SUMA 29
noviembre 1998, pp. 5-16

¿Qué es la geometría?*

Brian Bolt

ME GUSTARÍA empezar haciendo un bosquejo de mis propias experiencias en el aprendizaje y enseñanza de la geometría. A lo largo de mi educación secundaria me enseñaron la geometría como una materia separada de la aritmética y del álgebra, a cargo de profesores diferentes y no formando parte de una asignatura integra llamada matemáticas. Es interesante resaltar que la Mathematical Assotiation se creó a finales del siglo pasado en Inglaterra en un intento de mejorar la enseñanza de la geometría. Entonces, y cuando yo iba a la escuela, por geometría se entendía todo lo relativo a los teoremas de Euclides y lo que podía demostrarse a partir de ellos. Yo tuve que aprender alrededor de 70 teoremas y sus demostraciones pero mi madre cuenta que en su época el número era cercano a los 140 teoremas. Por suerte para mí, las demostraciones me resultaron sencillas y me gustaba el desafío de hacer los ejercicios que les seguían. ¿Pero para qué porcentaje de la población era esto cierto? ¡A mi hermana gemela no le resultaba fácil la típica tarea de aprender la demostración de un teorema de geometría para el día siguiente! Su método consistía, como el de la mayoría de los estudiantes, en aprender de memoria cada línea del teorema.

La realidad es que la geometría euclidea, tal como se enseñaba, era una materia muy sofisticada. Para un matemático en ciernes, que podía apreciar la estructura de la materia y la forma en que ésta se desarrolla deduciendo, a partir de un pequeño número de axiomas, una gran colección de propiedades sobre líneas, triángulos y círculos mediante un razonamiento exacto, era hermoso.

¿Pero qué relevancia tiene la geometría euclidea en la «vida real»? El pequeño curso de trigonometría que, en este nivel, formaba parte de la aritmética parecía tener más propósito y ser más pertinente.

* Texto de la conferencia pronunciada en Barcelona, en mayo de 1998, en el seminario «Innovación en la enseñanza de la geometría» en el marco del proyecto TIEM 98, patrocinado por el Centre de Recerca Matemàtica del Institut d'Estudis Catalans.

Traducción: Julio Sancho

ARTÍCULOS

En mis dos últimos cursos en la escuela secundaria la geometría dio un nuevo giro y fue denominada geometría con coordenadas en la que se olvidaba a Euclides y Descartes era el nuevo dios. Los pasos de las demostraciones eran ahora líneas de ecuaciones en las que las ideas de espacio se perdían en manipulaciones algebraicas. Una elipse ya no era una bonita figura sino una ecuación de segundo grado a la que conducía una pesada manipulación algebraica.

En la universidad, la geometría llegó a estar aún mucho más alejada del «mundo real» como en los temas de las formas cuadráticas y las transformaciones afines. El curso de teoría de grupos me dio nuevas intuiciones, así como un curso de cristalografía..., de hecho escribí un trabajo sobre patrones bidimensionales basados en el estudio de libros de diseños de papel pintado. Si hubiese vivido en esta parte del mundo no dudo de que habría sido sobre los mosaicos de la Alhambra.

Al dejar la universidad fui a enseñar a una escuela de chicos y descubrí que nada había cambiado desde la época en que yo era también un escolar excepto en que en los cursos más altos debía preparar a los chicos que querían solicitar becas para Oxford lo que incluía geometría proyectiva. Este era una tema nuevo para mí e hizo falta que me pusiera las pilas para poder anticiparme. Pero aunque el tema resultaba precioso, me preguntaba por su pertinencia ya que no parecía tener relación con el mundo de más allá del aula.

De momento espero que comencéis a comprender mi cuestionamiento de gran parte de lo que enseñaba.

La geometría, de acuerdo con el *Cambridge Paperback Encyclopedia*, es «la parte de las matemáticas que estudia las propiedades de las formas y el espacio, originalmente (como sugiere su nombre) de la Tierra. Los griegos desde alrededor del 300 a. C. desarrollaron la geometría sobre una base lógica, y muchos de los primeros resultados están recogidos en los *Elementos* de Euclides». ¡Euclides tiene mucho de lo que reponsabilizarse!

Lo que no dice esta enciclopedia es que las ideas se desarrollaron a partir del conocimiento obtenido por los antiguos egipcios midiendo las tierras inundadas de las llanuras del Nilo. Mucha de la geometría euclideana, que está basada en triángulos congruentes, se ocupa de cómo fijar las posiciones de unos puntos con relación a otros en el plano. Entonces, ¿por qué no usar eso como nuestra manera de acercarnos a la enseñanza de la geometría?

Mucha de la geometría euclideana, que está basada en triángulos congruentes, se ocupa de cómo fijar las posiciones de unos puntos con relación a otros en el plano. Entonces, ¿por qué no usar eso como nuestra manera de acercarnos a la enseñanza de la geometría?

Afortunadamente para mí, en 1962 me invitaron a unirme a un equipo de profesores de matemáticas, muy competentes, para intentar diseñar un programa de matemáticas para la escuela y a escribir libros de texto como soporte del mismo, con lo que se trataba de acercar la materia al siglo XX. Esto acabó siendo conocido como el *School Mathematics Project* (SMP) y quizá ha llegado a ser el proyecto más influyente que se haya ideado nunca.

Nos pusimos ante una hoja de papel en blanco y tratamos de contestar preguntas como:

- ¿Qué matemática es relevante enseñar a los chicos?
- ¿Cuál es el propósito de la educación matemática de los chicos?

Había muchos temas que hubiéramos querido incluir como la estadística, la programación lineal, la topología, los vectores, las matrices, los grupos... ¿Qué podíamos dejar fuera?

Pues bien, el tema menos apreciado por el 90% de nuestros alumnos era la geometría euclidea que ocupaba al menos el 40% del tiempo de enseñanza y que, dejando aparte algunos resultados básicos, parecía el menos relevante de los temas existentes.

Después de mucho discutir se decidió introducir la geometría usando las transformaciones: reflexiones, rotaciones, homotecias, transformaciones afines, etc. Nos inspiramos en una conferencia de Klein de 1872 en la que sugería que la geometría debía enseñarse como los invariantes de los grupos de las transformaciones en el espacio. Esto encajaba bien con nuestra visión global de las matemáticas y también con nuestra introducción del álgebra matricial que permite describir las transformaciones. Pero eramos prisioneros de nuestro pasado. Estábamos contentos por introducir las transformaciones de forma práctica, por el movimiento de las figuras sobre un papel, pero para atacar la demostración de todos los resultados debíamos estar familiarizados con la geometría euclidea. La experiencia pronto nos mostró que este nuevo enfoque, aunque fascinante para el equipo de profesores, era tan difícil para los alumnos como el viejo. Incluso probablemete era más sofisticado. Pero fue desde este punto desde el que yo empecé a ver la importancia del movimiento para apreciar el espacio. Llegué a interpretar la palabra geometría no simplemente como «la medida de la tierra» sino como «conseguir medir el espacio», esto es «entender las relaciones espaciales». Además creo que deberíamos ser conscientes de que para muchos de los alumnos sería bueno hacer conexiones entre las matemáticas y el mundo en el que viven siempre que sea posible. Una de las consecuencias de esto es que saqué a los alumnos de 11 años fuera del aula a medir terrenos de la escuela. Esto enseguida les ayudó a ver las medidas necesarias para determinar puntos con precisión.

Supongamos, por ejemplo, que una parte del terreno es aproximadamente como el cuadrilátero ABCD que se muestra en la figura 1. Es fácil clavar algunas cañas en un campo de deporte para representar cualquier forma que se quiera medir. El problema para los alumnos es decidir qué longitudes y ángulos es necesario medir para hacer con precisión un dibujo a escala de la forma dada.

Una vez que decidí que el papel tradicional de la geometría no era sostenible, empece a apreciar que lo que se necesitaba eran experiencias para que mis alumnos incrementaran su conciencia del espacio y del mundo en el que vivían.

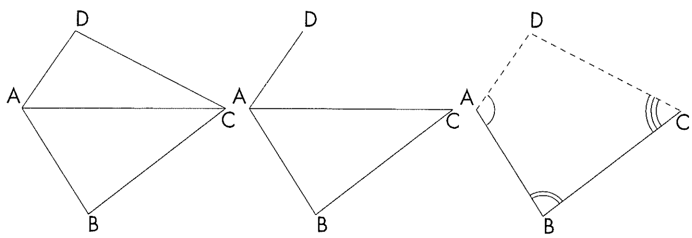


Figura 1

Para determinar los vértices del cuadrilátero hay muchas posibles alternativas, por ejemplo:

1. Medir los cuatro lados y una diagonal.
2. Medir tres lados y dos diagonales.
3. Medir AB, BC y CD, y los ángulos en B y C.
4. Medir AB y BC, y los ángulos en A, B y C.

Obsérvese como en cada caso es necesario hacer cinco medidas para determinar los cuatro puntos. En la práctica se pueden tomar otras medidas para verificarlas, pero teóricamente son suficentes cinco. Cuando lo hice en la escuela convencí al profesor de geografía para juntarnos en una serie de clases que dieron lugar a un valioso proyecto.

Escribí un largo capítulo sobre agrimensura en el libro del SMP para los niños de 11 años basado en mi experiencia y vi que era un punto de partida ideal para un trabajo más abstracto. Pero para muchos de los profesores que después usaron el libro fue el capítulo que evitaron ya que no querían verse involucrados en actividades prácticas. ¡Encontraron muchas excusas, entre las que la favorita era que no tenían suficiente equipamiento! Pues bien, descubrí que un paso de una persona es una medida bastante buena para longitudes y organicé la clase en pequeños grupos para medir un terreno, con un miembro de cada grupo para ser aquel cuyo paso se usaba como un estándar. Posteriormente, la necesidad de un estándar común podía dar lugar a una útil discusión y el estándar conseguirse contando cuántos pasos da una persona en 100 metros. Para medir los ángulos usamos un trozo de papel sobre un tablero de dibujo colocado sobre un taburete de laboratorio que debía situarse en un vértice. En el papel, se dibujaban dos líneas en las direcciones de los otros vértices que forman el ángulo y se medía el ángulo determinado por las líneas con un transportador. Una vez se había hecho un trabajo de esta naturaleza era sencillo motivar a los estudiantes para hacer ejercicios de clase, más tradicionales, de dibujar polígonos dados algunas de sus longitudes y ángulos.

Un proyecto relacionado se enlazó con el deporte de la orientación en el campo en el que una persona debe seguir un itinerario yendo de un punto a otro conociendo la orientación y la distancia de un punto al siguiente. Estoa propuesta tiene muchas posibilidades que sólo están limitadas por lo dispuesto que esté uno a salir fuera de los confines de la clase. A los estudiantes, a los que preparo para ser profesores, les he hecho medir estanques, cuencas de canales, emplazamientos arqueológicos, excavaciones, viejos ferrocarriles y diseñar el plano de un aparcamiento en un trozo grande de terreno.

Una vez que decidí que el papel tradicional de la geometría no era sostenible, empece a apreciar que lo que se necesitaba eran experiencias para que mis alumnos incrementaran su conciencia del espacio y del mundo en el que vivían. Por ello, para el resto de esta conferencia he seleccionado unas cuantas ideas que he usado para conseguirlo.

Poliedros

Demasiado a menudo las lecciones sobre el espacio son bidimensionales y estáticas. Sólo dibujos lineales. Creo firmemente que se necesita tocar y manipular objetos reales para poder comprenderlos por completo. Muchos alumnos habrán construido un cubo alguna vez en su paso por la escuela y lo habrán hecho casi seguro a partir de una red con forma de cruz. Puede llegar a ser revelador para ellos darse cuenta que puede conseguirse a partir de otras redes. Es muy instructiva una investigación para buscar todos los hexaminós y el subconjunto de los que pueden plegarse para hacer un cubo. En la figura 2 pueden observarse algunos de los 11 hexaminós que forman una red de la que se obtiene un cubo.

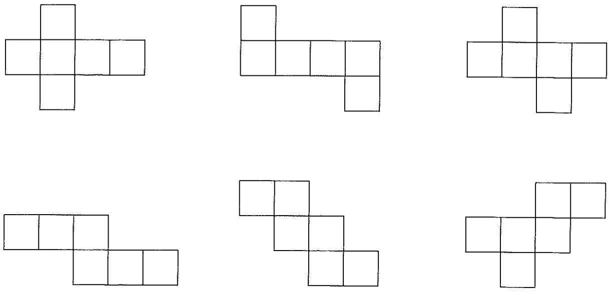


Figura 2

Una investigación que he usado frecuentemente con mis alumnos, que se estaban preparando para ser profesores de matemáticas, es buscar formas de cortar un cubo por la mitad y contruir las formas correspondientes. Debe observarse que esta actividad resultó valiosa tanto para los graduados en matemáticas como para los alumnos de la escuela primaria. No hay nada mejor que construir y manipular objetos reales.

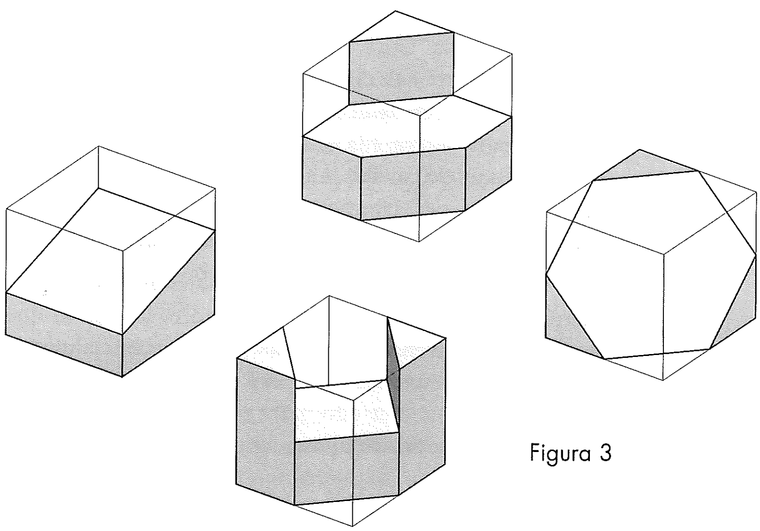


Figura 3

Una construcción que siempre tiene éxito, con cualquier grupo de edad, es construir las dos mitades de un tetraedro, e intercambiarlas entre los compañeros para tratar de poner las piezas juntas de nuevo. Los alumnos más capaces pueden hacer su propio desarrollo, pero tengo un desarrollo impreso sobre una cartulina (figura 4) para que los alumnos menos capaces puedan conseguir algún éxito.

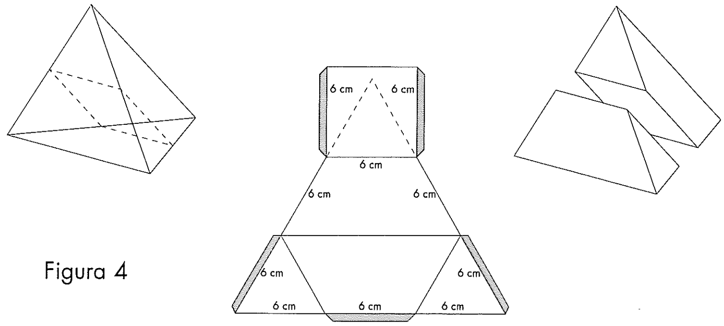


Figura 4

La fórmula del volumen de una pirámide no es un concepto fácil de entender, pero hacer un modelo en el cual haya 6 pirámides idénticas, o bien 3 pirámides idénticas, unidas para formar un cubo le da sentido. La figura 5 muestra el modelo que hago siempre con mis alumnos en el momento que necesitan saber el volumen de una pirámide. ¡Sí, toma su tiempo, pero bien vale la pena el esfuerzo ya que los alumnos tienen un modelo de lo que están haciendo y no sólo una fórmula aprendida como un papagayo!

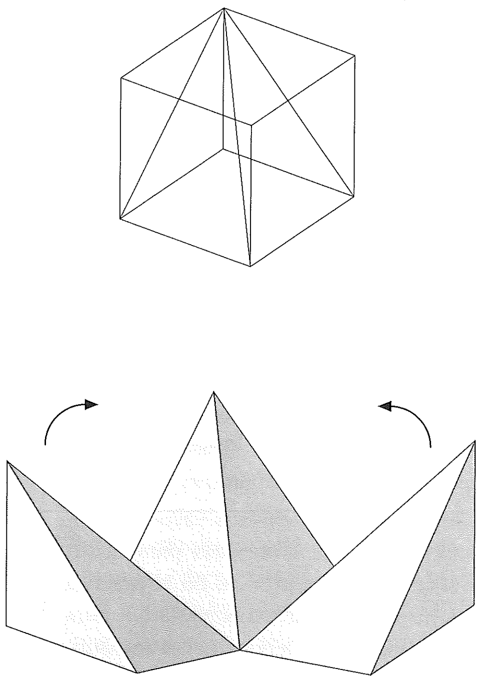


Figura 5

Otro método que he utilizado para construir poliedros es usar pajitas de beber para construir triángulos articulados, enhebrando un hilo elástico a través de ellas, y tensándolo antes de hacer un nudo en uno de los vértices. Lo uso dentro de un proyecto relacionado con la estructura de puentes, pescantes de grúas, andamios, cúpulas geodésicas y otras estructuras que dependen para su fortaleza de la rigidez de triángulos y tetraedros. La estructura tridimensional más simple que puede construirse de esta forma es el tetraedro y éstos pueder agregarse construyendo otros tetraedros sobre una o más caras. El cubo sólo se hace rígido si se pone una barra diagonal en cada una de sus caras cuadradas, pero el octaedro y el icosaedro son rígidos sin otro soporte ya que cada una de sus caras es un triángulo. Este método de construcción en el que las uniones de los vértices no son rígidas revela la importancia del triángulo en las estructuras de ingeniería civil. Una construcción que me gusta hacer de esta forma consiste en empezar con un octaedro y construir un tetraedro en cada cara. El modelo resultante puede verse como la intersección de dos grandes tetraedros o como un octaedro estrellado. Además los vertices de la estrella forman los vértices de un cubo (figura 6).

Perímetros y áreas sobre el geoplano

Los alumnos confunden a menudo los conceptos de área y perímetro y uno de los ejercicios que creé para ayudarles a superar esta dificultad fue hacer uso de un tablero de clavos o geoplano y preguntarles por todas las formas que pueden construirse en él cuyo perímetro sea 12 unidades. Los resultados pueden anotarse en un papel pautado y con cierta frecuencia motivo a los alumnos proponiendo el ejercicio como una competición en la que se consiguen puntos por soluciones que nadie hubiese encontrado. Depués de haber encontrado un cierto número de figuras puede pedírseles que las clasifiquen de acuerdo con sus áreas. (Ver figura 7).

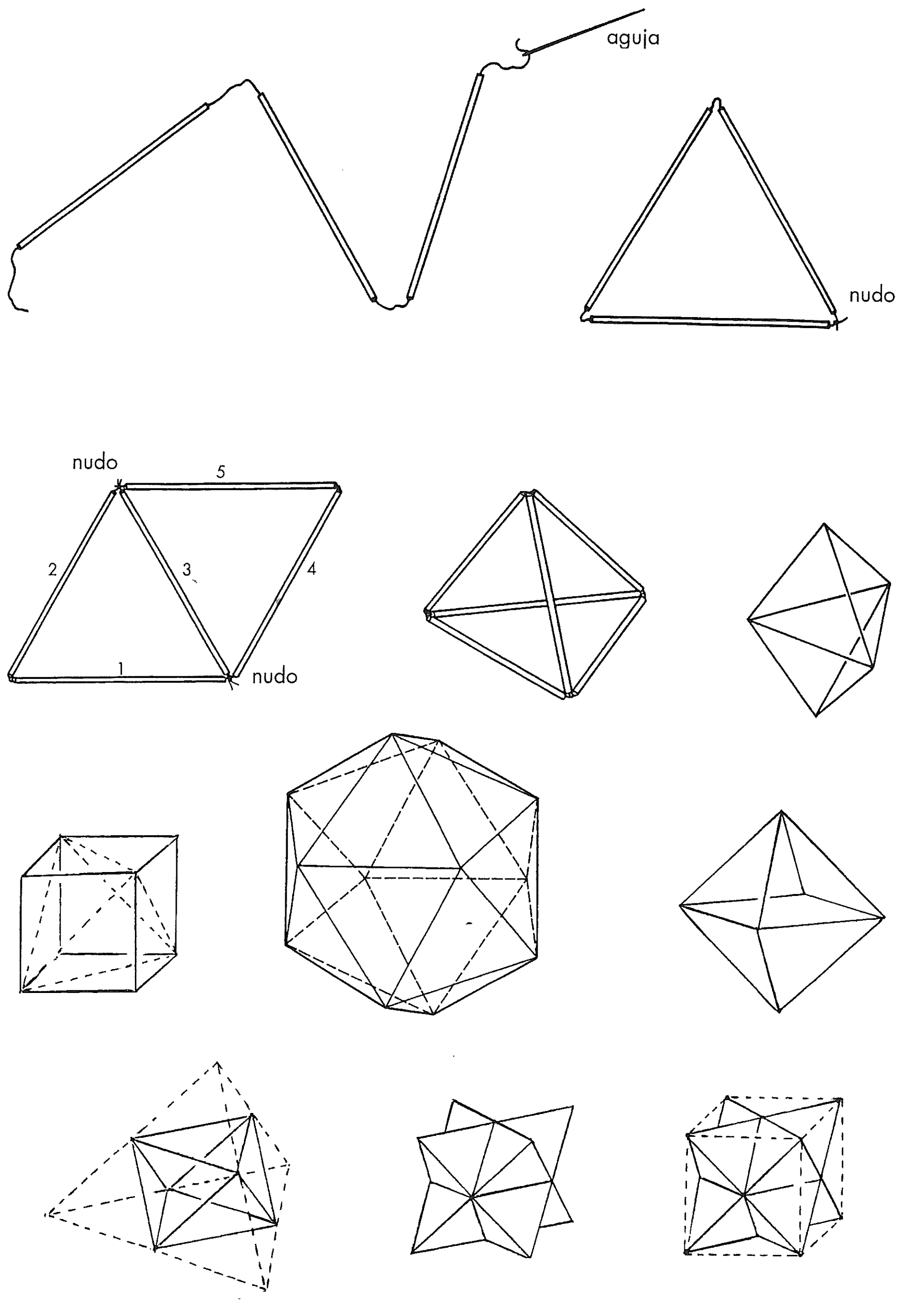


Figura 6

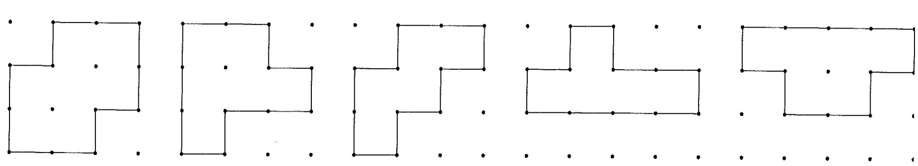


Figura 7

El hecho de que el triángulo rectángulo con lados de 3, 4 y 5 unidades tenga un perímetro de 12 unidades permite hacer una serie de figuras interesantes para extender las soluciones más allá de las figuras rectangulares simples. He aquí algunas de ellas.

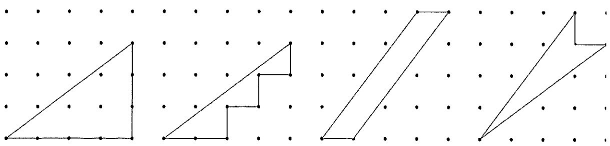
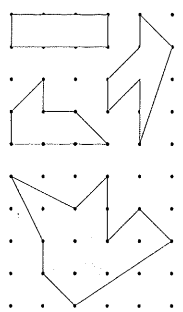


Figura 8

Descubrí que el geoplano es un valioso instrumento para la enseñanza y el aprendizaje. Otro sencillo ejercicio consiste en pedir a los alumnos que encuentren tantas figuras como puedan de 3 unidades cuadradas de área. ¡Cuando se lo propuese a un grupo de graduados de matemáticas, que se preparaban para ser profesores, algunos sólo pudieron encontrar dos figuras y se avergonzaron mucho cuando les conte que, el sábado anterior, entre mis jóvenes alumnos de un club matemático habían encontrado cientos!

En una etapa posterior los alumnos pronto se las arreglan para hallar el área de cualquier polígono que pueda construirse sobre un geoplano y adquieren una verdadera sensibilidad para las áreas que no que no está limitada al uso de fórmulas. Pero una fórmula que siempre merece la pena investigar es la conocida como teorema de Pick:

El área dentro de un polígono en un geoplano es igual al número de puntos interiores mas la mitad del número de puntos que hay en la frontera menos uno:



Figuras de 3 unidades de área:

$i = 0$
$b = 8$
$A = 0 + (1/2)\cdot 8 - 1 = 3$

Figura de 9 unidades de área:

$i = 5$
$b = 10$
$A = 5 + (1/2)\cdot 10 - 1 = 9$

Figura 9

¡Ahora quiero someteros a una sencilla prueba! Si tenéis un papel dibujad en él (i) un cuadrado, (ii) un triángulo isósceles, (iii) un triángulo rectángulo. Manos arriba aquellos que han dibujado las figuras de la forma siguiente:

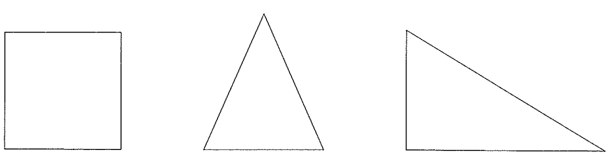


Figura 10

¿Con qué frecuencia como profesores hemos dibujado nuestras figuras inclinadas?

Más figuras

En la Unidad de Evaluación de Logros (APU) de UK, se examinó a miles de alumnos de diferentes edades y se descubrió, entre otras cosas, que los niños a menudo tienen dificultad para reconocer una figura a menos que esté de la «manera adecuada» como en la figura 10. ¿Qué falla aquí? ¿Con qué frecuencia como profesores hemos dibujado nuestras figuras inclinadas? Para contribuir a contrarrestar esto propongo la siguiente investigación: Buscar de cuántas maneras se puede colocar cuatro fichas sobre una retícula 5x5 de modo que sean los vértices de un cuadrado. Siempre digo a mi auditorio que hay tres niveles de respuesta a partir de los que puedo descubrir hasta dónde ha llegado su capacidad espacial de ver cuadrados. ¡Muy poca gente da todas las posibles maneras sin alguna ayuda! Se pueden encontrar 30 cuadrados que se apoyan en sus bases: 16 cuadrados 2x2, 9 cuadrados 3x3, 4 cuadrados 4x4 y 1 cuadrado 5x5. Además, hay 10 cuadrados a los que los alumnos llaman diamantes, 9 pequeños y 1 grande. Pero aún hay 10 cuadrados más que se pueden encontrar considerando los cuadrados en diferentes inclinaciones. El movimiento del caballo en el ajedrez es la clave para 8 de ellos.

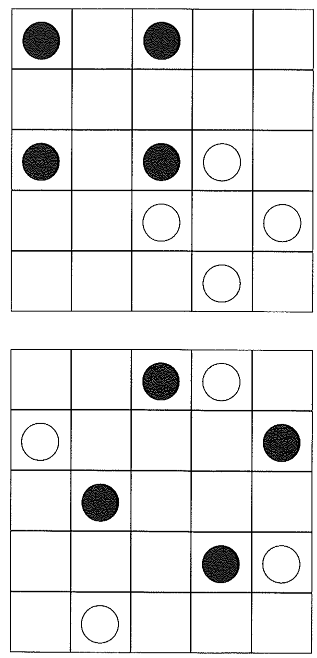


Figura 11

Cuando la investigación está completa las ideas pueden reforzarse:

a) Desafiando a los alumnos a buscar el mayor número de fichas que pueden colocarse en el tablero de modo que no haya cuatro de ellas formando un cuadrado.

b) Haciendo un juego para dos jugadores que, por turnos, añaden una ficha el tablero. Pierde el primero que al añadir una ficha forma un cuadrado.

Hay muchos puzzles matemáticos que exigen pensamiento espacial y yo he hecho siempre mucho uso de ellos. He aquí unos pocos para mostrar la gama de posibilidades:

Quitar cuatro cerillas de modo que queden exactamente cuatro triángulos equiláteros iguales. (Figura 12)

Dividir las figuras X e Y en dos piezas idénticas. (Figura 13)

Dibujar cuidadosamente las cinco figuras mostradas sobre papel cuadriculado. Recortarlas y con ellas mostrar cómo formar un cuadrado usando: (i) las piezas A, B, C y D. (ii) las cinco piezas. (Figura 14)

Ocho cubos unidad se juntan para formar un cubo 2x2x2. Mostrar que se puede pintar cada cubito de manera que puedan reordenarse para construir el cubo grande tanto rojo como azul. ¿Fácil? Ahora trata de colorear 27 cubos unidad para construir un cubo 3x3x3 tanto rojo, como azul o amarillo. (Figura 15)

Los movimientos del caballo sobre el tablero de ajedrez han sido investigados desde hace cientos de años. ¿Qué tal si descubrimos circuitos del caballo en estos tableros? En cada uno de ellos es posible encontrar un camino del caballo que pase por cada una de las casillas del tablero una vez y termine con el movimiento del caballo a la casilla inicial. Un recorrido como éste se denomina reentrante. (Figura 16)

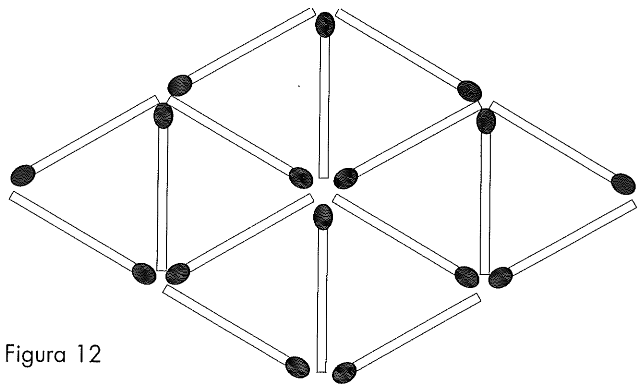


Figura 12

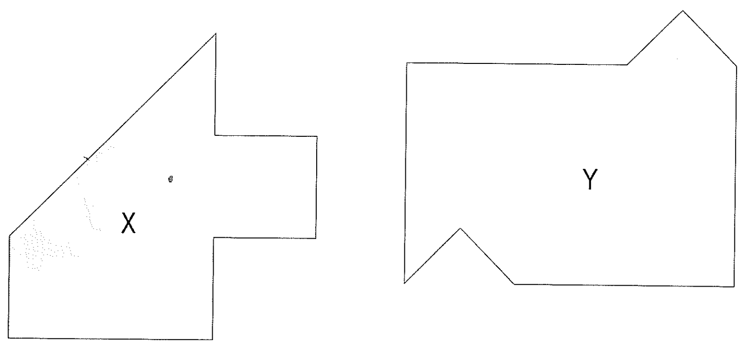


Figura 13

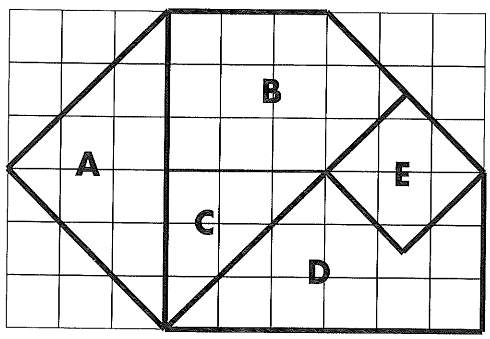


Figura 14

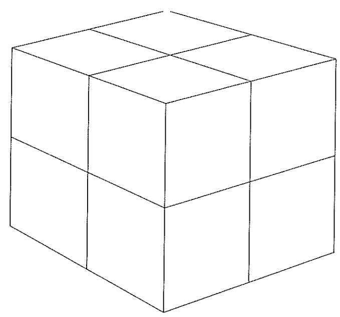


Figura 15

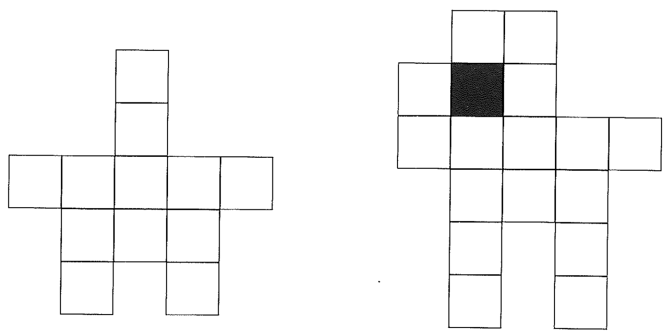


Figura 16

Mecanismos articulados

Hay muchos temas que me gustaría incluir en este artículo que tienen que ver con ideas espaciales: curvas de seguimiento; secciones cónicas; envolventes de curvas y superficies regladas; simetría; teselaciones; empaquetamiento en 2 y 3 dimensiones; curvas de anchura constante; redes y teoría de grafos, todos ellos vienen a mi mente. Pero no puedo acabar sin compartir algunas de mis ideas sobre la geometría de los mecanismos.

Se trata de un enfoque que he estado desarrollando desde 1966. Empecé cuando pasé de enseñar en una escuela para chicos a preparar a profesores de todos los niveles. La geometría que había estado desarrollando con el equipo del SMP me pareció bastante poco apropiada cuando me encontré trabajando una vez a la semana, junto a un grupo de mis alumnos, con 40 alumnos de 12 años de edad de baja capacidad. Fue entonces cuando decidí ver qué matemáticas podía encontrar en objetos como bicicletas, máquinas de coser y sillas plegables. Al principo me moví con precaución pero encontré una gran abundancia de ideas estallando ante mí, ideas que motivaban a mis alumnos y que les hacían más conscientes del mundo en el que vivían. ¡Para esto es para lo que debe servir la educación, no sólo para saber cómo pasar exámenes!

Desde muy pronto lo que me llamó la atención era la forma en que se usan cuatro barras articuladas en muchas situaciones. Como un cuadrilátero articulado, en su forma más simple, imaginemos cuatro barras atornilladas en sus extremos para formar un cuadrilátero de forma que las barras puedan girar.

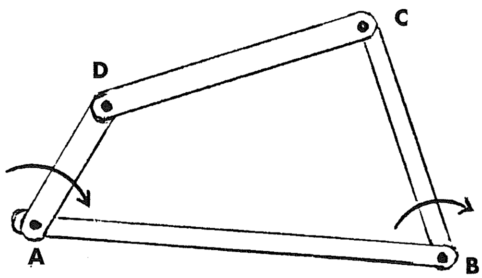
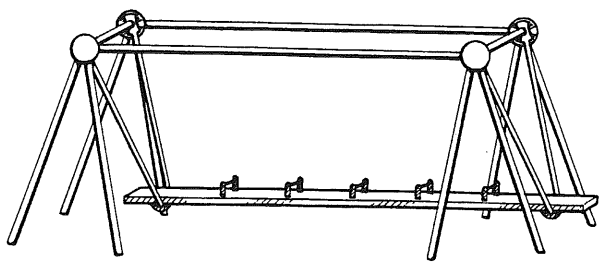


Figura 17

Para estudiar este tipo de articulación es imprescindible contruir un modelo y manipularlo. ¿Qué ángulo gira BC cuando AD gira 30°? ¿Qué puede decirse sobre la longitud de las barras para que formen un cuadrilátero? ¿Cuándo es posible para AD dar una vuelta completa alrededor de A?, y, ¿existe alguna situación en la que esto se use en la práctica? Mientras se manipula el cuadrilátero, cambia el área que encierra. ¿Cuál es el máximo?

Pero concentrémonos primero en el paralelogramo articulado y veamos dónde se usa y con qué propósito.



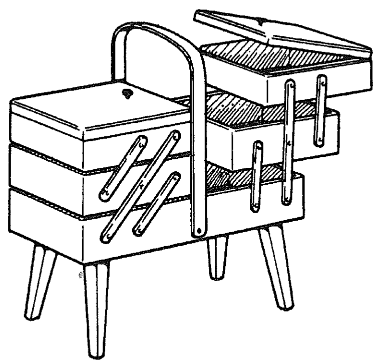


Figura 18

Fue entonces cuando decidí ver qué matemáticas podía encontrar en objetos como bicicletas, máquinas de coser y sillas plegables.

Un tipo de balancín, que se puede encontrar en los parques infantiles de Inglaterra, está claramente basado en un paralelogramo y cuando se balancea de un lado para otro el tablón que forma los asientos siempre permanece paralelo al suelo, aunque cualquier punto de él describe un arco de círculo. La caja de costura o de herramientas, que se muestra en la figura 18, tiene paralelogramos articulados formados por los cajones y las barras de metal unidas a ellos, de forma que siempre que se tira de los cajones para abrirlos éstos permanecen horizontales. He hecho que mis alumnos hagan modelos de esto usando tarjetas para las varillas y uniendo los finales con pasadores para sujetar papeles. Pronto aprendieron, a partir de la experiencia, que los cajones sólo se mueven paralelos a la base cuando los pasadores se colocan para que formen cuadriláteros con caras opuestas iguales.

Las balanzas de cocina, los granatarios de laboratorio y balanzas pesacartas, usan paralelogramos articulados. En estos casos es para asegurarse que los platillos de las balanzas permanezcan horizontales cuando se mueven arriba y abajo. Pero, ¿por qué los autocares, camiones y aviones, frecuentemente, tienen las escobillas de sus limpiaparabrisas montados sobre un paralelogramo articulado? ¿Por qué la suspensión de las ruedas de un coche de carreras consiste en un paralalogramo articulado? En cada caso, ello asegura que alguna parte del mecanismo se mueva paralela a otra, normalmente una parte fija. Los libros en relieve usan paralelogramos y es un ejercicio interesante, para los alumnos más jóvenes, hacer tarjetas de cumpleaños o de navidad que tengan efectos de relieve. Las «barquillas» de la parte superior de los elevadores, usados para arreglar alumbrado público, no vuelcan ya que usan paralelogramos articulados. Sin importar cómo se muevan los brazos del elevador, la barquilla siempre permanece horizontal. La mejor forma de comprender lo que pasa es construir modelos, como los que se muestran en la figura 19, que puedan moverse.

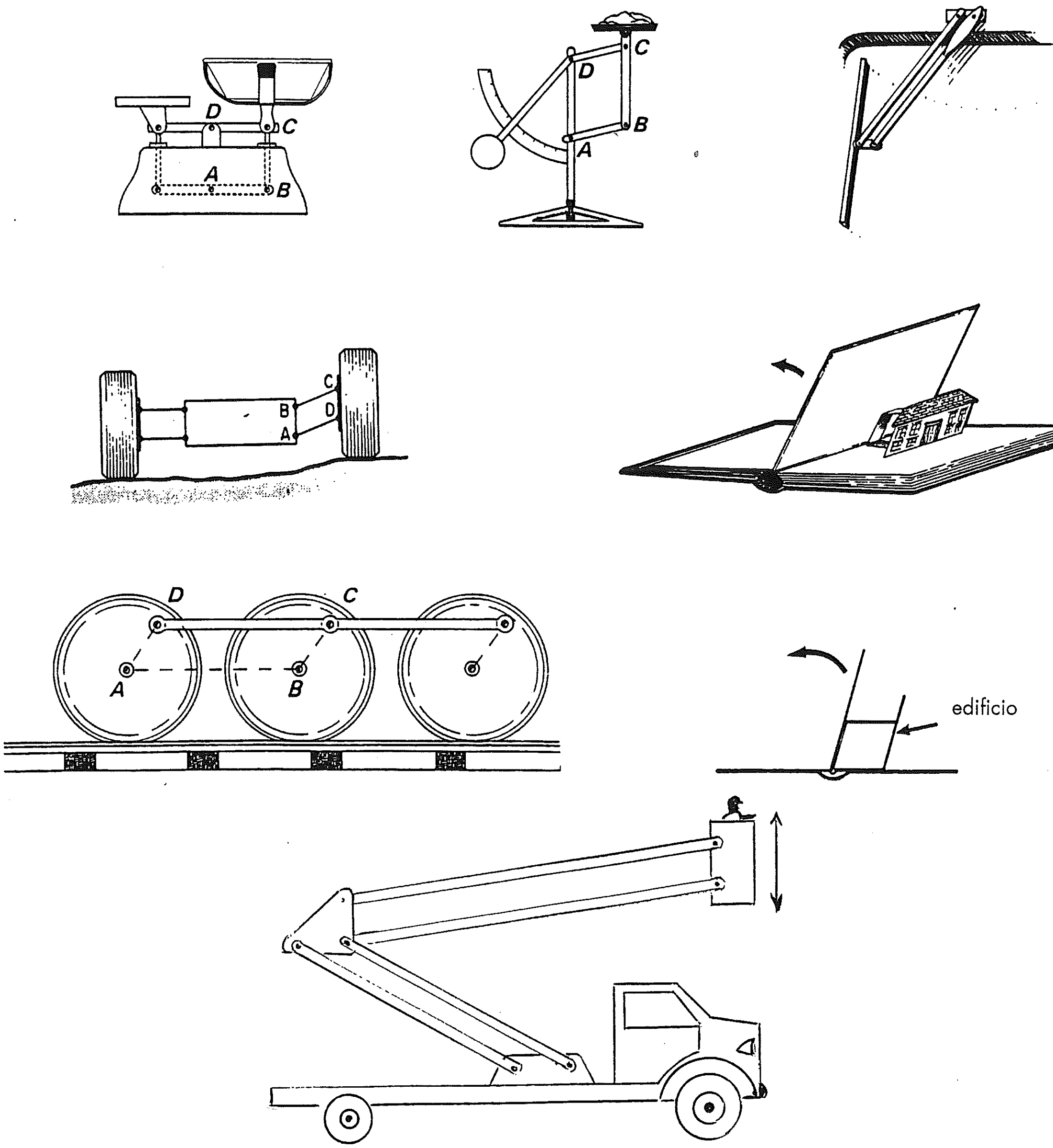


Figura 19

A continuación vamos a ver el trapecio articulado. En realidad es un nombre poco adecuado para la articulación ya que se trata tan sólo de un trapecio en su posición de equilibrio. Inicialmente tuve conocimiento de ella cuando observaba cómo están diseñados los caballitos de juguete. O bien están construidos sobre listones curvos o usando, como se muestra en la figura 20, un cuadrilátero articulado. En el caballo de los parques infantiles el mecanismo está oculto bajo su cuerpo. Los topes de los postes A y B son puntos fijos en el espacio y desde ellos estan conectadas dos barras cortas al armazón del cuerpo del caballo. Cuando se empuja el caballo de izquierda a derecha, C empieza en un arco ascendente de centro B mientras que D lo hace en un arco descendente de centro A. El resultado es que DC se balancea y por tanto también lo hace el caballo.

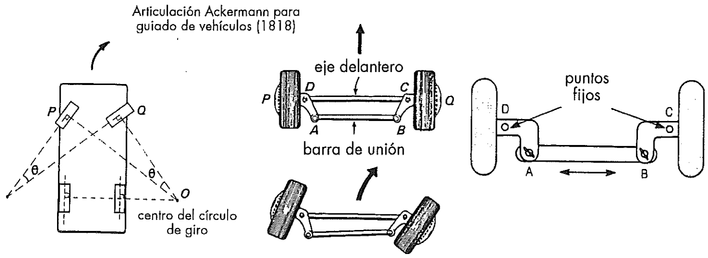


Figura 21

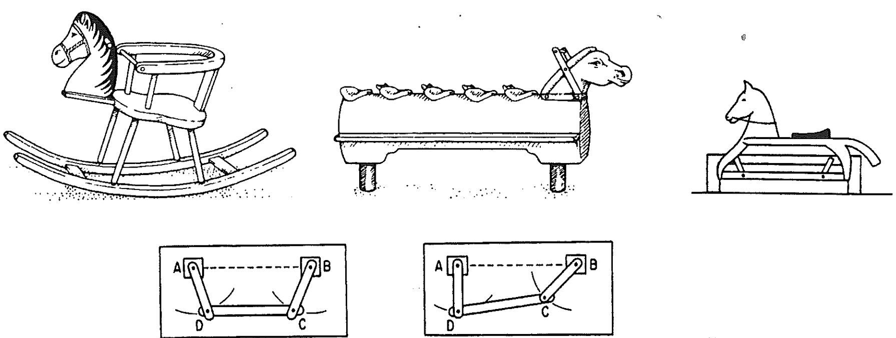


Figura 20

Considerado tan sólo como un mecanismo para un caballo de juguete, el trapecio articulado puede no ser demasiado interesante, pero en 1818 un ingeniero alemán vio en él la solución para dirigir coches tirados por caballos y hoy se usa en casi todos los vehículos de ruedas, desde un coche de juguete a un tractor, coche, camión o autobús. El problema que hay que resolver es asegurarse que al girar, las ruedas frontales se mueven en direcciones perpendiculares a las líneas que pasan por el centro del círculo de giro. Si no fuera así entonces las ruedas se arrastrarían lateralmente y pronto se desgastarían sus llantas. Ustedes lo habrán experimentado si la tracción de su coche no está adecuadamente ajustada. Esto significa que cuando se gira a la derecha entonces la rueda delantera derecha debe girar un ángulo mayor que la izquierda. Cuanto menor sea el radio de giro mayor será la diferencia entre los ángulos de las ruedas frontales. (Ver figura 21).

Incluso antes, en 1784, el ingeniero inglés James Watt usó este tipo de articulación para aproximarse a un movimiento rectilíneo. El problema que trataba de resolver era cómo guiar al vástago del pistón de un motor de vapor en línea recta fuera del cilindro, de manera que el cuello de la cabeza del cilindro no se desgastase demasiado rápidamente por la biela que conecta el vástago del pistón con el volante que tira de él lateralmente. Su solución parece muy simple y haciendo un modelo se ve cómo el punto medio de la corta varilla central traza una línea que parece recta hasta que se prolonga, que es cuando se le ve describir una delgada figura en forma de ocho. No obstante, este montaje se usó en máquinas de vapor de todo el mundo durante al menos dos siglos. (Figura 22).

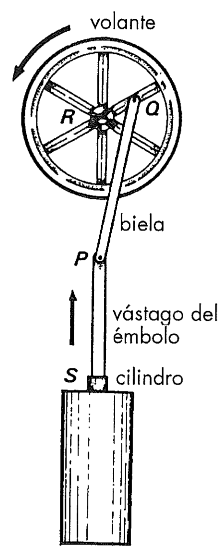
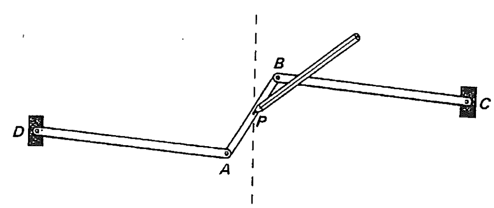
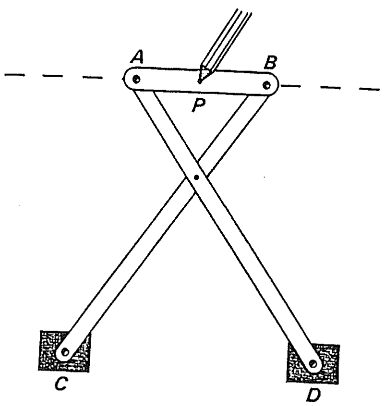


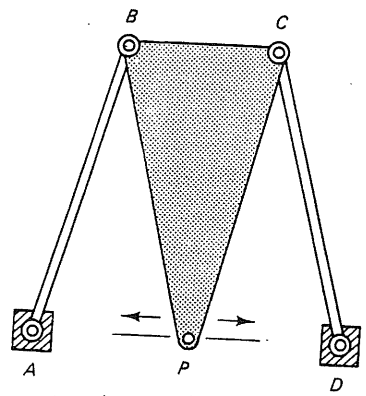
Figura 22



En 1850, el matemático ruso Tchebycheff creó una versión diferente de la articulación de cuatro barras con el mismo propósito. En su solución las longitudes estaban en razones 5:4:2. En 1860, Richard Roberts, otro inglés, ideó otra aproximación, que era incluso mejor, que de nuevo estaba en cuatro barras articuladas, ¡pero cuando se describe completamente el lugar geométrico del vértice del triángulo se da uno cuenta qué lejos queda de la línea recta!

Articulación Tchebycheff (1850)





Articulación Roberts (1860)

Figura 23

Cuadriláteros más generales aparecen como articulaciones, a menudo muy disfrazadas, en incontables situaciones. Tengo en casa un par de tijeras de podar cuyo diseño está basado en cuatro barras articuladas. A causa de ello se produce un deslizamiento a la vez que un movimiento de corte cuando se aprietan los mangos, obteniéndose un corte limpio. Los cochecitos plegables para niños, con frecuencia hacen uso de articulaciones entrelazadas como las que se muestran en la figura 24. ¡Cada fabricante tiene un diseño distinto de forma que se podría escribir una tesis sobre los diseños de cochecitos plegables para niños!

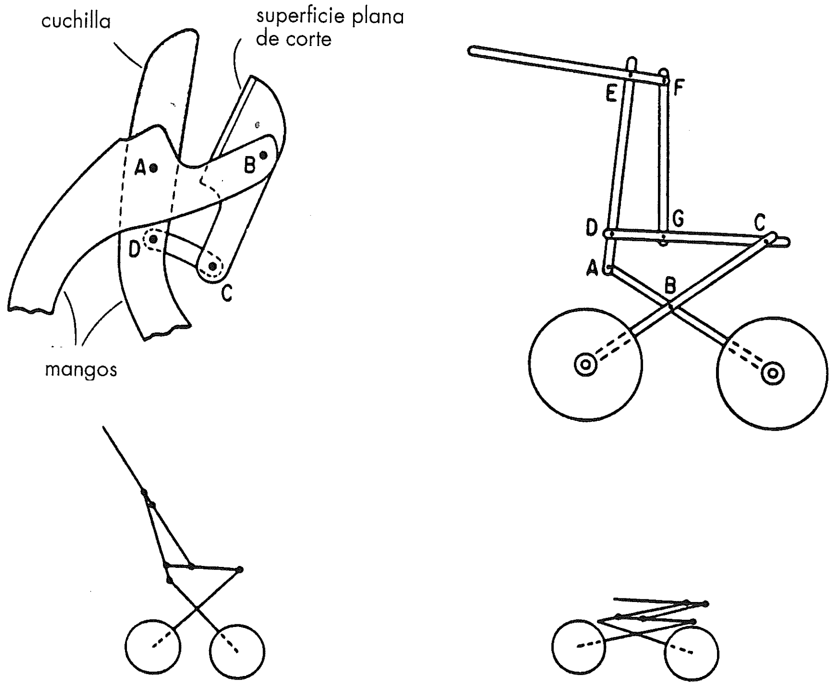


Figura 24

Pero en muchas ocasiones, el interés recae en el caso de que una de las barras de la articulación cruza sobre la opuesta y da una vuelta completa sobre uno de sus vértices.

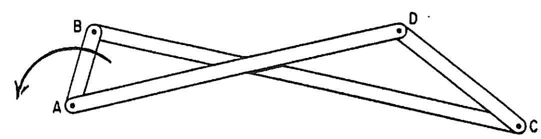


Figura 25

¡Un buen ejemplo es un cubo con pedal! Es necesario tener en cuenta donde están los pivotes y ver por qué es equivalente a cuatro barras articuladas. La máquina de coser a pedal es un buen ejemplo de una situación en la que una barra, unida al volante, da revoluciones completas. Es interesante examinar las longitudes relativas de las barras para que este giro sea posible y restringir el ángulo que gira el pedal a algo que el tobillo pueda soportar. Si se le da la vuelta a mi modelo, quizá se pueda ver que representa el pedaleo de un ciclista. Dos de las barras ahora la forman la pierna del ciclista. Si la potencia la aporta un motor que impulsa a la barra a hacer rotaciones completas, entonces la barra opuesta puede oscilar y servirá para impulsar un limpiaparabrisas o una lavadora. (Figura 25).

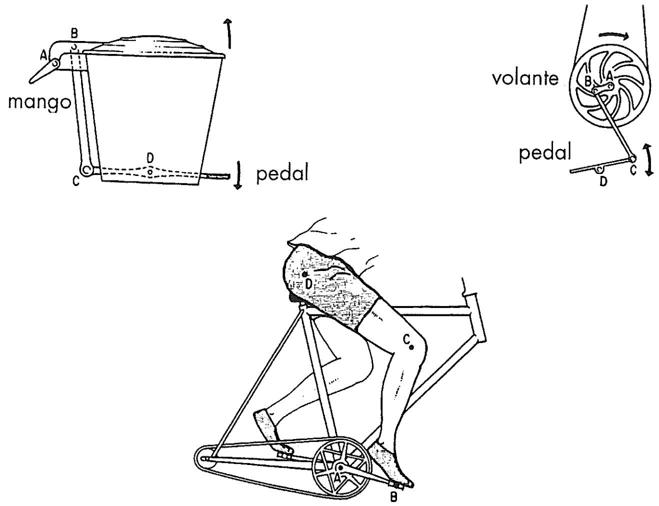
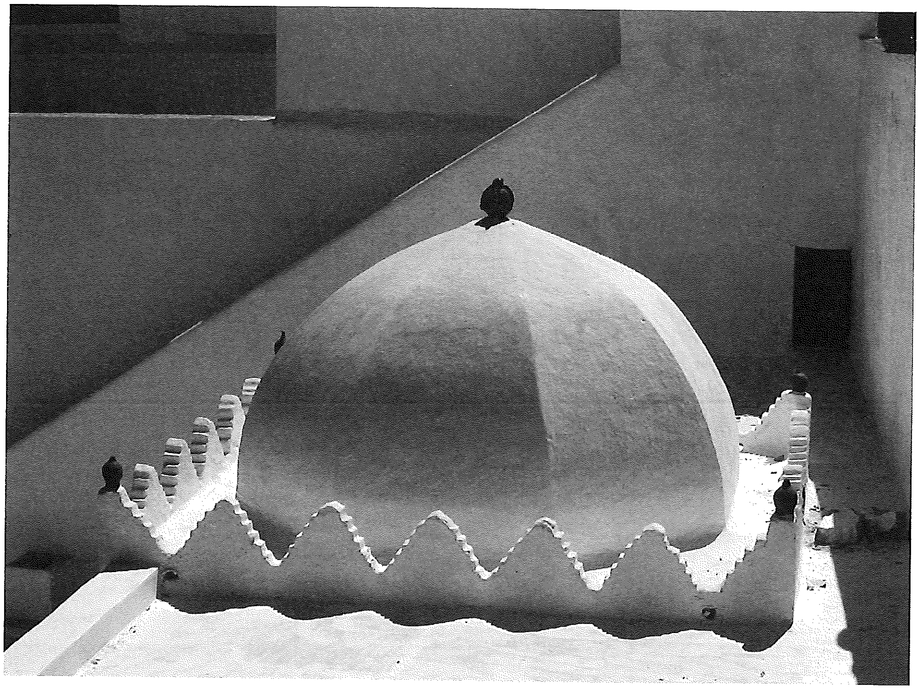


Figura 26

Sólo he tocado un aspecto de la geometría de los mecanismos pero hay muchos más que son acccesibles en el nivel escolar y que pueden relacionarse con el mundo real. En esta charla no he hecho ningún intento de construir una estructura geométrica tal como se ha enseñado tradicionalmente, o mencionado la palabra demostración. Desde mi punto de vista la geometría trata sobre la comprensión de relaciones espaciales. Es el área en la que más lugar tiene nuestro pensamiento creativo. Deseo haberos estimulado a haceros preguntas sobre la geometría que habeis enseñado y la que podríais enseñar. No estoy interesado en los futuros graduados en matemáticas, sino en la gran mayoría de alumnos que normalmente no estudian geometría después de los 16 años. Dicho esto, he descubierto que a los graduados en matemáticas, a los que he preparado como profesores, les motivó mucho el enfoque contenido en las ideas que os he presentado.

Brian Bolt
Universidad de Exeter.
Reino Unido


Marruecos
Foto: Pilar Moreno