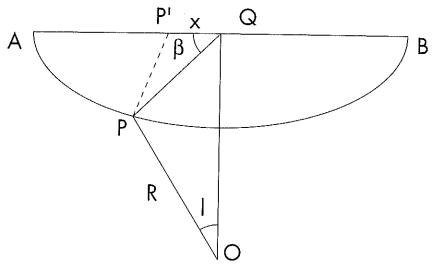

Figura 2

La proporción de luz es

$$p = \frac{\beta}{180°}$$

Del triángulo rectángulo OPQ se obtiene PQ = R·senl. Sea ahora x = P'Q. En el triángulo rectángulo PP´Q obtenemos que

$$\cos\beta = \frac{x}{R \cdot \operatorname{sen} l}$$

Entonces basta calcular x para obtener β.

Tomemos ahora el triángulo rectángulo AOQ (figura 3)

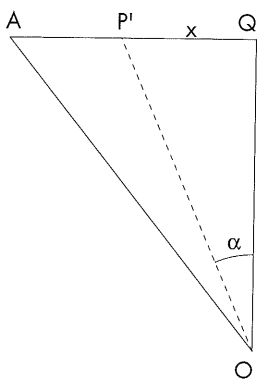

Figura 3

Resulta que OQ = R ·cosl y que

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{R \cdot \cos l} \quad \Rightarrow \quad x = R \cdot \cos l \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Entonces

$$\cos\beta = \frac{R \cdot \cos l \cdot \operatorname{tg}\alpha}{R \cdot \operatorname{sen} l} = \cot l \cdot \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \arccos(\operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg}\alpha)$$

Luego la proporción de luz

$$p = \frac{\arccos(\operatorname{tg}\lambda \cdot \operatorname{tg}\alpha)}{180°}$$

y el tiempo que transcurre entre la salida y la puesta de sol es

$$t = p \cdot 23,9\hat{6} \text{ horas}.$$

Esta fórmula es válida para

$$-66,55° \le \lambda \le 66,55°$$

Si $\lambda = -66,55°$ entonces t = 23 horas 58 minutos y, por tanto, en todo el *Círculo Polar Antártico*, entre los 66°33´ y 90° de latitud sur, luce el sol todo el día. Si $\lambda = 66,55°$ entonces t = 24 horas 2 minutos y, por tanto, en todo el *Círculo Polar Ártico*, entre los 66°33´ y 90° de latitud norte, es de noche todo el día.

[en el solsticio de invierno] en todo el Círculo Polar Antártico, entre los 66°33´ y 90° de latitud sur, luce el sol todo el día. ...en todo el Círculo Polar Ártico, entre los 66°33´ y 90° de latitud norte, es de noche todo el día.

Tiempo que transcurre entre la salida y la puesta de sol en el solsticio de verano

En este día la posición del sol respecto de la Tierra es la que se observa en la figura 4.

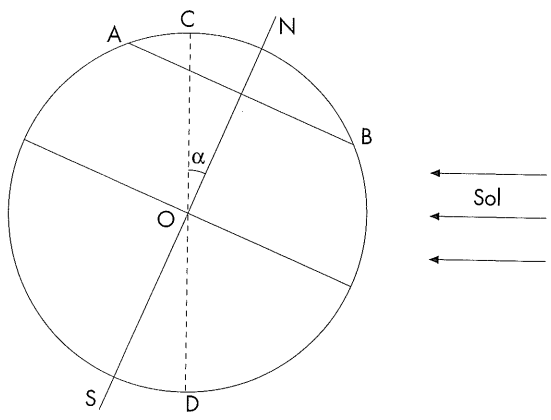

Figura 4

Observamos que la proporción de luz de este día, que tiene una duración de 24 horas y 2 minutos (Menzel y Pasachoff, 1990), es igual que la pro-

porción de noche del solsticio de invierno. Luego la proporción de luz

$$p' = 1 - p$$

y el tiempo que transcurre entre la salida y la puesta de sol es

$$t = p' \cdot 24,0\hat{3} \text{ horas}.$$

En el solsticio de verano en todo el *Círculo Polar Antártico* es de noche todo el día y en todo el *Círculo Polar Ártico* luce el sol todo el día.

Tamaño angular del sol y refracción de los rayos solares sobre la atmósfera

En los cálculos realizados hasta ahora no hemos tenido en cuenta que el Sol es una esfera y que los rayos solares se refractan en la atmósfera ascendiendo el Sol sobre el horizonte en un ángulo de 35' (Vorontsov-Veliamínov, 1985).

Veamos cómo influye el tamaño angular del sol y la refracción en la proporción de luz p en el solsticio de invierno.

Teniendo en cuenta la refracción resulta que la proporción de luz es

$$p = \frac{\beta + 35'}{180°}$$

Consideremos el modelo Sol-Tierra en el solsticio de invierno proyectado ortogonalmente sobre el plano meridiano (figura 5) y calculemos el ángulo *O* del trapecio HC'OK, donde el segmento HC' es tangente a las circunferencias.

En el solsticio de verano en todo el Círculo Polar Antártico es de noche todo el día y en todo el Círculo Polar Ártico luce el sol todo el día.

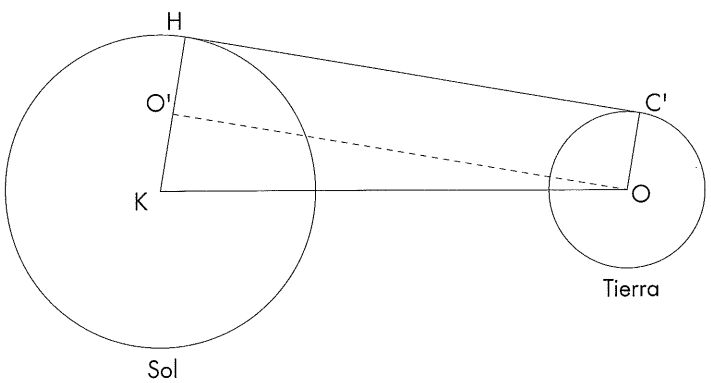

Figura 5

Sea *O'* la proyección del vértice *O* sobre el lado HK. En el triángulo OKO' obtenemos que cos K = KO'/KO. Ahora bien K = 180° – O y KO' = R_s – R (R_s es el radio del Sol y R el de la Tierra). Sea KO = d (distancia media de la Tierra al Sol), entonces

$$\cos(180° - O) = \frac{R_s - R}{d} \quad \Rightarrow \quad O = 180° - \text{arc}\cos\frac{R_s - R}{d}$$

Con los datos d = 149.600.000 Km, R_s = 696.000 Km y R = 6.371 Km (Vorontsov-Veliamínov, 1985) obtenemos que O = 90,264124°.

Podemos concluir que los rayos solares no inciden perpendicularmente sobre nuestro planeta y que entre la línea sol-sombra CD que teníamos antes, y la que tenemos ahora C'D' existe una diferencia. Esta diferencia la podemos medir por el ángulo COC' = ε = 0,264124°. La misma diferencia podemos encontrar en el solsticio de verano entre las líneas CD y C"D" (figura 6).

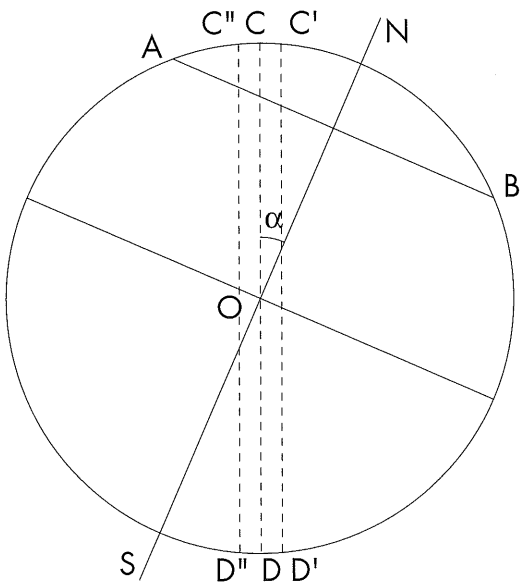

Figura 6

Determinemos el aumento angular de luz β' sobre el paralelo donde se encuentra el observador A, con lo que

$$p = \frac{\beta + \beta' + 35'}{180°}$$

Consideremos el sistema de referencia ortonormal,

$$R' = \{O, U_1, U_2, U_3\}$$

siendo O el centro de la Tierra. $\overrightarrow{OU_3}$ tiene el sentido del vector $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OU_2}$ el sentido contrario al sol, y $\overrightarrow{OU_1}$ el sentido del producto vectorial de $\overrightarrow{OU_2} \times \overrightarrow{OU_3}$.

Sea C_1 la circunferencia que pasa por los puntos C, D y el punto de coordenadas P_1 = (R, 0, 0). Determinando su ecuación resulta

$$C_1 \equiv \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sea C_2 la circunferencia paralela a C_1 y que contiene a C'y D'. Teniendo en cuenta ε determinamos su ecuación, resultando

$$C_2 \equiv \begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 - a^2 \\ y = a \end{cases}$$

siendo

$$a = \frac{R}{\sqrt{1 + \cot^2 \varepsilon}}$$

Sea C_3 la circunferencia paralela a C_1 y que contiene a C" y D". Teniendo en cuenta ε determinamos su ecuación, resultando

$$C_3 \equiv \begin{cases} x^2 + z^2 = R^2 - a^2 \\ y = -a \end{cases}$$

Sea π el plano que contiene al paralelo de latitud λ. Determinando su ecuación resulta que

$$\pi \equiv cy + b(z - c) = 0$$

siendo

$$b = \frac{R \cdot \operatorname{sen} \lambda}{\operatorname{sen} \alpha} \quad y \quad c = \frac{R \cdot \operatorname{sen} \lambda}{\cos \alpha}$$

Resulta que $P = C_1 \cap \pi$ (figura 2) y sea

$$P'' = \begin{cases} C_2 \cap \pi & \text{en el solsticio de invierno} \\ C_3 \cap \pi & \text{en el solsticio de verano} \end{cases}$$

Realizando los cálculos con las ecuaciones anteriores se obtiene

$$P = \left(\sqrt{R^2 - c^2}, 0, c \right)$$

$$P'' = \begin{cases} \left(\sqrt{R^2 - a^2 - \frac{c^2 (b-a)^2}{b^2}}, a, \frac{c(b-a)}{b} \right) & \text{en el solsticio de invierno} \\ \left(\sqrt{R^2 - a^2 - \frac{c^2 (b-a)^2}{b^2}}, -a, \frac{c(b-a)}{b} \right) & \text{en el solsticio de verano} \end{cases}$$

λ tiene las siguientes restricciones:

1) $\lambda \neq 0$ ya que tiene que ser $b \neq 0$. Si $\lambda = 0$ entonces $\beta = 90°$ y tomando como plano $\pi \equiv z - tg\alpha \cdot y = 0$ resulta que $\beta' = 0{,}2879049°$.

2) Si nos encontramos en el solsticio de invierno entonces,

$$-66{,}55° + \varepsilon \leq \lambda \leq 66{,}55°$$

debido a las restricciones de λ expuestas anteriormente y del cálculo de P". Para el resto de los valores podemos calcular *t* mediante interpolación o extrapolación de la siguiente forma :

- $-90° \leq \lambda \leq -66{,}55° + \varepsilon$. A partir de $\lambda = -66{,}55° + \varepsilon = -66{,}29°$ existe luz durante todo el día, es decir t = 23 horas y 58 minutos.
- $66{,}55° \leq \lambda \leq 90°$. Para $\lambda = 66{,}55°$ realizando los cálculos obtenemos que t = 51 minutos y para

  $$\lambda = 66{,}55° + \varepsilon = 66{,}81°$$

  sólo existe la luz debido a la refracción, es decir t = 5 minutos. Interpolando obtenemos que

  $$t = 51 - \frac{46 \cdot (\lambda - 66{,}55)}{0{,}26} \quad \text{minutos}$$

  Si $t < 0$ entonces $t = 0$.

3) Si nos encontramos en el solsticio de verano entonces,

$$-66{,}55° \leq \lambda \leq 66{,}55° - \varepsilon$$

debido a las restricciones de λ y del cálculo de P". Para el resto de los valores podemos calcular *t* mediante interpolación o extrapolación de la siguiente forma :

- $-90° \leq \lambda \leq -66{,}55°$. Para $\lambda = -66{,}55°$ realizando los cálculos obtenemos que t = 51 minutos y para

  $$\lambda = -66{,}55° - \varepsilon = -66{,}81°$$

  sólo existe la luz debido a la refracción, es decir t = 5 minutos. Interpolando obtenemos que

  $$t = 51 + \frac{46 \cdot (\lambda + 66{,}55)}{0{,}26} \quad \text{minutos}$$

  Si $t < 0$ entonces $t = 0$.
- $66{,}55° - \varepsilon \leq \lambda \leq 90°$. A partir de $\lambda = 66{,}55° - \varepsilon = 66{,}29°$ existe luz durante todo el día, es decir t = 24 horas y 2 minutos.

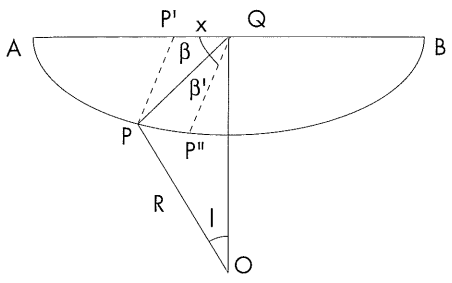

Figura 7

Consideremos el triángulo isósceles PQP" y sea d' = d(P, P"). Aplicando el teorema del coseno obtenemos que

$$\beta' = \arccos\left(1 - \frac{d'^2}{2R^2 \cdot \operatorname{sen}^2 l}\right)$$

Luego si tenemos que

$$p = \frac{\beta + \beta' + 35'}{180°}$$

entonces

$$t = p \cdot 23,9\hat{6}$$

Para el solsticio de verano definimos

$$p' = \begin{cases} \dfrac{180° - \beta + \beta' + 35'}{180°} & \text{si} \quad -\beta + \beta' + 35' < 0° \\ 1 & \text{si} \quad -\beta + \beta' + 35' \geq 0° \end{cases}$$

Con los datos que se han obtenido se ha elaborado el programa en QBASIC para la versión 6.0 de MS-DOS, que se reproduce a continuación.

Al ejecutar este programa nos pide la latitud del lugar del que se desea conocer el tiempo de luz solar durante los solsticios. Si la latitud es norte se dará en grados positivos y si es sur en grados negativos.

Utilizando el programa se obtienen los datos que aparecen en las tablas que aparecen más adelante de tiempo de luz solar para distintas zonas de la Tierra en los solsticios.

```
10 REM tiempo entre la salida y la puesta de sol en los solsticios
20 INPUT "Latitud norte en grados + y latitud sur en grados -"; k
30 IF -90 <= k AND k <= 90 THEN GOTO 40 ELSE PRINT "La latitud debe estar comprendida entre -90 y 90 grados": GOTO 580
40 IF 66.55 <= k THEN m1 = CINT(51 - 46 * (k - 66.55) / .26) ELSE GOTO 70
50 IF m1 < 0 THEN m1 = 0
60 t2 = 24.0333333#: GOTO 530
70 IF k <= -66.55 THEN m2 = CINT(51 + 46 * (k + 66.55) / .26) ELSE GOTO 100
80 IF m2 < 0 THEN m2 = 0
90 t1 = 23.9666666#: GOTO 510
100 pi = 3.141592654#
110 L = k * pi / 180
120 alfa = 23.45 * pi / 180
130 a1 = TAN(L) * TAN(alfa)
140 IF a1 = 0 THEN b1 = pi / 2: GOTO 180
150 IF a1 > 1 THEN b1 = 0: GOTO 180
160 IF a1 < -1 THEN b1 = pi: GOTO 180
170 IF a1 > 0 THEN b1 = ATN(SQR(1 / a1 ^ 2 - 1)) ELSE b1 = pi + ATN(-SQR(1 / a1 ^ 2 - 1))
180 r = 6371
190 e = .004609833#
200 A = r / SQR(1 + (1 / TAN(e)) ^ 2)
```

```
210 b = r * SIN(L) / SIN(alfa)
220 IF b = 0 THEN b2 = b3 = .005024888#: GOTO 430
230 c = r * SIN(L) / COS(alfa)
240 x1 = SQR(r ^ 2 - c ^ 2)
250 y1 = 0
260 z1 = c
270 IF k <= -66.29 AND k > -66.55 THEN GOTO 360
280 x2 = SQR(r ^ 2 - A ^ 2 - c ^ 2 * (b - A) ^ 2 / b ^ 2)
290 y2 = A
300 z2 = c * (b - A) / b
310 d1 = SQR((x1 - x2) ^ 2 + (y1 - y2) ^ 2 + (z1 - z2) ^ 2)
320 A2 = (1 - d1 ^ 2 / (2 * r ^ 2 * SIN(pi / 2 - L)))
330 IF A2 = 0 THEN b2 = pi / 2: GOTO 430
340 IF A2 > 0 THEN b2 = ATN(SQR(1 / A2 ^ 2 - 1)) ELSE b2 = pi + ATN(-SQR(1 / A2 ^ 2 - 1))
350 IF k >= 66.29 AND k < 66.55 THEN GOTO 430
360 x3 = SQR(r ^ 2 - A ^ 2 - c ^ 2 * (b + A) ^ 2 / b ^ 2)
370 y3 = -A
380 z3 = c * (b + A) / b
390 d2 = SQR((x1 - x3) ^ 2 + (y1 - y3) ^ 2 + (z1 - z3) ^ 2)
400 a3 = (1 - d2 ^ 2 / (2 * r ^ 2 * SIN(pi / 2 - L)))
410 IF a3 = 0 THEN b3 = pi / 2: GOTO 430
420 IF a3 > 0 THEN b3 = ATN(SQR(1 / a3 ^ 2 - 1)) ELSE b3 = pi + ATN(-SQR(1 / a3 ^ 2 - 1))
430 p1 = (b1 + b2 + .010181) / pi
440 p2 = (pi - b1 + b3 + .010181) / pi
450 IF k >= 66.29 AND k < 66.55 THEN p2 = 1
460 IF k <= -66.29 AND k > -66.55 THEN p1 = 1
470 IF p1 > 1 THEN p1 = 1
480 IF p2 > 1 THEN p2 = 1
490 t1 = p1 * 23.9666666#
500 t2 = p2 * 24.0333333#
510 h1 = INT(t1)
520 m1 = CINT((t1 - h1) * 60)
530 PRINT "Horas de luz en el solsticio de invierno ="; h1; "horas"; m1; "minutos"
540 IF k <= -66.55 THEN GOTO 570
550 h2 = INT(t2)
560 m2 = CINT((t2 - h2) * 60)
570 PRINT "Horas de luz en el solsticio de verano  ="; h2; "horas"; m2; "minutos"
580 END
```

Lugar	*Latitud*	*Tiempo de luz solar*
En el Polo Norte	90°	0 h. 0 min.
En el linde del Círculo Polar Ártico	66,55°	0 h. 51 min.
Reykjavik	64,2°	3 h. 42 min.
Oslo	59,9°	5 h. 42 min.
Edimburgo (Escocia)	55,9	6 h. 49 min.
Londres	51,5°	7 h. 43 min.
A Coruña	43,4°	8 h. 53 min.
Madrid	40,4°	9 h. 13 min.
Cádiz	36,5°	9 h. 37 min.
Las Palmas de G. Canarias	28,1°	10 h. 19 min.
En el Ecuador	0°	12 h. 4 min.
Río de Janeiro	–22,9°	13 h. 30 min.
Buenos Aires	–34,6°	14 h. 25 min.
En el linde del Círculo Polar Antártico	–66,55°	23 h. 58 min.
En el Polo Sur	–90°	23 h. 58 min.

Tabla para
el solsticio de invierno

Lugar	*Latitud*	*Tiempo de luz solar*
En el Polo Norte	90°	24 h. 2 min.
En el linde del Círculo Polar Ártico	66,55°	24 h. 2 min.
Reykjavik	64,2°	20 h. 45 min.
Oslo	59,9°	18 h. 39 min.
Edimburgo (Escocia)	55,9°	17 h. 29 min.
Londres	51,5°	16 h. 34 min.
A Coruña	43,4°	15 h. 23 min.
Madrid	40,4°	15 h. 2 min.
Cádiz	36,5°	14 h. 38 min.
Las Palmas de G. Canarias	28,1°	13 h. 55 min.
En el Ecuador	0°	12 h. 6 min.
Río de Janeiro	–22,9°	10 h. 44 min.
Buenos Aires	–34,6°	9 h. 49 min.
En el linde del Círculo Polar Antártico	–66,55°	0 h. 51 min.
En el Polo Sur	–90°	0 h. 0 min.

Tabla para
el solsticio deverano

Bibliografía

MENZEL, D. H. y J. M. PASACHOFF (1990): *Guía de campo de las estrellas y los planetas de los hemisferios norte y sur*; Omega, Barcelona.

VORONTSOV-VELIAMÍNOV, B. A. (1985): *Problemas y ejercicios prácticos de astronomía*, Mir, Moscú.

José Luis Sánchez
IES Los Azahares.
La Rinconada (Sevilla)