SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 28

JUNIO

1998

SUMA 28

junio 1998

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 6.000 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de este número proceden de la obra de Aniceto Villar, *Problemas-tipo ilustrados y ejercicios de cálculo mental*, Salvatella, Barcelona, 1933. [Biblioteca ICE Universidad de Zaragoza. Legado Arturo Fernández Cancer].

SUMA 28

junio 1998

La Olimpiada

CUANDO este número de SUMA salga de la imprenta se estará celebrando en Almería la fase nacional de la Olimpiada Matemática organizada por la Federación. Será la culminación de una actividad en la que han participado durante este curso dos o tres mil profesores y centros y bastantes miles de chicos y chicas de 14 años.

La Olimpiada tiene diversas caras. Una de ellas, la que presentamos al alumnado, es la de una actividad lúdica, en la que a través de un concurso deben resolver una serie de problemas fuera del aula de Matemáticas con unas características especiales: son problemas poco académicos en general que no se resuelven con recetas previamente aprendidas, es preciso para resolverlos poner en juego determinadas estrategias de pensamiento, tienen un cierto carácter divertido, requieren cierta dosis de creatividad, están situados en contextos reales y próximos a los alumnos,...

Pero existen otros aspectos, quizás más importantes, que permanecen ocultos o semiocultos. Es una actividad indirecta de formación del profesorado; cada vez son más los profesores que, a través de la Olimpiada, van introduciendo en sus clases la resolución de problemas como una de las tareas primordiales de su trabajo en el aula. Esto, a su vez, contribuye a transformar el currículo en una de las direcciones apuntadas, tanto en la propuesta curricular española, como la que se recoge en diversos informes internacionales.

Además, permite incidir de manera muy directa en la atención a la diversidad de capacidades. Se reconoce que la resolución de problemas permite un acercamiento ajustado a las capacidades de cada sujeto. Con cierta frecuencia, se olvida que tan

EDITORIAL

«diversos» son los alumnos que necesitan determinados refuerzos como los que sobresalen en algún área determinada y requieren un tratamiento específico. La resolución de problemas de una cierta dificultad potencia el desarrollo del pensamiento matemático de alto nivel y la participación en concursos es un elemento motivador para la realización de este tipo de tareas.

No se puede obviar que la organización de la Olimpiada, en sus distintas fases autonómicas y nacional, requieren el esfuerzo y el trabajo desinteresado de muchas personas que dedican bastantes horas fuera de su horario de trabajo para que, año tras año, la Olimpiada sea una realidad. Pero, además, son necesarios unos recursos económicos importantes globalmente (aunque el coste por alumno no lo sea) que no siempre son fácil de obtener. Existen comunidades en las que conseguir la financiación necesaria es una verdadera odisea y hay que recorrer dependencias oficiales, casas comerciales, bancos,... hasta poder reunir los fondos necesarios. Sería preciso que las administraciones educativas se conciencien (las que no lo han hecho ya) de que este tipo de actividades no son un divertimento que «se han montado» un grupo de profesores, sino que son actividades serias que redundan claramente en una mejora de la enseñanza de las Matemáticas y que sintonizan de forma plena con los objetivos que, en nuestra materia, figuran en los documentos oficiales de la reforma educativa y, como consecuencia de ello, que deberían ser financiadas oficialmente.

SUMA 28

junio 1998, pp. 5-9

Una visión distinta de un problema clásico (II)

Jorge Hernández Herce
Mercedes González Menorca

En un artículo anterior, publicado en el n.° 24 de SUMA, abordábamos un problema clásico desde un punto de vista diferente. Ahora, aplicamos la misma técnica de resolución geométrica para otras dos desigualdades clásicas que relacionan las razones trigonométricas de un ángulo con el arco.

ARTÍCULOS

EN EL ARTÍCULO «Una visión distinta de un problema clásico», publicado en el número 24 de SUMA (febrero 1997), abordábamos una desigualdad clásica desde un punto de vista diferente. Allí indicábamos que la técnica usada para demostrar

$$\frac{\mathrm{Sen}\,\alpha}{\alpha} > \frac{\mathrm{Sen}\,\beta}{\beta} \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

nos servía también para probar que

$$\frac{\mathrm{Tan}\,\alpha}{\alpha} < \frac{\mathrm{Tan}\,\beta}{\beta} \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Tal vez sólo para ello no nos hubiéramos animado a escribir esta continuación, sin embargo, buscando relaciones entre el *arco* y el *ángulo*, encontramos (Kürschak, 1963) el siguiente enunciado

$$\beta < \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sen}\,\beta + \mathrm{Tag}\,\beta\right] \quad \text{si} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Junto con el enunciado se presentan dos soluciones distintas. Una de ellas, como es fácil suponer, razonaba en términos de áreas. Sin embargo, abordaremos el problema en la misma línea que habíamos utilizado para las dos expresiones anteriores, es decir, *arrastrando el ángulo* para intentar conseguir una *posición de Thales.*

Como esta visión es distinta y, además, utilizamos la relación de las tangentes, vamos a presentar aquí ambos resultados como continuación del artículo antes citado.

De las tangentes

Nuestro primer objetivo era probar

$$\frac{\mathrm{Tan}\,\alpha}{\alpha} < \frac{\mathrm{Tan}\,\beta}{\beta} \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Para ello recurrimos a la figura 1 en la que hemos tomado

$$|OA| = |OB| = |OC| = 1$$

$$\text{arco}(AB) = \alpha \ , \ \text{arco}(AC) = \beta$$

y, por consiguiente

$$|AS| = \text{Tan}\alpha \ , \ |AR| = \text{Tan}\beta$$

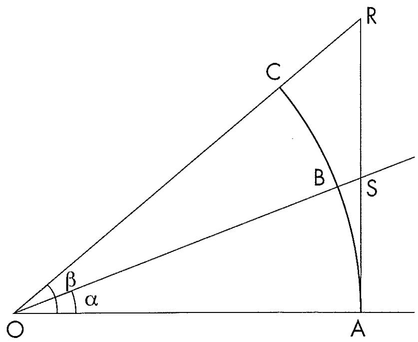


Figura 1

Arrastremos el ángulo β hacia la derecha de modo que $|A'R'| = |AR|$ y R' se encuentre sobre la prolongación de la línea OS. El arco(A'C') es pues igual al arco(AC).

Tracemos el arco de centro O y radio $|OA'|$ que será el arco(A'B').

Visto así, tenemos en la figura 2 que

$$\alpha \cdot |OA| = \text{arco}(AB)$$

$$\alpha \cdot |OA'| = \text{arco}(A'B')$$

Es claro entonces que se verifica la siguiente relación

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{\text{arco}(AB)}{\text{arco}(A'B')}$$

Y por simple proporcionalidad

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|AS|}{|A'R'|}$$

De ambas expresiones se sigue que

$$\frac{|AS|}{|A'R'|} = \frac{\text{arco}(AS)}{\text{arco}(A'B')} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Tan}\alpha}{\text{Tan}\beta} = \frac{\alpha}{\text{arco}(A'B')} \quad [*]$$

Si somos capaces de ver que

$$\text{arco}(A'B') > \text{arco}(A'C') = \beta$$

habremos conseguido nuestro propósito.

Si despejamos un poco la figura anterior y nos fijamos en la figura 3, «parece» bastante claro lo que queremos probar pues, no sólo se cumplirá lo previsto sino más aún:

$$\text{arco}(A'B') > \text{arco}(A'Z) > \text{arco}(A'C') = \beta$$

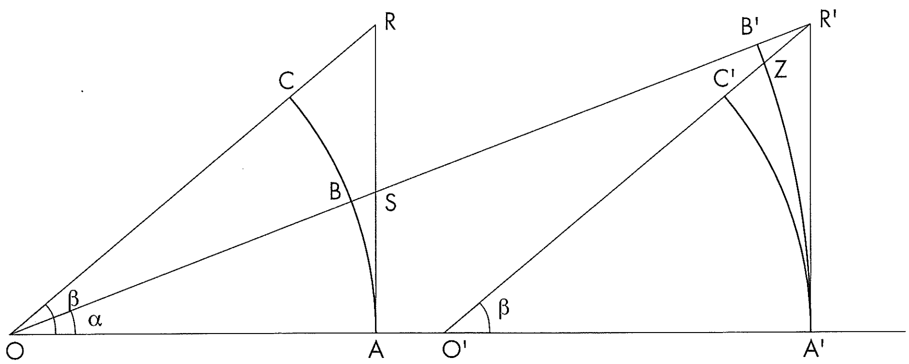


Figura 2

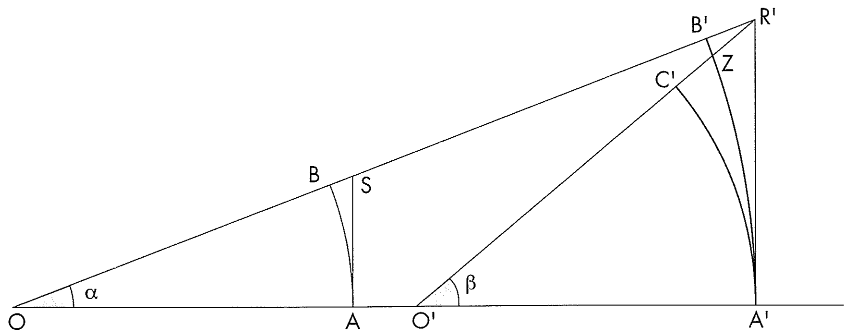


Figura 3

Para verificar esto último, vamos a añadir algunas líneas auxiliares que construyan la figura 4 en la que

$$|OO'| = |O''O'| \ , \ |OA'| = |O''A''|$$

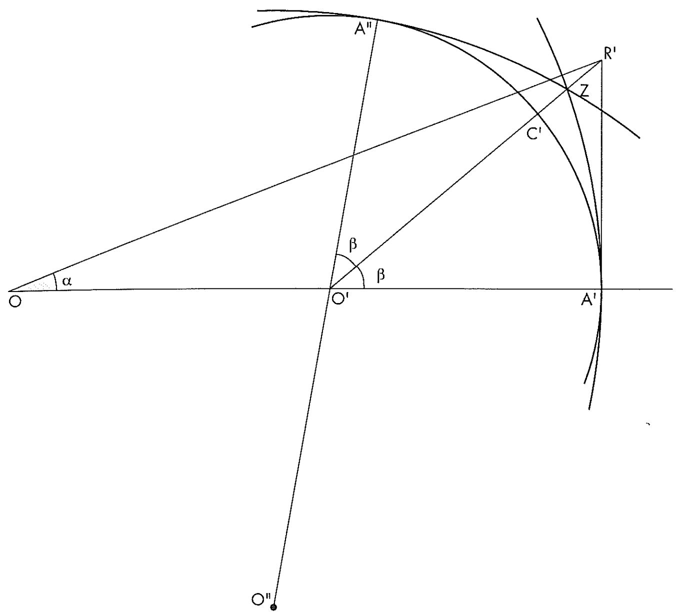


Figura 4

En realidad hemos tomado la figura 3 y hemos aplicado una simetría respecto a la recta O'R'. Como se observa, no hemos trazado todas las líneas del dibujo simétrico para no provocar confusión. para completar la imagen simétrica nos faltaría un segmento O"R' que es el simétrico del OR' y el segmento A"R' que sería el simétrico del A'R'.

Se observa perfectamente que el sector circular determinado por O'A'A" es menor que la figura determinada por los dos fragmentos O'A'Z y O'A"Z, Como además son figuras convexas y tienen los lados $|O'A'|$ y $|O'A''|$ iguales, podemos deducir que:

$$2 \text{ arco}(A'Z) = \text{arco}(A'Z) + \text{arco}(A''Z) >$$
$$> \text{arco}(A'C') + \text{arco}(A''C') = 2 \text{ arco}(A'C')$$

y de aquí es inmediato que:

$$\text{arco}(A'B') > \text{arco}(A'Z) > \text{arco}\ (A'C') = \beta$$

Lo que sustituyendo en [*] da lo quebuscábamos:

$$\frac{\text{Tag}\alpha}{\text{Tag}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{Tag}\alpha}{\alpha} < \frac{\text{Tag}\beta}{\beta}$$

De la semisuma del seno y la tangente

Nuestro segundo objetivo era:

$$\beta < \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\beta + \text{Tag}\beta\right] \quad \text{si} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

La expresión anterior se podría leer: «el arco es menor que la media aritmética del seno y la tangente, cuando el ángulo es agudo».

En apariencia, no hay una desigualdad como las analizadas entre el seno y el arco, sin embargo, tranformémosla ligeramente:

$$\beta < \frac{1}{2}\left[\frac{\text{Sen}\beta \cdot \text{Cos}\beta + \text{Sen}\beta}{\text{Cos}\beta}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{1+\text{Cos}\beta} < \frac{\text{Sen}\beta}{2 \cdot \text{Cos}\beta}$$

(si $0 < \beta < \pi/2$)

Ahora sí que disponemos de una desigualdad en términos de arcos y funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Construyamos la figura 5 partiendo de que:

$$|OA| = |OB| = 1$$
$$|OC| = \text{Cos}\beta$$
$$|BC| = \text{Sen}\beta$$

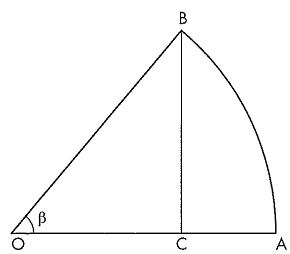


Figura 5

«Arrastrando el ángulo hacia la derecha» hasta que obtengamos una posición de Thales en la que $|CA'| = |CB'| = 1$ y entonces (figura 6):

$$|CC'| = \text{Cos}\beta$$
$$|B'C'| = \text{Sen}\beta$$
$$|OA'| = |OC| + |CA'| = \text{Cos}\beta + 1$$
$$|OC'| = |OC| + |CC'| = 2\text{Cos}\beta$$

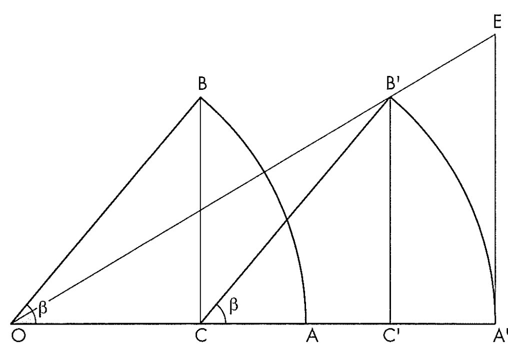


Figura 6

Aplicando proporcionalidad de triángulos resulta que:

$$\frac{|EA'|}{|OA'|} = \frac{|B'C'|}{|OC'|} \Leftrightarrow \frac{|EA'|}{1+\mathrm{Cos}\beta} < \frac{\mathrm{Sen}\beta}{2\cdot\mathrm{Cos}\beta} \quad [**]$$

Fijémonos que esta última expresión es casi la que queremos demostrar. Para ello sólo es preciso probar que:

$$|EA'| > \mathrm{arco}(A'B') = \beta.$$

Para comprobar este resultado, tracemos alguna línea auxiliar más en la figura anterior, obteniendo la siguiente figura 7:

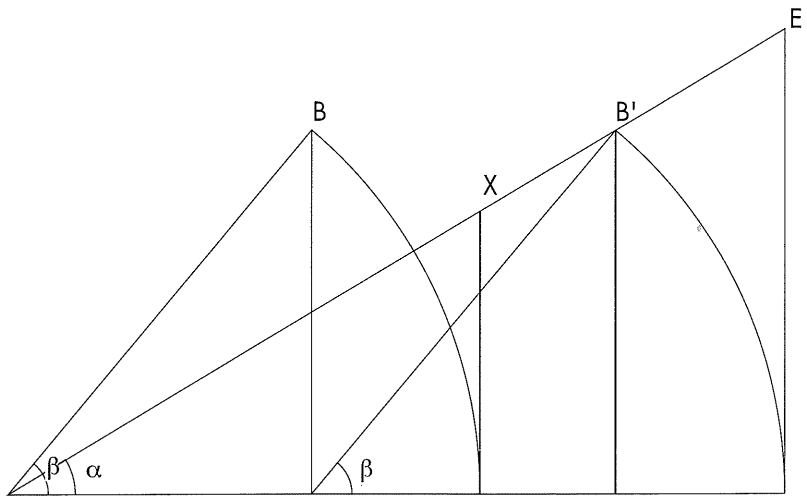


Figura 7

Si aplicamos proporcionalidad de triángulos, como

$$|AX| = \mathrm{Tag}\alpha \text{ y } |OA| = 1$$

$$\frac{|AX|}{1} = \frac{|BC'|}{|OC'|} \Leftrightarrow \frac{|AX|}{1} = \frac{\mathrm{Sen}\beta}{2\cdot\mathrm{Cos}\beta} \Leftrightarrow \mathrm{Tag}\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{Tag}\beta \Leftrightarrow \frac{\mathrm{Tag}\alpha}{\mathrm{Tag}\beta} = \frac{1}{2}$$

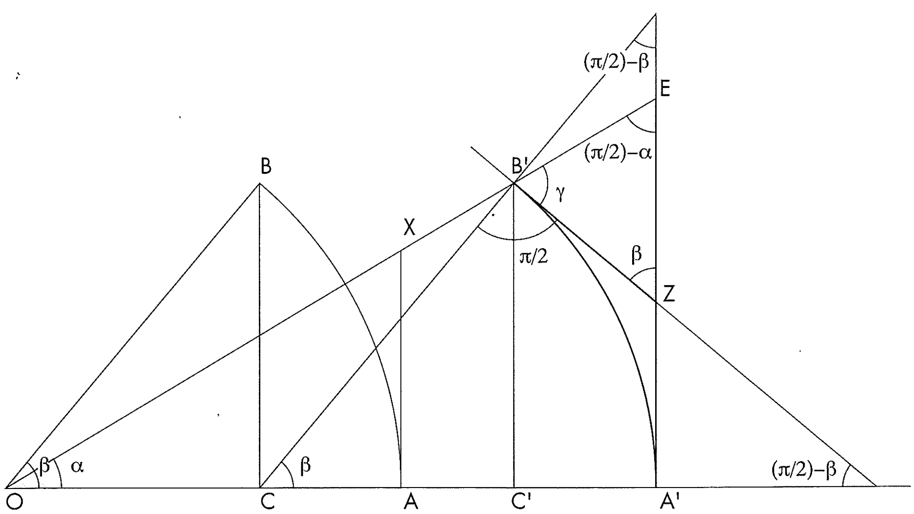


Figura 8

Los ángulos α y β cumplen las condiciones de la relación vista en el apartado anterior, por ello, podemos afirmar que:

$$\frac{1}{2} = \frac{\mathrm{Tag}\alpha}{\mathrm{Tag}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta < 2\alpha \quad [***]$$

Vamos ahora a centrarnos en la esquina superior derecha de la figura 7, añadiendo líneas auxiliares para definir el triángulo EB'Z (figura 8).

Mirando ángulos y aplicando [***]:

$$\gamma = \pi - [(\pi/2) - \alpha] - \beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \gamma = (\pi/2) - (\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \gamma > (\pi/2) - \alpha$$

Como en un triángulo, a mayor ángulo le corresponde mayor lado: $|EZ| > |B'Z|$. Y por eso:

$$|EA'| = |EZ| + |ZA'| > |B'Z| + |ZA'|$$

Ahora $|B'Z| + |ZA'|$ forman una convexa que contiene al arco(A'B'), acabamos de ver lo que queríamos:

$$|EA'| > \mathrm{arco}(A'B') = \beta$$

Otras observaciones importantes

a) En realidad, el transformar la expresión de partida en una desigualdad diferente, nos ha ocultado ligeramente que:

$$|EA'| = \frac{1}{2}(\mathrm{Sen}\beta + \mathrm{Tag}\beta)$$

En efecto, basta aplicar la proporcionalidad de los triángulos y la relación es evidente.

b) Hasta qué punto es ajustada la desigualdad demostrada en el apartado anterior, lo da la tabla 1 de la página siguiente de valores en incrementos de 0,1 radianes.

En definitiva, como es sabido, el seno es una aproximación al arco mejor que la tangente ($\mathrm{Tag}\beta - \beta > \beta - \mathrm{Sen}\beta$) y esto determina que:

$$\beta < \frac{1}{2}\left[\mathrm{Sen}\beta + \mathrm{Tag}\beta\right] \quad \text{si} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Bibliografía

FERNÁNDEZ HERCE, J. y M. GONZÁLEZ MENORCA (1997): «Una visión distinta de un problema clásico», *SUMA*, n.° 24, 59-62.

FIOL, M. L. y J. M. FORTUNY (1990): *Proporcionalidad directa. La forma y el número*, Síntesis, Madrid.

GARCÍA ARENAS, J. y C. BERTRÁN I INFANTE (1978): *Geometría y experiencias*, Alhambra, Madrid.

GRUPO BETA (1990): *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Síntesis, Madrid.

GUZMÁN, M. de (1976): *Mirar y ver. Nueve ensayos de geometría intuitiva*, Alhambra, Madrid.

KÜRSCHAK, J. (1963): *Hungarian problem Book. Vol. 2*, The mathematical Association of America, Random House, New York.

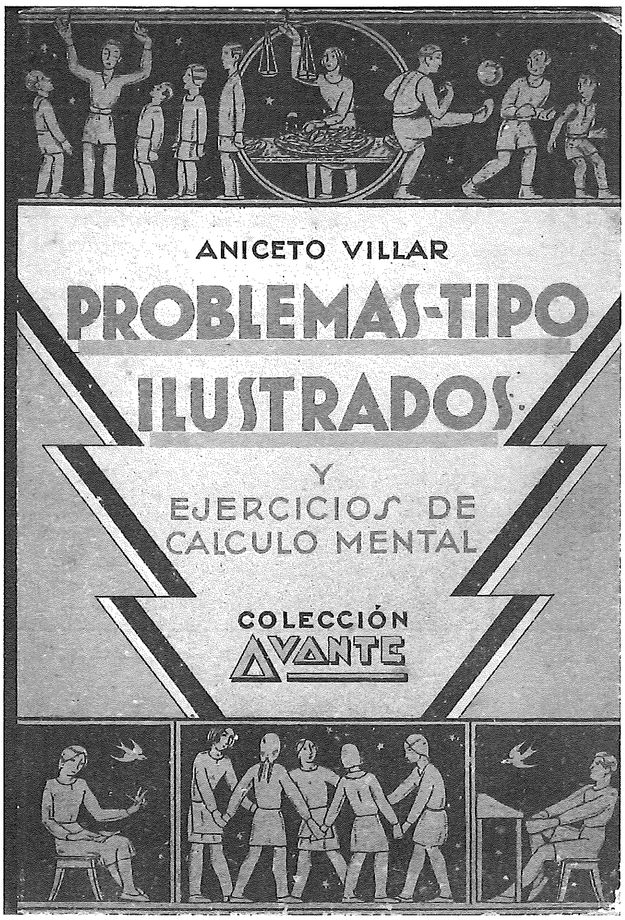
ROANES MACÍAS, E. (1987): *Introducción a la geometría*, Anaya, Madrid.

VV.AA. (1978): *Geometría. Curso Superior*, Bruño, Madrid.

Jorge Fernández
Mercedes González
Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas
Isaac Newton

β	$Sen\beta$	$Tag\beta$	$(Sen\beta+Tag\beta)/2$
$\pi/2 - 1,5 = 0,0708$	0,07074	0,07091	0,07083
$\pi/2 - 1,4 = 0,1708$	0,16997	0,17248	0,17122
$\pi/2 - 1,3 = 0,2708$	0,26750	0,27762	0,27256
$\pi/2 - 1,2 = 0,3708$	0,36236	0,38878	0,37557
$\pi/2 - 1,1 = 0,4708$	0,45360	0,50897	0,48128
$\pi/2 - 1,0 = 0,5708$	0,54030	0,64209	0,59120
$\pi/2 - 0,9 = 0,6708$	0,62161	0,79355	0,70758
$\pi/2 - 0,8 = 0,7708$	0,69671	0,97121	0,83396
$\pi/2 - 0,7 = 0,8708$	0,76484	1,18724	0,97604
$\pi/2 - 0,6 = 0,9708$	0,82534	1,46170	1,14352
$\pi/2 - 0,5 = 1,0708$	0,87758	1,83049	1,35404
$\pi/2 - 0,4 = 1,1708$	0,92106	2,36522	1,64314
$\pi/2 - 0,3 = 1,2708$	0,95534	3,23273	2,09403
$\pi/2 - 0,2 = 1,3708$	0,98007	4,93315	2,95661
$\pi/2 - 0,1 = 1,4708$	0,99500	9,96664	5,48082

Tabla 1



FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Antoni Vila
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Fidela Velázquez
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: J. Antonio Rupérez Padrón
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Modesto Sierra Vázquez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez
IES José María Pereda. C./ General Dávila, 288. 39007-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 28
junio 1998, pp. 11-26

Una breve introducción a la teoría de grafos

Amador Menéndez Velázquez

En este artículo presentamos una breve introducción a la Teoría de los Grafos. La Teoría de los Grafos es un ejemplo de una rama de la Ciencia que ha surgido y evolucionado para ir proporcionando soluciones a problemas concretos. La Teoría de los Grafos se utiliza rutinariamente, aunque quizás de una forma inconsciente, en la Química, la Física, la Electrónica, la Informática... Por eso hemos creído conveniente presentar en un artículo de esta revista las bases de dicha teoría junto con algunas posibles aplicaciones adecuadas para abordar en el aula de Secundaria.

ARTÍCULOS

EXISTE cierto tipo de problemas que únicamente tienen que ver con un determinado número de puntos y ciertos trazos que los unen. La teoría de los grafos (Ore, 1995 y Biggs, 1974) es la rama de la Matemática Discreta (Bujalance y otros, 1993) que se ocupa de tal tipo de problemas. La conectividad entre los elementos de un conjunto es pues el objetivo fundamental de la teoría de los grafos.

La teoría de los grafos es una de las áreas de la Matemática cuyo desarrollo ha estado siempre motivado por sus aplicaciones. Así, el primer artículo conocido sobre la misma fue escrito por Euler y publicado en 1736 para dar solución al célebre problema de «los puentes de Königsberg». La situación era la siguiente: ¿Es posible encontrar una ruta en la ciudad que recorra los siete puentes, cruzando cada uno de ellos una sola vez y regresando al punto de partida? Euler demostró que no era posible. Así surgió el concepto de grafo euleriano que, informalmente hablando, es «aquel grafo que puede ser dibujado sin levantar el lápiz del papel, sin pasar dos veces por la misma línea y acabando en el punto de partida». A partir de tal fecha muchos matemáticos importantes han realizado contribuciones. En los siglos XVIII y XIX se puede citar a Euler, Vandermonde, Cauchy, Cayley, Hamilton, Kempe, Tait, Heawood, Kirchoff y Petersen, entre otros. Durante este siglo, los estudios en este terreno no han cesado y otro hito en la historia de la Teoría de los Grafos fue la aparición en 1936 del primer texto sobre este tópico escrito por D. König (1936). Desde sus orígenes, la Teoría de los Grafos se utilizó para la resolución de juegos matemáticos, para el estudio de circuitos eléctricos y en diversas aplicaciones en una multitud de campos tan diferentes como la economía (Avondo-Bodino, 1962), física teórica (Haray, 1967 y Capra, 1979), psicología (Cartwright y Haray, 1963), física nuclear

(Mattuck, 1967), linguística (Culik, 1964), sociología (Flament, 1963), zoología (Lissowsky, 1971), tecnología (Korach y Haskó, 1972), antropología (Hage y Haray, 1983), computación (Even, 1979), biología (Roberts, 1989), ingeniería (Johnson y Johnson, 1972), química (Balaban, 1976 y Trinajstic, 1977)... En la actualidad, la teoría de los grafos sigue aplicándose dentro y fuera de las matemáticas y continúa siendo una rama de investigación muy activa. Las aplicaciones de la teoría de los grafos a la informática (por ejemplo, para la representación de datos o diseño de redes) han despertado interés en aspectos concretos de la teoría, como pueden ser la búsqueda de algoritmos adecuados para la exploración de grafos.

La teoría de los grafos está estrechamente ligada a otros campos de la matemática como la topología (en realidad la teoría de los grafos es topología monodimensional), la teoría de grupos, la teoría de conjuntos y la combinatoria.

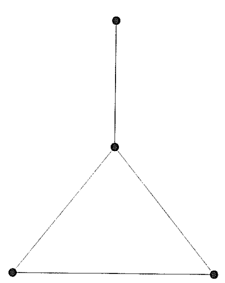
A continuación expondremos los conceptos fundamentales de la teoría y algunas aplicaciones de la misma. El estudiante de Enseñanza Secundaria podrá darse cuenta de que el concepto de grafo ya lo ha utilizado, quizás inconscientemente, a lo largo de sus estudios. Así, por ejemplo, las leyes de Kirchoff o las fórmulas estructurales de los compuestos químicos son una manifestación inequívoca de la teoría de los grafos.

El concepto de grafo

Los grafos pueden ser considerados formalmente como diagramas o dibujos (representación diagramática), o bien algebraicamente como un par de conjuntos (representación algebraica).

Definición geométrica

Geométricamente, un grafo G es un conjunto de puntos en el espacio, algunos de los cuales están unidos entre sí mediante líneas. En la figura 1 mostramos un ejemplo de grafo.



G

Figura 1. Representación geométrica del grafo G

Este grafo puede representar una multitud de situaciones posibles de la vida real. Podría simbolizar por ejemplo, un mapa de carreteras, donde los puntos representarían pueblos o ciudades y las líneas las carreteras que unen las ciudades entre sí. En este caso, el grafo nos informaría de las posibles comunicaciones que existen entre las ciudades. Pero este mismo grafo también podría esquematizar un circuito eléctrico, una molécula química (donde los puntos serían los átomos y las líneas los enlaces químicos), etc. Debemos de advertir, no obstante, que un grafo contiene únicamente información topológica, es decir, información sobre las conectividades entre puntos, careciendo de información geométrica en el sentido euclídeo (distancias, ángulos...). Así, los dos dibujos mostrados en la figura 2 representan en realidad el mismo grafo.

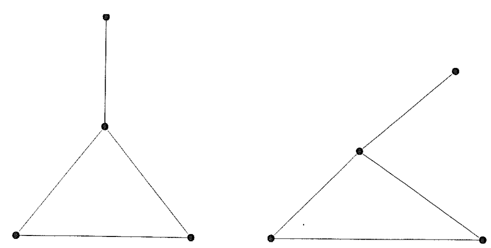


Figura 2. Dos representaciones geométricas diferentes de un mismo grafo

Recordemos al estudiante que la teoría de los grafos es topología monodimensional y la *topología* se puede definir como la «geometría de la distorsión» (ver figura 3).

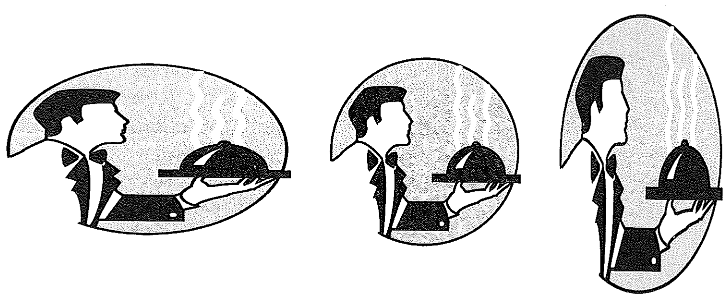


Figura 3. Una deformación «continua» de un objeto conserva la forma (topología) del mismo.

Definición algebraica

Acabamos de ver que un grafo G es un conjunto de puntos y de líneas conectando algunas parejas de puntos. Esta definición nos proporciona una visión muy intuitiva del concepto de grafo. Si queremos formalizar el concepto de grafo, debemos recurrir al álgebra, haciendo previamente mención explícita a dos conjuntos: el conjunto de los vértices («vertex set»), V , y el conjunto de los lados («edge set»), E, del grafo G. Así, algebraicamente, un grafo G se define como un par ordenado

$$G = (V, E) = (V(G), E(G))$$

donde V es un conjunto no vacío de *puntos* del espacio topológico, también conocidos como *vértices* o *nodos*, y E es un conjunto de pares no ordenados de elementos distintos de V, denominados *lados*, *líneas* o *aristas*. En la mayoría de los casos de interés práctico, ambos conjuntos son finitos. Si dos vértices *i* y *j* están unidos por una misma arista, diremos que los vértices *i* y *j* son *adyacentes*, y representaremos la arista correspondiente por (i, j) o (j, i), ya que, según hemos advertido, se trata de un par no ordenado. También podemos decir que los vértices *i* y *j* son dos vértices vecinos, que son los extremos de un mismo lado, o que son *incidentes* al lado (i, j). Por otra parte, diremos que dos lados son *adyacentes* si tienen al menos un vértice en común. Para poder representar algebraicamente un grafo es necesario que esté etiquetado, es decir, que los vértices se distingan unos de otros mediante etiquetas, las cuales pueden ser números o letras.

En la figura 4 mostramos como ejemplo un etiquetado posible del grafo G anteriormente considerado.

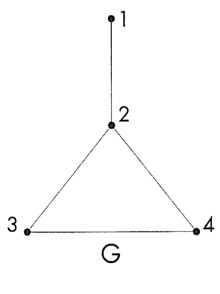


Figura 4. Etiquetado del grafo simple G

Los grafos son usados con frecuencia para representar redes de comunicación o transporte.

La representación algebraica de este grafo viene dada por (notación explícita):

$$G = (V, E) = (V(G), E(G))$$

$$V = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = E(G) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}$$

donde v_i hace alusión al vértice con la etiqueta *i*. Una representación alternativa (notación simplificada) es:

$$G = (V, E) = (V(G), E(G))$$

$$V = V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E = E(G) = \{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3,4)\}$$

En este artículo usaremos la notación explícita o la notación simplificada, dependiendo de las necesidades particulares.

El número de vértices del grafo G, $|V(G)|$, se denomina *orden del grafo*. El número de lados del grafo G, $|E(G)|$, se conoce como *tamaño del grafo*. Un grafo es finito si $|V(G)|$ y $|E(G)|$ son finitos. En este artículo sólo trataremos con grafos finitos.

Caminos y distancias en un grafo

Los grafos son usados con frecuencia para representar redes de comunicación o transporte. En un grafo que represente una de estas redes es importante conocer la existencia de caminos que recorran todas las aristas o todos los vértices y que en cierto modo sean los más «económicos». En este artículo examinaremos este tipo de problemas. Para ello comenzaremos dando una serie de definiciones básicas.

Un *camino* o *ruta* en un grafo G es una secuencia (finita) en la que aparecen alternadamente vértices y lados de G:

$$v_0 \to (v_0, v_1) \to v_1 \to (v_1, v_2) \to v_2 \to \ldots \to (v_{N-1}, v_N) \to v_N$$

donde cada lado tiene por extremos los vértices inmediatamente precedente y siguiente en la secuencia. Por lo tanto, el camino también puede ser representado, sin pérdida de información alguna, por la secuencia:

$$v_0 \to v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_{N-1} \to v_N$$

En esta última secuencia no aparecen explícitamente los lados, pero son evidentes por el contexto. A los vértices v_0 y v_N se les denomina extremos del camino (v_0: vértice inicial del camino, v_N: vértice final del camino) y se dice que el camino va de v_0 a v_N, o que conecta v_0 y v_N. La longitud de un camino es el número de aristas que contiene. Un camino tiene la propiedad de que dos lados consecutivos del mismo son o bien adyacentes o bien idénticos (si retrocedemos en el camino).

El concepto de camino es demasiado general, así que vamos a imponer algunas restricciones que darán lugar a diferentes tipos de caminos. Lo haremos fijándonos en el grafo de la figura 5. Un camino se dice que es *cerrado* si sus extremos coinciden, es decir, si empieza y termina en el mismo vértice (ej., camino $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2$). En caso contrario, se dice que es un camino *abierto* (ej., camino $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5$). Un *circuito* es un camino cerrado en el cual todos los lados (aunque no necesariamente todos los vértices) son distintos (ej., camino $6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6$). Un *ciclo* es un camino cerrado en el cual todos los vértices (excepto el inicial y el final) son distintos y, como consecuencia, todos los lados son también distintos (ej., camino $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 2$, camino $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 1$).

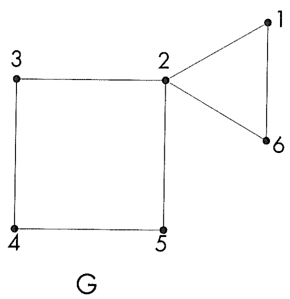


Figura 5. Grafo etiquetado G ilustrando diferentes tipos de caminos

La longitud de la vía más corta entre los vértices *i* y *j* en un grafo G se conoce como la *distancia* entre esos dos vértices y se representa por d(i, j). Esta distancia *d* es una cantidad positiva y toma sólo valores enteros. Tiene las siguientes propiedades:

(P1) $d(i, j) = 0 \Leftrightarrow i = j$

(P2) $d(i, j) = d(j, i), \forall\, i, j \in V(G)$

(P3) $d(i, k) \leq d(i, j) + d(j, k), \forall\, i, j, k \in V(G)$

(P4) $d(i, j) = 1 \Leftrightarrow (i, j) \in E(G)$

Para el estudiante de Secundaria puede resultar muy interesante comparar estas propiedades de la *distancia topológica* con las propiedades de la distancia euclídea que estudia en la asignatura de Matemáticas.

Existen grafos donde para cada par de vértices *i* y *j* hay al menos un posible camino conectándolos y existen grafos donde no hay camino alguno conectando una determinada pareja de vértices. Si un grafo representa una red de comunicaciones es indudablemente importante conocer si existe algún camino entre una determinada pareja de vértices. Esto llevó a los matemáticos a introducir el concepto de *grafo conexo*. Si todas las parejas posibles de vértices de un grafo G están conectados por al menos un camino, entonces se dice que G es un grafo conexo. Si no existe camino alguno entre alguna pareja de vértices *i* y *j* del grafo G, esto es, $d(i, j) = \infty$, se dice que G es un *grafo no conexo* y que los vértices i y j pertenecen a diferentes componentes del grafo. El número de componentes del grafo G lo representaremos por $k = k(G)$. En la figura 6 mostramos ejemplos de grafos de 1, 2 y 3 componentes, respectivamente.

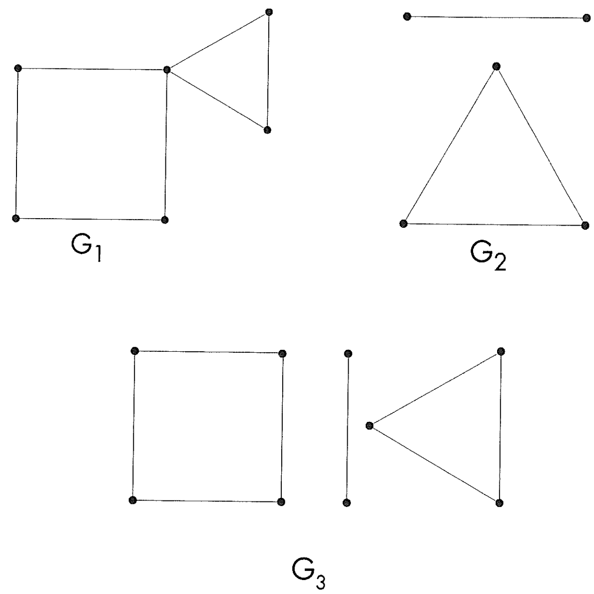


Figura 6. Representación diagramática de los grafos G_1, G_2 y G_3, con una, dos y tres componentes de grafo, respectivamente.

Podemos observar que el grafo G_1 es un grafo conexo [$k(G_1) = 1$]. Sin embargo, los grafos G_2 y G_3 son grafos no conexos [$k(G_2) = 2$, $k(G_3) = 3$].

Una vez que se ha introducido el concepto de distancia en un grafo, se puede definir fácilmente la *valencia* o el *grado* de un vértice. Se define la valencia o el grado de un vértice dado *i*, gr(i), como el número de vértices adyacentes al vértice *i*, es decir, el número de vértices cuya distancia al vértices *i* es 1. Un vértice de valencia cero se llama vértice *aislado*, por razones obvias. Un vértice de valencia uno se llama vértice *terminal*.

Representación matricial de los grafos

Los grafos también pueden ser representados mediante matrices. La ventaja de la representación matricial de un grafo es que para las matrices ha sido desarrollada toda una teoría, que nos permitirá la manipulación de las matrices para extraer cierta información característica del grafo. El estudiante puede ver así una aplicación práctica de la teoría matricial, que la primera vez que se le presenta en COU o en 2.° de Bachillerato le resulta un poco abstracta y quizás inútil.

La matriz que definiremos es la *matriz de adyacencia* de los vértices. Esta matriz también se conocen como *matriz topológica*. Es preciso advertir que para poder hacer uso de la representación matricial, al igual que ocurría con la representación algebraica, es necesario que los grafos estén etiquetados. Esta matriz contendrá exactamente la misma información que la representación algebraica del grafo, pero es mucho más manejable computacionalmente. En concreto, esta matriz goza de múltiples aplicaciones en física, química, diseño de redes...

La matriz de adyacencia de vértices $\boldsymbol{A}$(G) de un grafo etiquetado G con N nodos es la matriz cuadrada simétrica definida como

$$(A)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si i y j son adyacentes} \\ 0 & \text{si i y j no son adyacentes} \end{cases} \quad i \neq 0$$

$$(A)_{ii} = 0$$

Por lo tanto, un elemento de la matriz genérico $(A)_{ij}$ tomará el valor 1 si y sólo si hay un lado conectando los correspondientes nodos *i* y *j*.

Consideremos como ejemplo el grafo G de la figura 4. La matriz de adyacencia de vértices A(G) viene dada por

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ventaja de la representación matricial de un grafo es que para las matrices ha sido desarrollada toda una teoría, la cual nos permitirá la manipulación de las matrices para extraer cierta información característica del grafo.

Podemos observar que en esta matriz es muy fácil visualizar la conectividad interna de los vértices. Podemos también observar la simetría respecto de la diagonal principal, es decir, $(A)_{ij} = (A)_{ji}$. Ello es debido a que ambos elementos de matriz nos informan de una misma realidad: que los vértices *i* y *j* están conectados por un lado.

De acuerdo a la la teoría matricial, podemos calcular las potencias n-ésimas de la matriz A. Estas potencias encierran una importantísima información topológica. Así, un elemento genérico de la potencia n-ésima de la matriz matriz A, a_{ij}, (con i ≠ j) es igual al número de diferentes caminos de longitud *n* conectando los vértices *i* y *j*. En el ejemplo que venimos considerando, las sucesivas potencias de A vienen dadas por (el estudiante puede comprobarlo):

$$A^1(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^2(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A^3(G) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vamos a considerar, como ejemplo, el elemento a_{14} (o a_{41}) de cada una de estas tres matrices. En la primera matriz, $A^1(G)$, (que coincide con la matriz de adyacencia de los vértices) toma el valor cero, indicando que no existe ningún camino de longitud 1 conectando los vértices 1 y 4, o lo que es lo mismo, que no existe lado alguno conectando dichos vértices. Pero esto no significa que no podamos viajar del vértice 1 al vértice 4. Podemos viajar, aunque sea dando un pequeño rodeo. Así, podemos observar en la segunda matriz, $A^2(G)$, que el elemento toma el valor 2, reflejando la realidad de que existe un camino de longitud 2 que nos lleva del vértice 1 al vértices 4. Ese camino viene dado por la secuencia de vértices $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$. Por último, cabe destacar que en la tercera matriz, $A^3(G)$, este elemento toma también el valor 1, reflejando nuevamente la existencia de un camino de longitud 3 entre los vértices 1 y 4. Este camino ahora viene dado por la secuencia $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$.

Como ejercicio, el estudiante puede tratar de fijarse en los diferentes elementos de cada una de las tres matrices anteriores para saber el número de caminos de diferente longitud entre las diferentes parejas de vértices. Una vez conocido el número de caminos, entonces puede tratar de averiguar cuáles son cada uno de estos caminos examinando el grafo. Vamos a considerar un nuevo ejemplo, ésta vez fijándonos en los vértices 1 y 2. Así, podemos ver en la primera matriz, $A^1(G)$, que el elemento a_{12} toma el valor uno. Esto significa que existe un lado o camino de logitud uno conectando estos vértices. Este camino viene dado por la secuencia de vértices $1 \rightarrow 2$. En la segunda matriz, $A^2(G)$, el elemento a_{12} toma el valor cero, reflejando la realidad de que no existe ningún camino de longitud dos conectando los citados vértices. Por último, podemos observar en la tercera matriz, $A^3(G)$, que el elemento a_{12} vale tres, indicándonos la existencia de tres caminos de longitud tres conectando los vértices 1 y 2. Estos caminos vienen dados, respectivamente, por las secuencias de vértices $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$; $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2$; y $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$.

Una ampliación del concepto de grafo: grafo general

La definición de grafo dada anteriormente se corresponde con lo que algunos autores denominan *grafo simple*. En ella hemos puesto alguna restricción. Por ejemplo, hemos dicho que los elementos de E son pares no ordenados de elementos *distintos* de V. Por lo tanto, al no permitir que un elemento aparezca repetido en un mismo par, no estamos permitiendo la existencia de lazos o «loops» (aristas que empiezan y terminan en el mismo vértice). También hemos dicho que E es un *conjunto* de elementos y no una *familia* de elementos. En este contexto, entendemos por conjunto una colección de elementos distintos, y por familia una colección de elementos, algunos de los cuales pueden repetirse varias veces. De acuerdo a esta definición, todo conjunto es una familia, pero lo inverso no siempre es cierto. Así, por ejemplo, {1, 2, 3, 4} es un conjunto y una familia, mientras que {1, 2, 3, 3, 4, 4} es una familia, pero no un conjunto. En definitiva, al imponer que E(G) sea un conjunto, estamos impidiendo que el grafo tenga más de una arista conectando una misma pareja de vértices. Existen algunas extensiones de la idea de grafo que son muy útiles y frecuentemente usadas en la vida real y las iremos examinando a continuación.

La ampliación del concepto de grafo simple surge precisamente al eliminar una o alguna de las restricciones impuestas en la definición del mismo.

Así, un *multigrafo* es un grafo con (posiblemente) varios lados entre un mismo par de vértices (lados múltiples). Por lo tanto, en la definición formal de multigrafo se permite que E(G) sea una familia, es decir, que algunos elementos aparezcan repetidos (aristas con el mismo par de extremos). En la figura 7 mostramos un ejemplo de multigrafo. El conjunto de vértices y la familia de aristas vienen dados, respectivamente, por:

V(G) = {1, 2, 3, 4}

E(G) = {(1, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

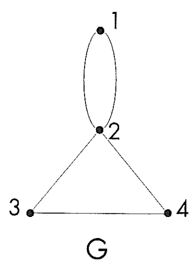


Figura 7. Representación geométrica del multigrafo G

La ampliación del concepto de grafo simple surge precisamente al eliminar una o alguna de las restricciones impuestas en la definición del mismo.

Si eliminamos la restricción de que las aristas tengan por extremos dos vértices distintos de V, surge el concepto de *pseudografo*. Por lo tanto, al contrario que en un grafo simple, en un pseudografo están permitidas aristas que empiezan y terminan en el mismo vértice. Tales aristas se denominan *lazos* o «loops». En la figura 8 mostramos un ejemplo de pseudografo. En este caso, el conjunto de vértices y el conjunto de lados vienen dados, respectivamente, por:

V(G) = {1, 2, 3, 4}

E(G) = {(1, 1), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4)}

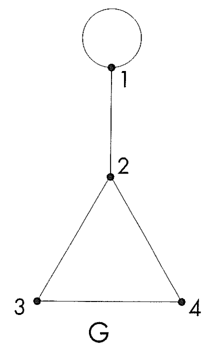


Figura 8. Representación geométrica del pseudografo G

Permitiendo la existencia de lados múltiples y de lazos, llegamos al concepto de *grafo general*. Así pues, un grafo general G puede definirse como un par ordenado G = (V, E) = (V(G), E(G)), donde V(G) es un conjunto no vacío de elementos llamados puntos vértices o nodos y E(G) una familia de pares no ordenados de elementos (no necesariamente distintos) de V(G), llamados lados, líneas o aristas. Ahora, V(G) se conoce como el conjunto de vértices («vertex-set») del grafo G y E(G) como la familia de lados («edge-family») del grafo G. Cabe destacar que el primer grafo de la historia, el grafo representativo de la disposición de los puentes de la ciudad de Könisberg, que pronto analizaremos con detenimiento, no es un grafo simple sino un grafo general, ya que incluye múltiples lados entre algunas parejas de vértices.

Otro concepto útil es el de *digrafo* (o *grafo dirigido*). Un digrafo es una clase especial de grafos, en los cuales a las aristas se les asigna un sentido, el cual se representa geométricamente mediante una flecha. Se llama *origen* al primer vértice de una arista y *fin* al segundo. Algebraicamente, un digrafo D se define como un par ordenado G = (V, A) = = (V(D), A(D)), donde V(D) es un conjunto no vacío de elementos llamados puntos, vértices o nodos y A(D) es una familia de (no necesariamente distintos) pares ordenados de elementos de V(D) llamados *arcos* o *lados dirigidos.* A V(D) se le conoce como el conjunto de vértices («vertex-set») del digrafo D y a A(D) como la familia de arcos («arc-family») del digrafo D. Un arco que tiene como origen el vértice *i* y como fin el vértice *j* se representa mediante el par ordenado [i, j]. El lector debe observar que los elementos de A(D) [i, j] y [j, i] son ahora diferentes. La diferencia formal entre un *grafo general* G y un *digrafo* D consiste en que los pares de vértices que definen los lados en un grafo son pares no ordenados, mientras que los pares de vértices que definen los arcos o lados dirigidos en un digrafo son pares ordenados. En la figura 9 mostramos como ejemplo los dos diferentes digrafos: los digrafos D_1 y D_2.

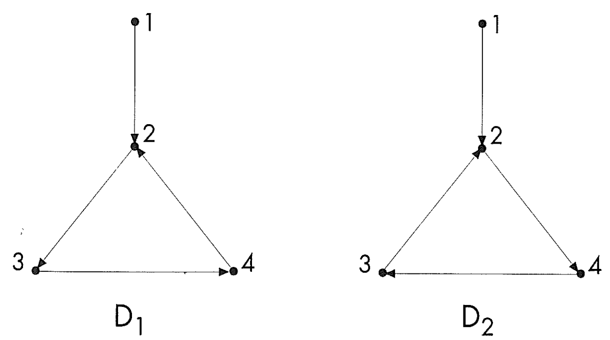


Figura 9. Representación diagramática de los digrafos D_1 y D_2

Podemos observar que aunque ambos digrafos tienen el mismo conjunto de vértices dado por

$$V(D_1) = V(D_2) = \{1, 2, 3, 4\}$$

la familia de arcos es diferente:

$$A(D_1) = \{[1, 2], [2, 3], [3, 4], [4, 2]\}$$

$$A(D_2) = \{[1, 2], [2, 4], [4, 3], [3,2]\}$$

Finalmente, cabe advertir que en un problema concreto pueden presentársenos conjuntamente varias de las estructuras matemáticas anteriormente definidas, dando lugar a *multipseudografos*, *multidigrafos*, *pseudodigrafos* o *multipseudodigrafos*. En la figura 10 mostramos un ejemplo de multipseudografo,

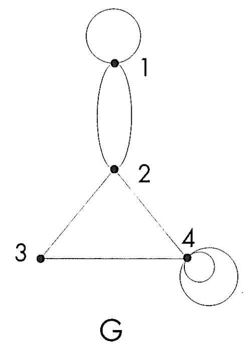


Figura 10. Representación diagramática del multipseudografo G

en el cual el conjunto de vértices y la familia de aristas vienen dados, respectivamente, por:

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E(G) = \{(1, 1), (1, 2), (1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (4, 4)\}$$

Circuitos eulerianos

A continuación presentamos el problema que la mayoría de los autores señalan como el origen histórico de la teoría de los grafos.

En la figura 11 mostramos un plano de la antigua ciudad de Könisberg en la Prusia Oriental, mostrando el río Pregel que pasa por la ciudad y los siete puentes que la atravesaban en el siglo XVIII. Hemos representado mediante números del 1 al 4 las diferentes partes de la ciudad que están separadas por el río y hemos puesto etiquetas de la forma p_{ij} sobre los puentes, para reflejar que el puente p_{ij} une los sectores de la ciudad etiquetados como *i* y *j*.

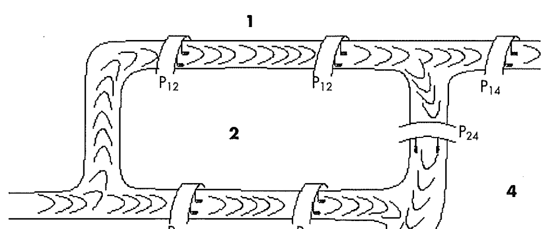


Figura 11. La disposición de los puentes en la antigua ciudad de Könisberg en el siglo XVIII

Muchos habitantes de Könisberg se plantearon el reto de encontrar una ruta en la ciudad que recorriera los siete puentes, cruzando cada uno de ellos una sola vez, y regresando al punto de partida. Puesto que todos los intentos resultaron fallidos, se comenzó a pensar que era imposible encontrar tal ruta. El problema no fue tratado matemáticamente hasta 1736 por Euler, quien escribió un artículo probando que no existía tal ruta. Para ello Euler formuló el problema en términos de la teoría de los grafos, representando el mapa de la ciudad mediante un multigrafo (ver figura 12) donde cada sector terrestre de la ciudad venía representado por un vértice y cada puente por una arista.

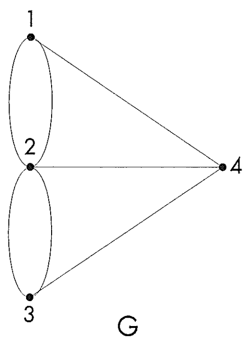


Figura 12.
Representación geométrica de un multigrafo histórico: el multigrafo de Euler, el cual simboliza la disposición de los siete puentes de la ciudad de Könisberg

Una vez traducido este problema al lenguaje de la teoría de grafos, Euler trató de encontrar una respuesta al mismo, como caso particular, y al caso más general de un grafo cualquiera. Así se planteó el problema: ¿En que grafos es posible encontrar una *ruta* que recorra todas las aristas una sóla vez y vuelva al punto de partida?

Dado un determinado vértice del grafo, si tiene valencia par, digamos 2n, podremos salir de él y regresar a él n veces sin repetir arista. Sin embargo, si el vértice tiene valencia impar, digamos 2n + 1, podremos salir de él y regresar a él n veces sin repetir arista. Esto contabiliza 2n aristas, por lo que siempre nos quedará forzosamente una arista por recorrer que nos separará del vértice en cuestión. Hecha esta observación, el estudiante puede plantearse las condiciones que han de cumplirse para que exista una ruta con las condiciones impuestas anteriormente (salir de un vértice, recorrer una sóla vez todas las aristas y regresar al vértice de partida). Tras un poco de reflexión, quizás pueda llegar a las siguientes conclusiones a las que en su día llegó Euler:

- Si todos los vértices del grafo tienen valencia par, es decir, tienen un número par de aristas incidentes, se puede recorrer el grafo de una sola pasada y volver al punto de partida. En este caso, la ruta o circuito seguidos se denominan *eulerianos* y al grafo en cuestión se le denomina grafo *euleriano*.

Euler formuló el problema [de los puentes de Könisberg] en términos de la teoría de los grafos, representando el mapa de la ciudad mediante un multigrafo donde cada sector terrestre de la ciudad venía representado por un vértice y cada puente por una arista.

- Si el grafo tiene dos vértices con un número impar de aristas concurrentes, se le puede recorrer partiendo de uno estos vértices y llegando al otro. A la ruta seguida en este caso se le denomina ruta *semieuleriana* y al grafo correspondiente grafo *semieuleriano*. El motivo de esta denominación resulta bastante obvio. No se cumplen todas las condiciones requeridas por Euler, sino sólo la mitad. Así, se recorren todas las aristas del grafo una sola vez (requisito exigido por Euler), pero no se vuelve al punto de partida (condición también exigida por Euler), sino que se comienza en un punto y se termina en otro.
- Si el grafo tiene más de dos vértices con un número impar de aristas concurrentes, el problema no tiene solución. El grafo en cuestión es un grafo no euleriano.

Si nos fijamos en el multigrafo representativo de la red de puentes de la ciudad de Könisberg (figura 12), podemos observar que los cinco vértices del multigrafo tienen grado impar. Por lo tanto, el problema no tiene solución, como en su día concluyó Euler. Así pues: «No existe una ruta en la ciudad de Könisberg que permita comenzar en un punto, recorrer una única vez los siete puentes de la ciudad, y regresar al punto de partida». Pero aún podemos ir más allá: «Ni tan siquiera existe una ruta que, comenzando en un punto determinado, recorra los siete puentes de la ciudad y termine en otro punto diferente». Este es el histórico problema conocido mundialmente por los matemáticos como el problema de los puentes de Könisberg. En la actualidad Könisberg es la ciudad lituana de Kaliningrado y el río Pregel es llamado Pregolya. Sobre ella se han construido dos puentes, no existentes en la época de Euler, para permitir una solución positiva al histórico problema (ver figura 13).

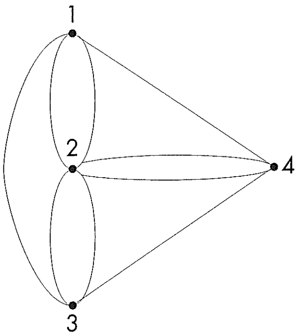


Figura 13. La disposición actual de los puentes en Kaliningrado (la antigua ciudad de Könisberg)

Si observamos el multigrafo de la figura 13 vemos como ahora todos los vértices tienen grado par. Por lo tanto, dicho grafo admite un circuito euleriano. Una posible ruta sería $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow$ $\rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Así pues, el problema de los puentes de la nueva ciudad de Kaliningrado tiene ahora una solución positiva: «Podemos recorrer los nueve puentes de la ciudad una única vez, partiendo de un determinado punto y regresando finalmente al mismo punto». Muchos turistas, sobre todo matemáticos curiosos, acuden cada día a dicha ciudad para darse un *paseo euleriano* por la misma. Sin duda alguna, la construcción de dos nuevos puentes, ha sido una buena inversión para potenciar el turismo en la ciudad.

La respuesta dada por Euler al problema de los puentes de Könisberg es de una utilidad sin límites, pues no sólo responde a ese interrogante concreto planteado por los habitantes de la ciudad de Könisberg, sino que crea las herramientas necesarias para abordar el mismo tipo de problema con cualquier otro grafo. Pero la grandeza de este problema no sólo reside en el mismo, sino en que gracias a él nació y creció esa maravillosa disciplina que hoy conocemos como *teoría de los grafos*. Si este problema no hubiese caído en las manos y el ingenio de Euler, un hombre que con tan sólo 20 años ya había sido invitado a ingresar en la entonces prestigiosa Academia Rusa de las Ciencias, un hombre que tenía amplias conocimientos de Teología, Medicina, Matemáticas, Física y Astronomía, además de dominar todas las lenguas orientales, quizás hoy no podríamos regocijarnos y disfrutar de esta maravillosa teoría. ¡Muchas gracias, Sr. Euler!

Hoy en día, y cada vez más, se buscan rutas óptimas de transporte, se diseñan redes,... Si un determinado grafo admite un recorrido euleriano, esa es sin lugar a dudas la ruta óptima de transporte.

El dibujar rutas eulerianas constituye un entretenimiento que quizás resulte familiar a muchos estudiantes de Secundaria que estén familiarizados con pasatiempos matemáticos. En dichos pasatiempos se les pide encontrar la forma de dibujar una cierta figura usando una sola línea continua, sin repeticiones y sin levantar el lápiz del papel. Por ello, ésta puede ser una buena oportunidad para que el profesor de Matemáticas les plantee a sus alumnos de Secundaria alguno de estos pasatiempos durante la clase de Matemáticas o durante algún Taller de Matemáticas. Así, al mismo tiempo que les propone alguno de estos pasatiempos, puede ir familiarizándoles con algunos conceptos básicos de la teoría de los grafos, que le podrán ser muy útiles para futuros estudios. El estudiante podrá sentirse motivado porque verá que existen ciertas estrategias para abordarlos, que probablemente no conociera. Así, por ejemplo, podrá aprender que si existen más de dos vértices impares el problema no tiene solución, o que si existen sólo dos vértices impares, uno de ellos ha de ser el vértice de salida y otro el de llegada. En la figura 14 mostramos una serie de grafos y proponemos al estudiante que trate de encontrar una ruta euleriana o semieuleriana, si es que existe. En la tabla 1 presentamos la solución a estos pasatiempos.

A pesar de que el problema de búsqueda de una ruta eulerina o semieuleriana puede usarse con fines lúdicos como un divertido pasatiempo, tal como acabamos de exponer, ésto no debe de hacernos olvidar que tiene una tremenda importancia prática. Hoy en día, y cada vez más, se buscan rutas óptimas de transporte, se diseñan redes,... Si un determinado grafo admite un recorrido euleriano, esa es sin lugar a dudas la ruta óptima de transporte. Podemos pensar, por ejemplo, en un viejo problema muy conocido en la literatura matemática: el *problema del cartero chino*. Se trata de encontrar una ruta óptima para un cartero que ha de recorrer las diferentes calles de una ciudad. Este problema se puede formular en términos de la teoría de los grafos. Las diferentes calles pasarían entonces a desempeñar el papel de los lados del grafo. Si el grafo es euleriano o semieuleriano, está claro que la ruta óptima sería aquella que recorriera todas las calles una sola vez. Y muchos otros problemas similares al del cartero chino se nos pueden plantear en la vida cotidiana. Por ejemplo, imaginemos una exposición de pinturas. Los organizadores de estos eventos tratan normalmente de colocar las pinturas a lo largo de diferentes galerías de tal forma que el visitante pueda verlas todas, sin pasar dos

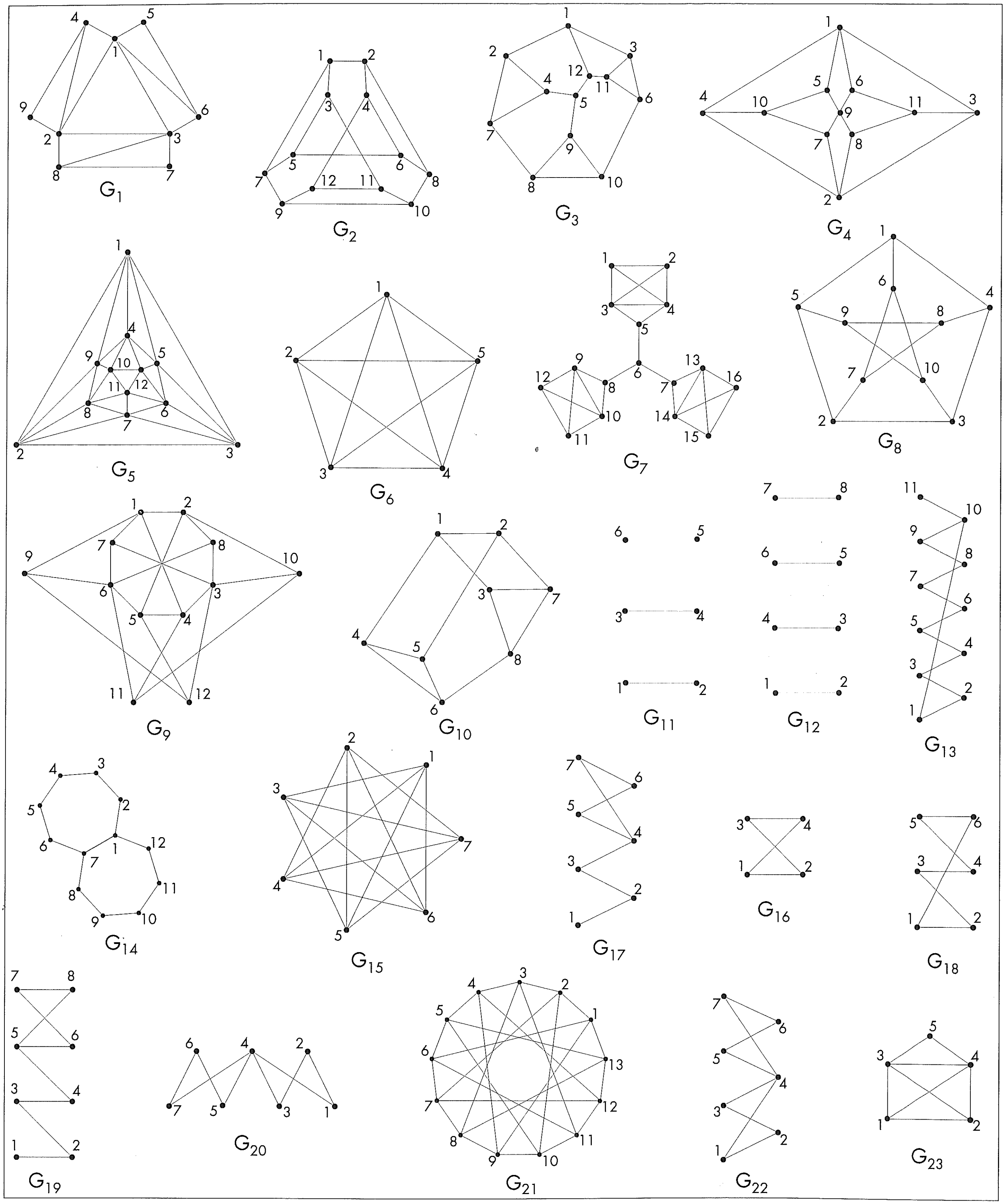


Figura 14. Una colección de grafos

veces por las mismas pinturas y regresando al punto de partida. En definitiva, tratan de colocar las pinturas en una disposición adecuada para que puedan ser contempladas siguiendo un circuito euleriano. La policía, cuando tiene que patrullar una determinada red de carreteras, trata de seguir una vía euleriana o semiuleriana si es que existe. Esa es la forma de garantizarse el recorrer todas las carreteras una sola vez en cada ronda. Y como estos, podríamos mostrar una multitud de ejemplos más, pero tampoco es el objetivo de este artículo. Simplemente queremos concienciar al lector que el diseño de vías eulerianas no es un puro pasatiempo matemático, sino que goza de multitud de aplicaciones en la vida real.

...el diseño de vías eulerianas no es un puro pasatiempo matemático, sino que goza de multitud de aplicaciones en la vida real.

Ciclos hamiltonianos

En 1856, el astrónomo y matemático irlandés Willian Rowan Hamilton presentó al mundo el siguiente puzzle. El juego estaba basado en un dodecaedro regular, uno de los conocidos sólidos platónicos regulares. Este poliedro tiene 12 caras, cada una de las cuales es un pentágono regular, y en cada uno de sus 20 vértices confluyen tres aristas de los pentágonos. Cada vértice del dodecaedro de Hamilton se marcaba con el nombre de una ciudad importante en aquella época: París, Londres... El juego consistía en salir de una determinada ciudad (vértice del dodecaedro), encontrar una ruta a lo largo de las aristas del dodecaedro que pasase por cada ciudad una única vez y regresar a la ciudad de partida. Con objeto de hacer más interesante el desafío, se estipulaban de antemano unas cuantas ciudades que debían de ser visitadas en los primeros movimientos. Para recordar más fácilmente qué ciudades se habían visitado, se colocaba un alfiler en cada vértice, para que se pudiese arrollar un hilo alrededor de los alfileres a medida que el viaje iba progresando. El dodecaedro era un tanto incómodo de manipular por lo que Hamilton desarrolló una versión del juego, en la que reemplazaba el dodecaedro por un grafo con 20 vértices unidos entre sí mediante 30 aristas de la misma forma que en el dodecaedro (ver figura 15). El grafo resultante se conoce como *grafo del dodecaedro* y es uno de los cinco grafos platónicos existentes.

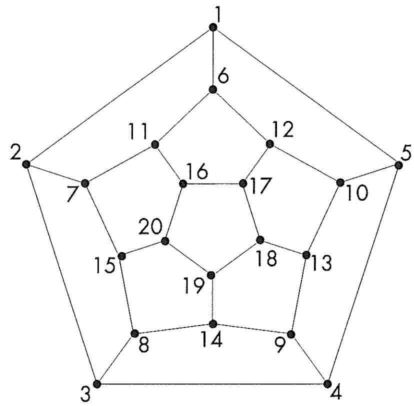


Figura 15. Juego de Hamilton: el grafo del dodecaedro

Dado un determinado grafo, si existe algún camino en el mismo que verifique las condiciones anteriormente expuestas (pasar por cada vértice una única vez y regresar al punto de partida) se conoce como *ciclo hamiltoniano*.

Un posible ciclo hamiltoniano para el grafo del dodecaedro es

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 12 \rightarrow 17 \rightarrow 16 \rightarrow 20 \rightarrow 19 \rightarrow 18 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 6 \rightarrow 1$

Pero cabe advertir que éste no es el único ciclo hamiltoniano posible. Otro posible sería

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 13 \rightarrow 9 \rightarrow 14 \rightarrow 8 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 16 \rightarrow 20 \rightarrow 19 \rightarrow 18 \rightarrow 17 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 1$

En total, hay 60 posibles ciclos hamiltonianos diferentes. Como ejercicio para el Taller de Matemáticas, el estudiante puede tratar de encontrar los restantes.

Al igual que sucedía con los grafos eulerianos, a los grafos que admitan recorrer todos sus vértices mediante un ciclo hamiltoniano, se les denomina *grafos hamiltonianos*.

Al presentársenos por primera vez el concepto de grafo hamiltoniano, quizás encontremos cierto parecido con el problema de Euler de los puentes de Könisberg. Al fin y al cabo se trata de encontrar una determinada ruta, sujeta a ciertos requisitos. Sin embargo, los requisitos ahora son diferentes. En el problema de los grafos eulerianos, se trataba de encontrar una ruta que pasara por cada lado del grafo una sola vez. Ahora, sin embargo, se trata de encontrar una ruta que pase por cada vértice del grafo una única vez.

A pesar de la desesperada lucha de los matemáticos, no existe hoy en día teorema alguno (como ocurría con los grafos eulerianos) que nos permita determinar si un grafo

G	Tipo	*Circuito euleriano o ruta semieuleriana/ Ciclo hamiltoniano*
G_1	NE H	— 1 → 4 → 9 → 2 → 8 → 7 → 3 → 6 → 5
G_2	NE H	— 1 → 2 → 4 → 6 → 8 → 10 → 11 → 12 → 9 → 7 → 5 → 3 → 1
G_3	NE NH	— 1 → 2 → 4 → 7 → 8 → 10 → 9 → 5 → 12 → 11 → 6 → 3 → 1
G_4	NE H	— —
G_5	NE H	— 1 → 2 → 3 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11→ 12 → 4 → 1
G_6	E H	1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 1 → 3 → 5 → 2 → 4 → 1 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 1
G_7	NE NH	— —
G_8	NE NH	— —
G_9	NE H	— 1 → 7 → 6 → 9 → 12 → 5 → 4 → 11 → 10 → 3 → 8 → 2 → 1
G_{10}	NE H	— 1 → 2 → 5 → 4 → 6 → 8 → 7 → 3 → 1
G_{11}	NE NH	— —
G_{12}	NE H	— 1 → 2 → 4 → 3 → 7 → 8 → 6 → 5 → 1
G_{13}	SE NH	11 → 10 → 9 → 8 → 7 → 6 → 5 → 4 → 3 → 2 → 1 → 10 —
G_{14}	SE H	1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11 → 12 → 1 → 7 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11 → 12 → 1
G_{15}	E H	5 → 7 → 3 → 6 → 2 → 7 → 4 → 6 → 1 → 3 → 5 → 1 → 4 → 2 → 5 1 → 3 → 5 → 7 → 2 → 4 → 6 → 1
G_{16}	E H	1→ 2 → 3 → 4 → 1 1→ 2 → 3 → 4 → 1
G_{17}	SE NH	1→ 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 4 —
G_{18}	E H	1→ 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 1 1→ 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 1
G_{19}	SE H	1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 5 —
G_{20}	SE NH	1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 4 → 1 —
G_{21}	E H	1 → 6 → 11 → 3 → 8 → 13 → 5 → 10 → 2 → 7 → 12 → 4 → 9 → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11 → 12 →13 → 1 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11 → 12 →13 → 1
G_{22}	E NH	1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 4 → 1 —
G_{23}	SE H	1 → 2 → 3 → 4 → 1 → 3 → 5 → 4 → 2 1 → 2 → 4 → 5 → 3 →1

Tabla 1. Clasificación de los grafos de la figura 14 en eulerianos (E), semieulerianos (SE) o no eulerianos (NE) y en hamiltonianos (H) o no hamiltonianos (NH) y rutas correspondientes, si existen.

es o no hamiltoniano. El método de ensayo y error (que puede realizarse mediante ordenadores para acelerar el proceso) es la única forma posible de tratar de encontrar una respuesta al problema.

Como pasatiempo matemático, el estudiante puede tratar de buscar un ciclo hamiltoniano, si es que existe, para cada uno de los grafos de la figura 14 y de acuerdo con ello clasificar el grafo analizado. En la tabla 1 se exponen las soluciones a este pasatiempo.

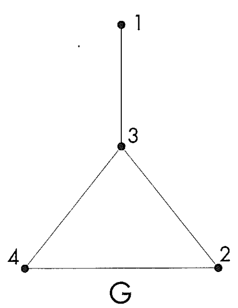
Primer Teorema de la Teoría de Grafos

Este teorema dice lo siguiente: «La suma de las valencias de todos los vértices de un grafo G es el doble del número de lados del grafo G». Esto se debe a que al sumar las valencias de todos los vértices, contamos dos veces cada lado.

$$\sum_{i=1}^{N} gr(i) = 2|E(G)|$$

Un corolario que se deduce inmediatamente de este teorema es que el número de vértices de grado o valencia impar ha de ser cero o un número par, ya que es la única manera posible de obtener un número par al sumar las valencias de todos los vértices.

Un ejemplo ilustrando este teorema se muestra en la figura 16.

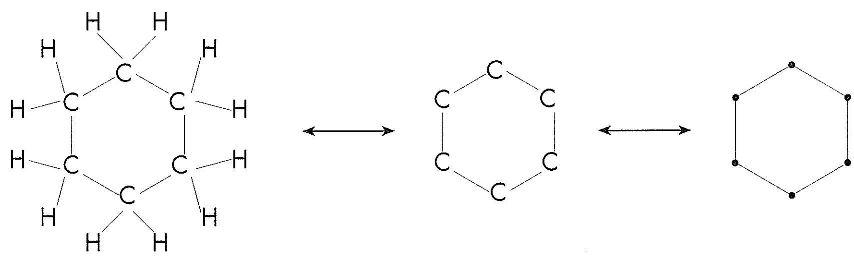


$$\sum_{i=1}^{N} gr(i) = 1+3+2+2 = 2 \cdot 4$$

Figura 16. Un ejemplo ilustrando el «primer teorema de la teoría de los grafos». Los números en los vértices del grafo representan ahora la valencia de los mismos

Una aplicación a la Química: los grafos moleculares

Es precisamente la posibilidad de poder representar a los grafos mediante diagramas la que hace que sean muy utilizados como modelos estructurales en la ciencia. En particular, es muy frecuente su utilidad en la Química (Balaban, 1976 y Trinajstic, 1977). De hecho, el término grafo fue sugerido por Silvester para referirse a la fórmula estructural de un compuesto. Y es que es difícil encontrar algo en la ciencia que se asemeje tanto a un grafo como la fórmula estructural de un compuesto químico. Tales grafos se denominan *grafos moleculares*. En un grafo molecular (Ballaban, 1976), los vértices representan a los átomos y los lados a los enlaces químicos que conectan ciertas parejas de átomos. Es decir, los átomos de la molécula constituyen el conjunto V. Algunos de estos pares de átomos se encuentran enlazados. El conjunto de todos los pares de átomos que forman enlace químico constituye el conjunto E. En los grafos moleculares, suelen suprimirse los átomos de hidrógeno, ya que esto simplifica el grafo y no da lugar a ambigüedad. Estos grafos se denominan «grafos moleculares con los hidrógenos suprimidos» o «esqueletos del grafo». Como ejemplo, consideremos una molécula muy familiar a la comunidad química: la molécula de ciclohexano, de fórmula empírica C_6H_{12} (ver figura 17).



fórmula estructural esqueleto molecular grafo molecular

Figura 17. Obtención del esqueleto del grafo molecular del ciclohexano

La Teoría de los Grafos se ha usado mucho en la Química para contar *isómeros*. Por isómeros entendemos moléculas con la misma fómula empírica (y por lo tanto, con el mismo peso molecular), pero diferente fórmula estructural. En la figura 18 mostramos dos moléculas con la misma fórmula empírica (C_3H_7OH) pero diferente fórmula estructural (diferente conectividad de los átomos o diferente red de enlaces).

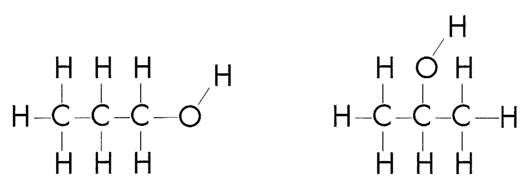


Figura 18. Los dos compuestos de fórmula estructural C_3H_7OH.

Las diferencias en la fórmula estructural conllevan diferentes propiedades físicas y/o químicas para estos compuestos. De hecho, también se pueden definir los isómeros como aquellos compuestos químicos con idéntica fórmula empírica que se diferencian en alguna propiedad física y/o química. El término isomerismo proviene de 1830 y fue introducido por Berzelius. Para los químicos tiene mucho interés conocer los diferentes isómeros hipotéticos posibles para cada fórmula empírica. Algunos de éstos isómeros quizás no existan en la realidad porque no son estables. De hecho, existen compuestos químicos que no tienen isómeros. Tales compuestos se denominan *unímeros.* No obstante, nunca está de más el saber todo el espectro posible de isómeros de un determinado compuesto químico. Por eso se han desarrollado a lo largo de la historia diferentes y fascinantes métodos de enumeración que usan conjuntamente la teoría de los grafos, la teoría de grupos y la combinatoria. No es el objetivo de este artículo examinar todos estos métodos, sino simplemente exponer unos materiales que puedan servir en el aula para que el estudiante pruebe su imaginación tratando de generar los diferentes isómeros de una serie de compuestos químicos. Esto le servirá para ver una nueva aplicación práctica de la teoría de los grafos, al mismo tiempo que le servirá para ir afianzándose en sus conocimientos químicos.

Vamos a tratar de generar los isómeros más sencillos: los de los hidrocarburos. Los hidrocarburos son unas sustancias químicas, como el petróleo y la parafina, cuyas moléculas están formadas exclusivamente por átomos de carbono e hidrógeno. Al estudiar las formas en que éstos pueden combinarse, los científicos han demostrado que los átomos de carbono se comportan como si tuvieran cuatro brazos (valencia 4), mientras que los de hidrógeno lo hacen como si sólo tuvieran uno (ver figura 19).

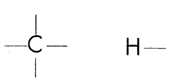


Figura 19. El átomo de carbono (valencia 4) y el átomo de hidrógeno (valencia 1)

Para formar una molécula, un cierto número de átomos de carbono se juntan «dándose la mano», de manera que no quede ningún átomo aislado. En la figura 20 mostramos dos formas posibles de estrechar sus manos tres átomos de carbono.

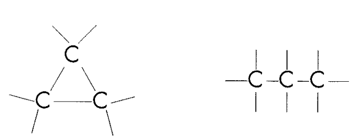


Figura 20. Dos posibles formas de combinar tres átomos de carbono para formar el esueleto de la molécula

...se han desarrollado a lo largo de la historia diferentes y fascinantes métodos de enumeración [de polímeros] que usan conjuntamente la teoría de los grafos, la teoría de grupos y la combinatoria.

Una vez que los átomos de carbono se han dado la mano entre sí de una determinada manera, los átomos de hidrógeno ya están condicionados. Cada átomo de hidrógeno ha de dar su única mano a alguna mano libre de los carbonos (ver figura 21).

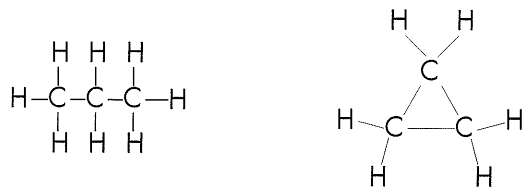


Figura 21. Fórmula estructural (incluyendo explícitamente los átomos de hidrógeno) de dos hidrocarburos

Por eso decimos, que la representación de las moléculas sin átomos de hidrógeno no encierra ninguna pérdida de información estructural ni da lugar a ambigüedad alguna. El químico es consciente de que los brazos libres de los átomos de carbono están enlazados («dándose la mano») a átomos de hidrógeno, aunque estos últimos no aparezcan explícitamente.

La familia de hidrocarburos menos compleja es la de los alcanos. Estos compuestos están formados por átomos de carbono y de hidrógeno unidos entre sí mediante enlaces simples (no hay más que un cruce de manos entre cada pareja de átomos unidos). Dentro de los alcanos, los más sencillos son los acíclicos, entendiendo como tal aquellas disposiciones de átomos de carbono que no se repliegan formando ciclos. Estos compuestos tienen como fórmula empírica C_nH_{2n+2}, siendo n el número de átomos de carbono. A continuación mostraremos los diferentes isómeros posibles que se pueden generar para los valores más pequeños de n. Para simplificar, mostraremos el grafo molecular con los hidrógenos suprimidos para cada uno de los diferentes compuestos que aparezcan.

Los tres primeros miembros de esta familia son el metano, CH_4, el etano,

C_2H_6, y el propano, C_3H_8. Son todos ellos unímeros. A partir de aquí, al ir aumentando el número de átomos de carbono, ya nos encontramos con diferentes isómeros (al menos, isómeros teóricos posibles) para cada fórmula empírica. Así, hay 2 posibles grafos moleculares diferentes con fórmula empírica C_4H_{10}, 3 posibles grafos moleculares con fórmula empírica C_5H_{12}, 5 posibles grafos moleculares con fórmula empírica C_6H_{14} y 9 posibles grafos moleculares con fórmula empírica C_7H_{16}. Una interesante y, al mismo tiempo, divertida tarea para el aula sería proponer al estudiante que intente encontrar los diferentes grafos moleculares representativos de los diferentes isómeros de cada serie. Hay que advertirle previamente, no obstante, de no contar como diferentes dos estructuras moleculares que en realidad sean la misma. En la figura 22 mostramos como ejemplo dos estructuras moleculares iguales.

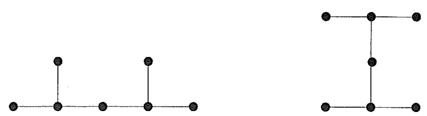


Figura 22. Dos grafos isomorfos (misma red de enlaces o misma relación de concetividades)

Aunque las disposición de los átomos de carbono en las figuras siguientes pueda, en principio, parecer distinta, si se mira detenidamente podrá comprobarse de que la red de enlaces es la misma: «cada átomo está dando la mano a los mismos compañeros». Para que dos grafos moleculares sean diferentes deben pues de diferenciarse en la conectividad de los átomos. La diferente disposición de los átomos en el espacio no es relevante en la teoría de los grafos, ya que esta teoría está referida a un espacio topológico, donde la única propiedad de interés es la conectividad entre los elementos de un conjunto. En las figuras 23, 24, 25 y 26 mostramos los isómeros del butano, pentano, hexano y heptano, respectivamente, para que el estudiante pueda comprobar si ha realizado bien el ejercicio que acabamos de proponerle.

Figura 23. Los isómeros del butano (fórmula empírica C_4H_{10})

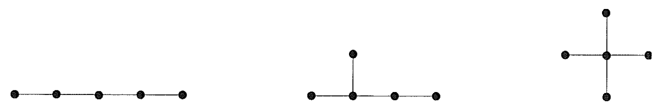


Figura 24. Los isómeros del pentano (fórmula empírica C_5H_{12})

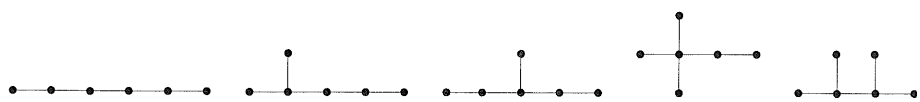


Figura 25. Los isómeros del hexano (fórmula empírica C_6H_{14})

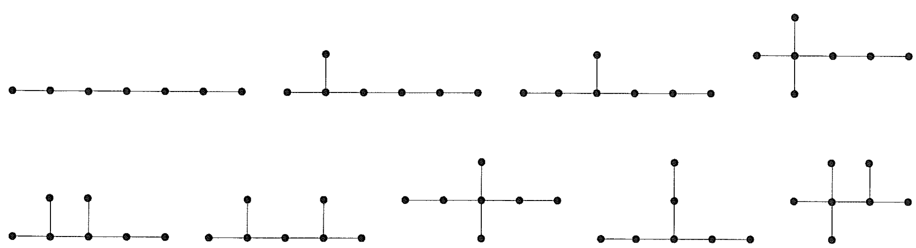


Figura 26. Los isómeros del heptano (fórmula empírica C_7H_{16})

Bibliografía

AVONDO-BODINO, G. (1962): *Economic Applications of the Theory of the Graphs*, Gordon & Breach, New York.

BALABAN, A. T. (Ed.) (1976): *Chemical Applications of Graph Theory*, Academic Press, London.

Biggs, N. L. (1974): *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

BUJALANCE, E. y otros (1993): *Elementos de Matemática Discreta*, Editorial Sanz y Torres.

CAPRA, F. (1979): *Am. J. Phys.*, 47, 11.

CARTWRIGHT, D. y F. HARAY (1963): Psychol. Rev., 63, 277.

CULIK, K. (1964): *Application of Graph Theory to Mathematical Logic and Linguistics*, Czechoslovak Academy of Sciences, Prague.

DIAS, J. R. (1993): *Molecular Orbital Calculations Using Chemical Graph Theory*, Springer-Verlag, Berlín.

EVEN, S. (1979): *Graph Algorithms*, Pitman, London.

FLAMENT, C. (1963): *Applications of Graph Theory to Group Structure*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

HAGE, P. y F. HARAY (1983): *Structural Models in Anthropology*, Cambridge University Press, Cambridge.

HARAY, F. (1967): *Graph Theory and Theoretical Physics*, Academic Press, New York.

JOHNSON, D. E. y J. R. JOHNSON (1972): *Graph Theory with Engineering Applications*, Ronald Press, New York.

KÖNIG, D. (1936): *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

KORACH, M. y L. HASKÓ (1972): *Acta Chem Acad. Sci. Hung.*, 72, 77.

LISSOWSKY, A. (1971): *Acta Protozool.*, 11, 131.

MATTUCK, R. D. (1967): *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, McGraw-Hill, New York.

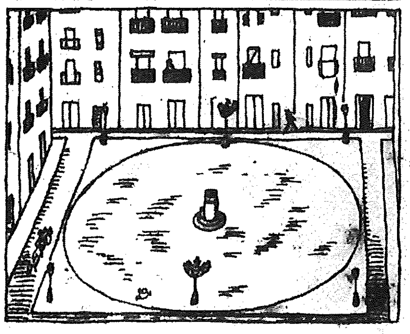
ORE, O. (1995): *Grafos y sus aplicaciones*, DLS-EULER, Madrid.

ROBERTS, F. (Ed.) (1989): *Applications of Combinatorics and Graph Theory to the Biological and Social Sciences*, Springer-Verlag. New York.

TRINAJSTIC (1977): *Semiempirical Methods of Electronic Structure Calculation. Part A. Techniques. Vol. 7. Modern Theoretical Chemistry*, G. A. Segal, Ed. Plenum Press, New York.

Amador Menéndez
Universidad de Oviedo

N.º 128. **Dentro de una plaza de forma cuadrada, que tiene 50 m. de lado, se ha trazado un círculo de 42 m. de diámetro. ¿Cuál es la superficie que ha quedado fuera del círculo?**

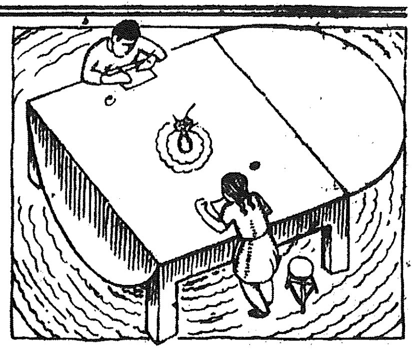


$50 \times 50 = 2500\ m^2$

$3'14 \times 21^2 = 1384'75\ m^2$

$2500 - 1384'75 = 115'26\ m^2$ que quedan fuera del círculo.

N.º 129. **Una mesa cuadrada, de 2 metros de lado, tiene dos prolongaciones semicirculares, una a cada parte. ¿Cuál es la superficie total de la mesa?**



$2^2 = 4\ m^2$

$3'14 \times 1^2 = 3'14$

$4 + 3'14 = 7'14\ m^2$

que mide la mesa

CÁLCULO MENTAL
Núm. 43

Multiplicar dos números comprendidos entre 10 y 20. **Se suma uno de los números con las unidades del otro, se multiplica por 10 y se añade el producto de las unidades de ambos.**

$$16 \times 12 = (16 + 2) \times 10 + (2 \times 6) = 180 + 12 = 192$$

SUMA 28
junio 1998, pp. 27-30

La invisibilidad de las Matemáticas

Juan Luis Herrero Pérez
José Lorenzo Blanco

Las Matemáticas intervienen cada vez más en distintos campos del saber. Por contra, el ciudadano corriente no advierte en general, esa creciente influencia.
Las Matemáticas no son consideradas como algo útil en la vida cotidiana posterior a la vida académica. Al ciudadano corriente se le hacen invisibles. Esto origina una serie de reflexiones sobre las Matemáticas que enseñamos, las de la vida y las divergencias entre ambas.

ARTÍCULOS

YA HA TRAÍDO el niño las notas. Otra vez le han quedado las Matemáticas.

—¡Siempre igual! A mí también me pasaba lo mismo. Parece que las Matemáticas sólo sirven para hacer la vida imposible a los estudiantes.

—¡Desde luego! Díme tu cuántas veces has necesitado lo que nos enseñaron. Sumar, multiplicar, un par de cosas más y una calculadora son más que suficientes.

—Si me apuras hasta con la calculadora es bastante. Ella sabe hacer todas las operaciones.

—Pero no. Tienen que llenarte la cabeza con cosas raras, raíces cuadradas, polinomios, ecuaciones y mil cosas parecidas. ¡Y a la hora de la verdad, todo inútil!

El anterior diálogo, tantas veces repetido, nos conduce directamente a la cuestión: ¿no hay Matemáticas en la vida de un ciudadano corriente?

Lejos de lo que muchos pueden suponer, las Matemáticas están fuertemente imbrincadas en nuestra vida y hay razones objetivas para estimar que esa intervención es un proceso en crecimiento.

Venimos asistiendo durante los últimos años a una profunda matematización de las ciencias. Si era indudable la presencia de las Matemáticas en la Física o la Química, hoy se advierte con claridad la huella de los conceptos y métodos matemáticos en campos del saber tan dispares como la Lingüística, la Medicina, la Historia, la Sociología, etc.

Pero mucho más allá de la propia ciencia, las Matemáticas han invadido nuestra vida de modo patente, como evidencia Miguel de Guzmán «La penetración imparable de la matemática en multitud de aspectos de la vida cotidiana del hombre es bastante obvia. La mayor parte de nuestras máquinas, unas más sofisticadas otras más simples, no son sino la encarnación de principios y métodos que provienen, en última instancia, del análisis matemático de la realidad. Los principios de organización de nuestras empresas y de buena parte de nuestra economía pretenden basarse en principios matemáticos bien sofisticados. La influencia de la matemática en el desarrollo humano se hace bien patente a cualquiera que observe con atención la historia de las ciencias y de la tecnología y aun algunas porciones del arte».

Esta aparente contradicción entre el aumento de intervención de las Matemáticas en la vida del ciudadano común y su percepción de la escasa presencia de las mismas, fue denominada por Niss como la «paradoja de la relevancia» que él describe como la existencia simultánea de la relevancia objetiva con la irrelevancia subjetiva de las Matemáticas.

Cabe preguntarse: ¿cuál es el motivo de esta aparente invisibilidad?

Las Matemáticas tienden a construir modelos de la realidad tomando sólo ciertos aspectos de ella, de modo que puedan ser usados en muchos contextos distintos. Esto conlleva una evidente abstracción. Esta tendencia a la generalización es a la vez la fuente del éxito de las Matemáticas y la razón de su invisibilidad. Dado que el modelo es útil en distintas situaciones reales, parece que es el lenguaje adecuado para la comprensión de la realidad. Pero esta «mutilación» de la multiplicidad de los aspectos que la vida presenta, lleva a que las Matemáticas no aparezcan en la superficie de las cuestiones de las que se ocupa sino en su estructura más profunda. No es extraño, por tanto, que para un observador poco avisado, su presencia pase casi desapercibida.

Para muchos ciudadanos adultos el único signo de visibilidad que conceden a las Matemáticas es su carácter de obstáculo social. Sufrieron en la escuela un duro aprendizaje de conceptos y algoritmos a los que no concedían y no conceden interés ni utilidad más allá del ámbito escolar. Sus capacidades generales fueron calificadas exclusivamente por sus destrezas matemáticas (aún resuenan en los oídos de muchos frases tan crueles y lapidarias como «es malo en Matemáticas, no llegará muy lejos»). Y para colmo, cuando trataron de acceder a un puesto de trabajo se utilizaron las Matemáticas como elemento discriminador, muchas veces innecesariamente (de vez en cuando encuentran reflejo en la prensa los peregrinos conocimientos matemáticos exigidos a los aspirantes a una plaza de barrendero, conserje o limpiador).

Si las Matemáticas no fueran ya invisibles, muchos ciudadanos desearían condenarlas a serlo.

Y entonces, nos preguntamos ¿cuáles han sido los beneficios del aprendizaje que de las Matemáticas ha tenido que realizar un ciudadano corriente?

Esta aparente contradicción entre el aumento de intervención de las Matemáticas en la vida del ciudadano común y su percepción de la escasa presencia de las mismas, fue denominada por Niss como la «paradoja de la relevancia» que él describe como la existencia simultánea de la relevancia objetiva con la irrelevancia subjetiva de las Matemáticas.

Alguien argumentará que a través de las Matemáticas escolares los alumnos desarrollan muchas capacidades de trascendencia tan vital como el razonamiento lógico, la precisión y el rigor en el lenguaje, la capacidad de análisis crítico, el sentido de la precisión y la estimación, la visión espacial, etc.

Otras materias actúan sobre esas capacidades, aunque parece que sólo las Matemáticas lo hagan sobre todas ellas a la vez. Sin embargo, es difícil cuantificar el logro en esos campos y más la intervención que el aprendizaje de las Matemáticas haya tenido en ellos. Y si son difícilmente perceptibles para el profesor, para el individuo sometido al proceso son practicamente «invisibles».

Es obvio que las Matemáticas sirven como utensilio en el estudio de otras ciencias, utilidad que se hace más plausible cuanto más se avanza en los estudios académicos o se alcanza un nivel más especializado en los estudios profesionales.

Pero eludamos los aspectos formativos y los que afectan a los alumnos que prosiguen estudios más allá de las enseñanzas obligatorias, pensemos en los ciudadanos que abandonan el sistema educativo al final del periodo obligatorio y se incorporan a la vida profesional en cualquier ocupación de bajo nivel de cualificación; en definitiva, una persona normal y corriente.

Las Matemáticas de la escuela y las Matemáticas de la vida

Comencemos con un éxito de la escuela. Si a cualquier adulto se le propone multiplicar 327 y 36, con toda seguridad acudirá a utilizar las técnicas operativas que le fueron enseñadas en su periodo escolar. Hay, como vemos, un uso, quizás no consciente y en bastantes casos ignorante de su procedencia, de muchas técnicas aprendidas en el aula.

Pero también, en ciertas circunstancias de la vida cotidiana, la gente emplea estrategias de cálculo que no se corresponden con las que les fueron enseñadas para aplicar en dichos casos. (Piénsese en cómo se realizan los cálculos para determinar el cambio que corresponde a un pago. Lejos de usar una estrategia basada en la diferencia, «la vuelta de 100 pesetas si tengo que pagar 78 pesetas son 100 – 78 = 22 pesetas» se emplea una estrategia sumativa: «78 más dos hacen 80 y 80 más veinte son 100»).

¿A qué se debe esa divergencia de métodos?

Quizás una de las razones fundamentales sea la falta de confianza en los métodos aprendidos en la escuela. Los alumnos son sólo capaces de emplearlos en las restrictivas condiciones de la práctica escolar y cuando, en la vida real su uso estaría indicado, sus reiterados fracasos en circunstancias similares, la falta de validación por parte del profesor y la poca convicción que les procuran dichos procedimientos, les lleva a desecharlos.

Curiosamente, como refiere Marta Civil, aunque los problemas escolares sufran una profunda contextualización y sean enunciados en términos más ajustados a la realidad cotidiana de los alumnos muchos de los resultados carecen de sentido. Y ello incluso cuando se trata de un problema idéntico y con idéntica presentación de los que resuelven en la calle. Un ejemplo paradigmático puede ser el cálculo de un precio después de un descuento. Mientras que en su vida diaria tienen una estimación del resultado que les impide aceptar soluciones descabelladas, en el aula los admiten sin mayor inquietud.

Algunos autores achacan esta falta de transferencia a la idea del «control». En las situaciones extraescolares los individuos tienen el control de la actividad, mientras que en la escuela los estudiantes no tienen el control sobre el problema o la elección de los procesos de resolución.

La desconfianza hacia los métodos aprendidos en la escuela está también relacionada con el carácter modelizador de las Matemáticas que ya mencionamos antes. («Esta técnica sirve en muchos tipos de problemas, pero ¿es adecuada precisamente para éste?» parecen decirse muchos alumnos).

Es evidente que entre las Matemáticas del aula y la realidad hay una cierta distancia que es necesario recorrer, pero ¿cuál es el camino adecuado? ¿Deben asumir nuestras Matemáticas académicas esas estrategias o técnicas más naturales? ¿Cómo contextualizar la materia de modo que el ciudadano no la vea como un ente abstracto sino como un instrumento útil al que se recurre de forma natural?

Es evidente que entre las Matemáticas del aula y la realidad hay una cierta distancia que es necesario recorrer, pero ¿cuál es el camino adecuado? ¿Deben asumir nuestras Matemáticas académicas esas estrategias o técnicas más naturales? ¿Cómo contextualizar la materia de modo que el ciudadano no la vea como un ente abstracto sino como un instrumento útil al que se recurre de forma natural?

De forma natural se recurre a la lengua. Su uso es constante y los errores se van corrigiendo con el uso, pero dichos errores no hacen ininteligible el mensaje. En Matemáticas, desgraciadamente no ocurre eso, un error puede echar por tierra el «mensaje» y además su uso no es tan natural y cotidiano. Nuestro camino es por tanto más complicado.

¿Qué Matemáticas enseñar? ¿cómo?

El debate sobre la enseñanza de las Matemáticas se ha centrado desde antiguo en tres vértices fundamentales, los que Niss llama: los problemas de la «justificación», de la «posibilidad» y el de «la puesta en práctica». Es decir, ¿por qué hay que enseñar Matemáticas?, ¿cuáles hay que enseñar? y ¿cómo hacerlo?

No tenemos la pretensión de terciar en tan trascendente y prolongada controversia, pero vamos a atrevernos a realizar una serie de reflexiones sobre algunas cuestiones que afectan a las Matemáticas utilitarias y la escuela.

Primero una declaración de principios: una sociedad democrática, una economía en perpetua transformación necesita y debe exigir a su sistema educativo la formación de ciudadanos inteligentes, críticos y versátiles.

Parece que un ingrediente esencial de esa formación son las Matemáticas, de hecho su enseñanza es una constante universal. Se aborda de modo esencialmente idéntico en todo el mundo; los mismo métodos, los mismos contenidos. Esto añade un argumento más a la desconexión de la enseñanza de las Matemáticas actuales con el entorno del alumno. Es lo que algunos autores como D'Ambrosio han llamado «la desconceptualización» de las Matemáticas y que consideran uno de los errores más graves de la educación moderna.

Se han presentado distintas propuestas desuniformizadoras para luchar contra este alejamiento de las Matemáticas y el entorno vital de los alumnos. Citemos la Etnomatemática, una pretensión de adaptar tanto los contenidos como los procedimientos a la realidad cultural del alumno. O la pretensión de desposeer a las Matemáticas de una identidad disciplinar propia. Muchos autores piensan que si las Matemáticas están tan diluidas en la cultura y las otras ciencias, de ese modo deben presentarse en la escuela.

Visibles o invisibles las Matemáticas están presentes en nuestra cultura y deben estarlo en el sistema educativo.

Sostiene Niss que la tarea que debe resolver la educación matemática para la población en general no debe limitarse a la generación de conocimientos técnicos matemáticos y la competencia en matemáticas necesarios para la vida social y privada cotidiana. Pero aunque no sea su único objetivo, dotar a los ciudadanos de las herramientas matemáticas básicas para su desenvolvimiento social es su primer compromiso.

Los adelantos tecnológicos han cambiado tanto la realidad, las diferencias generacionales son tan marcadas que no podemos aceptar que las Matemáticas que cursen nuestros alumnos sean las mismas que estudiaron sus padres. Ya hemos señalado la marcada separación entre la escuela y la calle. Se hace precisa, por lo tanto, una profunda reflexión sobre la estructura curricular, sobre los contenidos y sobre los planteamientos pedagógicos.

Juan Luis Herrero
José Lorenzo
IES Venancio Blanco
Salamanca

Bibliografía

ARCAVI, A. (1995): «Educación matemática hacia el año 2000», en *Actas VII JAEM*, Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Catelnuovo», Madrid.

CIVIL, M. (1995): «Entrar en los hogares de los estudiantes», *UNO*, n.° 3.

D'AMBROSIO, U. (1993): «La evolución de una concepción de objetivos en la enseñanza de las Matemáticas», en *Actas VI JAEM*, Sociedad Extremeña de Educación Matemáticas «Ventura Reyes Prósper», Badajoz.

GUZMAN, M. de (1994): «¿Para qué el pensamiento matemático en nuestra cultura?», *UNO*, n.° 1.

NISS, M. (1995): «Las matemáticas en la sociedad», *UNO*, n.° 6.

RICO, L. (1993): «Mitos y realidades de la educación matemática en España», en *Actas VI JAEM*, Sociedad Extremeña de Educación Matemáticas «Ventura Reyes Prósper», Badajoz.

RICO, L. (1997): «Reflexión sobre los fines de la Educación Matemática», *SUMA*, n.° 24.

SUMA 28
junio 1998, pp. 31-36

Las curvas mecánicas en la geometría griega. La cuadratriz de Dinóstrato

Víctor Arenzana Hernández

En la historia de las matemáticas no todas las curvas han sido consideradas dignas de figurar en el reino de la geometría. En la matemática griega había serios recelos con las llamadas curvas mecánicas, generadas por composición de movimientos. En el presente trabajo se expone un ejemplo de curva mecánica: la cuadratriz de Dinóstrato, se muestran las objeciones que el matemático griego Sporos de Nicea aducía por las que la cuadratriz no debía ser considerada curva en sentido geométrico y se traducen a lenguaje analítico esas objeciones, que no son otras que las que genera la noción de límite y la poca eficacia del método geométrico para clasificar distintos tipos de curvas. Prueba de esto es que cuando se adoptaron los métodos analíticos en geometría se pasó de la escasa docena de curvas identificadas por los griegos (contando cónicas, cuadratrices, concoide, etc.) a infinitas aunque sólo sea con las llamadas parábolas de Fermat del tipo $y= x^n$.

ARTÍCULOS

LA NOCIÓN de curva en la geometría griega no era igual que la que tenemos actualmente; algunas curvas, de las que hoy en día nadie cuestiona su naturaleza geométrica, despertaban serios recelos a sesudos geómetras. Una de estas curvas fue la cuadratriz de Dinóstrato.

La geometría griega se había planteado una serie de problemas y los había resuelto con el uso de los utensilios permitidos para las construcciones geométricas, la regla y el compás. Con estos instrumentos se podían hacer, geométricamente, la suma, la resta, la multiplicación y la división de magnitudes, así como raíces cuadradas. Las construcciones geométricas griegas podríamos resumirlas en lenguaje actual diciendo que, a partir de una unidad *u* se podían construir números de la forma $a + b\sqrt{n}$, donde *a*, *b* y *n* eran números racionales.

No todos las cuestiones que se planteó la matemática griega se pudieron resolver con las operaciones que permitían realizar la regla y el compás, de hecho, hacia el siglo V a.C. aparecieron una serie de problemas que se resistieron a la resolución con los instrumentos citados; estos problemas, conocidos como los tres problemas clásicos griegos, eran la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo. Más tarde se demostraría que no era posible resolverlos con el uso exclusivo de la regla y el compás. El proceso de demostración de la imposibilidad de la resolución de estos problemas con las condiciones exigidas acabó en 1882 cuando F. Lindemann demostró que π era un número transcendente y que, por consiguiente, no era posible construir, con regla y compás, un cuadrado de la misma área que un círculo y, como consecuencia, el problema de la cuadratura del círculo era irresoluble en los términos planteados por la matemática griega.

No obstante, los tres problemas fueron resueltos por los griegos –como es natural no en la forma exigida–, de diferentes maneras. La duplicación del cubo la solventaron demostrando que su resolución equivalía a intercalar dos medios proporcionales entre *a* y *2a* del modo siguiente:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

que equivale a hallar la abscisa del punto de intersección de las parábolas:

$$x^2 = ay \qquad y^2 = 2ax$$

Para resolver los otros dos problemas clásicos griegos se inventaron algunas curvas, como las anteriores, pero que no se generaban de modo tan sencillo como las cónicas, las cuales eran la intersección de un plano con una superficie cónica. Estas curvas no se podían construir con regla y compás, su generación se producía por combinación de movimientos en el plano. Los griegos las llamaron *curvas mecánicas* entre las que figuraba la llamada *trisectriz o cuadratriz de Dinóstrato* que analizaremos a continuación.

Descartes y las curvas mecánicas

La matemática griega estaba dominada por la geometría y sus métodos. Las operaciones elementales se hacían mediante construcciones geométricas y estas construcciones estaban en la base de sus razonamientos. Para los griegos el hecho de hacer una multiplicación *más aproximada* carecía de sentido y consistiría, en todo caso, en esmerarse al máximo en el dibujo, en la construcción geométrica con la que se realizaba la operación. Con todo, siempre existiría el convencimiento de que la perfección era inalcanzable, pero que el dibujo realizado para resolver un problema nos evocaría la construcción perfecta. En este sentido, es perfectamente aplicable la representación platónica de las ideas mediante el mito de la caverna, según el cual el mundo real con todos sus seres y objetos sería reflejo de otros entes más perfectos que serían las ideas.

Los griegos habían distinguido en la geometría tres tipos de problemas: lineales, planos y sólidos. Los primeros podían resolverse trazando líneas rectas (ecuaciones de primer grado), los problemas planos precisaban para su resolución el uso de alguna cónica (ecuaciones de segundo grado) y los problemas sólidos que necesitaban para su resolución alguna curva especial (combinación de curvas de segundo grado, tercer grado o mayor e incluso curvas transcendentes).

Descartes, al comienzo del libro II de su *Geometría*, al tratar la naturaleza de las líneas curvas, se extrañaba de que los griegos denominaran a unas curvas *geométricas* y a otras *mecánicas*. A las primeras las aceptaban dentro de la geometría, pero las segundas fueron excluidas de ella.

La matemática griega estaba dominada por la geometría y sus métodos. Las operaciones elementales se hacían mediante construcciones geométricas y estas construcciones estaban en la base de sus razonamientos.

La razón de la exclusión de la geometría de las curvas mecánicas no sería porque, al ser líneas más complejas, fuera necesaria mayor precisión de trazado o aparatos más sofisticados que no alcanzaran a dar la exactitud requerida, puesto que la verdadera perfección de la geometría griega se lograba en el pensamiento, esto es, en la claridad del método para llevar a cabo las construcciones.

Tampoco se puede decir que los griegos admitieran únicamente curvas que pudieran construirse con regla y compás, que eran los aparatos que figuran implícitamente en los postulados primero y tercero de los *Elementos* de Euclides [Postulado 1: Desde cada punto a cualquier otro se puede trazar una línea recta. Postulado 2: En cualquier centro se puede trazar una circunferencia de radio arbitrario], ya que admitieron las secciones cónicas que se generaban por la intersección de una superficie cónica con un plano.

Descartes opinaba que si se entendía por geométrico lo que era exacto y por mecánico lo que no lo era, y si la geometría era la ciencia que estudiaba y enseñaba a conocer la medida de todos los cuerpos, no había razón para excluir de la geometría el estudio de curvas más complejas con tal de que se pudieran imaginar generadas por un movimiento o por composición de varios. Este modo de pensar cartesiano supuso un avance en la configuración del concepto de curva en geometría y amplió la noción de curva de los matemáticos griegos.

La cuadratriz de Dinóstrato

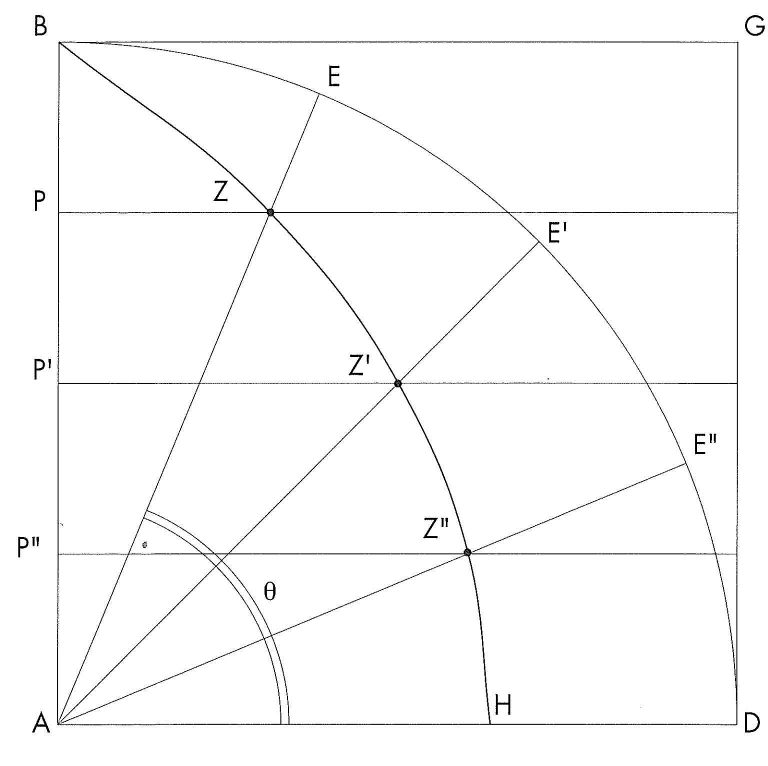
La geometría griega no admitió en su seno una curva mecánica llamada trisectriz o cuadratriz de Dinóstrato. La historia de la invención de esta curva es algo dudosa. Algunos historiadores dicen que la imaginó Dinóstrato, hermano de Menecmo, hacia el año 390 a. C. para resolver el problema de la división del ángulo en cualquier número de partes y para solucionar la cuadratura del círculo. Pero Proclo (412-485) en sus *Comentarios a los Elementos de Euclides*, Libro II, Cap. IV, atribuyó a Hippias la invención de esta curva. El matemático griego Pappus, hacia el 300 de nuestra era, estudió en el libro IV de sus *Colecciones Matemáticas* las propiedades de la cuadratriz, que llamó de Dinóstrato, sin entrar en la discusión de quien fue su descubridor. La crítica actual duda sobre la autoría de los dos matemáticos griegos y se piensa que fuera invención de algún matemático griego anterior.

La trisectriz o cuadratriz de Dinóstrato la describe Pappus de la siguiente forma:

Dado un cuadrado ABGD describamos con centro A el arco BED. La recta BG, manteniéndose constantemente paralela a la AD arrastre al punto B en su recorrido sobre AB, además de que esta gire con velocidad uniforme en el ángulo que forman AB y AD, es decir el punto B recorrerá el arco BED en el mismo tiempo que la recta BG se traslada a lo largo de BA. Es evidente que las rectas AB y BG coincidirán simultáneamente con la AD y, como consecuencia dichas rectas AB y BG coincidirán en un punto constantemente transportado por ellas, el cual describirá un línea cóncava en la misma dirección, tal como la BZH, en el espacio comprendido entre las rectas AB y AD y el arco BED.

Siguiendo la misma nomenclatura de las figuras que Pappus podemos decir que dado el cuadrado ABGD se llama cuadratriz al lugar geométrico de los puntos de intersección de las recta BG que se desplaza con movimiento uniforme hasta AD con las rectas AE que giran en torno a A desde AB a AD, también con movimiento uniforme cuando AB y BG comienzan a la vez el movimiento y emplean el mismo tiempo en el recorrido.

La gráfica es:



El dibujo de la gráfica se hace determinando una serie de puntos. A modo de ejemplo determinemos dos de ellos:

a) Cuando BG ha recorrido la cuarta parte del camino el punto B habrá llegado a P, a su vez, AB habrá recorrido la cuarta parte y B habrá llegado E. La intersección de las rectas PQ y AE es un punto Z de la cuadratriz.

b) Cuando BG ha recorrido la mitad del camino el punto B habrá llegado a P', a su vez, AB habrá recorrido la mitad y B habrá llegado E'. La intersección de las rectas P'Q' y AE' es un punto Z' de la cuadratriz.

Sucesivamente se van determinando otros puntos que nos proporcionan la forma de la curva.

Para hallar la ecuación de esta curva tomaremos como eje de abscisas positivo AD y a AB como eje de coordenadas con origen en A. Los móviles P y E recorren en tiempos iguales fracciones de espacio iguales, por lo tanto:

$$\frac{DE}{BD} = \frac{AP}{AB} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB\,\theta}{AB\,\frac{\pi}{2}} = \frac{AP}{AB}$$

haciendo AB = 1 se tiene:

$$AP = \frac{2\theta}{\pi}$$

Ecuación en coordenadas polares

Para hallar la ecuación en polares $z(\rho, \theta)$ observemos que se verifica

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{AP}{\rho}$$

de donde:

$$\rho = \frac{2\theta}{\pi}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

que es la ecuación buscada.

Ecuación en paramétricas

Teniendo en cuenta, que

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \operatorname{sen}\theta$$

se tiene:

$$x = \frac{2\theta}{\pi}\operatorname{ctg}\theta$$

$$y = \frac{2\theta}{\pi}$$

Ecuación cartesiana

Partiendo de

$$\rho = \frac{2\theta}{\pi}\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

y teniendo en cuenta que

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2} \quad y \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

se obtiene:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arcsen}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

de donde:

$$\frac{\pi y}{2} = \operatorname{arcsen}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad o \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi y}{2}$$

Se pueden hacer una serie de observaciones sobre la construcción de la cuadratriz de Dinóstrato. En primer lugar hacer notar que, para dibujar la curva, los griegos no disponían de un aparato trazador que la describiera con un movimiento continuo. Pappus recogió en *Colecciones Matemáticas* la crítica que Sporos, geómetra de finales del siglo II de nuestra era, hizo de esta curva. Una de las críticas de Sporos se basaba en que en la definición de esa curva aparecía como hipótesis lo que lo que se quería demostrar. La base de la crítica de Sporos se puede resumir así:

...los griegos no disponían de un aparato trazador que la describiera con un movimiento continuo.

Si dos puntos empiezan a moverse a partir de la posición B ¿Cómo puede determinarse la velocidad constante que ha de llevar cada móvil para llegar al mismo tiempo, uno a A siguiendo la recta AB y el otro a D siguiendo el arco BED, si no se conoce previamente la razón entre el segmento AB y el arco BED, que es, precisamente lo que se quiere conocer?

En realidad para generar esa curva por el movimiento de dos puntos es preciso imprimir a los mismos unas velocidades determinadas previamente. Para que los móviles lleguen simultáneamente es necesario que la razón de las velocidades de los movimientos que generan la curva sea igual a la razón entre las longitudes del segmento AB la del arco BED y como esta razón es desconocida, opina Sporos de Nicea que sólo se podría hacer que llegaran simultáneamente de casualidad y la curva no se puede trazar exactamente, tal y como lo exige el rigor geométrico.

Otra pega que pone el geómetra de Nicea a esta curva para que esté bien definida en todos sus puntos es que:

El punto extremo de la curva, esto es, el punto en que la curva corta a la recta AB, que algunos lo empleaban para cuadrar el círculo, no está bien determinado geométricamente.

La razón es que, en el límite, la intersección de la recta BG, al desplazarse paralelamente hasta AD, con la recta AB, al girar un recto en torno a A, es todo el segmento AD y el punto de intersección no está definido en esa posición límite. Con esta crítica lo que Sporos ponía de manifiesto era un problema de cálculo de límites. Para determinar el punto de intersección de la curva con AD se debe calcular el límite cuando θ tiende a 0

$$x = \lim_{\theta\to 0}\frac{2}{\pi}\frac{\theta}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{2}{\pi}$$

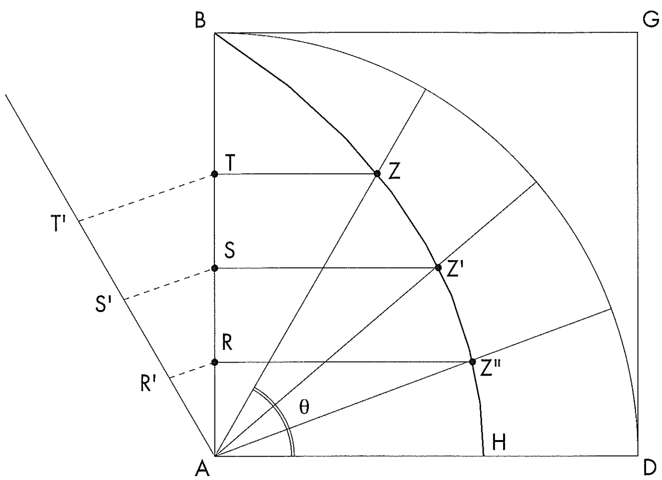
$$y = \lim_{\theta\to 0}\frac{2\theta}{\pi} = 0$$

con lo que admitían que el punto extremo H era el ($2/\pi$, 0). A partir de su abscisa se podía calcular π y utilizarlo para cuadrar el círculo. Pero los griegos, con sus métodos geométricos, no tenían una operación que justificara ese paso lógicamente.

Utilización de la curva para trisecar ángulos y cuadrar el círculo

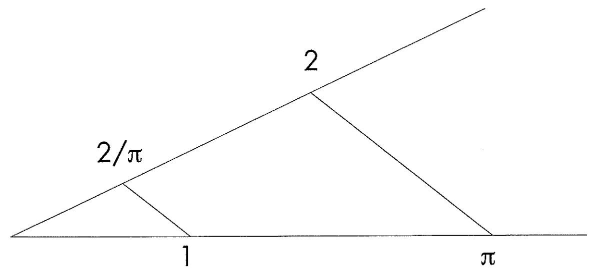
La primera utilidad de la curva de Dinóstrato es la de emplearla para la trisección un ángulo agudo e incluso para dividir un ángulo en cualquier número de partes.

A continuación se expone cómo debe procederse.



Sea el ángulo agudo ZAD, levantemos una perpendicular, AB, al lado AD por el punto A. Si suponemos trazada la curva de Dinóstrato BZH y, como en los apartados anteriores AB=1, trazando por Z una paralela a AD que corte a AB en T. Dividiendo el segmento AT en tres partes iguales se obtienen los puntos R y S. Trazando por esos puntos paralelas a AD se obtienen los puntos Z y Z', puntos de intersección de las mencionadas rectas con la curva de Dinóstrato. Los ángulos Z''AH, Z'AZ'' y ZAZ' son las tres terceras partes del ángulo ZAD.

La segunda utilidad de la curva de Dinóstrato procede del valor límite del punto H, esto es de la abscisa del punto ($2/\pi$, 0), a partir del cual se puede determinar por el teorema de Thales, según la construcción siguiente:

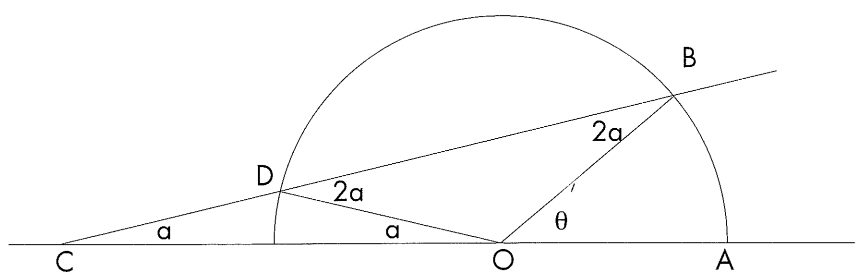


Consideraciones finales

La curva de Dinóstrato no fue admitida en el seno de la geometría griega por varias razones, entre otras por las que apuntaba Sporos de Nicea. En primer lugar era una curva que se trazaba determinándola punto a punto y se trazaba de manera aproximada, debido a que los movimientos que la generaban eran independientes y no guardaban entre ellos ninguna relación que pudiera ser medida exactamente. En realidad las magnitudes que caracterizaban los movimientos eran inconmensurables, cuestión que seguramente sospecharían los geómetras griegos.

No convenció a los griegos ni siquiera que Arquímedes diera un método sencillo para trisecar el ángulo AOB, que denotaremos con θ. Para trisecar ese ángulo se traza un semicircunferencia con centro en O, sobre una regla marcamos la longitud CD = r, manteniendo D sobre la semicircunferencia, haciendo que C se apoye en la prolongación de OA y haciendo que la regla pase por B, se tiene que el ángulo ACB es la tercera parte de AOB, ya que

$$a + 2a = \theta$$



Pappus expuso una gradación en las dificultades que presentaban los problemas geométricos sólidos diciendo que dentro de ellos había unos de complejidad superior, llamados problemas *grámicos:* aquellos en cuya resolución haría falta curvas que provenían bien de la intersección de superficies o bien de la composición de varios movimientos. Las superficies que generaban estas curvas no eran tan simples como las que engendraban las cónicas (cono y plano), sino de otras más irregulares. Curvas de este tipo se encontraban, según testimonio de Pappus, en obras, actualmente desaparecidas tales como *Lugares superficiales* de Euclides o *Consideraciones sobre las curvas* de Demetrio de Alejandría (Siglo I a.C.). Por las palabras de Pappus parece que llegaron a distinguir curvas transcendentes.

Aunque es opinión generalizada que hasta el siglo XVII se conocían unas doce curvas clasificadas en cónicas, cuadratrices, concoides o cisoides, entre otras, las obras desaparecidas mencionadas anteriormente nos hacen pensar la existencia de algunas curvas más, aunque no entraron en el cuerpo de la geometría griega. Probablemente el estudio de los problemas grámicos constituiría una línea de investigación de algunos geómetras griegos.

El número de las curvas creció con la implantación de la geometría analítica, cuando con sólo las llamadas *parábolas de Fermat*, del tipo $y = ax^n$, surgieron infinitas curvas.

No cabe duda que desde la geometría griega hasta el siglo XVII se produjo una maduración y una extensión del concepto de curva, una manera diferente de definirlas, así como una aplicación diferente de las mismas a la resolución de problemas matemáticos.

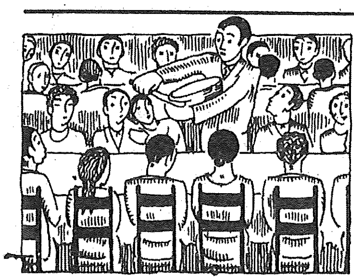
Victor Arenzana
IES Félix de Azara
Zaragoza
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
Pedro S. Ciruelo

Bibliografía

DESCARTES, R. (1981): «La Geometría», en R. DESCARTES: *Discurso del Método*, Alfaguara, Madrid.

GOMES TEIXEIRA, F. (1905): *Tratado de las curvas especiales*, Memoria de la Academia de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Imprenta de la Gaceta de Madrid, Madrid.

VERA, F. (1970): *Científicos Griegos*, Aguilar, Madrid.

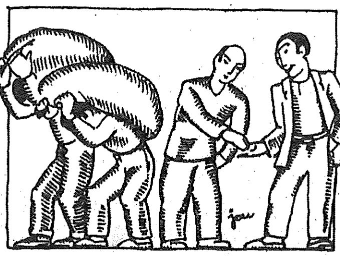


N.º 154. Con 450 Kgs. de pan se han alimentado 25 personas durante un mes. ¿Cuántas personas se habrían alimentado durante el mismo tiempo con 252 Kgs. de pan?

$450 : 25 = 18$

$\frac{252}{18} = 14$

R.: Se habrían mantenido 14 personas.



N.º 155. Se han comprado dos sacos de trigo de 120 Kgs. cada uno por 133'50 ptas. ¿Cuántos Kgs. de trigo podrían comprarse con 600'75 ptas.?

$120 \times 2 = 240$

$\frac{133'50}{240} = 0'556$

$\frac{600'75}{0'556} = 1080'48.$

R.: Podrían comprarse 1080'48 Kg.

SUMA 28
junio 1998, pp. 37-52

Sesgos en el razonamiento probabilístico y efectos de la instrucción estadística elemental

César Sáenz Castro

ARTÍCULOS

En este artículo presentamos una investigación sobre el razonamiento probabilístico de estudiantes recién ingresados en la universidad. El trabajo se enmarca teóricamente en el paradigma de heurísticos y sesgos (Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) de tradición muy fecunda en el campo del pensamiento probabilístico. Además estudiamos los efectos de la enseñanza estadística que recibieron estos estudiantes en la enseñanza secundaria. Consideramos que de los resultados de la investigación se derivan ideas muy útiles para establecer un nuevo modelo de enseñanza de las probabilidades en la educación secundaria.

CONSIDERA, querido lector, la letra R. ¿Es más probable que aparezca en la primera o en la tercera posición de una palabra que la contenga?

La respuesta estadística a esta pregunta, que se basa en un recuento de palabras y en la comparación de dos frecuencias, es que la tercera posición es la más probable. Sin embargo, la gran mayoría de personas a las que se les propuso esta cuestión, respondieron que la posición más probable era la primera. ¿A qué se debe esta discrepancia?

Utilizando tareas y cuestiones como la anterior, Kahneman, Slovic y Tversky (1982) reunieron una amplia evidencia acerca del hecho de que las personas, enfrentadas a ciertas situaciones que exigen juicios y decisiones de tipo probabilístico, no emplean los conceptos y leyes matemáticas de la probabilidad y la estadística como, por ejemplo, la ley de los grandes números, el principio de regresión a la media o el concepto de tamaño muestral.

Estos autores defienden que las personas, en este tipo de situaciones, usan diversas estrategias de razonamiento no estadísticas. Estas estrategias, o heurísticos, que se adquieren a través de las experiencias de la vida cotidiana, tienen un valor funcional y práctico que las hace persistentes y sistemáticas. El problema es que, en ciertas circunstancias, pueden impedir o sesgar la aplicación de los conceptos y leyes matemáticas del azar.

Por ejemplo, las personas enfrentadas a la cuestión anterior emplean, según Tversky y Kahneman (1973), el heurístico de accesibilidad: estiman la frecuencia o probabilidad de un suceso por la facilidad de recuerdo o memorización de ejemplos de dicho suceso. Estiman que son más frecuentes las palabras que empiezan con la letra R porque son más fáciles de generar o traer a la memoria que las palabras que tienen una R en la tercera posición. Se ha desarrollado una abundante investigación sobre estos heurísticos. Kahneman y Tversky (1972) y Shaughnessy (1992), entre otros, han trabajado sobre el heurístico de representatividad: la gente tiende a estimar la probabilidad de un suceso de acuerdo con lo representativo que resulta de algún aspecto de su población de partida. Por ejemplo, ante la cuestión: «Jugando en la lotería primitiva, Luis ha escogido los números 1, 2, 3, 4, 5, 6 y Pedro los números 36, 2, 17, 33, 8, 26. ¿Quién tiene más posibilidades de ganar?», una mayoría de personas piensan que Pedro porque su secuencia es más representativa de lo que es una secuencia aleatoria que la de Luis.

Tversky y Kahneman (1981) definen el heurístico de aversión al riesgo para explicar por qué la gente no utiliza el principio estadístico de utilidad esperada en situaciones como la siguiente: «¿Qué prefieres ganar 10.000 pts. seguras o participar en un juego de cara y cruz donde si sale cara ganas 21.000 pts. y si sale cruz no ganas nada?». Según el principio de maximización de la utilidad esperada se debería jugar, pero la mayoría de personas dicen preferir las 10.000 pts. seguras. Más vale pájaro en mano que ciento volando.

Hogarth (1987) presta mucha atención al heurístico determinista o causal que tiene su origen en la primacía del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilista. Este heurístico explicaría, por ejemplo, la dificultad que tienen las personas, incluso instruidas en estadística, para distinguir la correlación entre dos variables (concepto estadístico) de una relación de causa-efecto (concepto lógico-mecánico).

La investigación que se describe a continuación se enmarca dentro de la teoría de Kahneman y Tversky (conocida como el paradigma de heurísticos y sesgos) y tiene tres objetivos fundamentales:

- Analizar la presencia en sujetos universitarios de los sesgos estadísticos fundamentales documentados en la literatura que acabamos de citar.
- Estudiar el uso de las reglas y leyes de la teoría de probabilidades, en versiones formales o intuitivas de las mismas, por parte de los mismos sujetos. Se quiere analizar la coexistencia de estos heurísticos estadísticos con los heurísticos no estadísticos y en qué circunstancias aparecen unos u otros. Dicho con otras palabras, queremos analizar la influencia del contenido de la tarea en la estrategia de solución adoptada.
- Investigar la influencia que sobre el razonamiento estadístico tiene la instrucción probabilística inicial que se imparte a los estudiantes españoles en la secundaria. Es de esperar que esta instrucción proporcione al alumno técnicas elementales de cálculo probabilístico que le permitan disminuir el recurso a los heurísticos no estadísticos, pero no se espera la solución correcta de los problemas que tienen una mayor demanda cognitiva.

La investigación que se describe a continuación se enmarca dentro de la teoría de Kahneman y Tversky (conocida como el paradigma de heurísticos y sesgos) y tiene tres objetivos fundamentales...

En cuanto a la metodología de investigación, se han introducido diversas modificaciones en relación a la que usualmente se sigue en el paradigma de heurísticos y sesgos. En cada problema, los sujetos tienen que elegir una respuesta de tres que se le proporcionan y deben explicar o hacer los cálculos que justifican su elección. De las tres posibles respuestas que se proporcionan para cada problema, una de ellas refleja directamente un sesgo del razonamiento probabilístico, otra refleja la contestación correcta desde el punto de vista de la teoría de probabilidades y la tercera sirve para cerrar el abanico de todas las respuestas posibles o en algunos casos refleja un sesgo alternativo al principal.

En línea con el enfoque de Fong, Krantz y Nisbett (1986) y de Shaughnessy (1992), realizamos una caracterización de las concepciones estocásticas de los sujetos que consideramos útil para describir los resultados de la investigación. En concreto, para calificar cada problema se desarrolló un sistema de codificación de 3 puntos:

- *Una calificación de 1*, significa que la respuesta elegida junto con la explicación dada por el sujeto, se clasifica en la *categoría de respuesta no estadística* o respuesta enteramente sesgada. El sujeto refleja el uso del heurístico no estadístico definido *a priori*, no sólo en la elección que hace de la respuesta sino también en su explicación, donde no aparece ningún concepto o principio estadístico y sí manifestaciones del sesgo. Para dar esta calificación a una respuesta se utilizan los siguientes indicadores: prevalencia de un modelo determinístico, causalidad abusiva, presencia de la estrategia conocida como el enfoque del resultado, uso de heurísticos no estadísticos de juicio, respuestas basadas fundamentalmente en la experiencia concreta del sujeto y antinormativas.
- *Una calificación de 2*, significa que la respuesta y justificación dadas se

clasifica en la *categoría de respuesta pobremente estadística.* El sujeto en su respuesta, o bien hace alguna mención de conceptos o leyes estadísticas aunque de manera incompleta o incorrecta, o bien usa a la vez heurísticos estadísticos y no estadísticos. Como indicadores se utilizan: manifestaciones que muestran cierta comprensión del azar y de los sucesos aleatorios, intento de aplicación de modelos normativos a tareas simples distinguiéndolos de las creencias intuitivas, rastros de lenguaje formal del azar, intento de utilizar el concepto de probabilidad como proporción y las leyes elementales de cálculo probabilístico.

- *Una calificación de 3,* significa que la respuesta y su justificación se clasifica en la *categoría de buena respuesta estadística.* El sujeto en su respuesta hace un uso apropiado de los conceptos y leyes estadísticas y realiza cálculos probabilísticos correctos. Como indicadores se utilizan: comprensión en profundidad de algunos modelos de azar matemáticos (clásico y frecuencial, en concreto), habilidad para comparar y contrastar varios modelos de azar, uso adecuado del lenguaje, habilidad para seleccionar y aplicar el concepto y/o el cálculo normativo apropiado.

En el cuadro1 se presenta este sistema de codificación aplicado a cada uno de los diez problemas. Para que un sujeto sea calificado en un problema determinado no sólo tiene que escoger una de las opciones sino que debe explicar, mediante cálculo o razonamiento verbal, su elección. Las razones de exigir al sujeto una explicación de la selección de respuesta que hace en cada problema y de establecer un sistema de codificación como el descrito, son las siguientes:

Los heurísticos son constructos teóricos mediante los cuales el investigador explica el razonamiento probabilístico del sujeto; si éste elige la respuesta que encierra un determinado sesgo frente a la respuesta que es correcta desde el punto de vista formal, el investigador determina que el sujeto razona según el heurístico que genera ese sesgo o error de juicio. Nos parece interesante detectar en las justificaciones de los sujetos pruebas o indicios de la existencia de tales constructos teóricos. Por otra parte, y partiendo de la hipótesis de que en el razonamiento de las personas coexisten procedimientos estadísticos y no estadísticos y que unos u otros se elicitan en función de diferencias intelectuales de los individuos pero también en función de las características de la tarea, no se puede establecer una dicotomía entre pensamiento sesgado y pensamiento correcto porque presenta un escenario demasiado simple y esquemático del pensamiento estadístico. El sistema de codificación propuesto es más flexible y permite categorizar respuestas que muestran la coexistencia de elementos formales e intuitivos en el razonamiento probabilístico.

Se eligieron cuatro tipos de sesgos dentro del amplio catálogo que ofrece la investigación en este campo: representatividad, accesibilidad, determinismo y aversión al riesgo.

En cuanto a la estructura de la prueba, seleccionamos los problemas no sólo en función de que su contenido provoque algún tipo de sesgo (tal como se hace en la mayoría de las investigaciones reseñadas en la literatura) sino también en función del contenido probabilístico formal que subyace en ellos; es decir se tuvieron en cuenta dos variables para seleccionar los problemas:

a) Tipo de sesgo que elicitan. Se eligieron cuatro tipos de sesgos dentro del amplio catálogo que ofrece la investigación en este campo: *representatividad, accesibilidad, determinismo* y *aversión al riesgo.* Los dos primeros por la importancia que tienen en el razonamiento probabilístico, en concreto, por el papel que desempeñan en el procesamiento selectivo de la información, que según Evans (1982) es la causa fundamental de sesgos en el razonamiento.

Por su parte, el sesgo determinista tiene una gran importancia en la enseñanza. El sistema educativo entrena el pensamiento causal, introduciendo desde los primeros años de escolarización el método de la física newtoniana como paradigma de la metodología científica. El alumno va construyendo una concepción del mundo determinista y causal que si bien es superior al conocimiento vulgar de las experiencias cotidianas, puede impedir el desarrollo del pensamiento sobre el azar y la incertidumbre, sobre todo si la ciencia estadística se enseña tardía y escasamente.

Por último, la aversión al riesgo es un sesgo muy estudiado en la teoría de la decisión conductual (Tversky y Kahneman, 1981) pero en la presente investigación lo analizamos en relación al sesgo que puede introducir en la aplicación de conceptos básicos estadísticos, como el de esperanza matemática de una distribución.

b) Tipo de contenido estadístico. En relación a esta variable los problemas se pueden agrupar en dos clases: La

SISTEMA DE CODIFICACIÓN SEGUIDO PARA CATEGORIZAR LAS RESPUESTAS A CADA PROBLEMA DEL EXPERIMENTO 1 EN TRES CATEGORÍAS

Categoría 1: respuestas no estadísticas; respuestas sesgadas.

Categoría 2: respuestas pobremente estadísticas.

Categoría 3: respuestas estadísticas formalmente correctas.

En cada problema esta categorización se concreta del siguiente modo:

Problema 1

Categoría 1: respuestas a) o b) en cuya explicación hay una percepción selectiva de la situación; se basan en las formas de los cuadros y en el procesamiento de la información se refleja el sesgo de accesibilidad en cuanto que «da la sensación» de que en el cuadro A hay más caminos que en el B.

Categoría 2: respuestas a), b) o c) que se basan en un cálculo combinatorio incompleto o incorrecto.

Categoría 3: respuestas c) que realizan explícitamente el cálculo correcto.

Problema 2

Categoría 1: respuestas a) o c) que se basan en explicaciones causales y no hay ninguna referencia a la regularidad estadística que refleja el enunciado.

Categoría 2: respuestas b) que se eligen por exclusión de las otras. Respuestas a), b) o c) que muestran la coexistencia de un pensamiento fuertemente causal con el reconocimiento de una regularidad estadística en la situación.

Categoría 3: respuestas b) que usan explícita y correctamente el principio de regresión a la media aunque no mencionen este término.

Problema 3

Categoría 1: respuestas a) que se justifican en base al heurístico de la representatividad: la secuencia b) es muy poco probable porque es muy rara, nada representativa del fenómeno «lanzar una moneda al aire», obtener tantas caras seguidas

Categoría 2: respuestas c) que añaden explicaciones incorrectas o incompletas a formulaciones intuitivas de la ley de los grandes números y del concepto de independencia estadística. Por ejemplo, hay una utilización abusiva del principio de equiprobabilidad y así se escoge c) porque «en toda situación regida por el azar, los sucesos son siempre equiprobables, siempre tienen la misma probabilidad».

Categoría 3: respuestas c) que hacen uso explícito y correcto de las leyes formales implicadas (la ley de los grandes números y el principio de independencia); respuestas c) con el cálculo probabilístico correcto: $p(a)=p(b)-=(1/2)^6=1/64$

Problema 4

Categoría 1: respuestas a) que reflejan un razonamiento basado en lo llamativo del dato específico del 80% de identificaciones correctas de la víctima y sin ninguna utilización de las probabilidades previas; respuestas c) que reflejan un razonamiento determinista basado en la creencia sin fisuras en la declaración de la victima.

Categoría 2: respuestas a), b) o c) que se basan en un cálculo incorrecto pero que utilizan las probabilidades previas además del dato del 80%.

Categoría 3: respuestas b) que realizan los cálculos probabilísticos correctos, correspondientes a la Regla de Bayes aunque no mencionen este nombre.

Problemas 5 y 8

Categoría 1: respuestas b) que se justifican por lo raro e improbables que son esos sucesos y que no incluyen ningún tipo de cálculo probabilístico.

Categoría 2: respuestas a), b) o c) con cálculos incompletos.

Categoría 3: respuestas c) que añaden los cálculos probabilísticos correctos.

Problema 6

Categoría 1: respuestas a) que se justifican por la aversión al riesgo que supone la segunda salida: respuestas b) que se justifican por la preferencia por el riesgo de esta salida; respuestas c) que se eligen por indiferencia ante lo poco atractivas que resultan las dos salidas propuestas.

Cuadro 1

Categoría 2: respuestas a), b) o c) que reflejan un cálculo incorrecto de la utilidad esperada.

Categoría 3: respuestas c) que suponen un cálculo correcto de la utilidad esperada, aunque no utilicen este término.

Problema 7

Categoría 1: respuestas b) que reflejan el uso del heurístico de representatividad, en su forma de «ley de los pequeños números»: cualquier muestra, por pequeña que sea, ha de tener los mismos parámetros que la población de la que procede.

Categoría 2: respuestas b) o c) que reflejan una mala aplicación de la Ley de Laplace o un cálculo incorrecto, del tipo (1/2)(1/2)(1/2).

Categoría 3: respuestas a) que realizan correctamente los cálculos correspondientes a la Distribución Binomial, aunque no se mencione este nombre.

Problema 9

Categoría 1: respuestas a) que muestran un sesgo de accesibilidad en el recuento selectivo de todas las posibilidades del experimento aleatorio compuesto; reducen el espacio muestral del experimento a dos sucesos equiprobables: «extracción de la carta (roja, roja)» y «extracción de la carta (roja, negra)».

Categoría 2: respuestas a) o c) que hacen un recuento más completo de las posibilidades pero todavía incompleto.

Categoría 3: respuestas b) en donde se realiza un diagrama completo de todas las posibilidades de la situación.

Problema 10

Categoría 1: respuestas c) que reflejan el sesgo de representatividad, en su forma de «ley de los pequeños números»; las dos muestras son igualmente representativas de la población de personas nacidas en el mundo.

Categoría 2: respuestas c) que reflejan la coexistencia del sesgo de representatividad con una cierta consideración del tamaño de las muestras; respuestas a) que reflejan una mala aplicación del concepto de tamaño muestral.

Categoría 3: respuestas b) que reflejan una correcta aplicación del concepto de tamaño muestral.

Cuadro 1 (cont.)

primera clase está compuesta por los problemas cuya solución supone la *comprensión y aplicación* de un *concepto o ley probabilística básica*, como la ley de los grandes números, el principio de regresión o el concepto de tamaño muestral. La segunda clase está compuesta por los problemas cuya solución supone el *dominio* de las técnicas elementales del *cálculo probabilístico*, como las leyes de la multiplicación y suma de probabilidades, la regla de Bayes o la ley binomial. Hemos introducido un problema de cálculo combinatorio porque la combinatoria proporciona recursos y herramientas esenciales en la resolución de problemas probabilísticos.

Nos ha parecido interesante cruzar las dos variables, sobre todo estudiar la influencia de los heurísticos en el cálculo probabilístico. De la revisión de las investigaciones en el campo se desprende que se ha prestado poca atención a esta cuestión; sin embargo, y si el sistema computacional humano es limitado, es necesario conocer el influjo de estrategias intuitivas de razonamiento (en definitiva, «atajos computacionales») en la realización de cálculos probabilísticos elementales.

La prueba consistió en contestar a un cuestionario de 10 problemas, seleccionados con los criterios ya señalados y cuyos enunciados figuran en la discusión de los resultados.

Método

Sujetos: La prueba se aplicó de forma individual a 93 estudiantes de la Universidad Autónoma de Madrid: 66 alumnos de 1.° de Ciencias Matemáticas, 17 de 1.° de Ciencias Biológicas y 10 de Geografía e Historia. 46 de esos estudiantes habían estudiado la teoría elemental de probabilidades y otros 47 no.

Procedimiento: La prueba consistió en contestar a un cuestionario de 10 problemas, seleccionados con los criterios ya señalados y cuyos enunciados figuran en la discusión de los resultados. En las instrucciones se les indicó a los sujetos que se trataba de una prueba de contenido probabilístico pero que no se pretendía conocer cuánto sabían de teoría de probabilidades sino conocer la dificultad de aplicación de ciertos conceptos y leyes matemáticas. En la tabla 1 se pueden observar los 10 problemas clasificados en relación a las dos variables:

	Comprensión leyes estadísticas	*Cálculo probabilístico*
Determinismo	2	4
Representatividad	3, 10	5, 7, 8
Accesibilidad	9	1
Aversión al riesgo		6

Tabla 1

Resultados y discusión

Vamos a analizar los resultados en relación a los tres objetivos de la investigación:

En relación a los dos primeros objetivos

En la tabla 2 se reflejan los resultados obtenidos en cuanto a los porcentajes de calificaciones 1, 2 y 3. Como hemos dicho anteriormente, se califica con un 1 la respuesta no estadística, con un 2 la respuesta pobremente estadística y con un 3 la respuesta correcta según las leyes de la teoría de probabilidades

	Porcentaje categoría 1	*Porcentaje categoría 2*	*Porcentaje categoría 3*
TOTAL	**62,06**	**31,24**	**6,70**
Problema 1	61,0	25,6	13,4
Problema 2	91,2	8,8	0,0
Problema 3	28,44	61,4	10,2
Problema 4	69,1	29,4	1,5
Problema 5	49,4	34,2	16,5
Problema 6	65,8	31,6	2,6
Problema 7	79,0	19,8	1,2
Problema 8	28,2	56,5	15,3
Problema 9	95,0	5,0	0,0
Problema 10	69,0	21,1	9,9

Tabla 2

Como puede observarse, aproximadamente el 62% de las respuestas dadas fueron clasificadas en la categoría de respuestas no estadísticas, el 31% en la categoría de respuestas pobremente estadísticas y sólo el 7% en la categoría de buenas respuestas estadísticas. Estos datos confirman de forma global la fuerte presencia de sesgos y errores de razonamiento y cálculo probabilístico en la muestra de universitarios españoles y la notable ausencia

...aproximadamente el 62% de las respuestas dadas fueron clasificadas en la categoría de respuestas no estadísticas, el 31% en la categoría de respuestas pobremente estadísticas y sólo el 7% en la categoría de buenas respuestas estadísticas.

de principios normativos consolidados; nuestros estudiantes recién ingresados en la universidad exhiben tanto concepciones no-estadísticas como concepciones estadísticas ingenuas. Pasemos ahora a un estudio por bloques de tareas atendiendo a la clasificación de la tabla 1.

a) Analizando los problemas 2, 3, 9 y 10 que no exigen cálculos sino la comprensión e interpretación de leyes probabilísticas fundamentales, se puede observar la interacción que existe entre esas leyes y los heurísticos no estadísticos que parecen estar presentes:

Problema 2

En un curso de formación de pilotos se siguió la siguiente estrategia: se premiaba al piloto que hacía un buen aterrizaje y se castigaba al que lo hacía mal. Los instructores de vuelo observaron que los pilotos premiados solían hacerlo peor en el siguiente vuelo y los castigados solían hacerlo mejor ¿Podrías explicar este fenómeno?

a) Es una casualidad: podría haber sucedido lo contrario.

b) Es un fenómeno que se puede explicar por las leyes estadísticas. (*)

c) Es una cuestión de motivación: el castigo es más eficaz que el premio.

(Se marca con un asterisco la respuesta que se considera correcta).

	Problema 2
Categoría 1 (%)	91,2
Categoría 2 (%)	8,8
Categoría 3 (%)	0,0

El 91% de las respuestas mostraron un pensamiento absolutamente determinista y causal sin ningún tipo de factor estadístico. Las respuestas reflejan un esquema causa-efecto, en donde la motivación es la causa del fenómeno observado; incluso, ante el rechazo afectivo que supone valorar más el castigo que el premio como refuerzo a una conducta, algunos sujetos prefieren atribuir a la pura casualidad lo sucedido, sin ninguna mención a la regularidad estadística que se desprende del enunciado.

Sólo un 9% de las respuestas recogen esta regularidad estadística y seleccionan la respuesta: «es un fenómeno que se puede explicar por las leyes estadísticas», aunque sus explicaciones no hacen referencia explícita al principio de regresión a la media; son explicaciones del tipo «parece que hay una regularidad estadística pero puede ser casualidad».

Problema 3

Estamos tirando una moneda al aire muchas veces. ¿Qué secuencia tiene más probabilidad de obtenerse?:

a) CXXCXC

b) CCCCXC

c) Tienen la misma probabilidad de ocurrir. (*)

	Problema 3
Categoría 1 (%)	28,44
Categoría 2 (%)	61,4
Categoría 3 (%)	10,2

Este problema es el que arroja una proporción de categoría 1 más baja. Sólo el 28% de las respuestas escogen la opción a), justificando su elección con una explicación que refleja claramente el sesgo de representatividad: la secuencia CCCCXC es menos probable porque no es normal que en el lanzamiento de una moneda al aire salgan tantas caras seguidas.

La mayoría de los sujetos, el 72% restante, escogen la opción c) pero sólo un 10% dan una explicación correcta en términos de la ley de los grandes números y del concepto de independencia estadística; incluso algunos de estos últimos sujetos hacen el cálculo correcto de la probabilidad de ocurrencia de las secuencias:

$$p(a) = p(b) = (1/2)^6 = 1/64.$$

Un 61% de las respuestas reflejan la coexistencia de reglas formales y sesgos y aunque escogen la opción c) reconocen que la secuencia CXXCXC es más «normal», es más «creíble» que la CCCCXC. Algunos sujetos resuelven el dilema mediante la falacia de admitir que «en el fondo, todos los sucesos aleatorios tienen igual probabilidad». Frente a los fenómenos determinísticos que se pueden predecir, los fenómenos aleatorios son impredecibles y no se puede establecer ningún orden o jerarquía entre ellos. En este sentido parecen considerar que las explicaciones en términos probabilísticos son de rango científico inferior a las explicaciones causales.

> *Algunos sujetos resuelven el dilema [problema 3] mediante la falacia de admitir que «en el fondo, todos los sucesos aleatorios tienen igual probabilidad».*

Problema 9

Se dispone de tres cartas: una de ellas es negra por ambas caras, otra roja por ambas caras y la tercera tiene una cara roja y la otra negra. Se meten las cartas en un sombrero y una mano inocente extrae una de ellas de la que se puede ver sólo una de las caras. Supongamos que es roja.

Un jugador te ofrece apostar cierta suma de dinero contra la misma cantidad de su parte, apostando él a favor de la carta roja-roja ¿Te parece una apuesta equitativa y limpia, donde los dos tengáis las mismas posibilidades de ganar?

a) Sí.

b) No. (*)

c) No tengo datos para opinar.

	Problema 9
Categoría 1 (%)	95,0
Categoría 2 (%)	5,0
Categoría 3 (%)	0,0

Este problema es el que recibe más calificaciones 1. El 95% de los sujetos contestan que la apuesta es equitativa en función de que establecen un inventario de posibilidades incompleto. Para ellos sólo existen dos posibilidades: carta (roja, roja) o carta (roja, negra). No es fácil para el sistema computacional humano acceder al árbol completo de todas las posibilidades y tomar en consideración que, en la situación planteada, no sólo hay un experimento aleatorio que consiste en extraer del sombrero una de las tres cartas, sino que hay un segundo experimento aleatorio que consiste en hacer visible el anverso o el reverso de la carta extraída. En efecto, el suceso condicionante no es la carta, es la cara de la carta:

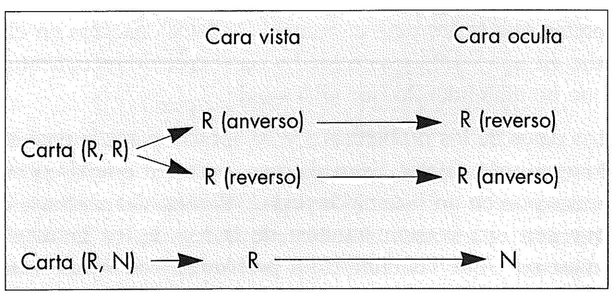


Gráfico 1

Por tanto, la probabilidad de que la carta sea la (R, R) es 2/3 y la probabilidad de que sea la (R, N) es 1/3.

Hay un 5% de sujetos que intentan hacer un diagrama que recoja todas las posibilidades pero ninguno llega a hacerlo completo. Por ejemplo, un sujeto llega a la conclusión de que la probabilidad de (R, R) es el doble de la probabilidad de (R, N) y entonces asigna 1/2 a la probabilidad de (R, R) y 1/4 a la probabilidad de (R, N).

Problema 10

En una cierta ciudad hay dos maternidades. En la mayor nacen aproximadamente 45 bebés por día y en la menor 15. Como sabes, más o menos el 50% de los recién nacidos son niños aunque el porcentaje exacto de niños varía de un día a otro. Durante un año entero cada maternidad registró los días en los que más del 60% de los recién nacidos fueron niños. ¿Qué maternidad registró más días de éstos?:

a) La mayor.

b) La menor. (*)

c) Las dos maternidades registraron aproximadamente el mismo número de días.

	Problema 10
Categoría 1 (%)	69,0
Categoría 2 (%)	21,1
Categoría 3 (%)	9,9

El 69% de las respuestas reflejan una completa insensibilidad al tamaño de las muestras y al escoger la opción c) reconocen, de modo explícito, que las dos muestras son iguales a efectos de predecir la proporción niños/niñas que nacen en ellos. Un 21% de las respuestas tienen en cuenta el tamaño de las muestras pero lo hacen de modo incorrecto, sobre todo por incomprensión o mala interpretación del enunciado. Sólo el 10% de los sujetos hacen correcto uso del concepto de tamaño muestral.

Hay que subrayar la dificultad de comprensión del enunciado de este problema que es un clásico en la investigación realizada en el marco del paradigma de heurísticos y sesgos (Kahneman y otros, 1982). Algunos alumnos interpretan que se les pide el número de bebés nacidos en el año en una y otra maternidad y otros dicen directamente que no entienden lo que se les pide.

Los datos de los problemas 3 y 10 apoyan parcialmente a Fong y otros (1986). Estos autores sostienen que las personas poseen un sistema de reglas inferenciales abstractas que son una versión intuitiva de la ley de los grandes números y que las utilizan en problemas cotidianos. Las respuestas al problema 3 reflejan la existencia de un procedimiento estadístico, de una intuición de la la ley de los grandes números que impide que los sujetos caigan en el sesgo de representatividad a pesar de las tentaciones que suministra el enunciado. Sin embargo, esa misma versión intuitiva de la ley de los grandes números no aparece en el problema 10 y los sujetos caen, en una gran mayoría, en el sesgo de representatividad.

Los datos de los problemas 3 y 10 apoyan parcialmente a Fong y otros (1986). Estos autores sostienen que las personas poseen un sistema de reglas inferenciales abstractas que son una versión intuitiva de la ley de los grandes números y que las utilizan en problemas cotidianos.

Los problemas 2 y 9 son muy difíciles. Presentan situaciones muy engañosas que impiden la emergencia de posibles reglas estadísticas. Las respuestas al problema 2 no reflejan la existencia de una versión intuitiva del principio de regresión a la media. En el problema 9 aparece con fuerza la falacia de que la información dada sobre el color de una cara de la carta extraída no cambia la equiprobabilidad de las cartas salvo que la probabilidad se debe aplicar al espacio muestral reducido de las dos cartas posibles.

b) En relación a los problemas que exigen cálculo probabilístico, hay datos que conviene analizar:

Problema 5

¿Qué probabilidad es menor:

A) la probabilidad de que una persona elegida aleatoriamente cumpla años un día determinado (por ejemplo el 25 de agosto) o

B) la probabilidad de que dos personas elegidas aleatoriamente cumplan años el mismo día?

a) Es menor A.

b) Es menor B.

c) Son iguales. (*)

Problema 8

¿Qué probabilidad es menor:

A) la probabilidad de conseguir un seis al lanzar un dado

B) la probabilidad de conseguir dobletes (el mismo número en los dos dados) al lanzar dos dados?

a) La A.

b) La B.

c) Son iguales. (*)

	Problema 5
Categoría 1 (%)	49,4
Categoría 2 (%)	34,2
Categoría 3 (%)	16,5

	Problema 8
Categoría 1 (%)	28,2
Categoría 2 (%)	56,5
Categoría 3 (%)	15,3

Estos dos problemas son, desde el punto de vista de su estructura matemática, isomorfos; se pueden resolver, entre otros métodos, aplicando las leyes de la suma y multiplicación de probabilidades exactamente de la misma manera en los dos problemas. Sin embargo, son muy distintos si se hace un análisis superficial de los mismos; en el problema 5 aparece un suceso «raro», un suceso que las personas consideran muy improbable, como es el de que dos individuos, elegidos al azar, cumplan años el mismo día; en el problema 8 se plantea una situación más familiar para el sujeto, como es el juego con dados.

Pues bien, así como en el problema 5 la mitad de los sujetos se dejan llevar por el sesgo de representatividad y juzgan como menos probable el suceso «raro» porque es representativo de suceso muy improbable, en el problema 8 sólo el 28% de los sujetos explican que es menos probable el suceso de conseguir dobletes que el de conseguir «un seis» porque es muy raro conseguir dobletes («casi nunca sale un doble seis al tirar dos dados»). Se manifiesta el carácter contingente de los juicios probabilísticos: el contenido de la tarea influye en la estrategia de solución adoptada.

Sin embargo, la proporción de respuestas totalmente correctas es similar en ambos problemas, alrededor de un 16%; esto se explica en función de que, aunque el problema 5 elicita más fuertemente el sesgo, sin embargo a la hora de resolverlo correctamente es necesario aplicar los mismos cálculos a uno y a otro:

Estos dos problemas [5 y 8] son, desde el punto de vista de su estructura matemática, isomorfos; se pueden resolver, entre otros métodos, aplicando las leyes de la suma y multiplicación de probabilidades exactamente de la misma manera en los dos problemas.

Problema 5:

$p(a) = 1/365$

$p(b) = (1/365)(1/365) + \ldots + (1/365)(1/365) = 1/365$

Problema 8 :

$p(a) = 1/6$

$p(b) = (1/6)(1/6) + \ldots + (1/6).(1/6) = 1/6$

En cuanto a las respuestas clasificadas como pobremente estadísticas son las de aquellos sujetos que emplean bien la ley de la multiplicación pero sistemáticamente se olvidan de sumar en las opciones b, tanto del problema 5 como, lo que es más sorprendente, del problema 8. En efecto, en el 8, el árbol de posibilidades parece más accesible, parece intuitivo que hay 6 casos favorables de 36 posibles; sin embargo más de la mitad de los sujetos resuelven el problema 8 así:

Probabilidad b = $(1/6)(1/6) < 1/6$ = Probabilidad a

Es bastante llamativo que muy pocos alumnos intentaran utilizar la regla de Laplace para resolver el problema 8 (en el problema 5 no la utilizó ninguno). Parece fácil razonar que hay 36 casos posibles al lanzar dos dados {(1, 1), (1, 2), ... (6, 5), (6, 6)} y sólo 6 casos favorables para conseguir dobletes {(1, 1), (2, 2), ... ,(6, 6)}; por tanto la probabilidad de b) es 6/36. Sin embargo, los alumnos que intentan hacer cálculos normativos (que coinciden con los que estudiaron algo de teoría de probabilidades en el bachillerato) utilizan la suma y la multiplicación de probabilidades. Este hecho puede deberse a que en la instrucción elemental en probabilidades suele insistirse más en ejercicios sencillos de suma y multiplicación de probabilidades y menos en la determinación de los correspondientes espacios muestrales.

Problema 7

¿Cuál es la probabilidad de que entre 6 nacimientos 3 sean mujeres:

a) 20/64 (*)

b) 3/6

c) 1/8

	Problema 7
Categoría 1 (%)	79,0
Categoría 2 (%)	19,8
Categoría 3 (%)	1,2

El problema 7 presenta unas pautas de solución extraordinariamente similares a los problemas 5 y 8: en primer lugar, el sesgo de representatividad también se muestra con mucha fuerza en este problema; el 79% de los sujetos responden que 3/6 es la probabilidad de que nazcan 3 niñas en 6 nacimientos porque en la población nacen tantas niñas como niños; es la «ley de los pequeños números» por la cual una muestra aunque sea pequeña siempre representa las características de la población. Algunos llegan a hacer una interpretación «representativa» de la ley de Laplace:

casos favorables/casos posibles= 3/6.

En segundo lugar, hay un 20% de los sujetos que no se dejan llevar por la representatividad de la situación y hacen un cálculo probabilístico del mismo tipo que el que realizan en los problemas 5 y 8: (1/2)(1/2)(1/2) = 1/8. Realmente éste es el cálculo de la probabilidad de que las 3 personas nacidas en 3 nacimientos sean niñas. Sólo un 1% hace los cálculos correctos, correspondientes a la ley binomial que se muestra como una regla estadística de difícil adquisición, y llega a la solución 20/64.

Problema 4

En una determinada ciudad donde el 90% de los ciudadanos son blancos y un 10% son negros se comete un delito: un hombre es atracado en el centro de la ciudad y afirma que el atracador es negro. Sin embargo, cuando un juzgado que investiga el caso reconstruye varias veces la escena, bajo unas condiciones de iluminación parecidas, la víctima identifica correctamente la raza del asaltante el 80% de las veces. ¿Cuál es la probabilidad de que el asaltante fuera efectivamente negro?

a) *0,80*

b) *0,31 (*)*

c) *1*

	Problema 4
Categoría 1 (%)	69,1
Categoría 2 (%)	29,4
Categoría 3 (%)	1,5

Otra ley estadística que presenta muchos problemas de aplicación es la Regla de Bayes. En el problema 4 se presenta una situación que desde un enfoque estadístico se resuelve como una mera aplicación del teorema de Bayes pero que, en la práctica, no es fácilmente interpretable en términos formales. En muchos trabajos (Kahneman y Tversky, 1972; Shaughnessy, 1983) se explican los errores cometidos en su solución por el sesgo de representatividad que se manifiesta, entre otras formas, como una insensibilidad a las probabilidades previas. En el presente trabajo y siguiendo una propuesta de Hogarth (1987), atribuimos el error sistemático que cometen los sujetos a la prevalencia del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilista, sesgo que hemos dado en llamar determinismo: los sujetos sólo admiten como dato esencial para estimar la probabilidad el 80% de aciertos en las identificaciones; es la capacidad de la víctima para hacer identificaciones correctas el único factor que influye en la estimación de la probabilidad.

Otra ley estadística que presenta muchos problemas de aplicación es la Regla de Bayes. En el problema 4 se presenta una situación que desde un enfoque estadístico se resuelve como una mera aplicación del teorema de Bayes pero que, en la práctica, no es fácilmente interpretable en términos formales.

Las explicaciones de los sujetos son congruentes con esta hipótesis: el 69% de las respuestas se han codificado como calificaciones 1 y ahí se recogen todos los sujetos que escogen la solución c) y casi todos de los que eligen la solución a); las justificaciones de todos estos sujetos tienen en común la manifestación de expresiones muy deterministas, que siempre giran alrededor del dato específico de la capacidad de reconocimiento de la victima. Los que escogen la opción c) todavía van más allá en su determinismo: «la probabilidad de que el asaltante sea negro es 1 porque así lo ha dicho la víctima y no tiene por qué engañar», es el tipo de explicación común en ellos.

El 29% de las respuestas se han calificado con un 2 y corresponden a sujetos que han tratado de utilizar las probabilidades previas además del dato del 80%. El cálculo que realizan es 0,8x0,1, es decir multiplican la probabilidad de identificación correcta de ser negro por la probabilidad de encontrarse aleatoriamente con un negro en esa población. Diríamos que están calculando el numerador de la fórmula de Bayes pero les falta el denominador; en todo caso, es una cuestión de «espacio del problema» al desarrollar el diagrama en árbol.

Es interesante la estrategia de «anclaje y ajuste» que realizan a continuación para elegir una solución: se anclan en 0,08 que es el resultado de la anterior operación y a continuación ajustan, unos a 0,8 que es la solución a) y que tiene parecido visual con 0,08 y otros a 0,31 que es el número más bajo de las soluciones propuestas. Esta estrategia recuerda al conflicto reflexión-decisión definido por Borovcnik y Bentz (1991): la reflexión (el cálculo) produce un dato, 0,08, que no corresponde a ninguna de las soluciones ofrecidas y entonces el alumno ha de realizar una nueva operación cognitiva para tomar la decisión.

Además, estos datos pueden arrojar nueva luz sobre el conservadurismo (sesgo establecido por Edwards (1968) al estudiar la cuestión de cómo las personas usan la información que surge de los datos para actualizar una probabilidad *a priori*): si la limitación computacional de las personas les lleva a un cálculo restringido al numerador, la estimación de la probabilidad *a posteriori* siempre será más baja que la que proporcione la Regla de Bayes donde hay un denominador positivo que al ser menor que 1 hace aumentar el cociente.

Problema 6

Imagínate que eres un general rodeado por una fuerza enemiga abrumadora que aniquilará tu ejército de 600 hombres a menos que te decidas por tomar una de las dos posibles vías de escape. Tus espías te dicen que si tomas la primera salida salvarás a 200 soldados, mientras que si te decides por la segunda hay una probabilidad de 1/3 de que los 600 consigan salvarse y una probabilidad de 2/3 de que no lo consiga ninguno. ¿Qué camino eliges?

a) *1ª salida.*

b) *2ª salida.*

c) *cualquiera. (*)*

	Problema 6
Categoría 1 (%)	65,8
Categoría 2 (%)	31,6
Categoría 3 (%)	2,6

Este problema presenta una situación que se puede abordar con el concepto de esperanza matemática desde un enfoque estadístico normativo, o con el concepto de utilidad esperada si lo tratamos como un problema del campo de la teoría matemática de la decisión. Sin embargo, Tversky y Kahneman (1981) han estudiado las soluciones que se dan, de manera sistemática, a problemas semejantes a éste y han establecido que los sujetos estructuran este tipo de situaciones de toma de decisión en base al factor de aversión al riesgo cuando se trata de ganancias y de proclividad al riesgo cuando se trata de pérdidas.

Los datos de la presente investigación no rechazan las anteriores aseveraciones pero con algunos matices importantes. Un 66% de las respuestas han sido calificadas con un 1 porque escogen la primera o segunda salida en base a consideraciones de aversión (la gran mayoría) o de atracción por el riesgo (una minoría). Incluso algunos sujetos escogen la tercera opción de respuesta por el poco atractivo que le comportan las dos primeras; se manifiestan de nuevo explicaciones en términos causales: «depende de la calidad del ejército que se salga con bien de una emboscada». En todo caso, todas estas respuestas tienen en común la ausencia de cualquier regla estadística formal para abordar el problema.

Este problema [6] presenta una situación que se puede abordar con el concepto de esperanza matemática desde un enfoque estadístico normativo, o con el concepto de utilidad esperada si lo tratamos como un problema del campo de la teoría matemática de la decisión.

Un 32% de las respuestas reflejan el intento de cálculos estadísticos pero sin llegar a comprender el concepto de esperanza matemática o de utilidad esperada. Por ejemplo, algunos sujetos hacen la operación (1/3)600 y concluyen que la segunda salida supone la salvación de 200 soldados con probabilidad 1/3 y por tanto es peor que la primera donde se salvan seguros 200 soldados. Está claro que estas personas no sesgan su razonamiento por aversión al riesgo, lo que parece deducirse de la opción que eligen, sino por una mala comprensión del concepto de esperanza matemática o utilidad esperada.

Problema 1

Considera los cuadros A y B

A	B
xxxxxxxx	xx
xxxxxxxx	xx
xxxxxxxx	xx
	xx
	xx
	xx
	xx
	xx
	xx

¿En cuál de los cuadros hay más formas posibles para pasar de la primera fila a la última, sabiendo que desde una x cualquiera de una fila puedes saltar a cualquier x de la fila inmediatamente inferior?

a) *En A.*

b) *En B.*

c) *El mismo número. (*)*

	Problema 1
Categoría 1 (%)	61,0
Categoría 2 (%)	25,6
Categoría 3 (%)	13,4

En este problema, el cálculo combinatorio que proporciona la solución es inmediato ($8^3 = 2^9$) pero sólo lo realizan el 13% de los sujetos. El 61% se deja llevar por la mayor disponibilidad o accesibilidad perceptiva de paso de una x a otra x inferior en la figura de la izquierda respecto a la de la derecha, y juzga que el número total de caminos es mayor en la figura de la izquierda que en la de la derecha. En definitiva, calculan el número total de caminos por la facilidad que tienen de imaginarse caminos concretos en una y otra figura.

El 26% de los sujetos no se dejan llevar por la forma de los cuadros y realizan un cálculo combinatorio que sin embargo es incorrecto. Aparecen algunos errores de cálculo, típicos en la enseñanza no universitaria pero incomprensibles en alumnos universitarios, como el de sumar en vez de multiplicar: 8 + 8 + 8 frente a 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2. Aquí se puede ver una vez más la utilidad de pedir a los sujetos que expliquen la elección de su respuesta. Los que eligen la opción a) pueden guiarse por una ilusión perceptiva o por una estrategia de cálculo equivocada pero las dos vías de razonamiento llevan a la misma respuesta.

Los problemas 1 y 9 muestran que el sesgo de accesibilidad está muy relacionado con el procesamiento selectivo de la información que hacen las personas cuando tienen que resolver un problema; a su vez este procesamiento selectivo tiene que ver no sólo con la facilidad de recuperar o recordar ejemplos (como sucede en las tareas que Tversky y Kahneman proponen para estudiar dicho sesgo) sino también con la facilidad de imaginar todas las posibilidades de una situación.

Para resolver correctamente estos dos problemas, más que realizar cálculos probabilísticos complejos, es necesario utilizar bien el esquema combinatorio, el cual permite establecer el árbol de todas las posibilidades que presenta una determinada situación. Piaget e Inhelder (1951) sostienen que sólo los sujetos que están en el estadio evolutivo de las operaciones formales pueden resolver problemas probabilísticos en cuanto que los esquemas proporcional y combinatorio, esenciales para abordar este tipo de problemas, forman parte de las operaciones formales. Se compartan o no las tesis de los autores ginebrinos, parece claro que el dominio de las técnicas combinatorias es fundamental para resolver muchos problemas del azar. Una de estas técnicas es la de diagramas de árbol que facilita la realización del inventario completo de todos los sucesos asociados a una situación. Sin embargo, esta técnica no es de fácil adquisición y sobre todo, de fácil aplicación en todas las situaciones.

En relación al tercer objetivo

Para evaluarlo es necesario comparar los resultados obtenidos por los sujetos que estudiaron la teoría de probabilidades a un nivel elemental frente a sujetos que no recibieron ningún tipo de instrucción formal en dicha disciplina.

En la tabla 3 se pueden observar las frecuencias (n1, n2, n3) y proporciones (pr1, pr2, pr3) de calificaciones 1, 2 y 3 en cada uno de los dos grupos:

	n1	pr1	n2	pr2	n3	pr3
Total	439	0,62	221	0,31	49	0,07
Con estudios	200	0,55	128	0,35	35	0,10
Sin estudios	239	0,69	93	0,27	14	0,04

Tabla 3

Los sujetos con estudios elementales de teoría de probabilidades, en relación a los sujetos sin ninguna instrucción en dicha teoría, tienen una proporción significativamente menor de calificaciones 1 ($z = -3,83 < z_{0,005}$) y una proporción significativamente superior de calificaciones 3 ($z = 3,14 > z_{0,995}$).

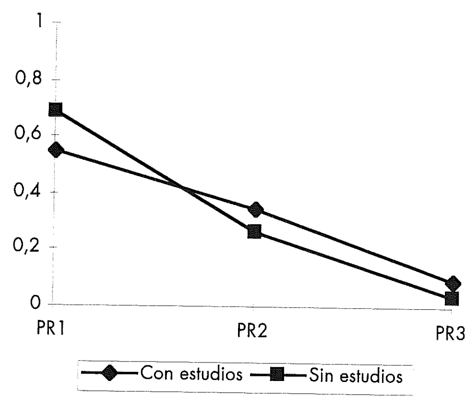


Gráfico 2

Llama, con todo, la atención que el 55% de sus respuestas no muestren ninguna idea, razonamiento o cálculo estadístico y estén gobernadas por procedimientos no estadísticos; y sigue llamando la atención que sólo el 10% de sus respuestas se puedan calificar como totalmente correctas según las reglas formales. Parece deducirse de estos datos que la escasa instrucción en probabilidades que suele darse en el bachillerato, disminuye la necesidad de recurrir a estrategias intuitivas que surgen de la experiencia cotidiana, pero no evita completamente los sesgos y errores a los que pueden conducir estos heurísticos que parecen formar parte de la dotación de recursos cognitivos que todas las personas tienen.

Conviene señalar que el cuestionario se pasó en un contexto académico y que se dijo en las instrucciones que se trataba de una prueba de contenido probabilístico, con lo que se estaba invitando tácitamente a activar los recursos estadísticos de los sujetos que los tuviesen. Sería interesante pasar la prueba en un contexto cotidiano, no académico y tratar de disminuir la terminología probabilística, a fin de comprobar si siguen existiendo diferencias significativas entre los dos grupos, en los sesgos del razonamiento probabilístico.

Lo que no garantiza la instrucción elemental, al menos tal como se imparte actualmente, es un dominio suficiente de las reglas y procedimientos formales; el porcentaje de respuestas correctas en ambos grupos es muy bajo. Más de la tercera parte de las respuestas (35%) de los sujetos instruidos suponen la utilización incorrecta de un concepto o un cálculo estadístico que conocen o la confusión entre leyes probabilísticas formales y estrategias de razonamiento no estadísticas.

Un dato complementario del anterior es que, aunque la gran mayoría de las respuestas de los sujetos no instruidos (69%) suponen un pensamiento sobre el azar regido por estrategias no estadísticas (lo que confirma de nuevo la profunda imbricación de las mismas en la estructura cognitiva de las personas) hay un 27% de respuestas que muestran la existencia de versiones intuitivas de reglas o procedimientos formales en sujetos que nunca estudiaron teoría de probabilidades.

Los datos anteriores parecen apuntar la hipótesis de que en el razonamiento probabilístico de los sujetos (instruidos y no instruidos) coexisten heurísticos no estadísticos y procedimientos formales, al menos versiones intuitivas de los mismos, tal como sostienen Fong y otros (1986); son las características de la tarea las que activan un tipo u otro de recursos.

Se ha realizado el test de la Chi[2] para estudiar en cada uno de los problemas si había relación entre la calificación y la existencia de estudios estadísticos: las únicas diferencias significativas corresponden al problema 2 ($\chi^2_2 = 3{,}96$, $p < 0{,}04$), problema 5 ($\chi^2_2 = 6{,}83$, $p < 0{,}04$) y problema 8 ($\chi^2_2 = 6{,}18$, $p < 0{,}04$).

En la tabla 4 se pueden ver los datos correspondientes a los tres problemas:

	Categoría 1		Categoría 2		Categoría 3	
	No estudios	Sí estudios	No estudios	Sí estudios	No estudios	Sí estudios
Problema 2 (%)	100,0	83,3	0,0	16,7	0,0	0,0
Problema 5 (%)	64,1	35,0	25,6	42,5	10,3	22,5
Problema 8 (%)	40,5	16,3	47,6	65,1	11,9	18,6

Tabla 4

Lo que no garantiza la instrucción elemental, al menos tal como se imparte actualmente, es un dominio suficiente de las reglas y procedimientos formales; el porcentaje de respuestas correctas en ambos grupos es muy bajo.

Los problemas 5 y 8 son matemáticamente equivalentes y requieren las técnicas de cálculo probabilístico más sencillas, como son la suma y la multiplicación de probabilidades; la enseñanza de las probabilidades, aunque sea escasa, proporciona estas técnicas que no son triviales para un novato.

En cuanto al problema 2 conviene observar que no hay ningún estudiante (con instrucción o sin instrucción en probabilidades) que lo resuelva utilizando el principio de regresión a la media, que sería la estrategia adecuada desde una perspectiva estadística. La diferencia entre los sujetos con instrucción y sin instrucción en el problema 2, por tanto, parece radicar en que los sujetos con cultura estadística elemental tienen una representación del mundo menos determinística que los sujetos no instruidos, admiten una intervención del azar en el fenómeno enunciado sin saber muy bien en qué consiste dicha intervención. Las explicaciones de los sujetos que admiten que el fenómeno es de tipo estadístico son tan ambiguas que no se puede descartar que los sujetos escogen la opción estadística porque saben que se trata de un cuestionario probabilístico. Además, esa diferencia no aparece en el problema 4 en donde el pensamiento determinista está presente tanto en sujetos instruidos como no instruidos. Sería necesaria una investigación, centrada en el sesgo causal, para dilucidar la cuestión y desde luego, la utilización de tareas menos engañosas que el ítem 2.

Conclusiones

Tratemos de sistematizar y sintetizar los resultados encontrados en esta investigación. En relación a los tres objetivos que nos marcamos y que hemos descrito en la introducción, queremos subrayar tres características del razonamiento probabilístico de los sujetos que consideramos claves para explicar tanto la existencia de sesgos y errores en su comprensión de los fenómenos aleatorios como el carácter contingente de sus juicios.

En primer lugar, la *prevalencia abusiva del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilístico.* Cuando la ciencia reconoce que el mundo no se explica sólo en términos de necesidad sino que hay que incluir también el azar (ahí está, por ejemplo, la teoría de la evolución de Darwin), la concepción puramente determinista de los fenómenos forma parte fundamental del sistema de creencias de nuestros universitarios (por lo menos los recién ingresados) y como tal dificulta el florecimiento del pensamiento aleatorio.

Esta concepción determinista se manifiesta, tal como se había previsto, en los problemas 2 y 4. Ha quedado claro un procesamiento selectivo de la información que desprecia datos importantes que hay en las situaciones planteadas, como las probabilidades previas (problema 4) o una regularidad estadística (problema 2). En ambos casos las explicaciones de los sujetos reflejan una representación de los problemas en términos de causa-efecto, o bien porque la cadena causal está presente (problema 2: el premio y el castigo modifican la conducta de los pilotos) o bien porque la cadena causal está ausente (problema 4: no hay relación entre las proporciones de ciudadanos blancos y negros en la ciudad y la probabilidad del suceso de que el atracador sea negro porque la relación se establece entre ese suceso y la capacidad de identificación de la víctima; cuanta mayor sea la capacidad de identificación, mayor será la probabilidad pedida independientemente de las probabilidades previas). Conviene advertir que se trata de dos problemas que encierran conceptos probabilísticos sofisticados (regresión a la media y teorema de Bayes) en un contexto muy engañoso. Por tanto, tenemos que ser prudentes en las conclusiones extraídas a partir de ellos acerca de la preeminencia del pensamiento determinístico-causal.

Sin embargo, el hallazgo más sorprendentes es haber encontrado manifestaciones de este pensamiento en explicaciones de tipo global: por ejemplo, la idea de que toda situación aleatoria se puede convertir en determinística mediante la destreza o pericia (la destreza del general y su ejército en el problema 6) o la idea de que el azar es caótico y al no poder hablar de causas y efectos no hay posible jerarquización de los sucesos aleatorios (el enunciado de que «todos los sucesos son igualmente probables» en el problema 3).

En primer lugar, la prevalencia abusiva del pensamiento causal sobre el pensamiento probabilístico. […] En segundo lugar, una habilidad computacional limitada…

En segundo lugar, una *habilidad computacional limitada* que se concreta en los cuatro hallazgos siguientes:

a) Incapacidad de los sujetos para hacer el inventario completo de todas las posibilidades asociadas a una situación. En los problemas 1, 7 y 9 se muestra claramente esta incapacidad, los sujetos tienen dificultades para hacer el diagrama en árbol completo de la tarea correspondiente. Se podría argumentar que el problema 9 («las tres cartas») presenta una situación muy engañosa que confunde a los sujetos y les impide construir una representación del problema que tenga en cuenta la naturaleza compuesta del juego. Sin embargo, el problema 7 y, sobre todo, el problema 1 presentan escenarios menos engañosos y también se manifiestan con fuerza las dificultades combinatorias de los alumnos. Estos resultados son congruentes con la tesis de Piaget e Inhelder (1951) de que la capacidad combinatoria es una destreza de alto nivel en el desarrollo intelectual de la persona.

b) Dificultad de los sujetos para establecer el espacio muestral de ciertos experimentos aleatorios lo cual les lleva a errores de aplicación de la ley de Laplace que es una regla aparentemente sencilla de comprender y utilizar. Así, en los problemas 5 y 8 los sujetos prefieren utilizar las leyes de la suma y la multiplicación de probabilidades en lugar de establecer el espacio muestral correspondiente. En el problema 7, los sujetos se lanzan a aplicar la regla casos favorables/casos posibles, utilizando un espacio muestral equivocado.

c) La ley multiplicativa de las probabilidades parece de más fácil adquisición que la ley aditiva, según los resultados de los problemas 5 y 8. Esto puede estar relacionado con lo dicho en el punto 1), en cuanto que lo difícil para los alumnos es darse cuenta de que en ambos problemas además de una intersección de sucesos (multiplicación de probabilidades) hay también una unión de sucesos (suma de probabilidades). Por ejemplo en el problema 5, el cumpleaños de una persona y el cumpleaños de la otra han de coincidir pero eso puede ser el 1 de Enero o el 2 de Enero o...o el 31 de Diciembre.

d) Los heurísticos de representatividad, accesibilidad y aversión al riesgo, parecen actuar de sustitutos o complementos de las limitadas destrezas de cálculo de los sujetos. Emergen como «atajos computacionales» que reducen el esfuerzo cognitivo en la adquisición y procesamiento de la información. En el problema 7, por ejemplo, la dificultad combinatoria para explicitar el espacio muestral {(VVVVVV) ,......, (VVMMVM), ...(MMMMMM)} y seleccionar los casos favorables (VVVMMM) ,..., (VVMMMV), ..., se compagina con una percepción selectiva de la situación basada en los datos de 6 nacimientos y 3 mujeres que es representativa de la realidad donde aproximadamente el 50% de los nacimientos son mujeres. Incluso los sujetos que «se resisten» a este influjo de la representatividad o similitud de la muestra con la población realizan un cálculo incompleto: (1/2)(1/2)(1/2)=1/8 que corresponde a una terna concreta de nacimientos.

En tercer lugar, se manifiesta una *clara dependencia de las características de la tarea*, lo que apoya la hipótesis de la naturaleza contingente de los juicios probabilísticos (Payne, Bettman y Johnson, 1993): el sistema cognitivo humano es adaptativo en su necesidad de comprender, controlar y dominar el entorno. En otras palabras, los sujetos hacen mayor o menor uso de leyes estadísticas con respecto a heurísticos no estadísticos, dependiendo del contexto o contenido del problema.

En tercer lugar, se manifiesta una clara dependencia de las características de la tarea, lo que apoya la hipótesis de la naturaleza contingente de los juicios probabilísticos...

Este fenómeno se observa muy bien en los problemas 5 y 8. Son dos problemas que tienen una estructura profunda, matemática, equivalente pero tienen una estructura superficial, perceptiva, diferente. En efecto, como hemos tenido ocasión de comprobar al analizar los resultados, los cálculos que hay que realizar para comparar las probabilidades pedidas en ambos problemas son idénticos. Sin embargo, el problema 5 presenta un escenario de clave no probabilística, de reunión de fiesta de cumpleaños, mientras que el problema 8 es un típico ejercicio de teoría de probabilidades además de un juego aleatorio. Pues bien, mientras la mitad de los sujetos razonan en clave no probabilística en el problema 5 sólo la cuarta parte razonan en clave no probabilística en el problema 8. Es un claro ejemplo de razonamiento dependiente del contenido de la tarea.

La naturaleza contingente y constructiva del razonamiento probabilístico también se observa en los problemas 3 y 10, en donde hay que aplicar la ley de los grandes números y el concepto de independencia estadística en dos contextos diferentes. En el problema 3 los sujetos utilizan la ley formal (a veces en una formulación primaria e incorrecta) con mayor frecuencia que el heurístico de representatividad, aun tratándose de alumnos no instruidos en probabilidades. Por contra, en el problema 10, el concepto normativo de tamaño muestral no se tiene en cuenta y es el heurístico de representatividad quien domina la solución del problema. Con todo, hemos de subrayar las dificultades de comprensión de este problema que hace que muchos alumnos no entiendan lo que se les está pidiendo. Este es un ejemplo claro de tarea donde la comunicación entre el investigador y el sujeto se hace difícil y, por tanto, las conclusiones han de ser prudentes. En otras investigaciones nuestras (Sáenz, 1995) planteamos este mismo problema con un enunciado más inteligible.

Los tres factores que acabamos de enunciar y que parecen estar en el origen de los sesgos en razonamiento probabilístico, no se modifican sustancialmente con la instrucción, al menos con el tipo y cantidad de enseñanza estadística que se imparte en los niveles anteriores a la universidad de nuestro sistema educativo. Aunque esta instrucción dota al estudiante de algunas herramientas elementales de cálculo estadístico que le permiten recurrir menos a los heurísticos no estadísticos, no impide que el pensamiento del sujeto siga gobernado por un pensamiento causal abusivo, que siga cometiendo errores sistemáticos de cálculo y que su razonamiento se vea afectado por las características de la tarea.

A nuestro juicio, hay varios niveles definitorios de la enseñanza tradicional que fomentan estos sesgos.

La enseñanza tradicional de la ciencia, tratando de comunicar el conocimiento científico que supera el conocimiento vulgar de los alumnos, entroniza el pensamiento newtoniano y explica el mundo en forma de leyes de «obligado cumplimiento», donde el orden causal es el único posible. No puede florecer así la flor delicada del pensamiento estadístico que ofrece un tipo distinto de orden para modelizar la realidad: la regresión, la correlación, la ley de los grandes números introducen orden en el mundo (que ya no es newtoniano sino einsteniano y cuántico) pero no es un orden determinista sino estadístico.

La enseñanza tradicional de la matemática entrena en técnicas de cálculo útiles pero muy insuficientes. Se produce así un anumerismo o analfabetismo matemático que tiene nefastas consecuencias para la capacidad computacional de las personas. Se presta poca atención a estrategias educativas tales como familiarizar a los alumnos con números muy grandes y con números muy pequeños, entrenarlos en técnicas de cálculo combinatorio, y sin embargo, estas estrategias son pre-requisitos básicos para el trabajo con probabilidades.

La enseñanza tradicional de la teoría de probabilidades es lineal en el desarrollo del currículo. El contenido de la disciplina se despliega siguiendo la estructura lógica de la matemática: a partir de los axiomas de Kolmogorov se deducen los diversos teoremas y se realizan ejercicios de aplicación para apuntalar los nuevos conocimientos. No hay conciencia de la naturaleza contingente del razonamiento y por tanto no se consideran distintos enfoques probabilísticos de un mismo problema ni distintos problemas con diferente contenido pero con la misma estructura normativa. Tampoco hay conciencia de diferencias individuales en la comprensión probabilística y todos los alumnos se someten al mismo régimen de enseñanza.

Hemos señalado tres notas definitorias de la enseñanza tradicional que repercuten negativamente en la conducta probabilística de los sujetos y que nos han servido como punto de referencia para la propuesta de un nuevo modelo de enseñanza-aprendizaje. En Sáenz (en prensa) presentamos el diseño y evaluación de dicho modelo que trata de modificar significativamente los sesgos detectados en el pensamiento probabilístico, varios de los cuales hemos mostrado en este trabajo.

La enseñanza tradicional de la matemática entrena en técnicas de cálculo útiles pero muy insuficientes. Se produce así un anumerismo o analfabetismo matemático que tiene nefastas consecuencias para la capacidad computacional de las personas.

Referencias

BOROVCNIK, M. y H. J. BENTZ (1991): «Empirical research in understanding probability», en R. KAPADIA y M. BOROVNIK (Eds.), *Chance encounters: Probability in education*, Kluwer, Amsterdam, 73-105.

EDWARDS, W. (1968): «Conservatism in human information procesing», en B. KLEINMUTZ (Ed.), *Formal representation of human judgement*, Wiley, New York, 17-52.

EVANS, J. St. B. T. (1982): «On statistical intuitions and inferential rules. A discusion of Kahneman and Tversky», *Cognition*, 12, 323-326.

FONG, G., D. H. KRANZ y R. NISBETT (1986): «The effects of statistical training in thinking about everyday problems», *Cognitive Psychology*, 18, 253-292.

HOGARTH, R. M. (1987): *Judgement and choice: the psychology of decision*, Wiley, Chichester.

KAHNEMAN, D., P. SLOVIC y A. TVERSKY (Eds.) (1982): *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*, Cambridge University Press, Nueva York.

KAHNEMAN, D. y A. TVERSKY (1972): «Subjective probability: a judgement on representativeness», *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

PAYNE, J. W., J. R. BETTMAN, J. R. y E. J. JOHNSON (1993): *The adaptive decision maker*, Cambridge University Press, New York.

PIAGET, J. e B. INHELDER (1951): *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*, PUF, Paris.

SÁENZ, C. (1995): *Intuición y matemática en el razonamiento y aprendizaje probabilístico*, Ediciones de la Universidad Autónoma, Madrid (tesis doctoral en microficha).

SÁENZ, C. (en prensa): «Teaching probability for conceptual change», *Educational Studies in Mathematics*.

SHAUGHNESSY, J. M. (1983): «Misconceptions of probability: systematic and otherwise: Teaching probability and statistics so as to overcome some misconceptions», en D. R. GREY y otros (Eds.), *Proceedings of the first international conference on teaching statistics*, Teaching Statistics Trust, Sheffield, UK, 784-801.

SHAUGHNESSY, J. M. (1992): «Research in probability and statistics: reflections and directions», en D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, McMillan Publishing, New York, 465-494.

TVERSKY, A. y D. KAHNEMAN, D. (1973): «Availability: a heuristic for judging frequency and probability», *Cognitive Psychology*, 5, 207-232.

TVERSKY, A. y D. KAHNEMAN (1981): «The framing of decisions and the psychology of choice», *Science*, 211, 453-458.

César Sáenz
Instituto de Ciencias
de la Educación
Universidad Autónoma
Madrid

SUMA 28
junio 1998, pp. 53-58

La enigmática figura matemática del reverso del billete de 10.000 pesetas

Gabriel Ruiz Garzón

ARTÍCULOS

Este artículo trata sobre la figura matemática que se encuentra en el reverso del billete de 10.000 pesetas exponiendo su significado matemático dentro de su contexto histórico. Ciertos aspectos numismáticos pueden ser utilizados como un recurso matemático.

HACE unos días, debo reconocer que no con la frecuencia que desearía, cayó en mis manos, un billete de 10.000 ptas. (figura 1). El reverso del mismo, su parte central, está ocupada por Jorge Juan (1713-1773), pero lo que me llamó la atención, por infrecuente, fue la figura matemática, un arco de circunferencia junto a otras líneas, situadas por debajo de la efigie de Jorge Juan.

Figura 1

Antes de desentrañar tan enigmática figura veamos algo sobre el autor de la misma, Jorge Juan y de los trabajos desarrollados en el virreinato del Perú, donde desarrollaron tanto experiencias geodésicas como astronómicas.

El autor del dibujo y la fase geodésica

Jorge Juan y Santacilia nace en Novelda (Alicante) en 1713. En 1734 participó, junto a Antonio de Ulloa y de la

Torre-Giral (1716-1759), en la expedición enviada a Quito para medir el arco del meridiano terrestre. Medir la longitud de un arco de un meridiano terrestre consiste en determinar la distancia que separa dos puntos de un círculo máximo cuya diferencia de latitud es conocida. El cociente entre las distancias lineal y angular proporciona el valor de un grado que, supuesta esférica la Tierra, permite concluir la forma del planeta.

Ya Pitágoras afirmó que la Tierra tenía forma esférica por ser ésta la forma más perfecta posible.

Newton demostraba en los *Principia* que la Tierra era achatada en los polos, debido a la fuerza centrífuga producida por el giro terrestre a lo largo del eje polar.

Por otra parte, los trabajos de medición del meridiano que pasa por París entre Dunquerque y Collioure, llevados a cabo entre otros por J. Picard, G. D. Cassini y La Hire daban conclusiones radicalmente diferentes a las obtenidas por Newton: sostenían que la Tierra era un esferoide achatado por el ecuador.

Para dilucidar tal controversia, que adquirió tintes nacionalistas, ingleses o newtonianos contra franceses o cartesianos, la Academia de Ciencias de París proponía la medición de la longitud de un grado de meridiano, en lugares con diferente latitud, con objeto de cuantificar la variación de la curvatura terrestre y por tanto la forma de la Tierra.

Los lugares elegidos para efectuar tal medición son Laponia y el virreinato del Perú.

A Laponia viajaron los matemáticos Alexis Clairaut (1713-1765) y Maupertuis (1698-1759).

Para acceder al virreinato el rey de Francia Louis XIV pidió permiso a su nieto, Felipe V. El rey español dio el visto bueno pero puso como condición que acompañaran a los académicos franceses Louis Godin (1704-1760), Pierre Bouguer (1698-1758) y Charles Marie de La Condamine (1701-1774), dos conocedores españoles de la matemática y de la astronomía. Los elegidos son dos jóvenes Guardias Marinas de la Academia de Cádiz, Antonio de Ulloa y Jorge Juan, éste último conocido en la Academia gaditana por el apelativo de «Euclides», debido a su sabiduría matemática.

La primera fase del trabajo llevado a cabo por la expedición fue la medición del arco del meridiano terrestre. Se utilizó el «Método de la triangulación geodésica». Consistía en medir una determinada longitud o *base fundamental*; ésta se constituía en un lado de una serie de triángulos encadenados que cubría todo el recorrido. De cada uno de ellos se conocían los tres ángulos y la longitud de uno de los lados, con estos datos se obtenía trigonométricamente la longitud del otro lado.

Como vemos en la figura 2, AC es la base fundamental o lado conocido y AB es el arco de meridiano que hay que determinar. Desde A y C se tienden visuales al punto D, formando un primer triángulo. Conocida AC y los dos ángulos adyacentes es posible calcular todos los restantes elementos. Para conocer en primera instancia la distancia AE, contamos en el triángulo AEC con el conocimiento de un lado, el ángulo C y el ángulo EAC y por tanto podemos conocer AE. Se prosigue de la misma manera con el triángulo CDF y así, sucesivamente, hasta el final. Al acabar el proceso se vuelve a medir un lado MN del último triángulo de la serie, llamado base de comprobación, que permite verificar la exactitud de todo el proceso.

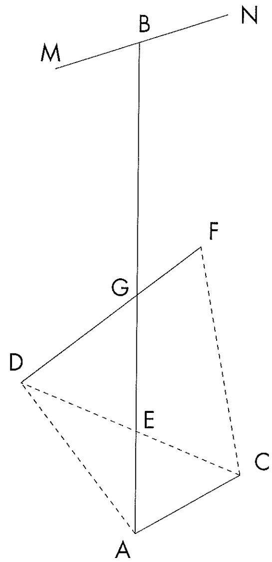


Figura 2

...la fase astronómica consistía, básicamente, en determinar la posición de los extremos de la triangulación y con ella la amplitud del arco del meridiano.

La fase astronómica y la enigmática figura matemática

Concluida la fase geodésica de la expedición, la fase astronómica consistía, básicamente, en determinar la posición de los extremos de la triangulación y con ella la amplitud del arco del meridiano. Para determinar la posición de un punto, necesitamos calcular su latitud y su longitud.

Cálculo de la latitud

Si consideramos la Tierra como un punto O dentro de la esfera celeste, consideramos también el triángulo esférico de posición del Sol PSZ (figura 3), donde P es polo norte, S es el Sol y Z el cenit o punto en la esfera celeste directamente encima del observador.

Denotaremos también por N y H, el norte y el sur astronómico respectivamente.

Llamaremos horizonte astronómico al plano determinado por los puntos ONH, siendo el meridiano del lugar el círculo PZP'Z'.

El ecuador celeste es el plano determinado por ON'H'.

En ese triángulo de posición definiremos:

PZ = Colatitud o complemento de la latitud del lugar = 90° – l, donde la latitud l coincide con la altura del polo, o sea, el ángulo NOP.

ZS = Distancia cenital o complemento de la altura = z = 90° – a, donde la altura del Sol, a, en la figura coincide con QS, viene dada por el ángulo que forma el horizonte y la estrella, mirados al mismo tiempo desde el punto de observación.

PS = Distancia polar o complemento de la declinación = 90° – d, donde la declinación *d*, en la figura coincide con MS, es la distancia esférica del ecuador al astro.

El ángulo horario ZPS ó ángulo *h*, coincide con H'M, es el ángulo del meridiano del lugar PZP'Z' con el círculo horario PSP' que pasa por la estrella.

El ángulo PZS = 180° – A, donde *A* es el Acimut, que en la figura coincide con HQ, es el ángulo que forma el plano vertical que pasa por la estrella con el meridiano contado a partir del sur, en sentido retrógrado (sur, oeste, norte, este).

En el triángulo esférico de posición se cumple que:

$$\cos z = \operatorname{sen} l \cdot \operatorname{sen} d + \cos l \cdot \cos d \cdot \cos h$$

y cuando el Sol culmina, es decir, en el momento de paso por el meridiano del lugar, el ángulo horario h = 0, y, por tanto $\cos z_m = \cos(d - l)$, de donde $l = d - z_m$, y de una manera más general

$$l = z_m \pm d$$

Así pues conocida la distancia cenital z_m puede calcularse la latitud *l*, con sólo extraer de las tablas correspondientes el valor de la declinación *d*, para el día y la hora en que se efectuó la observación. Tales tablas de declinación eran de fácil accesibilidad en aquella época.

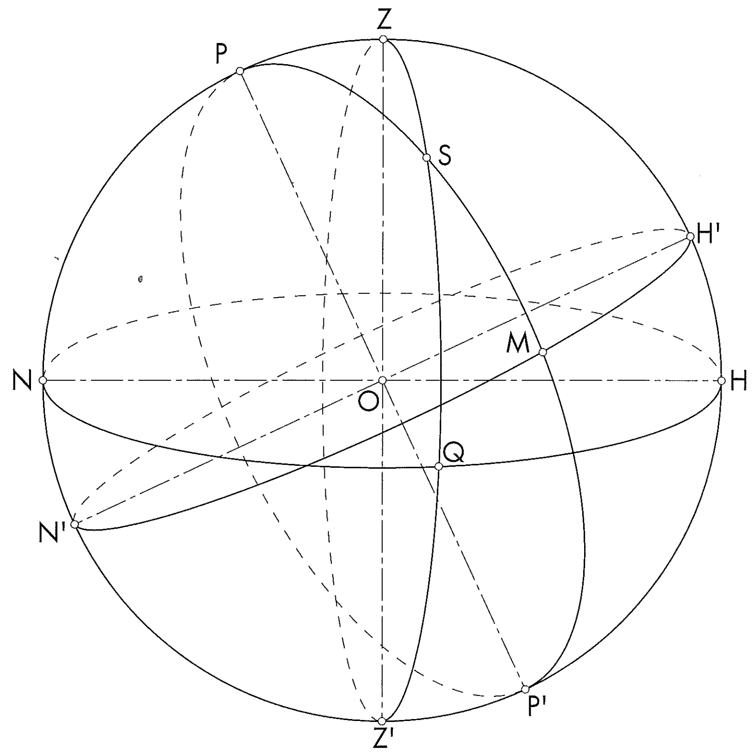


Figura 3

Cálculo de la longitud

El cálculo de la longitud consistía básicamente en determinar el momento exacto en que se sucedía un fenómeno celeste.

El cálculo de la longitud (distancia de un lugar respecto al primer meridiano, medida en grados) consistía básicamente en determinar el momento exacto en que se sucedía un fenómeno celeste (eclipses, ocultaciones de los satélites de Júpiter, etc., a veces de difícil observación) y compararlo con la hora en que había sido observado en un punto de referencia. La diferencia de tiempo es la diferencia en longitud, reduciendo el tiempo a partes del Ecuador.

Ante la falta de cronómetros (hasta bien avanzado el siglo XVIII no se contó con los primeros), se utilizaba un péndulo horario, que para ponerlo en marcha se precisaba fijar el mediodía solar verdadero, es decir, la hora a la cual en el péndulo son las doce en punto, y esto se hacía por la observación del paso del Sol por el meridiano del lugar.

El método utilizado era el llamado «Método de las alturas correspondientes».

Este método se basa en que desde que sale el Sol de una cierta altura por la mañana, hasta que llega al meridiano, transcurre el mismo tiempo, salvo una corrección de la que hablaremos, que desde que sale del meridiano hasta que obtiene la misma altura por la tarde.

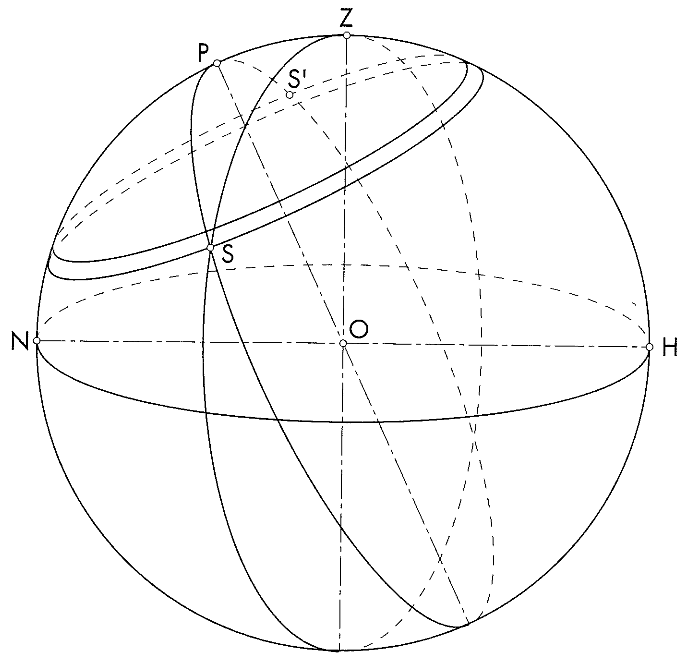


Figura 4

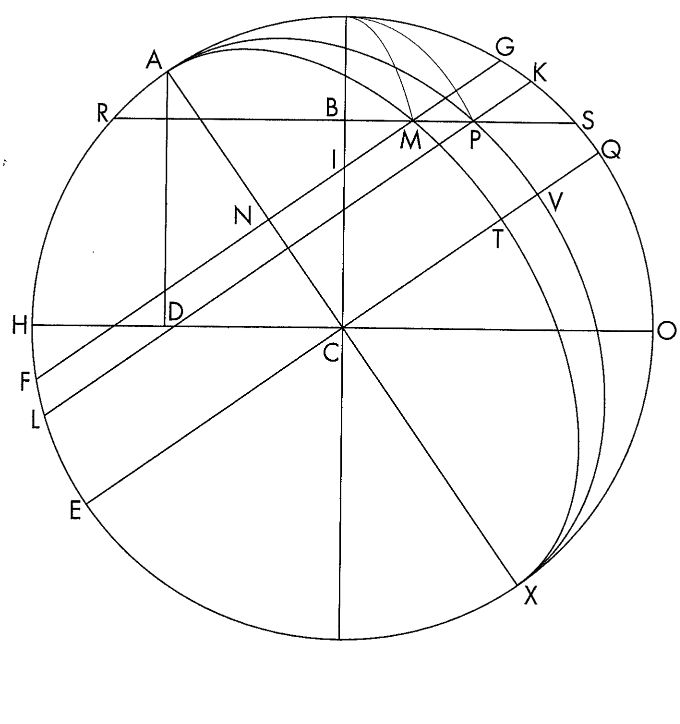


Figura 5

Sean H_c y H'_c las horas que marca el péndulo cuando el Sol tiene la misma altura. Entonces si la declinación fuera constante, el mediodía vendrá dado por la fórmula:

$$H_m = H_c + \frac{H'_c - H_c}{2}$$

Puesto que varía la declinación desde que se toma una altura por la mañana hasta la otra correspondiente por la tarde, hemos de calcular la corrección ε aplicable a la fórmula anterior, que será igual a la mitad del incremento que recibe el ángulo horario entre las dos alturas correspondientes $\varepsilon = \Delta h/30$ (figura 4).

La figura matemática. Una corrección al método de las alturas correspondientes

Jorge Juan utiliza, en sus *Observaciones*, para el cálculo de dicha corrección un argumento geométrico que ahora reproducimos.

Con objeto de evitarse la resolución de triángulos esféricos, se lleva el problema al plano mediante la proyección de la esfera sobre el plano del meridiano, cuya figura es la que parcialmente aparece en el reverso del billete. Nosotros seguiremos su razonamiento utilizando la figura completa (figura 5). Sea:

AQXE el Meridiano

HO el Horizonte.

EQ la Equinoccial.

AX el eje.

FMG paralelo en que se encontraba el astro por la mañana.

LPK paralelo en que se encontraba el astro por la tarde.

RMPS círculo de altura en que se encontraba el astro al tiempo de hacer ambas observaciones o almicantarat.

AMX el círculo horario en que se hallaba en la primera medida.

APX el círculo horario de la segunda medida.

Como no es igual el tiempo que pasa de ir desde un horario al meridiano, al que va desde éste al otro horario, entonces tampoco será igual el tiempo de ir desde M a S que de S a P. Nuestro objetivo es calcular esa diferencia, es decir, el valor del ángulo MAP y su medida el arco equinoccial TV. Sean:

r = CA radio de la esfera

s = AD seno de la altura del polo o latitud del lugar

c = CD coseno de la altura

m = CB seno del astro sobre el horizonte

n = BR = BS coseno del astro sobre el horizonte

x = CN seno de la declinación

y = NG = NF coseno de la declinación

u = CT coseno del ángulo horario

z = seno del ángulo horario

Por ser semejantes los triángulos ADC y CNI

$$\frac{CI}{r} = \frac{x}{s} \quad , \quad \frac{NI}{c} = \frac{x}{s} \quad \Rightarrow$$

$$CI = \frac{rx}{s} \quad , \quad NI = \frac{cx}{s} \quad \Rightarrow$$

$$BI = BC - CI = m - \frac{rx}{s} = \frac{ms - rx}{s}$$

Por otra parte son semejantes los triángulos ADC y MBI, luego

$$\frac{c}{r} = \frac{BI}{IM} = \frac{\frac{ms - rx}{s}}{IM} \quad \Rightarrow$$

$$IM = \frac{rms - rrx}{cs} \quad \Rightarrow$$

$$NM = NI + IM = \frac{cx}{s} + \frac{rms - rrx}{cs} = \frac{ccx + rms - rrx}{cs} = \frac{rms - x(rr - cc)}{cs}$$

utilizando el Teorema de Pitágoras

$$NM = \frac{rms - xss}{cs} = \frac{rm - sx}{c}$$

Por otra parte

$$\frac{NM}{NG} = \frac{CT}{CQ} \quad \Rightarrow \quad \frac{NM}{y} = \frac{u}{r} \quad \Rightarrow \quad NM = \frac{yu}{r}$$

Igualando las dos anteriores expresiones

$$\frac{rm - sx}{c} = \frac{yu}{r} \quad \Rightarrow \quad rrm - rsx = cyu$$

Suponiendo la declinación y el ángulo horario variables y las demás cantidades constantes, tomando «la diferencia» de la anterior ecuación,

$$-rs\Delta x = cy\Delta u + cu\Delta y$$

multiplicando por *x* queda

$$rsy\Delta y - cux\Delta y = cyx\Delta u$$

Suponiendo que el arco de la declinación GQ es d y el arco cuyo seno es CT es *h*.

Tomando GK por una diferencia infinitamente pequeña e igual a Δd y la diferencia de los arcos CT y CV como Δh.

$$\frac{r}{x} = \frac{\Delta d}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{x\Delta d}{r}$$

$$\frac{r}{z} = \frac{\Delta h}{\Delta u} \quad \Rightarrow \quad \Delta u = \frac{z\Delta h}{r}$$

sustituyendo en la ecuación anterior

$$rsy\left(\frac{x\Delta d}{r}\right) - cux\left(\frac{x\Delta d}{r}\right) = cyx\left(\frac{z\Delta h}{r}\right)$$

dividiendo entre la expresión cyz y despejando Δh queda

$$\Delta h = \Delta d\left(\frac{sr}{cz} - \frac{xu}{yz}\right) = \Delta d\,(\mathrm{tg}\,l \cdot \cos\mathrm{ec}\,h - \mathrm{tg}\,d \cdot \cot g\,h)$$

que es la medida del ángulo MAP cuya mitad reducida a tiempo debe ser añadida o sustraída del mediodía, hallado por el método de las alturas correspondientes, para obtener el verdadero valor.

La anterior expresión también puede deducirse a partir del triángulo de posición PSZ donde se verifica que:

$$\text{sen } a = \text{sen } l \cdot \text{sen } d + \cos l \cdot \cos d \cdot \cos h$$

expresión que diferenciada respecto de la declinación *d*, suponiendo la latitud *l* y la altura *a* constantes, y tras unos pequeños cálculos algebraicos, nos permite encontrar la variación del ángulo horario *h* ya expuesta.

Epílogo

Tanto el viaje a Laponia como la expedición al Perú aunque confirmaban la verosimilitud de la tesis newtoniana sobre la forma de la Tierra, la falta de instrumentos más precisos dificultaban zanjar la cuestión definitivamente.

A la vuelta del viaje a Perú Jorge Juan y Antonio de Ulloa escribieron conjuntamente, en 1748, *Relación del viaje a la América Meridional.* Jorge Juan se ocupó también de

Grabado que figura en la obra de Jorge Juan y Antonio de Ulloa, *Relación del viaje a la América meridional.*

la parte matemática de las *Observaciones Astronómicas y Físicas*, donde aparece, en la página 116, el símbolo ∞, quizás en una de las primeras veces, ya que su uso se extendería mucho más tarde. En *Noticias secretas de América*, Jorge Juan y Antonio de Ulloa criticaban determinados abusos cometidos contra los indios por parte de los corregidores y encomenderos.

La otra figura situada en la parte superior del billete, corresponde al dibujo de una caja de cuadernas de un navío diseñado por Jorge Juan. En 1771 Jorge Juan publica el *Examen marítimo teórico práctico o Tratado de mecánica aplicado a la construcción, conocimiento y manejo de navíos y demás embarcaciones.*

Su preocupación no fue sólo la construcción naval. En 1753 bajo la dirección de Jorge Juan inicia sus trabajos el primer Observatorio de la Marina de Cádiz. Durante la estancia en esta ciudad fundó en 1775 la tertulia Asamblea Amistosa Literaria donde se trataban temas de matemáticas, física, astronomía, medicina, etc.

Fue el introductor del cálculo diferencial e integral en los planes de estudios de la Academia de Guardias Marinas. En 1757 escribió un *Compendio de navegación para el uso de los caballeros guardias marinas* en el que trata de los problemas básicos de la navegación, como son el rumbo, distancia y posición (latitud, longitud y uso de cartas marítimas).

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria
de Empresariales. Jerez
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

CAPEL, H. (1982): *Geografía y Matemáticas en la España del siglo XVIII*, Oikos-Tau, Barcelona.

JUAN, J. (1748): *Observaciones astrómicas y phísicas hechas de orden de S. M en los Reynos del Perú*, Imprenta Real, Madrid.

JUAN, J. (1771): *Examen Marítimo Theórico Práctico*, Imprenta Real, Madrid.

LAFUENTE, A. y A. J. DELGADO (1984): *La geometrización de la Tierra (1735-1744)*, CSIC, Madrid.

LAFUENTE, A. y A. MAZUECOS (1987): *Los caballeros del punto fijo*, Serbal/CSIC, Barcelona.

SUMA 28
junio 1998, pp. 59-70

Ideas previas: experimentación acerca de ideas arraigadas e ideas inducidas sobre fracciones

Alberto Martínez Delgado

ARTÍCULOS

Mediante el análisis de algunos planteamientos constructivistas, y a través del diseño y realización de un diseño «cuasiexperimental», se intenta indagar sobre la existencia de una mitificación del «constructo» de ideas previas en la enseñanza de las Matemáticas. Se llama la atención sobre la relatividad del calificativo de «previas» y, recordando la posición de Piaget al respecto, se propone la distinción entre *ideas arraigadas* e *ideas superficiales.* Dentro de estas últimas, las *ideas inducidas* son objeto de experimentación, centrada en el empleo, tras distintos tratamientos, de «estrategias aditivas» o de «estrategias multiplicativas» en la resolución de problemas con fracciones. Esta experimentación justifica, parcial y provisionalmente, la crítica de la sobrevaloración y simplismo que frecuentemente acompañan a las instrucciones y recomendaciones sobre las ideas previas.

IDEAS PREVIAS: importancia educativa y mitificación

La importancia de los conocimientos previos para el aprendizaje ha sido reconocida tradicionalmente en el pensamiento sobre la educación. Comenius, en el siglo XVII, indicaba que «todas las cosas deben ser enseñadas en la debida sucesión...» (1907, 191), orden en el que la conexión entre unos conocimientos y los anteriores parece determinante. Pestalozzi (1927, t.. 1, 99) parece incluir esta relación entre conocimientos previos y posteriores en su visión del «arte de la educación» como «proceso natural» siguiendo una «seriación gradual».

Thorndike (1922, 199), desde posiciones conductistas, difícilmente identificables con planteamientos memorísticos, como con frecuencia se sostiene, propone:

> Un plan científico para enseñar aritmética debería empezar con un inventario exacto del conocimiento y la habilidad que ya poseen los alumnos.

Recientemente, se ha resaltado por parte de la psicología cognitiva, y especialmente por el constructivismo radical, el «constructo» de *ideas previas,* en contraposición al de conocimientos previos que parece asociarse con una visión tradicional de la educación. La idea de conocimiento responde a una visión filosófica de tipo realista y «objetivista» (con existencia de algún criterio objetivo de «verdad» o correspondencia entre ideas y realidad exterior); el concepto de *ideas previas* prescinde (o, al menos, relaja su dependencia) de la connotación de *corrección* o *error* que enmarca a los *conocimientos.* La influencia del constructivismo radical, con su paradigma epistemológico *interpretativo* y subjetivista, no es ajena, probablemente a este deslizamiento desde los *conocimientos previos* hacia las *ideas previas.*

La distinción anterior, entre ideas previas, desde el punto de vista constructivista, y conocimientos previos, en un sentido realista, sin embargo, se difumina o desaparece en algunos planteamientos que se declaran partícipes de las tendencias constructivistas. La amplia gama de posiciones integradas en la «concepción constructivista» (MEC, 1989, 31) y la premura de algunas adscripciones al constructivismo pueden explicar en parte la confusión que, también en el terreno de la teoría educativa, parece acompañar la reforma realizada a través de la LOGSE. El Ministerio de Educación y Ciencia español (MEC, 1989, 521), bajo el epígrafe «conocer lo que sabe el alumno», que nos remite al conductismo de Thorndike, afirma y recomienda para la Educación Secundaria Obligatoria:

> Los esquemas previos que poseen los alumnos no son en muchos casos suficientemente precisos, completos ni tan siquiera ajustados a la realidad. A veces se manifiestan directa o indirectamente en forma de «errores» al efectuar cálculos, resolver problemas o definir conceptos... Suele ser habitual realizar, a veces sólo al principio del curso, una prueba o examen de conocimientos previos. Esta información, que es sin duda muy útil, debe ser recogida con más frecuencia, sobre todo al iniciar o retomar un tema determinado...

En cuanto al enfoque de las «actividades de enseñanza-aprendizaje» el Ministerio de Educación y Ciencia (1989, 98) insiste en el mismo sentido:

> En primer lugar, el profesor debe dar gran importancia a los conocimientos previos que posee el alumno. Es por ello necesaria la planificación de actividades variadas encaminadas a conocer cuáles son esas ideas previas, qué grado de elaboración tienen y discutir sobre ellas como punto de partida...

Un enfoque similar, identificable con el conductismo pero adscrito al constructivismo, se puede observar en formulaciones académicas como las expuestas por Pozo y otros (1991, 12):

> Si asumimos una actitud constructivista con respecto al aprendizaje de los alumnos, una de nuestras preocupaciones fundamentales –aunque desde luego no la única ni la última– deberá ser por tanto conocer qué es lo que los alumnos ya saben sobre lo que vamos a enseñarles. No es casual que buena parte de la investigación y de la innovación educativa haya estado dedicada estos últimos años a estudiar los conocimientos previos de alumnos de muy diversas edades, así como la forma en que pueden ser tratados y evaluados en el aula.

La referencia, a veces sin distingos teóricos acerca de su naturaleza (realista o subjetivista), a los conceptos «alternativos» de los alumnos, a sus «micromundos» o sus «dominios experienciales subjetivos» (Haseman, 1988, 149), a «lo que el alumno sabe» (Jiménez Gómez y otros, 1994, 235), a «lo que se conoce como "preconcepciones", "concepciones alternativas", "concepciones espontáneas"» (Gil Pérez, 1994, 156)..., son objeto de gran insistencia, frecuentemente con un tono propagandístico y triunfalista que probablemente no es ajeno a la campaña publicitaria de la LOGSE, pero cuyas raíces profundas habría que investigar específicamente; esta exaltación de las ideas previas tiene lugar en un contexto científico en el que, como señalan Jiménez Gómez y otros (1994, 236), «...a pesar de la proliferación de trabajos aparecidos en los últimos años acerca de este tema, [...], poco se ha avanzado en clarificar su epistemología y estatus ontogenético, [...], ni tan siquiera en unificar los términos y sus significados a la hora de referirnos a ello».

La amplia gama de posiciones integradas en la «concepción constructivista» y la premura de algunas adscripciones al constructivismo pueden explicar en parte la confusión que, también en el terreno de la teoría educativa, parece acompañar la reforma realizada a través de la LOGSE.

Las notas críticas anteriores, no deben ser obstáculo, sin embargo, para el reconocimiento, de gran tradición histórica en la enseñanza de las Matemáticas –como tradicional es el principio de que las Matemáticas sean «entendidas» o, en un lenguaje de apariencia novedosa, «significativas»– de la importancia de las *ideas previas* de los alumnos, en un sentido más amplio que el de los *conocimientos previos*, al margen del alineamiento o desacuerdo con los supuestos constructivistas. No obstante, la visión de las «pruebas iniciales», como instrumento prodigioso y en cuya elaboración no se advierten problemas especiales, visión que refleja cierto simplismo sobre el mismo concepto de ideas previas, exige un análisis crítico, que podría tener como uno de sus ejes la existencia de un fenómeno de mitificación de las ideas previas.

Las dificultades del modelo constructivista en el trabajo práctico del aula han sido reconocidas por autores defensores del constructivismo, como describe Noddings (1990, 17), para quien existe una disparidad entre la «potencia de los métodos constructivistas en situaciones de uno-a-uno» y la necesidad de «economías instruccionales» en las «condiciones del aula».

De una forma más específica, los problemas para actuar sobre las ideas previas son constatados, desde el mismo enfoque constructivista, por autores como Arcavi y Shoenfeld (1992, 331).

La fetichización de las ideas previas quizás entronque con los indicios de que, tanto el constructivismo psicológico, individual, como el constructivismo social, presentan una mitificación, cuyas causas y objetivos ideológicos requieren ser investigados, del papel del individuo en su propia conformación cognitiva (y social), haciéndolo único responsable de su propio devenir (en el constructivismo psicológico) o corresponsable, con una corresponsabilidad aceptada y asumida (en el constructivismo social). Tanto el mito del hombre producto de sí mismo, como la sobrevaloración de la negociación consensual, ocultan toda una serie de fenómenos sociales de explotación, opresión, imposición y marginación, a los que se quiere presentar como propias opciones de los individuos. En ocasiones puede parecer negociación y consenso lo que simplemente es resultado de una adaptación a condiciones impuestas, adaptación que puede llegar en el campo de la enseñanza a la adopción por parte de algunos alumnos de «estrategias para el fracaso» escolar (Holt, 1964, citado por Novak y Gowin, 1984, 6). Incluso aspectos tan graves como los estragos de las drogas entre la población (joven y menos joven), quizás puedan analizarse en esa perspectiva autodestructiva vinculada con una «estrategia para el fracaso».

La mitificación del papel del individuo, propia del constructivismo, tendría, en esta perspectiva, su correlato educativo en la mitificación de las ideas previas de los alumnos; estas ideas previas, al ser fundamental o únicamente un producto del propio alumno, si acaso matizadas en un proceso negociador, constituirían la base del «conocimiento», expresarían, globalmente, convicciones arraigadas y resultarían escasamente modelables desde el exterior, al menos por mecanismos no «negociadores».

La controversia acerca de los distintos paradigmas epistemológicos y sus consecuencias educativas constituye un elemento positivo y dinamizador del progreso en la comprensión de los procesos de aprendizaje; las posibilidades de debate parecen verse mermadas por una versión degradada, divulgada por el oficialismo administrativo y por algunos sectores académicos, de aportaciones recientes de la investigación educativa, hasta el punto de que esta versión deformada puede constituirse en el principal obstáculo para la difusión misma de las investigaciones realizadas, para su aprovechamiento en el aula y para el fomento del impulso investigador del profesorado.

En ocasiones puede parecer negociación y consenso lo que simplemente es resultado de una adaptación a condiciones impuestas, adaptación que puede llegar en el campo de la enseñanza a la adopción por parte de algunos alumnos de «estrategias para el fracaso» escolar...

Experimentación sobre algunas ideas previas sobre fracciones: ideas arraigadas e ideas inducidas

En este estudio resaltamos el carácter relativo del constructo de *ideas previas*, teniendo en cuenta que el carácter *previo* de las mismas depende del momento en que se sitúen y de la perspectiva sobre las mismas que se adopte; lo que para un observador pueden ser ideas previas, o ideas «anteriores», para otro observador, o desde otro punto de vista, pueden considerarse como «resultantes» o posteriores. Así, en esta indagación consideramos como previas las ideas manifestadas por los sujetos investigados en momentos determinados; con ello, en nuestra opinión de forma saludable, la calificacion de previas pierde relevancia y tiende a difuminarse, quedando el centro de nuestra atención en las *ideas* manifestadas por los sujetos en determinados momentos. La insistencia sobre el carácter *previo* parece obedecer al establecimiento de etapas (en algunos casos justificadas) cuyos límites, con gran frecuencia, son meros artificios administrativos o el paso de un día a otro (comienzo de un curso, de un trimestre..., inicio de un tema, introducción de un concepto...). Por otra parte, el énfasis en el carácter previo de las ideas manifestadas por los alumnos ante determinada prueba, parece obedecer a cierta sacralización de este constructo, que aparecería como punto de partida de la actividad de aprendizaje, punto inicial que carecería de pasado propiamente dicho. Las dificultades de investigación de cómo se han formado las ideas, que en un momento dado aparecen como previas, no deben ser un motivo para negar la existencia del proceso mismo de formación, de tal manera que lo que, de forma unilateral se presenta como *ideas previas* podrían llamarse *ideas resultantes*. Esta unilateralidad supondría la consideración del pasado de las ideas como una indescifrable «caja negra» de características similares a la, con razón, criticada «caja negra» de los procesos internos de los conductistas; esta *caja negra* vendría a unirse con otra zona vedada al conocimiento por parte del constructivismo radical, la «caja negra del universo», exterior al sujeto (Glasersfeld, 1987, 108).

Dentro de esta relativización del carácter previo de las ideas en que vamos a centrarnos en este trabajo, nos parece de interés establecer una distinción entre *ideas (previas) arraigadas* e *ideas (previas) superficiales*. Esta distinción enlaza con los «cinco tipos de reacciones revelados por examen clínico» establecidos por Piaget (1973, 21-41):

> Cuando el niño se desinteresa por la pregunta y no es estimulado a ningún esfuerzo de adaptación, responde al azar con lo que primero viene a su cabeza... Llamaremos a esa reacción *respuesta al azar* (llamada por Binet y Simon «le n'importequisme»). Cuando el niño, sin mayor reflexión contesta inventando una respuesta en la que realmente no cree, o en la que cree meramente por el hecho de decirlo, hablamos de fabular, cuando el niño hace un esfuerzo para contestar, pero la pregunta produce sugerencias o el niño trata simplemente de satisfacer al examinador sin procurar pensar por sí mismo, usaremos el término de *convicción sugerida...* Cuando el niño contesta después de reflexionar extrayendo su respuesta de los recursos de su propia mente, sin sugestión, aunque la pregunta sea nueva para él, diremos que hay *convicción liberada...*, hablando estrictamente no es ni espontánea ni sugerida... Finalmente, cuando el niño no tiene necesidad de razonar para contestar a la pregunta, pero puede dar una respuesta sin dilación [...] hay *convicción espontánea...* Hay, por lo tanto, convicción espontánea cuando el problema no es nuevo para el niño y cuando la respuesta es el resultado de reflexión original anterior (21-22).

Nuestra concepcion de *ideas arraigadas* se corresponde, aproximadamente, con los dos últimos tipos de reacciones señaladas por Piaget, mientras que las *ideas superficiales* se corresponderían, en parte, con los tres primeros tipos. La complejidad de estos fenómenos no permite clasificaciones exhaustivas ni establecer correspondencias estrictas. Así, el mismo Piaget, después de la clasificación anterior excluye de la misma (Piaget, 1973, 22):

> ...las respuestas influidas por la enseñanza recibida previamente al examen. Esto implica un problema separado y naturalmente muy complejo, que consiste en distinguir entre las respuestas recibidas aquellas que son propias del niño y aquellas que son consecuencia de su entorno adulto.

Las *ideas previas arraigadas* son, desde nuestro punto de vista, aquellas que presentan una relevancia cognitiva como expresión de ideas propias, originales, del alumno o procedentes de un aprendizaje, pero que, en cualquier caso, han adquirido un cierto grado de coherencia y estabilidad llegando a formar parte de un sistema, acaso incipiente, de ideas interconectadas que el sujeto hace suyas. Llamaremos *ideas superficiales*, a las manifestadas por el sujeto sin convicción interior, sin constituir una opinión que sea asumida realmente por el propio sujeto y que presenta rasgos de improvisación, sin apoyo en una argumentación, vivencia u observación consistente. Este tipo de idea *improvisada* puede tener cierto interés desde el punto de vista de diferentes teorías como el psicoanálisis, incluso desde el punto de vista de la enseñanza y del desarrollo científico, donde ocurrencias en apariencia disparatadas pueden resultar aportaciones de interes; en todo caso, su producción y significado constituyen un segundo nivel, quizás prometedor en un futuro, en la investigación de la formación del conocimiento.

Las ideas previas arraigadas son aquellas que presentan una relevancia cognitiva como expresión de ideas propias, originales, del alumno o procedentes de un aprendizaje, pero que, en cualquier caso, han adquirido un cierto grado de coherencia y estabilidad... Llamaremos ideas superficiales, a las manifestadas por el sujeto sin convicción interior, sin constituir una opinión que sea asumida realmente por el propio sujeto y que presenta rasgos de improvisación, sin apoyo en una argumentación, vivencia u observación consistente.

En este trabajo nos centraremos en un aspecto particular de las *ideas superficiales*, relativo a que éstas sean inducidas o no por la práctica escolar, lo que da lugar a un tipo de *ideas superficiales directamente inducidas.*

La distinción entre ideas arraigadas e ideas superficiales está dirigida, en esta indagación, hacia el estudio experimental de algunas ideas previas acerca de fracciones, particularmente el empleo de una *estrategia aditiva* o de una *estrategia multiplicativa* en la resolución de problemas de matemáticas a través de fracciones numéricas.

Un precedente interesante de respuestas a problemas enunciados «matemáticamente» que reflejan una adhesión superficial (desde el punto de vista cognitivo, aunque de raíces sociales que pueden ser interesantes) más que una convicción personal o la expresión de ideas previas de carácter específicamente matemático, lo constituye el «problema de la edad del capitán del barco... o de la maestra», en la experiencia realizada por el IREM de Grenoble, (Douady, 1984, 17), con «problemas absurdos».

Objetivo de la experimentación

El objetivo de esta experimentación es la comprobación de la existencia o no de algún tipo de respaldo práctico a la opinión de que, en gran parte, lo que se llama ideas previas, en un sentido idiosincrásico, sobre fracciones, pueden ser objeto de inducción a través de las prácticas escolares. Esta posible inducción será analizada de forma global en este trabajo, aunque la perspectiva de su desglose en una componente cognitiva y en una componente de sometimiento jerárquico, puede ser interesante para estudios posteriores.

Quedan pendientes también, provisionalmente, para estudios posteriores, aspectos de un indudable interés didáctico, y que pueden ser objeto de atención con los datos de esta experimentación, pero a los que sólo nos referiremos ocasionalmente y con intencionalidad de promover nuevos trabajos. Entre estos aspectos, que quedan momentáneamente relegados, y que pueden completarse con la revisión realizada por Pitkethly y Hunting (1996), podemos citar la interrelación entre los conceptos y estrategias de resolución de problemas con números enteros y con fracciones (Watanabe, 1995, y Streefland, 1991), la importancia de los «procesos semánticos», y de distintas conceptualizaciones para la resolución de problemas sobre fracciones (Morris y otros, 1993), la repercusión de enfoques conceptuales y procedimentales, respectivamente, sobre el rendimiento, y, finalmente, aspectos didácticos para la mejora de la enseñanza de fracciones (Streefland, 1991 y 1993).

Hipótesis de la experimentación

La hipótesis principal de este trabajo plantea la existencia de una repercusión significativa de la práctica sistemática de actividades claramente diferenciadas sobre fracciones, sobre la forma de abordar posteriormente ejercicios y problemas sobre este tema. La práctica sistemática de ejercicios resolubles por adición, en un grupo, y de ejercicios resolubles por multiplicación de fracciones, en otro grupo de alumnos, influiría en una mayor utilización del método aditivo o del método multiplicativo respectivamente (acertada o erróneamente) en que se ha sido entrenado. Lo que para un observador desconocedor de los tratamientos proporcionados a los alumnos (y no olvidemos que el período anterior a la prueba «inicial» pertenece a la «caja oscura» del pasado, para algunas concepciones pedagógicas), aparecerían como *ideas previas construidas* por los propios alumnos, resultarían ser productos inducidos o condicionados por las prácticas seguidas, por lo tanto, sin carácter estrictamente personal.

La hipótesis principal de este trabajo plantea la existencia de una repercusión significativa de la práctica sistemática de actividades claramente diferenciadas sobre fracciones, sobre la forma de abordar posteriormente ejercicios y problemas sobre este tema.

La hipótesis anterior puede considerarse como hipótesis alternativa a la siguiente hipótesis estadística nula H_0 (Christensen, 1988, 99), que presentaría dos formulaciones, correspondiente a los efectos de cada uno de los tratamientos:

$$\boxed{\begin{aligned} H_0:\quad & f\,(\text{E. ADIT.})_{\text{GR. ADIT.}} = f\,(\text{E. ADIT.})_{\text{GR. MULT.}} \\ & f(\text{E. MULT.})_{\text{GR. ADIT}} = f(\text{E. MULT.})_{\text{GR.MULT.}} \end{aligned}}$$

Con *f* hemos indicado la frecuencia relativa en la utilización de cada tipo de estrategia en el postest, E. ADIT. designa el empleo de una estrategia aditiva en el postest y E. MULT. de una estrategia multiplicativa; los subíndices GR. ADIT. y GR. MULT. se refieren al grupo «aditivo» y «multiplicativo» respectivamente, según el tratamiento seguido. La hipótesis nula (y la alternativa propuesta) admite también una versión en términos de rendimiento, medible por la media aritmética en la variable correspondiente.

Como nivel de significación para la hipótesis estadística planteada puede establecerse, siguiendo las sugerencias de Box y otros (1978, 109) el nivel 0,05 para quedar «algo convencido» de la realidad de las diferencias entre los dos grupos, y 0,01 para la «plena confianza» en la discrepancia de resultados; dentro del margen de 0,05, especificaremos el grado de significación correspondiente, en vez de limitarnos a «decir que un resultado es o no significativo para algún nivel convencional».

Además de los dos grupos experimentales hemos realizado comparaciones de ambos con un tercer grupo de control, al que no se le ha proporcionado ningún tratamiento específico, grupo que podría quedar incorporado a las fórmulas anteriores de hipótesis estadísticas.

Tipo de experimentación (diseño)

El diseño experimental emprendido puede considerarse como una variante del tipo de diseño «10» descrito por Campbell y Stanley (1982) de «diseño de grupo de control no equivalente» (p. 93), dentro del grupo de «diseños cuasiexperimentales», caracterizados por la no existencia de una aleatorización formal de los componentes de las muestras estudiadas. Este diseño ha sido esquematizado de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccc} O_1 & X & O_2 \\ \hline O_3 & & O_4 \end{array}$$

La variante introducida en este trabajo consiste en la comparación entre los efectos de dos tratamientos (X_1 y X_2), simultáneamente a la comparación de los efectos de los tratamientos con los de ausencia de tratamiento; en este aspecto la idea de grupo de control resulta alterada, por la aparición de dos grupos «experimentales» como se refleja en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} O_1 & X_1 & O_2 \\ \hline O_3 & X_2 & O_4 \end{array}$$

El pretest correspondiente ha presentado la deficiencia de estar centrado en la corrección o error de la resolución, más que en las estrategias utilizadas.

La población investigada está formada por los estudiantes de 2.° curso de BUP del IB Tartesos de Camas, Sevilla (turno de «mañana»). La muestra está formada por los tres grupos (GR. ADIT., GR. MULT. y GR. CONTR.) directamente investigados.

La formación de los dos grupos experimentales y del grupo de control no ha sido realizada bajo una aleatorización controlada, sino partiendo de agrupaciones preestablecidas, realizadas de una forma que podríamos llamar informalmente aleatoria.

Cada uno de los tres grupos estudiados está formado por aproximadamente 35 alumnos:

n(GR. ADIT.) = 32

n(GR. MULT.) = 33

n(GR. CONTR.) = 36

Variables experimentales

La variable independiente se identifica con una variable instruccional, cualitativa, que representa los dos tratamientos administrados y la ausencia de tratamiento; adquiere, por tanto, los tres estados diferenciados correspondientes con cada uno de los tres grupos estudiados.

El tratamiento ha consistido en la resolución, durante seis sesiones de clase consecutivas, de un ejercicio por sesión del tipo «de un determinado conjunto, una fracción, *p*, tiene la característica *A*, y otra fracción, *q*, tiene la característica *B*, ¿qué fracción de la población tiene las características *A* o *B*?» («grupo aditivo») y del tipo «en un determinado conjunto una fracción, *p*, de sus elementos tiene la característica *A*, de los cuales la fracción *q* tiene la característica *B*, ¿qué fracción de la población inicial tiene la característica *B*» («grupo multiplicativo»).

El tratamiento se ha producido simultáneamente en los dos grupos experimentales y coincidiendo con el estudio de los elementos básicos de trigonometría, durante el mes de octubre de 1995, estudio en el que es constante el uso de fracciones como valores de las razones trigonométricas.

La variable experimental dependiente, también de tipo cualitativo, con tres estados distintos, representa la adopción de una estrategia aditiva (E. ADIT.), multiplicativa (E. MULT.) u «OTRA E.» al resolver ejercicios del postest (cuadro 1).

Los ejercicios del postest empleados para medir la adopción de una estrategia aditiva o de una multiplicativa, constan de dos prototipos de ejercicios, correspondientes respectivamente a los cuatro primeros ítems y a los dos últimos. Los cuatro primeros ítems presentan para su resolución un mismo tipo de problema, no practicado ante-

La formación de los dos grupos experimentales y del grupo de control no ha sido realizada bajo una aleatorización controlada, sino partiendo de agrupaciones preestablecidas, realizadas de una forma que podríamos llamar informalmente aleatoria.

POSTEST SOBRE FRACCIONES

1. En un curso de Bachillerato aprueban la asignatura de Matemáticas los 2/3 de los alumnos y en otro curso, que tiene el doble de alumnos que el anteriormente mencionado, aprueban las Matemáticas los 5/8. ¿Qué fracción del total de los alumnos, de los dos cursos conjuntamente, aprueban Matemáticas?
2. En un curso suspenden Matemáticas 3/16 de los alumnos y en otro curso con el mismo número de estudiantes suspenden Matemáticas 1/8 de los alumnos. ¿Qué fracción del total de los alumnos, de los dos cursos conjuntamente, suspenden Matemáticas?
3. En un curso aprueban la asignatura de Inglés los 4/5 de los alumnos y en otro curso distinto también aprueban la asignatura de Inglés los 4/5 de los alumnos ¿Qué fracción del total de los alumnos, de los dos cursos conjuntamente, aprueban Inglés?
4. En un curso de 32 alumnos aprueban las Matemáticas los 3/4 de los mismos y en otro curso de 36 alumnos aprueban los 4/9. ¿Qué fracción del total de los alumnos, conjuntamente, aprueba las Matemáticas?
5. En un curso aprueban las Matemáticas los 4/5 de los alumnos. De los que aprueban las Matemáticas, 5/8 aprueban también Lengua. ¿Qué fracción de los alumnos del curso, en su totalidad, aprueban las dos asignaturas?
6. En un curso tienen una calificación de «insuficiente» en Matemáticas los 2/9 de los alumnos y tienen una calificación de «muy deficiente» en Matemáticas 1/6 de los alumnos del curso. ¿Qué fracción de los alumnos del curso suspende las Matemáticas (teniendo calificación de «muy deficiente» o de «insuficiente»?

Cuadro 1

riormente, al menos dentro del proceso de experimentación, en el que es errónea cualquier estrategia simple de mera suma o multiplicación de las fracciones dadas, tipo de problema que se presenta gradualmente de formas más abstractas a menos abstractas, de forma que, progresivamene resulte más fácil para el alumno recurrir a una estrategia conceptual de significado de las fracciones, en cada conjunto dado, y la reconstrucción de la fracción final pedida. En este sentido a través del postest no medimos, al menos inicial y fundamentalmente, lo acertado o erróneo de las soluciones aportadas, sino el empleo o no de determinadas estrategias. Los efectos analizados del tratamiento no se enfocan desde el punto de vista de las mejoras que el mismo pueden suponer, sino que abarca errores producidos por el entrenamiento recibido. El rendimiento, o mejoras en la resolución de ejercicios y problemas, puede considerarse también como variable dependiente de interés, aunque secundaria, en este estudio, respecto al tipo de estrategia utilizado; los valores de la variable rendimiento, medida en el pretest y en el postest, vendrían dados por lo acertado o erróneo del empleo de una u otra estrategia.

Los dos últimos ítems del postest corresponden a cada uno de los modelos integrantes del tratamiento en cada uno de los grupos experimentales respectivamente, de forma que el quinto ítem se limita a ser un ejercicio ya resuelto en varias ocasiones para los alumnos del grupo que han seguido el tratamiento multiplicativo y presenta cierta novedad para el grupo de tratamiento aditivo, mientras que, recíprocamente, el otro sexto ítem presenta alguna novedad para el grupo «multiplicativo», y es repetitivo para el grupo «aditivo».

El que la adopción por parte del alumno de una estrategia «aditiva» o de una estrategia «multiplicativa», pueda considerarse como más o menos inducible por la práctica anterior vendrá determinado por las diferencias mostradas, entre los dos grupos experimentales y el grupo de control, en el más o menos frecuente empleo de las estrategias mencionadas en la prueba del postest, que a falta de nuevos estudios que realicen un mayor control sobre otras variables, parecen atribuibles, en principio, a la distinta actividad realizada.

El rendimiento, o mejoras en la resolución de ejercicios y problemas, puede considerarse también como variable dependiente de interés, aunque secundaria, en este estudio, respecto al tipo de estrategia utilizado...

El resultado de un proceso real de enseñanza es consecuencia de la influencia de un elevado número de variables (Gage, 1978, 32). En la medida en que un experimento intenta detectar la repercusión de una sola variable, o de un pequeño número de ellas, en el aprendizaje, se plantea mantener «a un mínimo la influencia que pudieran ejercer todas o casi todas las posibles variables no pertinentes al problema» (Kerlinger, 1981, 112). Dos vías pueden utilizarse para minimizar la influencia de estas posibles variables «no pertinentes», la aleatorización y el control (Ross, 1988, 527).

La pretensión de optimizar los efectos de las variables experimentales, marginando otros posibles efectos, presenta limitaciones de difícil superación, de tipo práctico y económico, especialmente en las experimentaciones de campo (Kish, 1987, 99; Biddle y Anderson, 1989, 103). Por este motivo, aparte de intentar controlar otras variables influyentes en la variable dependiente, es necesario la repetición de experiencias sobre el mismo tema de investigación, que a través de sus coincidencias y disparidades vayan estabilizando los resultados y sus interpretaciones.

Algunos aspectos experimentales que afectan de forma notable a la validez del experimento han sido objeto de control experimental, como en el caso de las características del profesor que, para evitar diferencias perturbadoras, ha sido la misma persona tanto en el grupo que ha sido entrenado en la estrategia aditiva (G. ADIT.) como en el grupo que ha practicado la estrategia multiplicativa (G. MULT.).

Desarrollo de la experimentación. Análisis de los resultados

El tratamiento de los dos grupos experimentales ha tenido lugar entre los días 16 de octubre de 1995 y el 24 de octubre de 1995, con lo que algunos aspectos madurativos y de historial de los grupos son controlados.

El pretest tiene lugar el primer día de clase del curso. El postest tiene lugar una semana después de terminar el tratamiento experimental (el día 31 de octubre de 1995); el lapso de una semana puede suponer un «enfriamiento» de los efectos del tratamiento, lo que, por un lado, conlleva un amortiguamiento de los efectos que se pretenden detectar y, por otro, supone que los efectos que se manifiesten sean reputados de mayor estabilidad que si el postest se hubiera realizado inmediatamente después del tratamiento.

La experimentación se ha realizado en los dos grupos experimentales (G. ADIT. y G. MULT.) en las clases del mismo profesor; la enseñanza (y la realización de pruebas), en el grupo de control, ha estado a cargo de otra profesora.

La comparación estadística entre los tres grupos estudiados se centra en las frecuencias de utilización de cada una de las estrategias de resolución (aditiva y multiplicativa). Para comparar los distintos resultados utilizamos la *t* de Student, para grupos independientes y, dado el carácter bipolar de las medidas de cada ítem, se utilizarán también comparaciones no paramétricas (Colton, 1979, citado por Gil Cebrián, 1988, 5).

	Grupo Trat. Aditivo			Grupo Trat. Multiplicativo			Grupo sin Tratamiento		
	Estrategia			Estrategia			Estrategia		
	Aditiva	Mult.	Otra	Aditiva	Mult.	Otra	Aditiva	Mult.	Otra
I1	26	0	6	8	12	13	6	4	26
I2	32	0	0	24	5	4	30	1	5
I3	32	0	0	28	2	3	34	1	1
I4	18	11	3	12	18	3	8	24	4
I5	6	7	19	1	27	5	8	12	16
I6	31	0	1	25	3	5	34	1	1
Total	145	18	29	98	67	33	120	43	53

Tabla 1. Frecuencias de cada una de las estrategias de solución en cada ítem por grupos de alumnos

Estrategia cada ítem	Grupo	Kolmogorov-Smirnov Z	Kolmogorov-Smirnov P	t de Student t	t de Student P
ADIT I1	ADIT-MULT	1,97	0,001	4,60	0,000
	ADIT-CONTR	2,58	0,000	6,59	0,000
MULT I1	ADIT-MULT	1,70	0,006	–	–
	MULT-CONTR	1,27	0,080	3,05	0,003
ADIT I4	ADIT-CONTR	1,40	0,040	3,03	0,003
MULT I4	ADIT-CONTR	1,33	0,058	–2,77	0,007
ADIT I5	ADIT-MULT	–	–	2,13	0,037
	MULT-CONTR	–	–	–2,54	0,013
MULT I5	ADIT-MULT	2,37	0,000	–5,80	0,000
	MULT-CONTR	1,90	0,001	4,31	0,000
ADIT I6	MULT-CONTR	–	–	–2,25	0,028
ADIT Total	ADIT-MULT	2,12	0,000	6,17	0,000
	ADIT-CONTR	2,25	0,000	5,76	0,000
MULT Total	ADIT-MULT	2,29	0,000	–7,32	0,000
	ADIT-CONTR	1,58	0,013	–3,53	0,001
	MULT-CONTR	1,47	0,027	–3,86	0,000

Tabla 2. Significación, al nivel 0,05, de las diferencias grupales en la utilización de estrategias aditivas y multiplicativas en cada ítem

La tabla 1 recoge las frecuencias de utilización de la estrategia aditiva (E. ADIT.), multiplicativa (E. MULT.) o una estrategia diferente, en cada uno de los grupos examinados, para cada uno de los ítems del postest (cuadro 1), al margen de lo acertado o erróneo de la estrategia.

Esta tabla de frecuencias, a pesar de su escasa elaboración estadística, facilita la «insustituible» «observación de los datos cuidadosamente, inquiriéndolos, críticamente –incluso ingenuamente–» (Leedy, 1985, 182).

En la tabla 1 podemos comprobar que la estrategia multiplicativa de resolución es más empleada, en los seis ítems del postest, en el grupo que recibe tratamiento multiplicativo que en el grupo de tratamiento aditivo. Similar situación se presenta respecto al grupo de control, salvo en el caso del ítem 4, en el que el grupo de tratamiento multiplicativo es superado por el grupo de control. En la comparación entre el grupo de tratamiento aditivo y el de control se observa que la estrategia multiplicativa es más frecuente en el grupo de control, en general de forma ligera, excepto en el caso del ítem 4, en el que la diferencia de frecuencias es más acusada.

Por otra parte, la estrategia aditiva es más utilizada por los alumnos del grupo que ha seguido un tratamiento aditivo que en el grupo que ha tenido un entrenamiento multiplicativo, especialmente en el ítem 1, pero, en general, no es más utilizada en el grupo tratado aditivamente que en el grupo de control (que lo supera ligeramente en tres de los ítems).

Las ideas que la mera observación de la tabla 1 de frecuencias pueda sugerir, reciben una importante matización a través del estudio estadístico del nivel de la significación de las diferencias intergrupales, en el empleo de las estrategias aditiva o multiplicativa, de acuerdo con diferentes criterios de comparación estadística entre grupos «independientes». Los resultados de significación de las diferencias más destacables, próximos o inferiores al grado 0,05, se resumen en la tabla 2.

Para la determinación de la significación de las diferencias entre los grupos estudiados, hemos utilizado el test de Kolmogorov-Smirnov, a pesar de que el número de elementos de las muestras es escaso para este tipo de análisis, y, junto a esta prueba no paramétrica hemos consignado también los resultados de la prueba paramétrica *t* de Student.

La diferencia intergrupal más significativa, en ítems concretos, no agrupados, se produce en el ítem 1, de acuerdo con los dos test de hipótesis empleados, entre el grupo aditivo y el grupo de control en el empleo de la estrategia aditiva, aunque son destacables y significativas otras diferencias en los ítems 4, 5 y 6, y en la consideración global (para el conjunto de los ítems del postest) de las diferencias entre los tres grupos estudiados.

Las diferencias de estrategia en los ítems 5 y 6, de enunciados, cada uno de ellos, del tipo utilizado en los respectivos tratamientos experimentales, se traducen en diferencias en el número de respuestas correctas a dichos ejercicios. Esta dependencia se manifiesta en los niveles de significación recogidos en la tabla 3, referida a la corrección de las respuestas a los ítems 5 y 6, y a la medida global de corrección del postest, así como a la medida de progreso en ejercicios de fracciones (progreso medido por la diferencia entre los resultados del postest y del pretest). Los parámetros resultantes en la tabla 3, sobre corrección de los resultados, son acordes con lo ya señalado respecto a la significación de las diferencias en estrategias empleadas.

Una visión global de los resultados de esta experimentación puede recogerse mediante los diagramas de «caja» correspondientes a las estrategias aditiva y multiplicativa (ESTR. ADIT.; ESTR. MULT.), respectivamente, referidos a los tres grupos estudiados. El empleo de la estrategia aditiva y de la multiplicativa se han contemplado, en los diagramas de caja recogidos en las figuras 1 y 2 de forma global, esto es, referida a todos los ítems del postest.

Solución en ítems	*Grupo*	*Kolmogorov-Smirnov*		*t de Student*	
		Z	*P*	*t*	*P*
I 5	ADIT-MULT	2,43	0,000	–6,27	0,000
	MULT-CONTR			4,13	0,000
I 6	ADIT-MULT	–	–	2,15	0,036
Postest	ADIT-MULT	–	–	–2,25	0,028
Progreso	ADIT-MULT	–	–	–2,07	0,043

Tabla 3. Diferencias significativas en la corrección de los resultados de los ítems

Los diagramas de las figura 1 y 2 nos permiten la comparación efectiva entre los percentiles escogidos (Cleveland, 1985, 131). Estos percentiles son el 25, 50 (mediana), y 75, indicados, respectivamente, en sentido ascendente, por el lado inferior de la caja rectangular, por el asterisco (mediana) y por el lado superior de la caja. Los segmentos inferior y superior, separan los elementos «extravagantes» y «extremos» (*outliers...*) (Peña, 1992, V. 1, 65).

La figura 1 muestra el efecto de los tratamientos en el empleo de la estrategia aditiva en el postest de los tres grupos; la comparación con el grupo de control nos muestra que la discrepancia con dicho grupo es mayor en el grupo «tratado aditivamente» que en el caso del grupo «tratado multiplicativamente» (el contraste entre los dos grupos tratados experimentalmente es también destacable). Mientras las medianas del grupo de control y del grupo «multiplicativo» alcanzan aproximadamente el

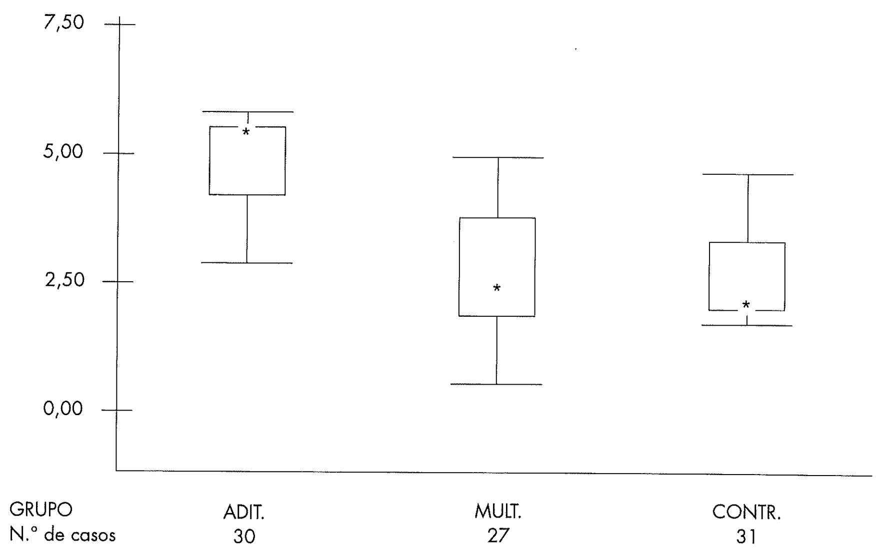


Figura 1. Diagrama de caja de empleo global de la estrategia aditiva en el postest, para los tres grupos estudiados

mismo valor (aunque con una distribución más dispersa en los valores inferiores, en el grupo «multiplicativo»), la mediana del grupo «aditivo» se encuentra a la altura de la línea de separación superior de elementos «extravagantes» (*outliers*) de los otros dos grupos.

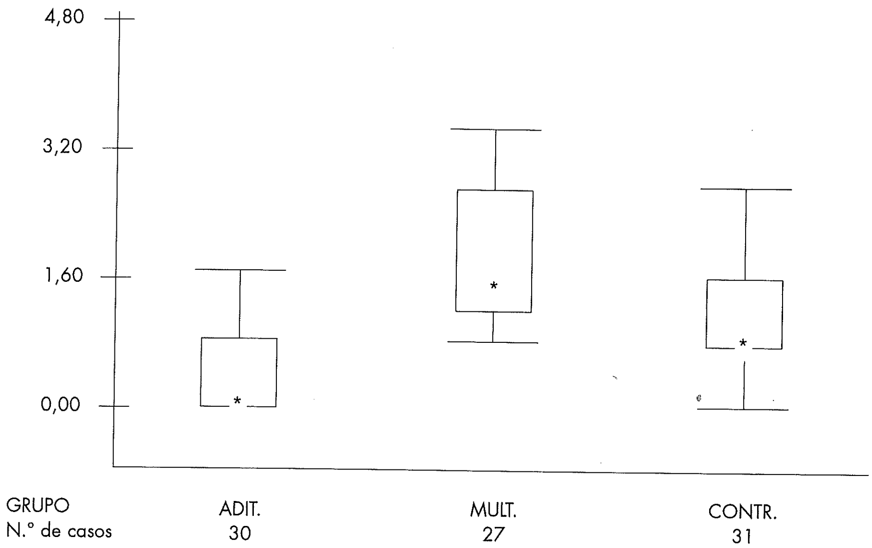


Figura 2. Diagrama de caja de empleo global de la estrategia multiplicativa en el postest, para los tres grupos estudiados

La figura 2 indica que el grupo que ofrece mayor contraste con el grupo de control lo constituye el grupo «tratado multiplicativamente», que manifiesta también una marcada discrepancia con el grupo «tratado aditivamente». Casi todas las marcas de los percentiles del grupo «multiplicativo» son superiores a las marcas correspondientes de los otros dos grupos comparados.

Las reflexiones anteriores apuntan la posibilidad de que el impacto del tratamiento «multiplicativo» sea mayor que el producido por el tratamiento «aditivo» que intervendría sobre una base anterior de mayor estabilidad que la que correspondería al tratamiento «multiplicativo». Los efectos recogidos en las figuras 1 y 2 no se presentan de forma simétrica por la existencia de «otras» estrategias de resolución, no abordadas en este estudio.

El estudio de los resultados obtenidos en la experimentación realizada apoyan parcialmente la hipótesis «alternativa» sustentada en este trabajo, al no confirmar la hipótesis estadística nula objeto de contraste...

Conclusiones de la experimentación. Consecuencias y perspectivas de la investigación realizada

El estudio de los resultados obtenidos en la experimentación realizada apoyan parcialmente la hipótesis «alternativa» sustentada en este trabajo, al no confirmar la hipótesis estadística nula objeto de contraste, tanto en su vertiente referida a estrategias utilizadas tras el tratamiento recibido como al rendimiento en la resolución de tareas.

1. La aplicación del tratamiento «multiplicativo», en el grupo GR. MULT., se muestra efectiva como se comprueba a través de los niveles de significación de las diferencias en el ítem 5 (estrategia utilizada y resultado obtenido), un ítem de naturaleza netamente multiplicativa, y en el ítem 1 (estrategia utilizada), así como en otros casos señalados en las tablas comparativas. Las diferencias se constatan entre el grupo «aditivo» (GR. ADIT.) y el grupo «multiplicativo» (GR. MULT.), así como entre este último y el grupo de control.

2. La aplicación del tratamiento aditivo produce resultados parcialmente significativos en la comparación con los grupos no sometidos a ese tratamiento. No se produce, sin embargo, ninguna diferencia significativa referente al rendimiento (corrección de resultados) entre el grupo aditivo y el grupo de control (las diferencias más destacables, y significativas, afectan a las estrategias empleadas en los ítems 1 y 4).

3. El hecho de que la estrategia aditiva, como tratamiento, no haya producido diferencias significativas en el rendimiento, con el grupo de control, sugiere la posibilidad de formular una nueva hipótesis para posteriores estudios, basada en la conjetura de que la estrategia aditiva constituye una *idea previa* más arraigada en los estudiantes que la estrategia multiplicativa.

La errónea estrategia aditiva simple (suma de las dos fracciones), utilizada para hallar la fracción global correspondiente a una situación en que se conocen dos fracciones referidas a distintos subconjuntos del global, podría basarse en una traslación de la acertada estrategia utilizada con números enteros, consistente en la suma de los números enteros correspondientes para hallar el número de elementos de la unión de dos conjuntos, cuando éstos son disjuntos, no ampliable automáticamente a los números racionales.

4. Las diferencias en el impacto de los dos tratamientos aplicados y la mayor o menor pervivencia de hábitos o de ideas de resolución apoyan el planteamiento de este trabajo en cuanto a la conveniencia de distinguir entre ideas previas con cierto nivel de arraigo e ideas inducidas, o incluso improvisadas, tendentes a salir de la situación (mediante procedimientos aún oscuros o recurriendo al azar).

5. Los resultados de esta experimentación no contradicen las reticencias mostradas en la justificación de la misma, respecto al paradigma constructivista en educación, o al menos respecto a algunas de las formulaciones, acaso superficiales, triunfantes como caracterización del constructivismo, entre ellas la negación de la posibilidad de transmisión del conocimiento y, por lo tanto, de su enseñanza y la mitificación de las ideas previas, en todas sus manifestaciones, como elementos personales idiosincrásicos.

Podría objetarse que las conclusiones alcanzadas no hacen sino confirmar lo obvio, lo que es innegable desde el mero «sentido común»; aunque esta objeción no es desdeñable, se debe llamar la atención sobre las pretensiones de la «revolución constructivista», de oponerse a una concepción «tradicional» del conocimiento y del aprendizaje que, hasta ahora, se había considerado «obvia» y de «sentido común».

6. En el terreno de la práctica docente, si los resultados obtenidos en este trabajo no fueran refutados por posteriores investigaciones, perderían fuerza las instrucciones y recomendaciones para que al inicio de cada tema se investiguen, con cierta formalidad exterior (pruebas, cuestionarios...) y bajo un enfoque simplista, las ideas previas de los alumnos. La realización de investigaciones sobre las ideas de los alumnos y su relevancia facilitadora u obstaculizadora del aprendizaje, se revela como una tarea compleja, abordable, en nuestra opinión, por los practicantes de la enseñanza, pero sobre la base de un importante esfuerzo y reflexión. Junto a los resultados que este tipo de investigaciones, adquirirían cierta revalorización los métodos de *explicación* apoyados en la utilización del *diálogo* con los alumnos y en favorecer la libre expresión de éstos, diálogo a través del cual pueden manifestarse, de manera informal, pero valiosa, las opiniones, ideas y aportaciones de los alumnos. De hecho, el diálogo es una de las vías fundamentales en la investigación, por parte de autores constructivistas, de las ideas previas de un sujeto o de un número reducido de ellos (estudio de casos, tutoría individual...); aunque las condiciones del aula no permiten extender el método del diálogo con la misma profundidad con que puede realizarse a nivel individual, el principio puede ser mantenido, sin antagonismo con el llamado método «transmisivo».

En cualquier caso, estas conclusiones son resultados muy limitados que necesitan de nuevas investigaciones, sobre el mismo fenómeno concreto estudiado y otros distintos, que puedan enriquecerlas y darles una mayor o menor verosimilitud.

En cualquier caso, estas conclusiones son resultados muy limitados que necesitan de nuevas investigaciones, sobre el mismo fenómeno concreto estudiado y otros distintos, que puedan enriquecerlas y darles una mayor o menor verosimilitud.

Referencias bibliográficas

ARCAVI, A. y A. H. SHOENFELD (1992): «Mathematics Tutoring through a Constructivist Lens: The Challenges of Sense-Making», *Journal of Mathematical Behavior*, vol. 11, n.° 4, 321-335.

BIDDLE, B. J. y D. S. ANDERSON (1989): «Teoría, métodos, conocimiento e investigación sobre la enseñanza», en M. C. WITTROCK (ed.), *La investigación de la enseñanza*, Paidós-MEC, Barcelona, 93-148.

BOX, G. E. P., W. G. HUNTER y J. S. HUNTER (1978): *Statics for Experimenter. An Introduction to Design, Data Analysis, and Model Building*, John Wiley & Sons, New York.

CAMPBELL, D. T. y J. C. STANLEY (1982): *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*, Amorrortu, Buenos Aires.

CLEVELAND, W. S. (1985): *The elements of graphing data*, Wadsworth, Monterey, California.

COLTON, Th. (1979): *Estadística en medicina*, Salvat, Barcelona.

COMENIUS, J. A. (1907): *The great Didactic*, Adam and Charles Black, London.

COOK, T. D. y D. T. CAMPBELL (1979): *Quasi-Experimentation. Design & Analysis Issues for Field Settings*, Houghton Mifflin Company, Boston.

CHRISTENSEN, L. B. (1988): *Experimental Methodology*, Allyn and Bacon, Boston & London.

DOUADY, R. (~1984): «De la didactique des mathématiques a l'heure actuelle», *Cahier de didactique des mathématiques*, n.° 6 (IREM, Université Paris VII).

GAGE, N. L. (1978): *The scientific basis of the art of teaching*, Rand McNally, Chicago.

GLASERSFELD, E. von (1987): *Wissen, Sprache und Wirklichkeit. Arbeiten zum radikalen Konstructivismus*, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden.

GIL CEBRIÁN, J. (1988): *Estadística no paramétrica. Teoría y programas comentados en BASIC para ordenadores personales IBM y PC compatibles*, RA-MA, Madrid.

GIL PÉREZ, D. (1994): «Diez años de investigación en didáctica de las Ciencias», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 12 n.° 2, 154-164.

HASEMAN, K. (1988): «Conceptions «alternatives» des éleves, conflits conceptuels et leur importance pour le processus d'aprentissage des mathématiques», en *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Textes réunis et présentés par C. Laborde. La pensée sauvage, Paris, 149-159.

HOLT, J. (1964, 1969): *How Children Fail*, Penguin Books, Harmondsworth, Middlesex.

I.R.E.M. de Grenoble (sin fecha): *Quel est l'age du Capitaine?*, Bulletin APMEP, n.° 323.

JIMÉNEZ, E., I. SOLANO y N. MARÍN (1994): «Problemas de terminología en estudios realizados acerca de "lo que el alumno sabe" sobre Ciencias», *Enseñanza de las Ciencias*, vol. 12, n.° 2, 235-245.

KERLINGER, F. N. (1981): *Enfoque conceptual de la investigación del Comportamiento*, Nueva Editorial Interamericana, México.

KISH, L. (1987): *Statistical Design for Research*, John Wiley & Sons, New York.

KOLSTAD, R. y otros (1993): «Improving the Teaching of Fractions», *Reading Improvement*, vol. 30, n.° 3, 180-183.

LEEDY, P. D. (1985): *Practical Research, Planning and Design*, Macmillan P. C., New York.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria*, 2 vols., MEC, Madrid.

MORRIS, A. (1995): «Meaningful Instruction in Fractions: Implementing a Theory in a Low-Achieving Mathematics Classroom», *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 17, n.° 3, 16-40,

NODDINGS, N. (1990); «Constructivism in Mathematics Education», en R. B. DAVIS, C. A. MAHER y N. NODDINGS, *Constructivist Views on the Teaching of Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.

NOVAK, J. D. y D. B. GOWIN (1984): *Learning how to learn*, Cambridge University Press, Cambridge & London.

PEÑA SÁNCHEZ DE RIVERA (1992): *Estadística. Modelos y métodos*, 2 vols., Alianza, Madrid.

PESTALOZZI (1927): *Canto del Cisne*, Ediciones de la «lectura», Madrid.

PIAGET, J. (1973): *The Child's Conception of the World*, Paladin, St Albans.

PITKETHLY, A. y R. HUNTING (1996): «A review of recent research in the area of initial fraction concepts», *Educational Studies in Mathematics*, vol. 30, n.° 1, 5-38.

POZO, J. I. y otros (1991): «Conocimientos previos y aprendizaje escolar», *Cuadernos de Pedagogía*, N.° 188, 12-14.

ROSS, K. N. (1988): «Scientific Research Procedures», en J. P. KEEVES (ed.), *Educational Research, Methodology, and Measurement: An International Handbook*, Pergamon Press, Oxford, 527-537.

STREEFLAND, L. (1991): *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

STREEFLAND, L. (1993): «The Design of a Mathematics Course. A Theoretical Reflection», *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 25, n.° 1-2, 109-135.

THORNDIKE, E. L. (1922): *The Psychology of Arithmetic*, The Macmillan Company, New York.

WATANABE, T. (1995): «Coordination of Units and Understanding of Simple Fractions: Case Studies», *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 7, n.° 2, 160-175.

Alberto Martínez
IES Tartesos
Camas (Sevilla)

N.° 167. Ocho amigos hacen un viaje de 12 días, y gastan 2.688 ptas. Pasados estos días, 3 de ellos siguen el viaje durante 8 días más. ¿Cuántas pesetas gastan éstos ultimos?

$$\frac{2688}{8} \times 3 = 1008$$

$$\frac{1008}{12} \times 8 = 672.$$

R.: Gastarán 672 ptas.

SUMA 28
junio 1998, pp. 71-80

Matemáticas no eurocéntricas para una educación intercultural*

José Joaquín Arrieta Gallastegui

ARTÍCULOS

PARECE difícil de negar el hecho de que las diversas interpretaciones epistemológicas acerca del status científico de las matemáticas tienen una influencia decisiva en la consideración de su historia y su enseñanza. Por poner sólo un ejemplo bastante reciente, qué duda cabe que la consideración bourbakista de dicha ciencia, sintetizada en el articulo firmado por el colectivo autodenominado Nicolás Bourbaki sobre la «Arquitectura de las Matemáticas» (ver bibliografía), ha determinado su visión de la historia de la misma, así como su concepción de qué y cómo enseñarla, puesta de manifiesto en la década de los sesenta bajo la denominación de las «matemáticas modernas» o la «nueva matemática».

El eslogan que acuñó Jean Dieudonné, quizás el bourbakista más osado a la hora de asumir y defender sus peculiares posicionamientos pedagógicos, amparándose incluso en los planteamientos cognitivos de Jean Piaget, con motivo del coloquio de Royaumont realizado en 1959, pone de manifiesto esta interrelación entre las matemáticas, su historia y su enseñanza. Su «¡Abajo Euclides!», pues tal fue el eslogan que popularizó, está plenamente justificado en función de sus planteamientos históricos, recogidos en su obra *Elementos de historia de las matemáticas*, así como de su afirmación de que la enseñanza debe centrarse en la comprensión del método axiomático (Hernández, 1978).

Podríamos también recurrir, retrocediendo hacia el pasado, al gran filósofo de las ideas, Platón, el cual también explicitó, a lo largo de sus *Diálogos*, en especial en el *Menón*, cuál era su concepción de las matemáticas, su historia y su enseñanza, pero pensamos que no es necesario ejemplificar más ante lo evidente del asunto.

En el presente trabajo pretendo defender explícitamente tres tesis al respecto (aunque por razones de espacio me detendré especialmente en la segunda):

* Este artículo se corresponde casi literalmente con la conferencia que el autor presentó en el Congreso Internacional de Computación y Enseñanza de las Matemáticas (COMPUMAT) realizado en noviembre de 1997 en la Universidad de Cienfuegos (Cuba).

1. En la mayor parte de las historias de las matemáticas conocidas podemos comprobar que se oculta, o no se fundamenta en absoluto, la concepción epistemológica que se tiene de dicha disciplina. ¿Qué se entiende por matemáticas?, ¿qué se entiende por ciencia o ciencias?, ¿y por abstracción? Estas preguntas, desgraciadamente, no se suelen responder con rigor en los libros publicados al respecto, cuando lo llegan a hacer, por lo que muchas de las afirmaciones que contienen se deben asumir como dogmas de fe, sin posibilidad de discusión o, en su caso, de refutación.
2. Los textos de historia de las matemáticas se han escrito con un marcado sesgo eurocéntrico, ignorando, devaluando y distorsionando la actividad matemática realizada al margen del continente europeo. Parece ser que únicamente los habitantes del mismo han sido capaces de aportar algo a la «reina de las ciencias», al espíritu humano creador capaz de construirla y desarrollarla con racionalidad y rigor.
3. La educación matemática, al no fundamentarse en una adecuada epistemología e historia de la misma, no favorece la concreción de una educación intercultural, más necesaria que nunca en esta llamada «aldea global».

Para defender estas tesis vamos a criticar, detenidamente, un amplio conjunto de textos de historia de las matemáticas elaborados tanto en los países del entonces llamado segundo mundo, o países del Este, hasta la caída del muro de Berlín, como en los más desarrollados del primer mundo, ahora llamados, de manera algo más aséptica, países del Norte. Comenzaremos criticando a los que mayor influencia han tenido en la formación de las personas asistentes al COMPUMAT, en concreto los del historiador de Alemania del entonces Este, Hofmann, y el utilizado en las universidades cubanas como libro de texto, obra del ruso Ríbnikov, para continuar con algunos clásicos editados en los países occidentales; en concreto me referiré únicamente, por cuestión de economía y de tiempo disponible, a las obras de Rouse Ball, de principios de siglo, y a las más recientes de Morris Kline y, cómo no, las del todoterreno, así conocido por su capacidad para apuntarse a todas las batallas, Jean Dieudonné, bourbakista de pro.

Antes de ello, y para ser consecuente, presentaré una caracterización inicial, meramente descriptiva de lo que entiendo por matemáticas, asumiendo, casi literalmente, la que presenta el sirio-indio-etíope-inglés Georges Gheverghese Joseph, reciente autor de una obra que, bajo el sugerente titulo de *La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas*, plantea una crítica demoledora, que abunda en defensa de nuestra segunda tesis. Como afirma dicho autor: «Las matemáticas han desarrollado un lenguaje universal con una clase particular de estructura lógica. Contienen un cuerpo de conocimientos relacionado con el número y el espacio, y prescriben un conjunto de métodos para alcanzar ciertas conclusiones acerca del mundo físico (y para la resolución de infinidad de problemas, además de poder ser considerada como un instrumento de comunicación preciso y riguroso, que no encierra ambigüedades, diríamos nosotros). Y es una actividad intelectual que exige intuición e imaginación para deducir demostraciones y alcanzar conclusiones. Además, y con frecuencia, recompensa a las mentes creativas con un fuerte sentido de satisfacción estética» (Gheverghese, 1996, 26).

En la mayor parte de las historias de las matemáticas se oculta, o no se fundamenta en absoluto la concepción epistemológica qué se tiene de dicha disciplina.

Los textos de historia de las matemáticas se han escrito con un marcado sesgo eurocéntrico

La educación matemática no favorece la concreción de una educación intercultural...

Una caracterización epistemológica, en el sentido fuerte de la misma, nos conduciría a desarrollar un discurso que, por su extensión y dificultad, no podemos desarrollar aquí y ahora, aunque en la bibliografía utilizada puede encontrar el lector una referencia sobre la «Teoría del cierre categorial», elaborada por mi profesor de filosofía en Oviedo (Asturias), Gustavo Bueno, que da cuenta de lo que son las ciencias, y en concreto las matemáticas, con gran profundidad y de manera absolutamente adecuada, a mi parecer.

Las historias de las Matemáticas desde una perspectiva marxista

Al poco de iniciar la lectura del libro del alemán Hofmann, se topa uno con la siguiente afirmación: «La matemática como ciencia empieza, en realidad, con Anaxágoras de Klazomene (500?-428 an.e.), quien sentó que, en lo inferior a lo pequeño, no hay un mínimo, sino solamente algo más pequeño, e igualmente en lo grande» (Hofmann, 1968, 20). Y por mucho que uno indague hacia delante o hacia atrás en el libro, no encuentra en él ningún motivo ni para afirmar ni para negar tal afirmación. Como no define lo que entiende por matemática, la tesis de que la misma empieza con ese autor griego puede aplicarse a cualquiera de los citados en el libro, griegos o no, antiguos o contemporáneos.

Por otra parte, la estructuración de su libro refleja claramente la asunción de lo que denominaremos, con Gheverghese, la trayectoria eurocéntrica clásica, consistente en afirmar que las matemáticas nacieron en Grecia, languidecieron durante mil años en la edad oscura o edad media, y volvieron a florecer con el renacer del pensamiento griego en la Italia renacentista; tesis tan extendida y difundida como errónea, tal y como pensamos argumentar (ver gráfico 1).

Por su parte, el historiador ruso de las matemáticas Ríbnikov, presenta en muy pocas páginas, en las comprendidas entre la 9 y la 19 de su historia de las mismas, un compendio de tópicos, basados en la concepción materialista histórica del marxismo, que utiliza posteriormente con profusión para pretender justificar y fundamentar la evolución histórica de las matemáticas; lo que ocurre es que, a nuestro entender, las determinaciones prácticas de las que habla, de tanto determinarlo todo, acaban por no determinar nada. Pero no nos adelantemos.

Comienza recurriendo a Engels para definir las matemáticas como la ciencia cuyo objeto lo constituyen las relaciones cuantitativas y las formas espaciales del mundo real. Seguir invocando a dicho autor cien años después, y más teniendo en cuenta que, al igual que Max, no aportó gran cosa, por no decir nada (véanse sus *Cartas sobre las Ciencias de la naturaleza y las matemáticas*), al desarrollo de la matemática del siglo XIX, podrá tener un sentido ideológico y político, pero en absoluto científico e histórico. Por si fuera poco, asume también con Engels la idea eurocéntrica de que «las ciencias naturales teóricas, si quieren seguir la historia del surgimiento y desarrollo de sus tesis generales actuales, estan obligadas a dirigirse a los griegos (Engels, 1987, 340-341).

...la trayectoria eurocéntrica clásica, consistente en afirmar que las matemáticas nacieron en Grecia, languidecieron durante mil años en la edad oscura o edad media, y volvieron a florecer con el renacer del pensamiento griego en la Italia renacentista...

Tesis que corrobora Ríbnikov al recurrir a una periodización de la historia de las matemáticas, tomada prestada de su compatriota Kolmogorov, de sesgo también netamente eurocéntrico: tras su nacimiento en Grecia durante los siglos VI y V a.n.e., se desarrolla el período de las matemáticas elementales, hasta el siglo XVI, en el Renacimiento, para continuar con el período de las matemáticas de las magnitudes variables, hasta mediados del siglo XIX y finalizar con el período actual de las matemáticas contemporáneas.

Pero, es más, defiende, en flagrante contradicción con sus presupuestos marxistas, tesis tan poco materialistas como cuando afirma que las teorías matemáticas preceden al método matemático, invirtiendo la relación existente entre teoría y praxis, o cuando habla de la llegada de la Edad Media, como si esta Edad llegase del cielo, o como cuando defiende que «lo nuevo» irresistiblemente vence, bastando con entender por «lo nuevo» lo que acabará venciendo; o, por último, cuando teoriza sobre la lucha encarnizada de «lo nuevo contra lo viejo», al referirse al desarrollo histórico de los conceptos matemáticos (Lizcano, 1993). Por otra parte, sigue insistiendo en la existencia de leyes objetivas del desarrollo de las matemáticas, sin mostrar cuáles son dichas leyes y cómo funcionan para predecir, por ejemplo, el devenir de la mate-

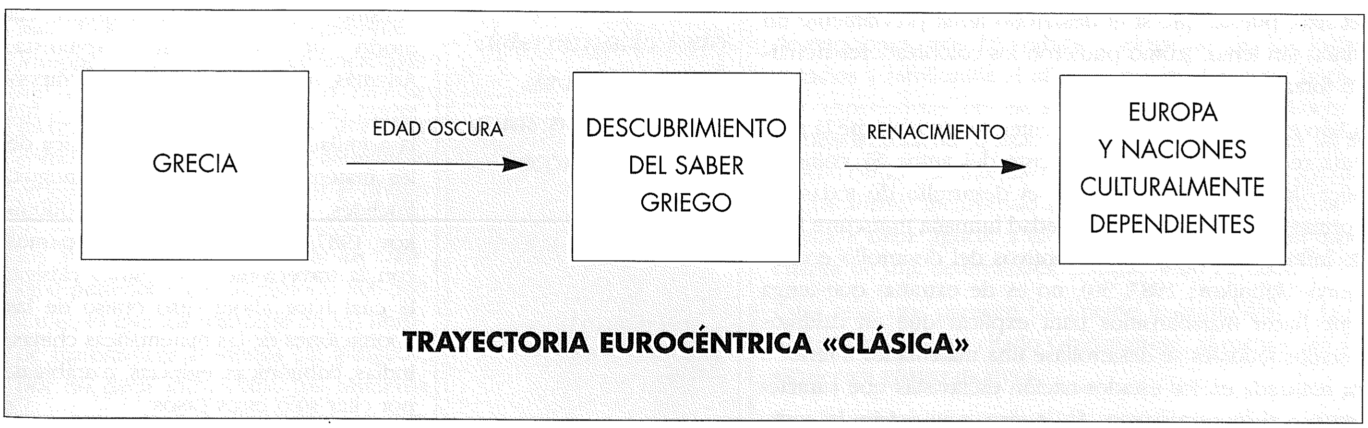


Gráfico 1

mática rusa contemporánea, además de referirse al heroísmo de los científicos, especialmente, cómo no, al de los científicos nacionales (los soviéticos, se sobreentiende, no los demás).

Veamos cómo utiliza el materialismo histórico para explicar el desarrollo de diferentes matemáticas en distintas culturas y civilizaciones. Afirma, por ejemplo, que «las causas de que la matemática de China (y como veremos más adelante también de la India) adquiera tales particularidades, radica en las condiciones socio-económicas de la vida en sociedad. Las condiciones fueron tales que estos Estados, en calidad de una de sus funciones fundamentales, estuvieron obligados a tomar para sí la organización de los trabajos sociales en las ramas de la irrigación, transporte y obras defensivas. Las preocupaciones constantes sobre el calendario y sobre la comunidad y el rigor de las instituciones religiosas acrecentaron esta orientación de los trabajos científicos. La opresión feudal y la presión de la religión determinaron el carácter lento y estancado del desarrollo de todas las ciencias, entre ellas de las matemáticas» (Ríbnikov, 1987, 38).

Nos podemos preguntar que si esto es cierto, por qué no lo es también para el caso de Babilonia o de Egipto, o si esas determinaciones explican la emergencia de los números negativos en la civilización china. Otro tanto ocurre cuando argumenta que en la India, hacia el comienzo de nuestra era, ya estaba constituido un sistema feudal desarrollado de organización de la sociedad. «La prolongada separación en castas de los grupos sociales de la población que determinó, a pesar del, a veces violento, curso de los acontecimientos políticos, el ritmo tan lento del desarrollo de la producción y la ciencia. Los colonizadores ingleses, franceses y portugueses, en el transcurso de los siglos, frenaron forzadamente el natural desarrollo de la producción, la ciencia y la cultura hindú. Sólo en nuestro tiempo transcurre un proceso de liberación nacional y elevación de la fuerzas productivas de la India» (Ríbnikov, 1987, 44), sólo que en esta ocasión riza el rizo, puesto que si el desarrollo tenía previamente un ritmo tan lento, ¿cómo pudieron los colonizadores frenarlo forzadamente aún más?

Claro está que todo se puede entender si se asume la postura reduccionista y economicista del autor. Si, como él dice, la historia enseña que «el desarrollo de todas las formas de actividad de la sociedad humana transcurre bajo la influencia de los únicos motivos del desarrollo económico» (Ríbnikov, 1987, 50), no es de extrañar que tenga que hacer malabarismos para explicar que en distintos estados feudales se desarrollase una matemática inferior a la realizada en los estados-nación esclavistas que caracterizaron el mundo griego. Ahí radica, a mi juicio, la endeblez de toda su argumentación, pues está claro que no existe una correlación positiva perfecta entre el desarrollo económico y el desarrollo matemático de una cultura o de un pueblo.

...está claro que no existe una correlación positiva perfecta entre el desarrollo económico y el desarrollo matemático de una cultura o de un pueblo.

Por último, su aceptación de la trayectoria eurocéntrica clásica se pone de manifiesto nuevamente en citas como las dos que siguen a continuación: «sobre los cambios que ocurrieron en las matemáticas en este período de tiempo –se refiere a la época posterior a Euclides, Arquímedes y Apolonio–, podemos juzgar por las obras que han llegado hasta nosotros. Estas últimas muestran, ante todo, que bruscamente disminuyó y despues se suspendió totalmente el proceso de formación de teorías matemáticas» (Ríbnikov, 1987, 99); «las contradicciones internas del desarrollo de la matemática en el período de su reforzamiento coincidieron con las condiciones sociopolíticas desfavorables de la época de desintegración de la estructura esclavista, producida en virtud de los cambios de la forma de producción. Asi, los factores económicos de finales de la formación económica esclavista resultaron en última instancia la causa determinante de la supresión temporal del desarrollo teórico y práctico de las matemáticas. Para un nuevo ascenso de la ciencia matemática fue necesario un nuevo ascenso de las fuerzas productivas de la sociedad humana. En Europa y en la región de la cuenca del Mediterráneo este nuevo en principio ascenso apareció solo muchos siglos después, comenzando con la época del llamado Renacimiento, época de finales del feudalismo y comienzo del desarrollo del modo de producción capitalista. Además, una de las fuentes mas importantes de nuevas ideas matemáticas fue la asimilación de la herencia clásica de los matemáticos de la Grecia Antigua, Euclides, Arquímedes y otros» (Ríbnikov, 1987, 106). De nuevo nos topamos con la trayectoria eurocéntrica clásica, la cual hace ahora caso omiso de las aportaciones de las matemáticas chinas, indias, babilónicas, egipcias, o arábigas, por citar sólo estos casos.

A nuestro juicio, este autor, junto con muchos otros, confunde el hecho cierto de que, históricamente hablando, las técnicas son los gérmenes inmediatos de las ciencias (son, por decirlo de otra manera, los precedentes genealógicos de las mismas que sólo acotan y sistematizan un campo de conocimientos, previamente roturado por la actividad artesanal, puesto que la geometría viene detrás de la agrimensura, la aritmética detrás del comercio y la administración bancaria de los sumerios, etc.), con el hecho de que las matemáticas estén determinadas unívocamente por las condiciones materiales de los diferentes pueblos, algo que la historia no pone, ni mucho menos, de manifiesto. Una cosa es que la tesis marxista de que toda ciencia halla su inspiración en alguna práctica artesanal anterior y ha sido generada por las necesidades materiales de la sociedad siga pareciendo básicamente correcta, y otra es, como decíamos anteriormente, pretender determinarlo todo de acuerdo a las motivaciones económicas.

Una cosa es que la tesis marxista de que toda ciencia halla su inspiración en alguna práctica artesanal anterior y ha sido generada por las necesidades materiales de la sociedad siga pareciendo básicamente correcta, y otra es, como decíamos anteriormente, pretender determinarlo todo de acuerdo a las motivaciones económicas.

Las historias de las matematicas desde una perspectiva occidental no marxista

Comencemos con la obra de un historiador de comienzos de siglo, Rouse Ball. Según este autor, «la historia de las matematicas no puede remontarse con certeza a ninguna escuela o periodo anterior a los griegos jónicos» (Rouse Ball, 1908, 1, citado por Gheverghese Joseph, 28). Afirmación que constituye un resumen razonable de lo que se reconocía popularmente y se aceptaba como los orígenes de las matemáticas en esa época, si exceptuamos el olvido de las matemáticas indias contenidos en los *Subalsutras* (*las reglas de las cuerdas*) pertenecientes al período 800-500 a.n.e., lo que los convierte en los libros de matemáticas al menos tan antiguos, por no decir más, como los primeros que conocemos de los griegos, y que habían sido traducidos con anterioridad, en 1875, por Thibaut.

Las aportaciones babilónicas, egipcias, chinas, precolombinas, indias posteriores y del mundo árabe, fueron apareciendo posteriormente, por lo que no es de extrañar que no las considerase. Pero sí se conocían ya textos como el de Vedanga Jyotisa (500 a.n.e.) que cito a continuación y aporta contenido al título del libro ya citado de Gheverghese: «Como la cresta del pavo real, como una gema en la cabeza de una serpiente, así son las matemáticas: la cúspide de todos los conocimientos».

Lo que sí nos llama la atención es que más recientemente, en la década de los cincuenta, destacados historiadores, como Morris Kline, continuasen afirmando cosas como las siguientes: «[Los matemáticos] finalmente se aseguraron un nuevo dominio sobre la vida en el terreno altamente favorable de Grecia y crecieron con fuerza durante un corto período. Con el declive de la civilización griega la planta permaneció en estado de latencia durante 1000 años hasta que la planta fue transportada a Europa propiamente y una vez más implantada en suelo fértil (Kline, 1953, 9-10). Desde luego, no puede haber mejor resumen, expresado metafóricamente y con categorías biológicas (nacimiento, crecimiento, declive, fertilidad,...), de lo que denominamos trayectoria eurocéntrica clásica. En su posterior obra, ya en los sesenta, dedica sólo 3 de la 700 páginas de su obra *Mathematics, A Cultural Approach* a las matemáticas egipcias y babilónicas, e insiste en devaluar sus aportaciones. Véase sino esta comparación que establece: «las matemáticas de los egipcios y babilonios son garabatos de niños que están aprendiendo frente a las grandes obras literarias» (Kline, 14).

Bien es cierto que, en su estudio más reciente sobre el pensamiento matemático desde la antiguedad a nuestros días, Kline se digna a incluir un capítulo para cada una de esas civilizaciones (2 de un total de 33, dedicando menos de 30 páginas a las mismas, sobre un total de más de 1000), pero insiste en sus infundadas comparaciones: «los egipcios y los babilonios se nos presentan como rudos albañiles, mientras los griegos serían magníficos arquitectos» (Kline, 1992, 46), descalificando, por otra parte, las descripciones más favorables y elogiosas de los logros egipcios y babilonios al afirmar que «suelen estar hechas por especialistas en estas culturas, que se convierten, inconscientemente quizás, en devotos admiradores de su propio campo de interés» (ídem), sin darse cuenta de que lo que afirma, incluyendo su recurso al inconsciente, se le puede y debe aplicar a él mismo, dado que es un especialista de una determinada cultura, la occidental.

Estas tesis nos parecen totalmente inaceptables, al igual que al tantas veces citado Gheverghese, al menos por los siguientes cuatro motivos:

1. En primer lugar por el reconocimiento pleno, expresado por los mismos griegos, de su deuda intelectual con los egipcios. No sólo historiadores como Hero-

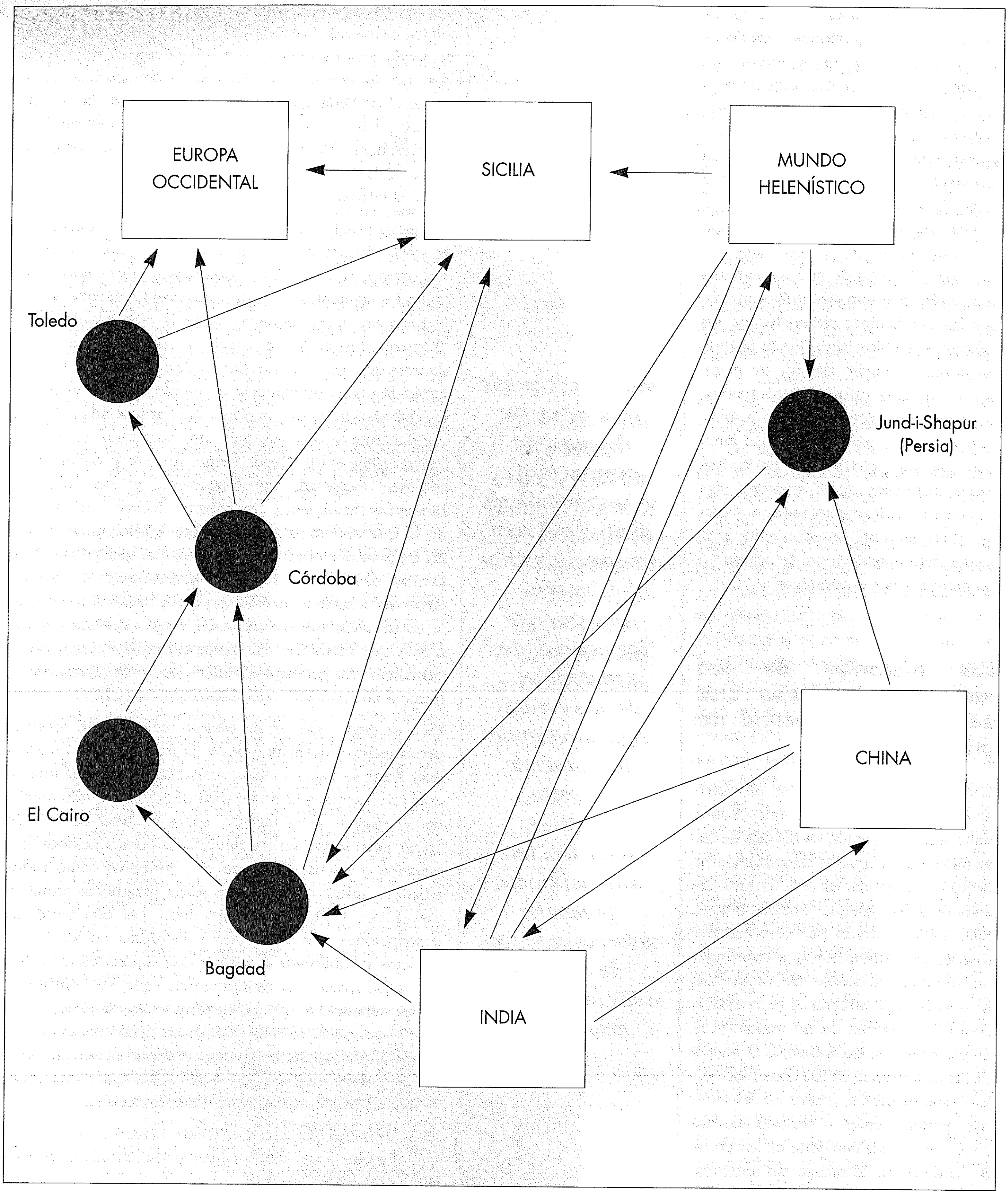

EUROPA OCCIDENTAL
SICILIA
MUNDO HELENÍSTICO
Toledo
Jund-i-Shapur (Persia)
Córdoba
CHINA
El Cairo
Bagdad
INDIA

Gráfico 2

doto (450 a.n.e.) o Proclo (400 a.n.e.) reconocieron dicha deuda, sino que incluso tanto Platón como Aristóteles así lo hicieron. El primero nos cuenta en su diálogo *Fedro*: «Pues bien, oí que había por Náucratis, en Egipto, uno de los antiguos dioses del lugar al que, por cierto, está consagrado el pájaro que llaman Ibis. El nombre de aquella divinidad era el de Theuth. Fue éste quien, primero, descubrió el número y el cálculo, y también la geometría y la astronomía, y además el juego de damas y el de dados y, sobre todo, la escritura» (citado por Bochner, 1991, 35). Por su parte, Aristóteles, en el capitulo 1 del libro I de la *Metafísica*, nos dice que las ciencias o artes matemáticas (*mathematikai technai*) fueron creadas por los egipcios, explicando además el motivo: contaban con una clase sacerdotal ociosa que disponía del suficiente tiempo libre como para poder dedicarse a tales investigaciones. Al margen del carácter mítico de las explicaciones de Platón o de la ingenuidad del planteamiento de Aristóteles con su teoría de la clase ociosa, no cabe ninguna duda del hecho de que los griegos mismos reconocían ser herederos intelectuales de los egipcios, al menos en el ámbito de las matemáticas.

2. En segundo lugar, el esfuerzo conjunto de arqueólogos y traductores ha puesto de manifiesto, a lo largo del presente siglo, el alto nivel de las matemáticas practicadas en las tablillas mesopotámicas y en los papiros egipcios, como cualquier persona que las estudie detenidamente puede apreciar.

3. En tercer lugar, el olvido de la contribución árabe al desarrollo intelectual de Europa, en general, y de las matemáticas, en particular, es otro grave error de la visión «clásica». Debemos a los árabes, y se puede apreciar la difusión de sus aportaciones en el esquema referido a la trayectoria alternativa de la Edad Oscura, que presentamos en el gráfico 2, el haber unido la técnica de la medida, desarrollada desde sus raíces egipcias hasta su forma final en manos de los alejandrinos, y el notable instrumento de cálculo, nuestro sistema de numeración que nació en la India, así como el suplementar estas ramas con un lenguaje sistemático y coherente de cálculo al que le aportaron nombre: el álgebra (*Al-jabr*, equivalente en español a «restauración», término incluido en el título de uno de los libros del gran matemático del siglo IX Al Khwarizmi). Negar su aportación, como veremos más adelante que hace también Jean Dieudonné, supone ponerse la venda eurocéntrica ante los ojos, venda que impide conocer con propiedad y rigor histórico el desarrollo multicultural de las disciplinas matemáticas.

Al margen del carácter mítico de las explicaciones de Platón o de la ingenuidad del planteamiento de Aristóteles con su teoría de la clase ociosa, no cabe ninguna duda del hecho de que los griegos mismos reconocían ser herederos intelectuales de los egipcios, al menos en el ámbito de las matemáticas.

4. Por último, y en cuarto lugar, es necesario reconocer algo que frecuentemente se olvida y se genera confusión cuando se habla de la cultura o la matemática griega. Nos referimos al hecho de que existe un período clásico de dicha civilización (600-300 a.n.e.) y un período alejandrino (300 a.n.e.- 400 n.e.), y que, por lo tanto, no podemos considerar simplemente como griegos a matemáticos como Euclides, Arquímedes o Apolonio. Es cierto que escribían en griego, pero trabajaron (algunos incluso nacieron allí) especialmente en Alejandría, en Egipto, en su famosa biblioteca, y no en las academias de las *polis* griegas. Convendría al menos modificar la trayectoria eurocéntrica clásica por otra, aunque aún inexacta, que presento en el gráfico 3, más próxima a la realidad, y que empieza a ser asumida en diferentes tratados históricos. No es posible negar que Egipto pertenece al continente africano, ni que los yorubas de Etiopía tenían sus propias matemáticas, aunque rudimentarias; cuestiones que se suelen obviar, quizás por prejuicios de tipo colonialista o racistas.

Dejemos al norteamericano Morris Kline con su visión sesgada de la historia de las matemáticas, y pasemos a ver cómo entiende Jean Dieudonné dicha historia. Para ello, voy a basarme en su reciente estudio (hace menos de diez años que se publicó el original en francés) titulado: *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. En dicho trabajo vuelve a defenderse con fuerza la tesis eurocéntrica clásica, aunque ya no puede evitar el citar las aportaciones precedentes a las griegas. Por eso afirma que: «los textos que nos han llegado de las primeras civilizaciones orientales, de Egipto o de Babilonia, son demasiado incompletos como para permitirnos seguir la manera en que se constituyeron una aritmética y una geometría rudimentarias; ya aparecen muy elaboradas a partir del II milenio antes de nuestra era. Evidentemente, no se trata de especulaciones abstractas, sino de recetas, trans-

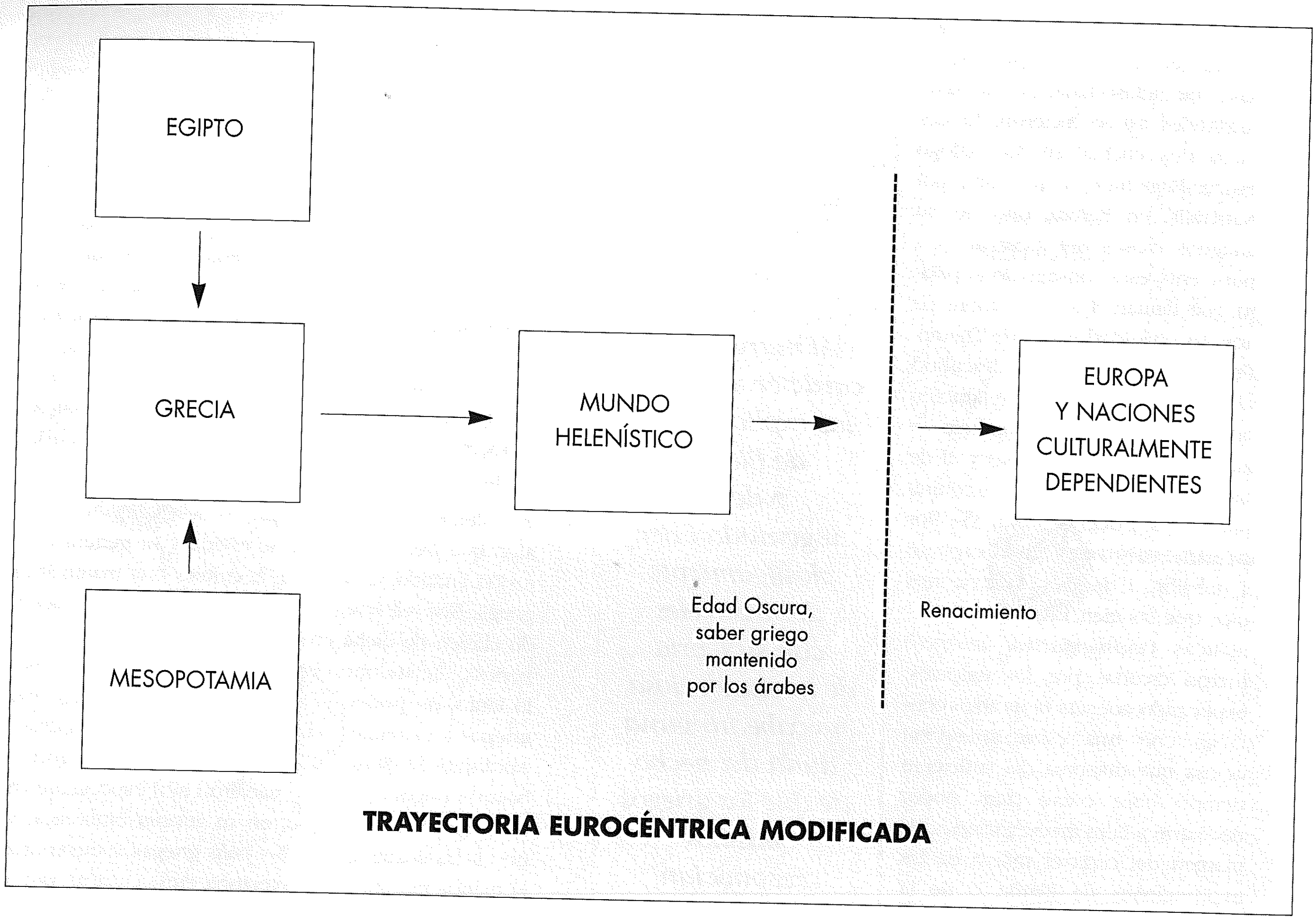


Gráfico 3

mitidas por castas de escribas especializados, y destinadas a solucionar los problemas prácticos que plantea una sociedad agraria muy estructurada: intercambios, censos, litigios, repartos» (Dieudonné, 1987, 52).

Pues bien, veamos si, como afirma, no se trata de especulaciones abstractas; y para ello, nada mejor que recurrir a los ejemplos que él mismo incluye en su libro. En el mismo, un poco más adelante, resume así las aportaciones babilónicas: «Digamos simplemente que, en aritmética, estos ponen de manifiesto un conocimiento de las fracciones, de las progresiones aritméticas, quizás de las progresiones geométricas, así como de la regla de tres. Los babilonios daban incluso la solución a ciertos problemas equivalentes a una ecuación de segundo grado; por ejemplo, una tableta muestra la figura de un cuadrado con el texto siguiente: "he añadido el lado de un cuadrado a su superficie y encuentro 3/4, ¿cual es el lado?". Se trata de la ecuación que escribimos

$$x^2 + x = 3/4$$

y que el escriba resuelve del mismo modo que lo hacemos nosotros: suma 1/4 a los dos miembros y encuentra que el cuadrado de $x + 1/2$ es 1, de lo que deduce que $x = 1/2$» (Dieudonné, 1987, 53).

Además de olvidarse, curiosamente, de la existencia en Mesopotamia de un sistema de numeración sexagesimal, mucho más potente que el sistema alfanumérico griego, desde luego, acaba él mismo contradiciéndose, pues si del ejemplo no se deduce que sí eran capaces de realizar especulaciones abstractas en absoluto dependientes de aplicaciones prácticas, no sé qué otra cosa se puede deducir; ¿qué sentido práctico puede tener añadir el lado de un cuadrado a su área e igualarlo a 3/4? ¿no están refiriéndose a un cuadrado y un lado cualquiera, y por lo tanto a una abstracción?

Más adelante se plantea el tema de las demostraciones, y cita a Aristóteles para afirmar con él que: «Las investigaciones de los matemáticos se refieren a cosas adquiridas por abstracción, pues las estudian después de haber eliminado todas las cualidades sensibles, tales como el peso, la ligereza, la dureza, etc., y solo conservan la cantidad y la continuidad y esta última puede concebirse de una, de dos o de tres maneras» (Aristóteles, *La República*, citado por Dieudonné, 1987, 58). Pues bien, ¿no es esto precisamente lo que hacen los babilonios en problemas como el citado? ¿Acaso no excluyen todas las cualidades sensibles de los cuadrados?

También afirma, con posterioridad, que los primeros textos históricos que contienen demostraciones son los de Platón y Aristóteles, explicando que el primero, en el diálogo *Menón*, cuenta cómo Sócrates quiere hacer descubrir a un joven esclavo inculto el modo de construir un cuadrado cuya área sea doble de la de un cuadrado dado, texto que, por cierto, se constituye por otra parte, sin incurrir en esta ocasión en una visión eurocéntrica, en el primer estudio conocido de análisis didáctico de las matemáticas; a su vez, en el segundo, Aristóteles se refiere a una demostración que incorpora la misma figura del triángulo rectángulo isósceles necesaria para demostrar el anterior teorema y constituye también, por la suya, el primer ejemplo conocido, en este caso, de razonamiento por reducción al absurdo, así como de una afirmación de imposibilidad (la conocida irracionalidad de la raíz cuadrada de 2).

Ahora bien, en ambos casos recurren a figuras geométricas trazadas en la arena, lo que le debería llevar, por coherencia con sus planteamientos epistemológicos, a dudar del verdadero carácter demostrativo de tales reflexiones. Algo que él mismo reconoce al comentar la posterior obra de Euclides de Alejandría. Como el propio Dieudonné explica: «a partir de estas definiciones, propuestas y nociones comunes, Euclides pretende demostrar la sucesión de sus teoremas. No deja de sorprendernos un poco que cada uno vaya acompañado de una figura. Podríamos pensar que se trata simplemente de una ayuda para seguir la demostración mas fácilmente; se ha dicho que el arte de la geometría consiste en razonar bien sobre figuras falsas. Enseguida nos damos cuenta de que algunas de estas figuras desempeñan un papel mucho mas esencial, que recuerda bastante el modo de hacer de los geómetras indios o chinos, quienes se contentan con decir "mira" por toda demostración, despues de trazar la figura» (Dieudonné, 1987, 60).

...si los procedimientos demostrativos tanto de Platón, como de Aristóteles, como de Euclides, recuerdan el modo de hacer geométrico de los indios o los chinos, ¿por qué atribuir el método demostrativo en exclusiva a los griegos, sean éstos clásicos o alejandrinos? De nuevo nos encontramos con la venda eurocéntrica.

Pues bien, si los procedimientos demostrativos tanto de Platón, como de Aristóteles, como de Euclides, recuerdan el modo de hacer geométrico de los indios o los chinos, ¿por qué atribuir el método demostrativo en exclusiva a los griegos, sean éstos clásicos o alejandrinos? De nuevo nos encontramos con la venda eurocéntrica.

Por último, para finalizar con la crítica del texto de Dieudonné, pasemos a ver cuál es su concepción de la evolución del álgebra. A pesar de haberle otorgado su propio nombre, como ya dijimos, la aportación arábiga es absolutamente distorsionada, devaluada y casi ignorada por este autor. Y si no fíjense en esta afirmación: «el álgebra tardó unos 13 siglos después de Diofanto en convertirse en lo que ahora conocemos» (Dieudonné, 1987 74). Si Diofanto vivió aproximadamente en el siglo IV de nuestra era, eso quiere decir que hasta el siglo XVI, hasta la obra de los algebristas italianos Luca Pacioli, Bombelli, Cardano o Tartaglia, el álgebra apenas avanzó, tesis absolutamente impresentable en términos históricos por su desprecio total a la aportación de los algebristas árabes.

Para terminar, una petición y una cita. La petición consiste, en primer lugar, en reivindicar que se procure averiguar, cuando nos enfrentemos a cualquier texto de historia de las matemáticas, cuál es la fundamentación epistemológica asumida por su autor, cuál es su concepción explícita o implícita de las matemáticas; en segundo lugar, que se rastreen los prejuicios eurocéntricos de dicho autor o autora para, por último, y una vez quitada la venda de los ojos, poder incorporar a la enseñanza una visión histórica favorecedora de una verdadera educación intercultural, no sesgada, por lo tanto por prejuicios colonizadores y racistas.

La cita es, de nuevo, y en homenaje a su autor, del citado Georges Gheverghese Joseph. Dice asi: «Y, sin embargo, si hay un solo objeto universal, uno que trascienda las barreras linguísticas, nacionales y culturales, y es aceptable para todos y no es negado por ninguno, es nuestro actual conjunto de números. Desde sus remotos comienzos en la India, su difusión gradual en todas las direcciones permanece como el gran episodio romántico en la historia de las matemáticas. Es de esperar que este episodio, junto con otros logros matemáticos no europeos destacados en este libro, ayudará a ampliar nuestros horizontes y a romper la estrechez de miras que subyace bajo la percepcion eurocéntrica del desarrollo del conocimiento matemático» (Gheverghese, 1997, 467).

Bibliografía utilizada

ALEKSANDROV, A. D., A. N. KOLMOGOROV, M. A. LAURENTIEV y otros (1973): *La matemática, su contenido, método y significado*, Alianza, Madrid.

ARGÜELLES, J. (1989): H*istoria de la Matemática*, Akal. Madrid.

BERNAL, J. B. (1976): *Historia social de la ciencia*, Península, Barcelona.

BOCHNER, S. (1991): *El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia*, Alianza, Madrid.

BOURBAKI, N. (1962): «La arquitectura de las matemáticas», en Le LIONNAIS y colaboradores (eds.), *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires, 36-49.

BOURBAKI, N. (1972): *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

BUENO, G. (1992): *Teoría del cierre categorial. Volumen I*, Pentalfa, Oviedo.

CAMPLIGIO, A. y E. V. (1992): *De los dedos a la calculadora. La evolución de los sistemas de cálculo*, Paidós, Barcelona.

COLERUS, E. (1973): *Breve historia de las matemáticas*, Doncel, Madrid.

COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las Matemáticas*, Siglo XXI, Madrid.

DAVIS, P. J. y R. HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor-MEC, Barcelona.

DE LORENZO, J. (1977): *La matemática y el problema de su historia*, Tecnos, Madrid.

DIEUDONNÉ, J. (1987): *En honor del espiritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Universidad, Madrid.

DUNHAM, W. (1995): *El Universo de las Matemáticas*, Pirámide, Madrid.

ENGELS, F. (1987): *Antiduhring*, Política, Moscú.

FRIEDRICH, K. O. (1967): *De Pitágoras a Einstein*, Norma, Colombia.

GHEVERGHESE JOSEPH, G. (1996): *La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raices no europeas*, Pirámide, Madrid.

GORMAN, P. (1988): *Pitágoras*, Crítica, Barcelona.

GRATTAN-GUINNESS, I. (comp.) (1984): *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*, Alianza Universidad, Madrid.

HARDY, G. H. (1981): *Autojustificación de un matemático*, Ariel, Barcelona.

José Joaquín Arrieta
Facultad de Educación
Universidad de Oviedo
Sociedad Asturiana
de Educación Matemática
«Agustín de Pedrayes»

HERNÁNDEZ, J. (ed.) (1978): *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza, Madrid.

HOFMANN, J. E. (1968): *Historia de La matemática*, Revolucionaria, La Habana.

HOGBEN, L. (1941): *La matemática en la vida del hombre*, Iberia-Joaquín Gil, Barcelona.

IFRAH, G. (1987): *Las Cifras: Historia de una gran invención*, Alianza, Madrid.

KAC, M. y S. M. ULAM (1969): *Matemáticas y Lógica*, Monte Avila Editores, Caracas.

KLINE, M. (ed.) (1953): *Mathematics in Western Culture*, Oxford, Nueva York.

KLINE, M. (1985): *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, Madrid.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, 3 vols., Alianza Universidad, Madrid.

LIONNAIS, Le (ed.) (1962): *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Editorial Universitaria, Buenos Aires.

LIZCANO, E. (1993): *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia*, Gedisa, Barcelona.

MARX, C. y F. ENGELS (1975): *Cartas sobre las ciencias de la naturaleza y las matemáticas*, Anagrama, Barcelona.

NEWMAN, J. R. (ed.). (1968): *SIGMA. El mundo de las matemáticas*, 6 vols., Grijalbo, Barcelona.

PERERO, M. (1994): *Historia e historias de matemáticas*, Grupo Editorial Iberoamérica, México.

PLA I CARRERA, J. (1984): *Las matemáticas. Historia de sus conceptos*, Montesinos, Barcelona.

RADICE, L. L. (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona.

RAYMOND, P. (1976): *La historia y las ciencias*, Anagrama, Barcelona.

REY PASTOR, J. y J. BABINI (1997): *Historia de la Matemática*, Gedisa, Barcelona.

RÍBNIKOV, K. (1987): *Historia de las Matemáticas*, Mir, Moscú.

SANTALÓ, L. A. (1994): *La matemática: una filosofía y una técnica*, Ariel, Barcelona.

SHEVCHENKO, I. N. (1979): «Elements of the historical approach in teaching mathematics», en J. W. WILSON (eds.), *Soviet studies en the psychology of learning and teaching mathematics*, University of Chicago, Chicago, 91-139.

WILDER, R. L. (1973): *Evolution of Mathematical Concepts*, Open University, London.

SUMA 27
febrero 1998, pp. 81-90

Las transparencias participativas en la didáctica de las matemáticas

Jose M. Galdón Canavese
Cristina Ramírez Rigo

IDEAS Y RECURSOS

Las transparencias para retroproyección creadas con técnicas que hagan participar y motivar a los alumnos constituyen un recurso muy considerable en la didáctica de las matemáticas. Su uso sistemático requiere un acondicionamiento del aula, que se puede realizar en todos los centros. Se presenta un ejemplo de la construcción de una función a trozos con su guía didáctica.

EN TODA exposición, desarrollo, demostración, o técnicas para resolver un problema, se utiliza una cadena de implicaciones, una presentación –paso a paso–, que configura el concepto que hay que tratar. Es la propia naturaleza de la asignatura la que obliga al empleo de esta metodología. Pensemos en cualquier clase que impartimos de matemáticas y podremos desglosar, en sucesivas etapas, la incorporación de información, propiedades o implicaciones que van aclarando y resolviendo la cuestión tratada.

Conociendo las características del retroproyector, (Mallas, 1979), podemos plasmar todas esas sucesivas etapas y pasos en un soporte material: las transparencias participativas.

Transparencias participativas

Este modo de proceder en matemáticas se adapta perfectamente a la finalidad para la que fue inventado, allá por los años cuarenta, el proyector de gran formato. Se trataba de poder dar información a través de células superponibles, que constituirían al final el concepto y que, a su vez, se pudiera añadir o prescindir de alguna de ellas, con una manipulación rápida.

De esta manera, se podría preparar con antelación la explicación de la clase, realizar buenos gráficos de ayuda, utilizar los colores con propiedad, y estar más suelto en el propio acto de la clase, para supervisar el trabajo que realizan los alumnos; es decir, tener un «software» elaborado con este propósito.

Las transparencias participativas (1990) elaboradas, con técnica de *Superposiciones, Entramados* y *Monitor Móvil,* por el profesor con su propia maestría metodológica en el enfoque y desarrollo del tópico en cuestión, forman un auténtico material audiovisual de apoyo.

Superposiciones o células de información básica y concatenadas con las restantes.

Entramados o compartimentos estancos que separan las diferentes etapas de construcción del tópico.

Monitor Móvil de ayuda rápida en nuevas situaciones de giros y traslaciones.

La participación del alumno queda de esta forma potenciada, no ya por el propio tirón del medio audiovisual (MAV) utilizado, sino, fundamentalmente, por el ofrecimiento constante de pistas, insinuaciones y ayudas gráficas que retroalimentan la motivación.

Sistematización

Una de las conclusiones del I Seminario Internacional sobre Medios Audiovisuales en el Sistema Educativo, celebrado en Madrid, en 1981, por el MEC, fue que el uso esporádico y casi anecdótico de los medios audiovisuales es contraproducente.

La utilización de las transparencias en clase la hacemos de forma continua. Desde el curso escolar 1980-81 he ido creando transparencias de diversos tópicos de nuestra asignatura, que hasta la fecha forman una colección de unas 800, que abarcan los contenidos del BUP, COU, la ESO y el Bachillerato de la LOGSE, en temas de Álgebra, Trigonometría, Iniciación al Análisis, Cálculo Infinitesimal, Cálculo Integral, Complejos, Cónicas, Álgebra Matricial, Geometría, Estadística, Probabilidad, Sistemas Lineales, Programación Lineal y Curvas y Superficies.

Este uso continuo y a diario en clase requiere disponer de aulas preparadas, en las que estén fijos y bien posicionados el hardware que hay que utilizar (G. Herrera, 1981). De acuerdo con nuestra experiencia, de más de diez años de utilización sistemática del retroproyector, se trata de una condición necesaria. La configuración de espacios en los centros no tiene en cuenta esta condición, que de cumplirse, incitaría al profesorado a la creación y uso de material de paso (Galdón, 1988). Por tanto, se hace imprescindible el acondicionamiento de aulas, que estén preparadas para el uso sistemático de MAV por el profesorado que desee aplicar un material que ha elaborado, y con fines de ayudar a la motivación, comprensión y refuerzo de los conceptos a explicar.

Acondicionamiento de las aulas

Se trata de disponer de algunas aulas en las que permanezcan de forma estacionaria y óptimamente posicionados los aparatos a utilizar. L.os alumnos acudirán a ella, al igual que lo hacen a la clase de Dibujo, Informática, Tecnología, Laboratorios, Plástica y Educación Física, que disponen de materiales adecuados.

Desde el curso escolar 1984-85 y en diferentes institutos he realizado este acondicionamiento, con unos costes perfectamente asumibles. El boceto muestra los elementos de que consta. Se ha realizado en los siguientes institutos: Guanarteme de Las Palmas de Gran Canaria (curso 1984-85), Arturo Soria de Madrid (cursos 1985-88); y Carlos Bousoño de Madrid (cursos 1989-97) donde sigue disponible.

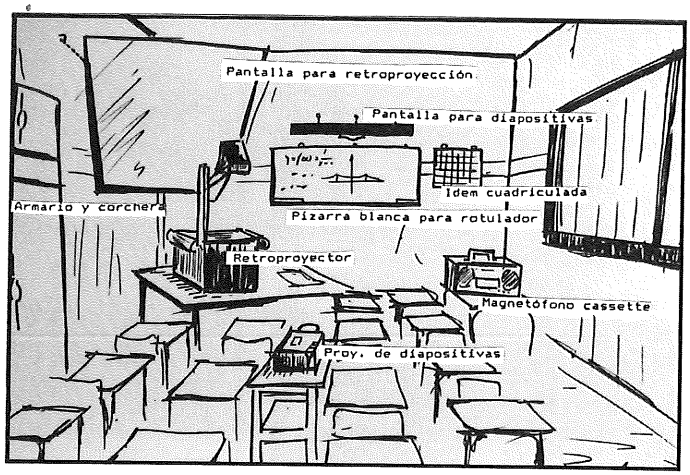


Figura 1

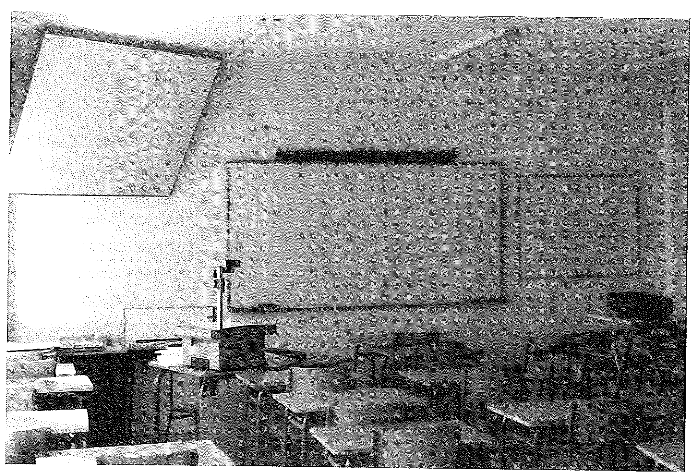


Figura 2

Construcción de una función a trozos como ejemplo de transparencia participativa

Esta transparencia consta de *Base* (B) y de 10 *Superposiciones* (Sl, S2,..., S10).

Base (B)

Se presenta la función definida a trozos, en este caso cinco entre rectas, parábolas e hipérbolas[1]. Aparece el sistema de coordenadas, donde los alumnos tratarán de representar la función dada.

Superposición 1 (S_1)

Esta célula define, marca, señaliza[2], centrando al alumno en la región, zona o intervalo donde tiene que construir el primer trozo de la función, y = f(x) = 2.

Aparece también marcado el intervalo en la propia función. Se recalca la importancia de la frontera; que el primer intervalo es abierto por la derecha.

Superposición 2 (S_2)

Una vez que los alumnos han representado en la zona marcada, $(-\infty, -4)$, se procede con esta superposición a mostrarla y dar los comentarios oportunos, corregir errores, etc. Se recalca de nuevo la importancia de lo que ocurre en $x = -4$ y el porqué del agujero que aparece y su significado[3]. Se pregunta acerca de la siguiente zona y tipo de intervalo. Quitamos las superposiciones S_1 y S_2.

Superposición 3 (S_3)

Esta célula superponible hace aparecer la zona donde los alumnos han de construir un trozo de parábola; esta la expresamos en la forma de traslación para que localicen rápidamente el vértice[4]. Aparece también señalizada en la función dada, el intervalo donde tienen que representarla. Se recuerdan los elementos de la parábola.

Superposición 4 (S_4)

Dando un tiempo prudencial de trabajo a los alumnos, se muestra esta célula; aparece el trozo de parábola. Se hacen comentarios acerca del porqué hay agujero en (0, 3) y no lo hay en (–4, 3). ¿Y qué ocurre concretamente en la primera frontera, y en sus proximidades? He aquí la gran ayuda que nos dan las transparencias construidas con técnica de superposiciones. Ahora podemos mostrar el despliegue de todas las células anteriores juntas, $B\text{-}S_1\text{-}S_2\text{-}S_3\text{-}S_4$.

De esta manera vamos preparando para la introducción a los límites laterales. También aprovechamos para preguntar por el calculo de f(–4), el valor de una función en un punto, y el trozo al que tenemos que acudir. Insistimos en el valor que toma una función en un punto, y lo que ocurre en sus proximidades. Prescindimos de las superposiciones anteriores.

Superposición 5 (S_5)

Previa pregunta sobre el siguiente intervalo, lo mostramos en esta superposición; ¿es abierto? ¿Qué tipo de función debemos construir en él?

Superposición 6 (S_6)

Damos la solución. Se comenta el dominio en este intervalo y la definición de f(2). Podemos hacer uso de todas las superposiciones anteriores para recalcar definiciones en puntos, lateralidades, crecimientos, etc, con $B\text{-}S_1\text{-}S_6$. ¿Podemos representar esta gráfica, por ahora, sin levantar el lápiz del papel? ¿Que ocurre en x = –4, x = 0, x = 2? Son numerosas las preguntas que se pueden realizar para repaso y refuerzo. Quitamos todas las superposiciones.

Superposición 7 (S_7)

Se muestra la zona donde han de actuar. ¿Es abierto o cerrado el intervalo? ¿Que tipo de función hemos de construir en él?

Superposición 8 (S_8)

Ofrecemos la solución. Comentamos la pendiente, su signo, y lo que ocurre en las fronteras. Podemos utilizar todas las superposiciones anteriores para repaso, sedimentación de conceptos, etc. Quitamos de S_1 a S_8.

Superposición 9 (S_9)

Es la ultima región en la que tienen que representar y = 2.

Superposición 10 (S_{10})

Aparece la recta en cuestión en el abierto $(5, \infty)$. ¿Está definida en x = 5? Ahora podemos enseñar la función que nos pidieron representar $B\text{-}S_1\text{-}S_{10}$. Aquí aparece la gráfica con fondo de los distintos intervalos. Las preguntas las centramos en las fronteras.

Si queremos presentar la gráfica sin el marcaje de las zonas, quitaremos todas las superposiciones que muestran esas regiones, dejando $S_2\text{-}S_4\text{-}S_6\text{-}S_8\text{-}S_{10}$. A su vez podemos visualizar solamente los diferentes intervalos, basta con dejar las superposiciones impares.

1 Ya se ha explicado mediante otras transparencias las funciones elementales rectas, parábolas e hipérbolas.

2 En la transparencia vienen señalizadas con diferentes colores. Por imposibilidad de impresión en colores, los sustituimos por diferentes rayados y punteos.

3 Nuestra intención es también preparatoria para el límite.

4 Anteriormente se ha explicado con transparencias provistas de monitor móvil, las localizaciones del vértice.

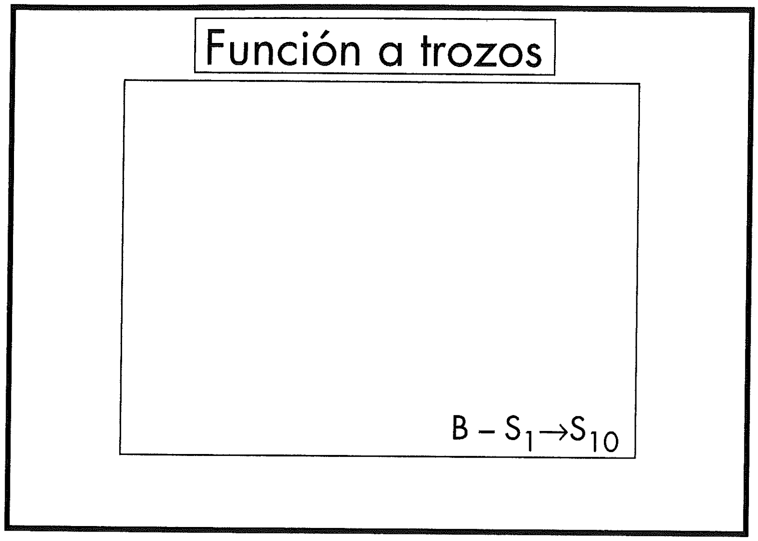


Figura 1

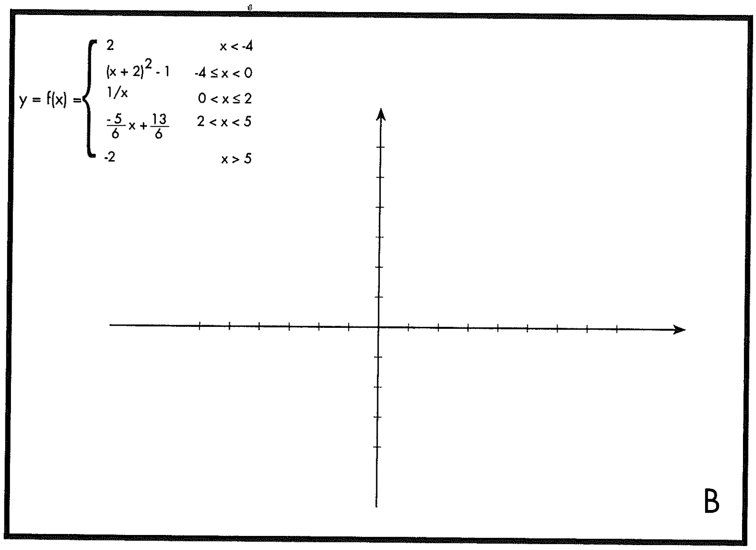


Figura 2

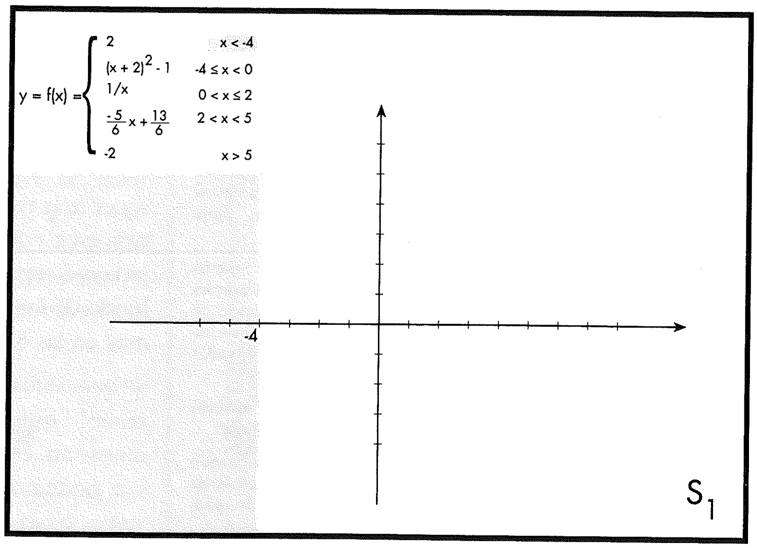


Figura 3

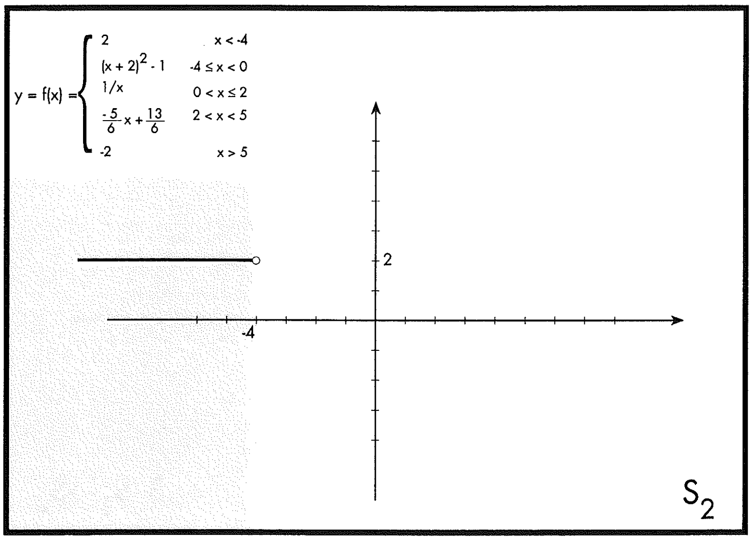


Figura 4

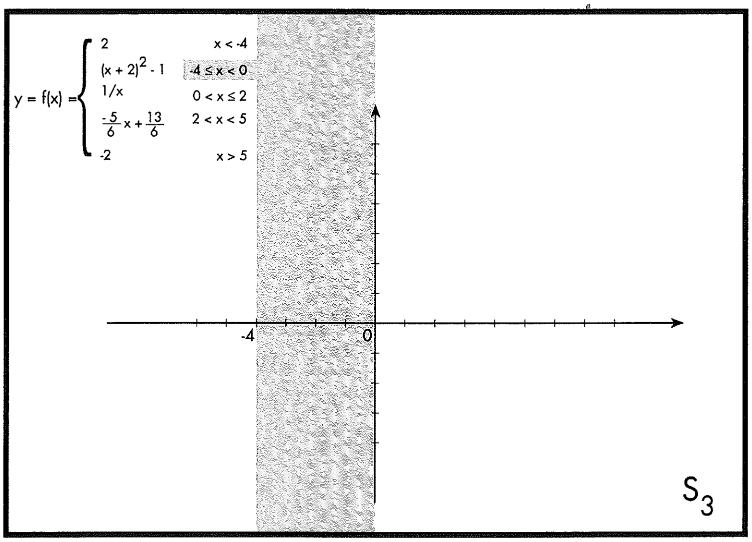


Figura 5

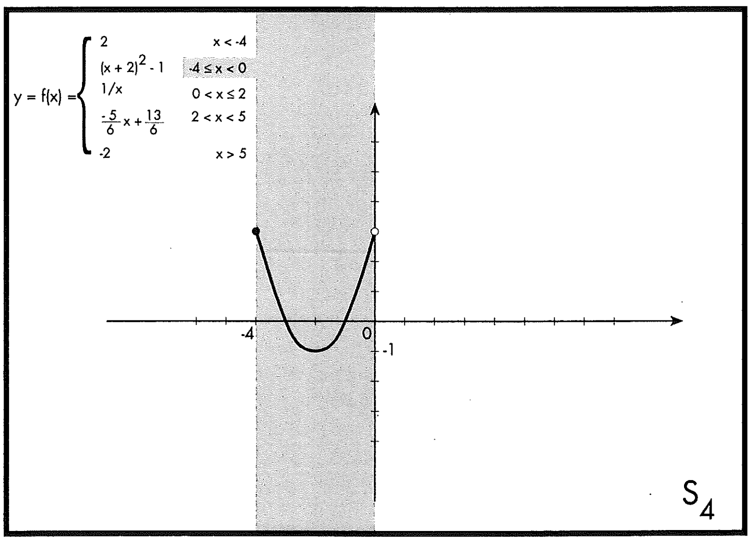


Figura 6

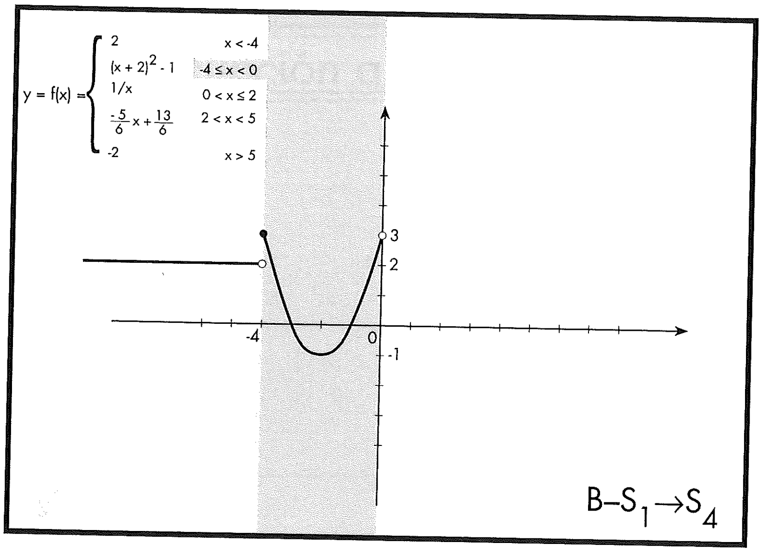


Figura 7

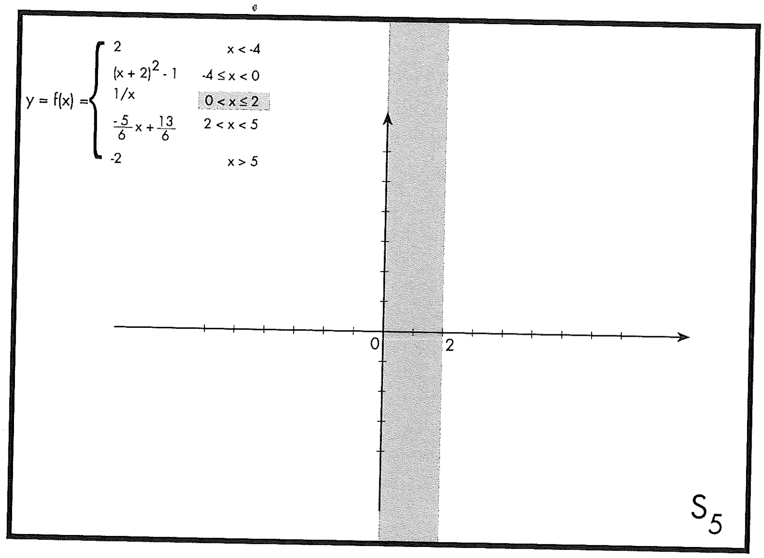


Figura 8

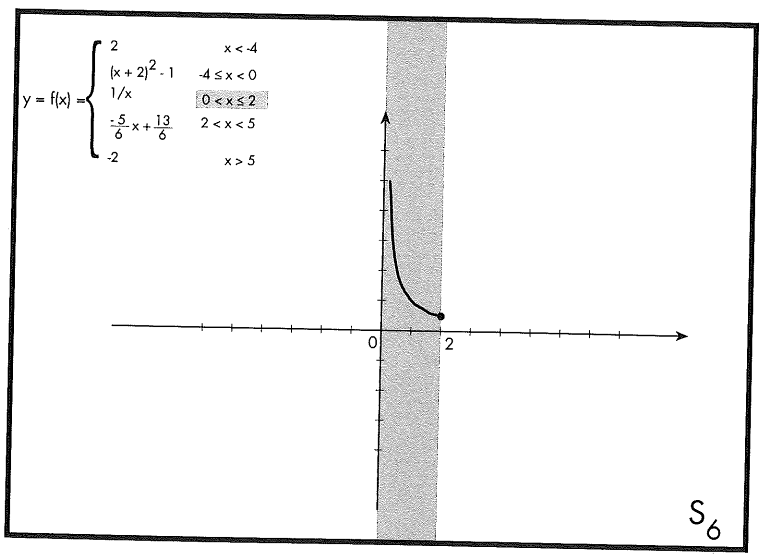


Figura 9

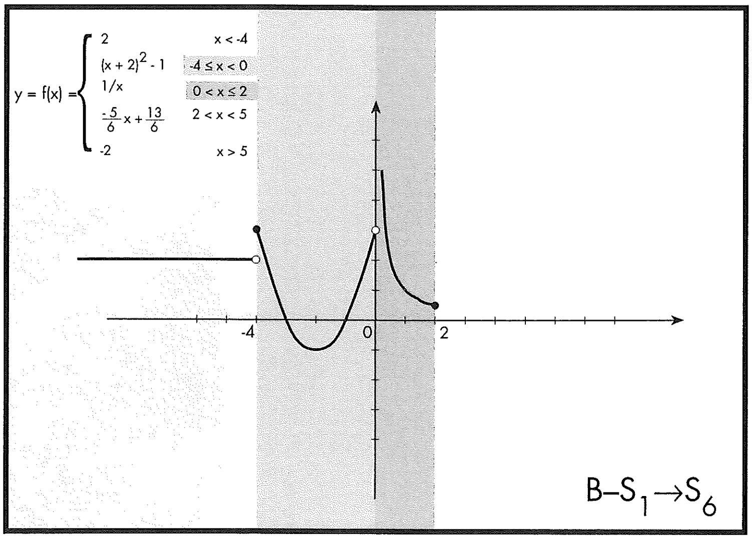


Figura 10

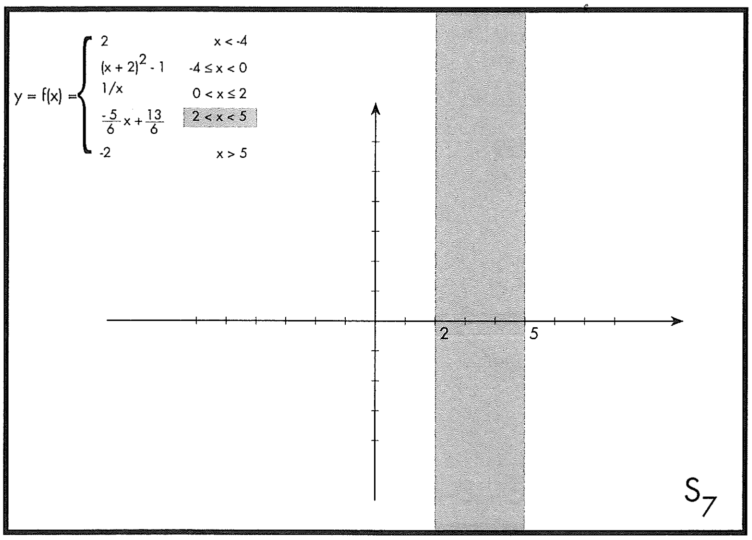


Figura 11

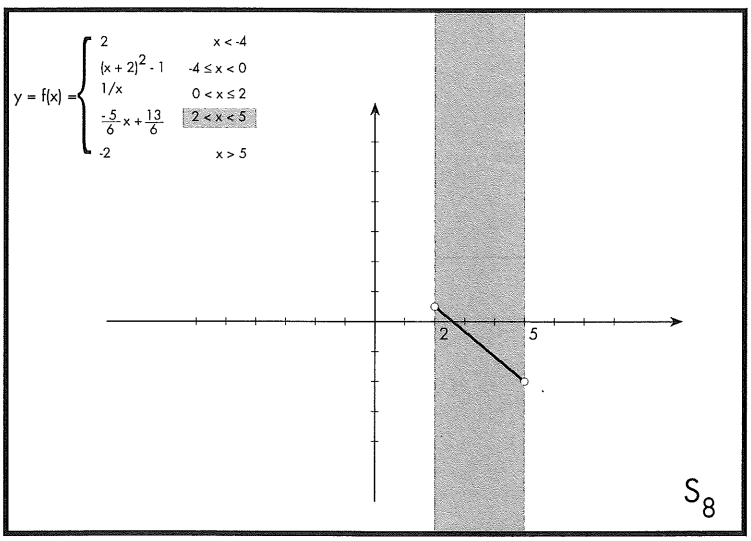


Figura 12

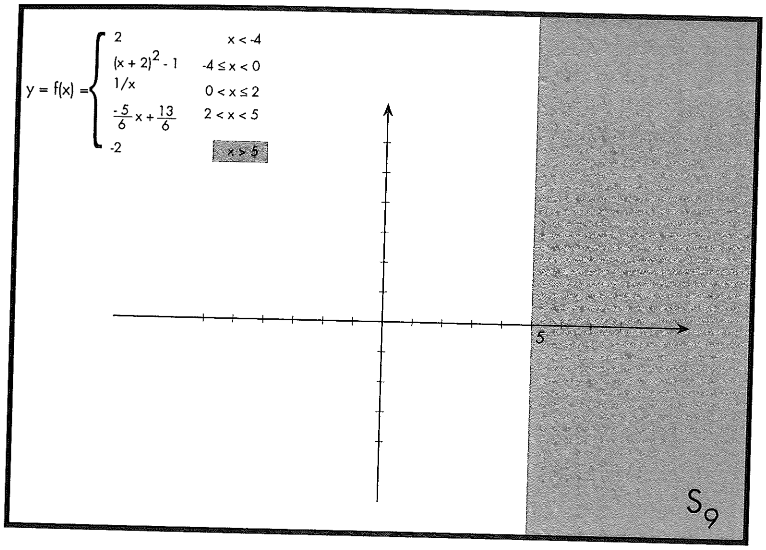


Figura 13

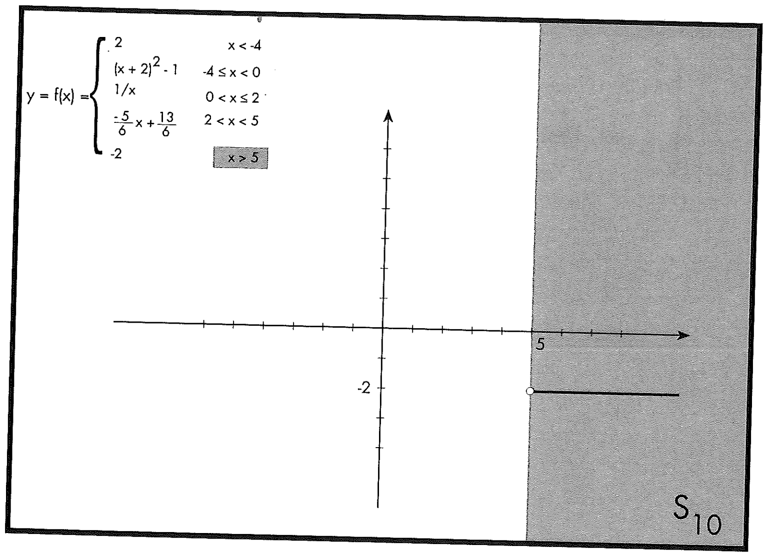


Figura 14

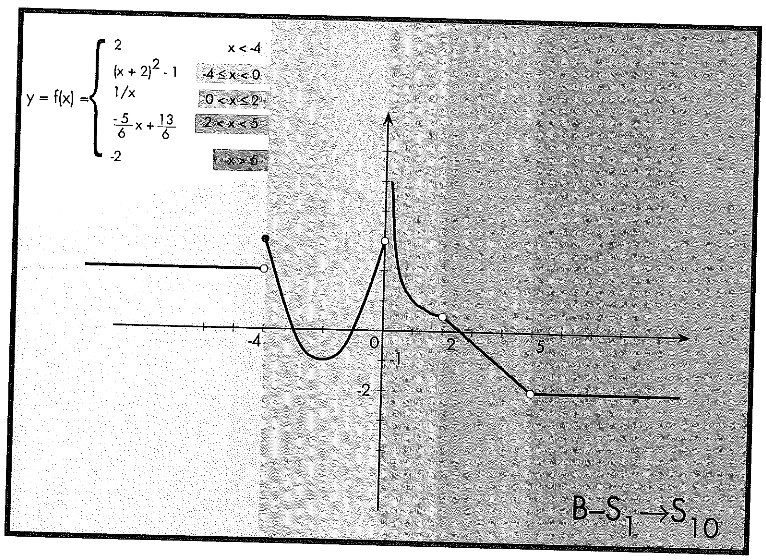


Figura 15

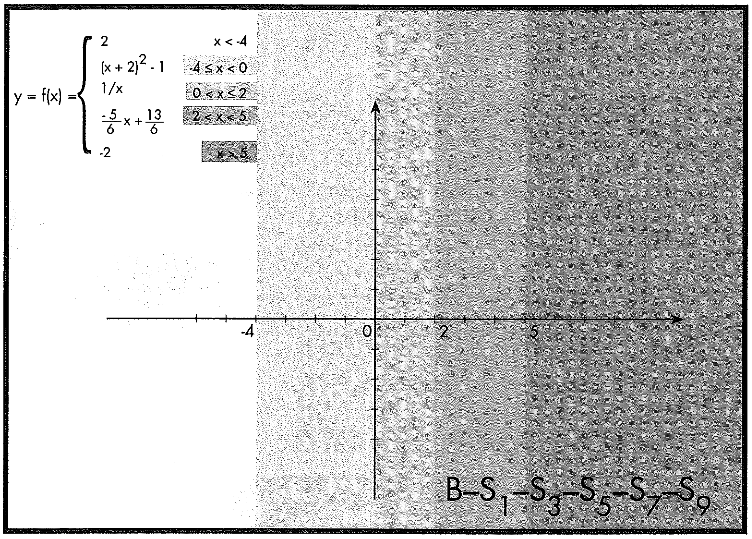


Figura 16

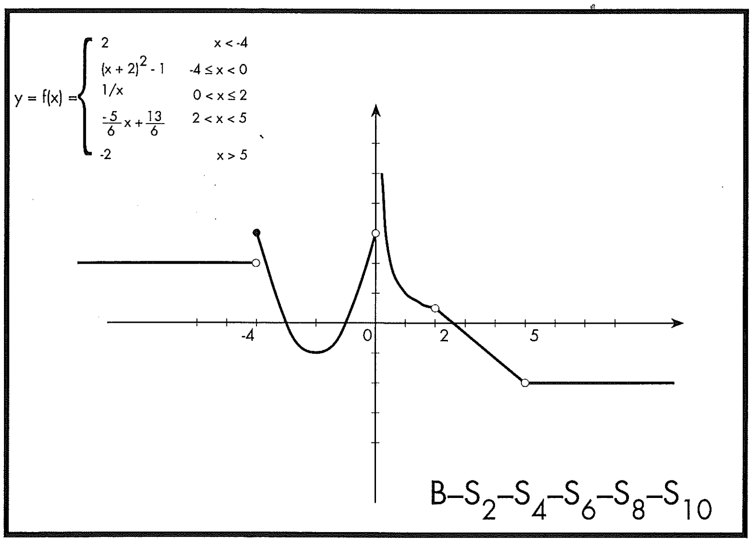


Figura 17

Conclusión

Desde nuestra experiencia en la utilización de MAV en matemáticas, las ventajas que nos ofrece el retroproyector son superiores a las que nos puedan ofrecer el proyector de diapositivas o el magnetoscopio, aparatos de los que disponen casi todos los centros. Crear una buena transparencia en matemáticas es mucho mas fácil que crear una buena diapositiva, y no digamos de una filmación en vídeo. Didácticamente la transparencia es superior (Mallas, 1977 y 1979; Coppen, 1978; E. Pablo, 1977; Brown, 1981). Es el único aparato que fue creado expresamente para enseñar, ofreciéndonos unas prestaciones (Galdón, 1990) inigualables para la didáctica de las Matemáticas, siempre que se elabore el software adecuado, siendo el propio profesor con su experiencia y maestría el que mejor puede crearlo, y los centros facilitar su uso con aulas acondicionadas.

El trabajo se verá compensado por la satisfacción que pro duce la investigación creativa y su aplicación, así como la observación de la mejora de la motivación y el aprendizaje de los alumnos.

Bibliografía

BROWN, W. (1981): *Instrucción Audiovisual*, Trillas, Méjico.

COPPEN, H. (1978): *Utilización didáctica de los medios audiovisuales*, Anaya, Madrid.

GALDÓN, J. M. (1988): «Investigacion con recursos audiovisuales para mejorar el rendimiento en matemáticas», Primer premio de investigación activa en el aula, en *La Escuela en Acción*, El Magisterio Español, n.° 10.479, 20-38.

GALDÓN, J. M. (1990): «Los medios audiovisuales en la didáctica de las matemáticas», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 3*, ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

José M. Galdón
IES Carlos Bousoño
Majadahonda (Madrid)
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»
Cristina Ramírez
CP Duque de Rivas
Sevilla la Nueva (Madrid)

GÓMEZ HERRERA, F. (1981): «Los problemas de los Medios Audiovisuales en los Centros Docentes», en *Medios Audiovisuales para la Educación*, MEC, Madrid.

MALLAS, S. (1977): *Técnicas y recursos audiovisuales*, Oikos, Barcelona.

MALLAS, S. (1979): *Medios audiovisuales y pedagogía activa*, CEAC, Barcelona,

PABLO, E. (1977): *Los medios audiovisuales en la enseñanza*, CEVE, Madrid.

SCUORZO, H. (1970): *Manual práctico de medios audiovisuales*, Kapelusz, B. Aires.

SUMA 28
junio 1998, pp. 91-96

Matemáticas y consumo: el encuentro con el euro

Francisco González García
Moisés Coriat Benarroch

La formación escolar suele reclamarse como solución para múltiples problemas. Los autores planteamos en este artículo algunos de los problemas «muy cotidianos» que la entrada en vigor de la moneda única europea nos traerá en pocos años. Desde la perspectiva de la formación del consumidor y de la enseñanza de las matemáticas, el currículo escolar puede anticiparse a estos problemas y presentar soluciones para los cambios que se avecinan.

IDEAS Y RECURSOS

EL EURO desde la Educación del Consumidor

El dinero es un elemento básico en la economía de mercado y sus problemas desde la Educación del Consumidor puede plantearse en dos niveles distintos. En el nivel macroeconómico cuestiones como la masa monetaria de un país, el precio del dinero y su relación con la inflación, intereses e inversión, etc., son temas de interés. En el ámbito microeconómico, personal o familiar, el dinero es esencial en la medida en que permite satisfacer nuestras necesidades. Para los niños saber manejar el dinero, en sus formas de presentación habituales, supone un aspecto más de su autonomía personal y social.

Pujol (1996) se pregunta sobre la existencia de contenidos específicos en esta materia transversal y plantea la necesidad de explicitar sus contenidos. En estas líneas, queremos llamar la atención sobre un problema que se dibuja en nuestro horizonte, problema que deriva de una conjunción de elementos macro y microeconómicos: la entrada en vigor de la unión monetaria europea (1 de enero de 1999) y con ella de la moneda única, el euro (e).

Durante tres años de transición, hasta el 2001 incluido, el euro no existirá como moneda física pero sí como apunte contable. Con el año 2002 entrarán en circulación monedas y billetes de euro, conviviendo con las monedas nacionales y desde el uno de julio de ese año, las pesetas dejarán de ser operativas aunque canjeables por euros sin fecha límite. En la actual coyuntura económica de crecimiento o expansión, este calendario aparece hoy como intocable aunque es muy debatido qué países entrarán efectivamente en la unión monetaria y estrenarán moneda. Sin embargo, con o sin retrasos de calendario, la unión monetaria se ha constituido en un objetivo esencial del proceso de unión europea.

En lo macroeconómico, la unión monetaria parece traer grandes beneficios: estabilidad económica, tipos de interes e inflación bajos, control del déficit público, etc. Estos parámetros inciden en nuestras vidas pero aún quedan algo alejados de las incidencias diarias. Más próximos a lo cotidiano están otros cambios que inducirá el euro. Así, la contabilidad de todas las entidades bancarias y de las diferentes administraciones deberá modificarse, igualmente los contratos a medio y largo plazo (una hipoteca, por ejemplo) pueden verse afectados, los sistemas informáticos, asi como las tarjetas bancarias y comerciales, los cajeros automáticos, las cabinas de teléfono y todas las máquinas que funcionan con monedas, deberán manejar euros.

Recientemente, nuestro sistema de monedas ha sufrido una modificación tendente a racionalizar y ordenar el aparente caos en la tipología de las monedas. Este cambio ha necesitado una amplia campaña del Banco de España, porque identificar y reconocer el valor de las monedas en uso es una habilidad cotidiana no exenta de ciertas dificultades. Llega a transformarse en hábito, cuyas certeras estrategias generan incomodidad a la hora de modificarlo.

En el nivel microeconómico, la entrada en vigor del euro como moneda operativa y única va a significar un cambio social de envergadura. En un lustro hemos de modificar nuestros conceptos y habilidades de trabajo con el sistema monetario. El futuro sistema se basará en la moneda única europea, el euro, dividido en 100 partes llamadas cents (Baztán, 1997). Se acuñarán monedas de 1, 2, 5, 10, 20 y 50 cents y de 1 y 2 euros. En papel se prevén siete billetes diferentes de 5, 10, 20, 50, 100, 200 y 500 euros. En la actualidad el ecu, predecesor del euro, equivale a unas 165 pesetas.

Este cambio a una nueva moneda con un valor monetario tan elevado probablemente tendrá numerosos efectos psicológicos y colectivos:

- Tendremos la impresión de ganar menos, al expresar los salarios en euros.
- Inicialmente se razonará como si estuviésemos en un país extranjero, dividiendo o multiplicando por 160 para estimar el precio en euros o pesetas, según convenga.
- El sistema de céntimos de peseta, que sólo nuestros abuelos recuerdan bien, volverá a la vida cotidiana (al cambio teórico de hoy, 1 cent equivaldría a 1,65 PTA). El ciudadano deberá acostumbrarse al redondeo por encima de 0,5 cent hacia arriba y por debajo de 0,5 cent hacia abajo y siempre se hará al cent superior o inferior correspondiente. Los dos decimales entrarán en nuestras vidas.
- Las Administraciones tendrán que tomar medidas frente al redondeo indebido en los precios y en la devolución de los cambios. Puede haber una percepción de subida de precios, que para algunos productos y servicios, según como se realice el redondeo, puede ser real. Los consumidores deberán estar muy atentos para denunciar los abusos que determinados «listillos» no dudarán en cometer. Por ejemplo, si un precio, expresado en euros, resulta ser de 3,7447 como consecuencia de una operación de cambio, la secuencia de redondeo desde las diezmilésimas conduce a la siguiente evolución: 3,7447 → 3,745 → 3,75; esta subida de 1 cent supone un porcentaje de un 0,2% más.
- En los documentos oficiales habrá que manejar hasta seis decimales. Probablemente, al inicio de este sistema, muchos sectores profesionales pueden cometer errores en las transacciones económicas. Nuevamente, el consumidor tendrá que «comprobar las cuentas».
- Habrá que acostumbrarse a las nuevas monedas y billetes, en particular con estos últimos, pues la confusión y errores pueden ser muy caros (en pesetas, claro).

Abandonar la moneda con la que una persona ha aprendido a contar y a relacionar el valor de las cosas es un cambio psicológico de cierta relevancia.

Abandonar la moneda con la que una persona ha aprendido a contar y a relacionar el valor de las cosas es un cambio psicológico de cierta relevancia. Aunque el uso del dinero en monedas y billetes viene sufriendo un retroceso desde hace décadas, y este cambio puede impulsar más las formas de dinero de plástico, monedas y billetes permanecen aún como un elemento cotidiano en nuestras vidas. Ciertos sectores de la población están preparados para adaptarse rápidamente al cambio, pero la mayoría sufrirá más de un quebradero de cabeza; en particular, las personas de escasa cultura, el colectivo de la tercera edad y los niños tendrán mayores dificultades.

Los céntimos de peseta son hoy cosa del pasado y nuestra agilidad de cálculo parece despertar en las pantallas de las calculadoras. No me resisto a contar un hecho que contemplé en un mercado: una coliflor, costaba 45 pesetas. El ama de casa comenzó a sacar monedas de duro y a contar su valor creciente, cinco, diez, quince, y entonces extrajo una moneda de 25. Se detuvo pensativa y comenzó a sumar de nuevo desde el valor de esta última: 25, 30, 35, 40... ¿15 + 25, no son 40?

En las operaciones de la vida cotidiana el uso del sistema monetario supone trabajar, entre otros, con los siguientes contenidos:

- Las cuatro operaciones matemáticas básicas.
- Lectura y escritura de números y cantidades en diversos contextos.
- Identificación y reconocimiento de monedas y su valor.
- Interpretación y representación de cantidades.
- Pagos exactos y pagos con cambio.
- Uso del cálculo mental.
- Resolución y verbalización de estas situaciones.
- Uso adecuado del dinero.
- Respeto por las normas del propio sistema.

Desde la materia transversal del consumo se intenta enseñar y aprender todos aquellos conceptos y habilidades que favorezcan la autonomía y la capacidad de analisis y crítica de los individuos que son hoy cada vez más consumidores (y acaso menos ciudadanos). Como eje transversal, en educación infantil y primaria, la educación al consumidor propone diversos contenidos específicos referentes al dinero y su uso:

- Reconocimiento del dinero como elemento de cambio.
- Tipos de monedas y billetes, su identificación.
- El precio de los productos.
- Presupuesto y administración del dinero propio.
- Observación y clasificación de precios. Cálculo mental de precios.

...dado que el dinero y el sistema monetario son objeto de estudio en el área escolar de Matemáticas, el reto del euro debe potenciar aspectos de la formación matemática.

- Interés por conocer las monedas.
- Valoración del uso racional del dinero.
- Interés por el uso correcto de las distintas monedas.
- Valoración del propio dinero.
- Interés por conocer el precio real del producto y por comparar precios.
- Conciencia de la existencia de aspectos negativos asociados al dinero.

Con estas líneas de trabajo, y dado que el dinero y el sistema monetario son objeto de estudio en el área escolar de Matemáticas, el reto del euro debe potenciar aspectos de la formación matemática. Quienes estén interesados en considerar relaciones diversas entre las matemáticas y el consumo pueden consultar el interesante trabajo de Alsina y Fortuny (1993).

El euro y la educación matemática

La entrada en vigor de la moneda EURO tendrá dos consecuencias principales en Educación Matemática:

Generalización entre la población de situaciones matemáticas relacionadas con los cambios de moneda

Se genera un nuevo tipo de situaciones matemáticas debidas a la «convivencia» de dos sistemas de cuenta (peseta, basado en el hábito, y euro, basado en la nueva normativa); esta convivencia perdurará al menos durante unos 15 años en la sociedad española (con independencia de los plazos legales establecidos).

Algunas personas se adaptarán rápidamente al nuevo sistema de cuenta, mientras que a otras les resultará un proceso intelectual de largo plazo. Veamos dos ejemplos:

1.°) Las personas que han viajado al extranjero saben por experiencia que no todos reaccionamos de la misma manera ante el cambio de divisas; algunos necesitan una respuesta experta y preguntan sistemáticamente a su acompañante (¿cuántas pesetas son las 12,18 libras de esta corbata?), otros llevan consigo una calculadora y establecen rápidamente la equivalencia en pesetas memorizando el cambio aplicado por el banco; otros, finalmente, hacen cálculos aproximados. Por lo general, los viajes cortos no permiten hacerse una idea válida del coste de la vida en un país extranjero, si tenemos en cuenta que dicha idea depende de factores objetivos (como el salario medio) y subjetivos (como la «fuerza» o fortaleza de una moneda con respecto a la propia).

2.°) El cambio de unidad que se produjo en Francia a mediados de los años sesenta era muy fácil de manejar (porque cada 100 francos franceses se cambiaron por 1 nuevo franco francés); a mediados de los años ochenta aún se encontraban personas que, para tener una idea del «valor» de un bien, habían mantenido la costumbre de expresarlo en francos antiguos (multiplicar por 100). En el caso del euro habrá que desarrollar «intuiciones» relacionadas con el factor de cambio (por ejemplo, 165 PTA/euro), que no fluctuará.

Generalización de situaciones de cálculo con decimales

Se necesita adaptar las situaciones de cálculos de cantidades monetarias para realizarlas en euros. Aquí surge una novedad para los menores de 40 años: deberán manejar cantidades decimales en sus transacciones cotidianas.

Ejemplo: Una barra de pan cuesta actualmente 55 PTA. ¿Cuál es su precio en euro, sabiendo que 1 euro = 160 PTA? La división de 55 entre 160 (por ejemplo, con calculadora) permite establecer que el precio puede oscilar entre 0,34 y 0,35 euros. Si quisiéramos trabajar en cents, dividiríamos 55 entre 1,60 obteniendo un precio de 34 o 35 cents. (Adviértase que, legalmente, sólo el primer precio es válido:

Trabajando en euros: 55/160 = 0,34375.

Redondeos sucesivos: 0,3438; 0,344; 0.34.

Trabajando en cents: 55/1,60 = 34,375.

Redondeos sucesivos: 34,38; 34,4, 34).

Como consecuencia, niñas y niños, desde muy pequeños, van a impregnarse en sus vidas cotidianas del uso de números decimales y sus significados: 2,25 euros = 2 euros y 25 cents. Esta impregnación será conceptual (porque asignarán «valores» a bienes con ayuda de decimales) y manipulativa (porque seleccionarán una colección de monedas que representa exactamente dicho precio).

En el preámbulo de la LOGSE se menciona explícitamente el «horizonte europeo» como una de las aspiraciones de nuestra sociedad. Ante la entrada en vigor del euro, conviene contrastar esta afirmación con la tradición educativa y con los actuales currículos de matemáticas.

La tradición educativa ha ido desplazando lentamente el estudio de los decimales hacia niveles superiores de la educación primaria, principalmente como consecuencia de la desaparición de las fracciones de peseta. Con esta desaparición, los decimales fueron perdiendo un contexto esencial de usos sociales, de modo que su estudio se fue orientando cada vez más hacia un contexto numérico puro.

Esta evolución ha quedado refrendada tanto en los nuevos currículos de matemáticas del MEC como de las diferentes comunidades autónomas con competencias en

En el preámbulo de la LOGSE se menciona explícitamente el «horizonte europeo» como una de las aspiraciones de nuestra sociedad. Ante la entrada en vigor del euro, conviene contrastar esta afirmación con la tradición educativa y con los actuales currículos de matemáticas.

Educación. (El currículo de Matemáticas de Andalucía menciona el ECU, antecesor del euro).

Se deduce que es necesario modificar ambas cosas. No sabemos cómo se modifica una tradición; ciertamente, la realidad social (a la que la tradición finalmente se adapta) acabará por hacerlo. ¿Podemos dar algunas «pistas» para que, por una vez, la tradición vaya al compás del cambio de moneda? De manera hipotética, he aquí algunas sugerencias:

1. «Desempolvar» antiguos libros de texto y analizar cómo resolvían hace 50 años (en esa época la educación era desgraciadamente mucho más elitista) el problema del manejo de decimales y de monedas fraccionarias. A esto ayudará la memoria de maestros jubilados, que hayan enseñado entre los años 40 y 60, que se podría recoger mediante entrevistas.
2. Suscitar la creación de grupos de trabajo, formados por maestros jóvenes, que estudien los «comportamientos numéricos» en grupos concretos de su zona de trabajo (entorno pesquero, agrícola, rural, industrial, comercial o urbano) y diseñen estrategias para adaptarlos al euro y en las aulas desde edades muy tempranas. Estos grupos deberían recibir el adecuado apoyo por parte de la Administración y de la Universidad (al menos, en este último caso, de los departamentos verdaderamente preocupados por la Didáctica de la Matemática).
3. Difundir, a través de la prensa escrita, principalmente de las revistas educativas, sugerencias sobre la enseñanza y aprendizaje de los «temas» correspondientes en diferentes edades. Esta idea de «compartir» soluciones concretas de profesores en activo no solamente se plasma en congresos como las JAEM (Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas).

Paralelamente, será necesario revisar los textos de los currículos de matemáticas, y las secuenciaciones de los centros, con objeto de trabajar en clase progresivamente los siguientes usos (y, asociados, conceptos debidamente simplificados):

Usos en Educación Primaria (posiblemente, algunos de los siguientes ítemes, que no se presentan secuenciados, se podrán tratar desde la Educación Infantil). Se deberán por tanto adelantar a esta etapa varios contenidos de números y magnitudes.

- Moneda fraccionaria.
- Unidad monetaria y sus partes.
- Expresión de cantidades monetarias:
  - * Como número «complejo» (1 e 8 c se lee «un euro y ocho cents»).
  - * Como número decimal con unidad euro (1 e 8 c se escribe también 1,08 e).
  - * Como número natural con unidad cent (1 e 8 c se escribe también 108 c).
- Redondeos (1,083 e = 1,08 e; 1,085 e = 1,09 e).
- Manejo de billetes y monedas:
  - * Distintas expresiones de la misma cantidad (1 billete de 10 e = 2 billetes de 5 e).
  - * Cambios (si pago 1 barra de pan que cuesta 0,34 e con 1 e, me devuelven 66 cents).
- Cálculos con dos y tres cifras decimales (las calculadoras tienen una opción para fijar el número de cifras de trabajo).
- Divisiones y multiplicaciones para conversiones:
  - * Pasar de euros a pesetas: multiplicar por 160 (por ejemplo).
  - * Pasar de pesetas a euros: dividir por 160.
  - * Pasar de pesetas a cents: dividir por 1,60.
  - * (Y los otros tres: cents a pesetas, cents a euros, euros a cents).
- Cálculo mental:
  - * Exacto (situaciones diseñadas *ad hoc).*
  - * Aproximado.
- Razonamiento multiplicativo con cantidades monetarias (en los 6 distintos sentidos de cambio: Euros ↔ Pesetas, Euros ↔ Cents, Pesetas ↔ Cents). Ejemplo: si a 1 euro le corresponden 160 pesetas, entonces 2´78 euros, ¿a cuántas pesetas equivalen?
- Fracciones elementales y números mixtos sencillos:

  5/2 = 2,5 = 2 1/2 (euros)

...será necesario revisar los textos de los currículos de matemáticas, y las secuenciaciones de los centros...

Usos en Educación Secundaria Obligatoria

En esta etapa se perfeccionarán los conceptos indicados en la lista anterior, y se podrá ampliar en las siguientes direcciones (que ya se integran en las actuales listas de contenidos):

- Porcentajes:
  - * Descuentos, IVA, etc. Ejemplo: ¿qué es mejor, aplicar un descuento del 7% al precio en pesetas y luego cambiar a euros o cambiar a euros antes de aplicar ese descuento? En este problema, la «intuición» sugiere que la respuesta es «da lo mismo», lo que se corrobora desde el razonamiento multiplicativo puro. Sin embargo, para algunas cantidades, el resultado no será equivalente, como consecuencia de la obligación de redondeo.
- Operaciones bancarias:
  - * Ahorros, préstamos, inversiones, hipotecas.
  - * Cambios de monedas (euros a dólares, por ejemplo).
- Lectura de una hoja de paga, de un recibo, declaración de la renta.

Queda por responder una última pregunta: los maestros y profesores de secundaria, ¿de dónde sacarán los problemas que propondrán a sus alumnos? Disponen de dos vías básicas (además de los libros de texto). Por una parte, las relaciones de problemas «antiguos»; por otra, las relaciones de problemas que «circulan» por Internet. Poponemos, para terminar, un ejemplo de cada uno.

Problema 1. El caluroso caradura. (Adaptado de Nesterenko, Olejnik y Potápov.)

En un día de calor agobiante, un caradura llegó a un bar con una suma de dinero y pidió al camarero un préstamo igual al dinero que él mismo tenía. De toda esta suma gastó 1 euro. Con el resto se fue a otro bar, donde de nuevo pidió prestado tanto dinero cuanto tenía. En este bar también gastó un euro; cuando salió del segundo bar ya no tenía nada. ¿Cuánto dinero tenía al principio el protagonista?

Una estrategia general para resolver este problema es la «marcha atrás». Al salir del segundo bar, sin nada en el bolsillo, había gastado 1 euro. Por tanto, llegó a este bar con 50 cents (los otros 50 los puso el camarero). En el primer bar gastó 1 euro y salió de él con 50 cents. Por tanto, entró en el primer bar con la mitad de 1'50 euros, es decir, 75 cents.

Problema 2. Del consumo a las relaciones matemáticas.

Juanito ha comprado en una papelería los siguientes objetos, que estaban de oferta: Lote de 4 lápices, 1,20 euros. Lote de 6 bolígrafos, 1,25 euros. Bolígrafo de dos colores, 1,50 euros. Lote de 4 cuadernos, 3,16 euros. Su madre le había entregado 900 PTA y 3 monedas de 1 euro. ¿Cuánto le devuelven en la papelería, en euros? (Suponer un cambio de 1 e = 165 PTA).

Situaciones como ésta serán típicas durante la convivencia de los dos sistemas de cuenta. La mayoría de los alumnos tienden a trabajar en pesetas y será necesario acostumbrarse a trabajar en los dos sistemas (para hacer comprobaciones). El resultado, tanto en pesetas como en euros, debe redondearse (0,35 e + 1 e que no se ha usado o 222 PTA). En situaciones como ésta, parece aconsejable iniciar la resolución con una sugerencia de estimación: ¿Tendrá bastante dinero Juanito?, ¿le ha dado su madre más dinero del necesario?

Los datos (precios) de este enunciado están tomados de Johnson (1994) porque tienen una curiosa propiedad:

$1{,}20 + 1{,}25 + 1{,}50 + 3{,}16 = 1{,}20 \times 1{,}25 \times 1{,}50 \times 3{,}16 = 7{,}11$. Más allá de la anécdota (el vendedor podría haber multiplicado los precios en lugar de sumarlos), el profesor está en condiciones de plantear un nuevo problema en el que las incógnitas son los precios y el dato es la igualdad de los resultados obtenidos por suma y por multiplicación. Deslizamos así la clase desde una situación de consumo a una situación puramente matemática que recibe inicialmente sentido apoyándose en la anterior. Este nuevo problema puede resolverse mediante una rutina informática o bien estableciendo algunos criterios de búsqueda. La única solución exacta (para 7,11) es 1,20, 1,25, 1,50 y 3,16 euros. Johnson ha estudiado sistemáticamente diferentes soluciones con 4 sumandos. Por ejemplo, si la suma total es 8,76 también hay solución única para los precios, pero si se toma, como suma total, 10,08 euros, entonces hay dos soluciones (es decir, dos conjuntos de 4 números con dos cifras decimales cuyo producto es igual también a 10,08). Con 5 sumandos, hay muchas más soluciones. Si se toleran resultados aproximados, el número de soluciones vuelve a aumentar. Por ejemplo:

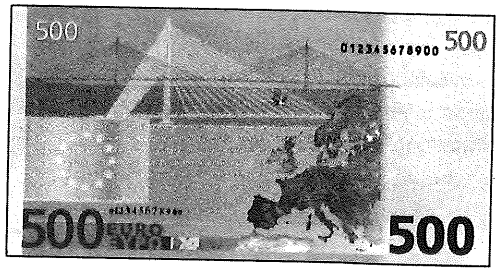
$$1{,}01 + 1{,}15 + 2{,}41 + 2{,}54 = 7{,}11$$

mientras que

$$1{,}01 \times 1{,}15 \times 2{,}41 \times 2{,}54 = 7{,}1100061.$$

¡Una excelente circunstancia para relacionar los redondeos a la centésima con las pérdidas y ganancias de los vendedores!

La sociedad de consumo cambia de forma vertiginosa y el cambio de sistema monetario que se avecina es un ejemplo claro de ello. En este caso es un cambio programado. La Hacienda Pública ha iniciado campañas de información sobre las cuestiones esenciales del euro y su repercusión económica y social. Creemos que el sistema educativo puede y debe actuar como un elemento que favorezca el cambio mental que va a suponer esta modificación en la vida cotidiana. En pocas ocasiones puede la escuela (de niños, jóvenes o adultos) prever actuaciones ante cambios programados. ¿Sabrá esta vez anticiparse a los problemas que se plantean desde otros ámbitos?



Creemos que el sistema educativo puede y debe actuar como un elemento que favorezca el cambio mental que va a suponer esta modificación en la vida cotidiana.

Francisco González
Moisés Coriat
Facultad de Ciencias
de la Educación
Universidad de Granada

Bibliografía

ALSINA, C. y J. M. FORTUNY (1993): *La matemática del consumidor*, Institut Catalá del Consum, Barcelona.

BAZTÁN, M. (1997): «El euro», *Ciudadano*, n.° 264, 46-48.

JOHNSON, M. (1994): Respuesta dada por este autor, mediante correo electrónico y archivada en el fichero:

<puzzles/archive/arithmetic/part1_745653851@questrel.com>

NESTERENKO, Y. V., S. N. OLEJNIK y M. K. POTAPOV (1994): *Antiguos problemas recreativos en Rusia*, Servicio Editorial, Universidad del País Vasco, Bilbao.

PUJOL, R. M. (1996): *Educación y consumo. La formación del consumidor en la escuela*, ICE Universidad de Barcelona-Horsori, Barcelona.

Disponemos de una excelente página web sobre el euro, en castellano, creada y mantenida por Félix Ares de Blas, donde se hallarán informaciones rigurosas y entretenidas:

http://www.geocities.com/WallStreet/8999

SUMA 27
febrero 1998, pp. 97-102

El vídeo didáctico: recurso en la enseñanza de las matemáticas

Antonio Pérez Sanz

Este artículo, basado en una experiencia de aula con alumnos de 4.° de ESO del IES Salvador Dalí de Madrid, pretende someter a reflexión, por parte del profesorado, la conveniencia de diversificar los recursos que se utilizan en la clase de Matemáticas, deteniéndonos en dos de gran potencialidad: la historia de las matemáticas y los medios audiovisuales. Como no hay nada más didáctico que un buen ejemplo, se ha seleccionado un tema histórico que puede parecer muy manido, Pitágoras, y un documento audiovisual, de gran atractivo para los alumnos de esta edad, para desarrollar una serie de actividades en que se pone de manifiesto la rentabilidad didáctica de estos recursos.

TRADICIONALMENTE las Matemáticas que se han «impartido» en los centros de enseñanza primaria y secundaria responden a la idea de las Matemáticas como un edificio acabado, con unos sólidos cimientos inamovibles, construido, en el pasado y por otras personas, con unas normas arquitectónicas fijas e inmutables, con unos materiales de construcción perfectamente tipificados y hasta con unos criterios «decorativos» rígidos y estandarizados.

A los alumnos se les presenta este grandioso edificio, como un monumento del pasado ante el cual su postura debe ser la de admiración mágica o, a lo sumo, la de meros usuarios, que pueden llegar a dominar las normas que rigen el deambular por los pasillos, encontrar las dependencias adecuadas y la forma de encontrar en los archivos el teorema preciso para resolver su problema concreto.

Ante sus ojos, el matemático aparece como un casero celoso que impide realizar cualquier tipo de obra, (abrir ventanas, proyectar escaleras interiores, poner ascensores...).

Para el alumno el aprendizaje de las matemáticas consiste en saber moverse dentro de este edificio de la manera más eficaz, sin que la mayoría de las veces se le faciliten respuestas a sus preguntas acerca de quién, cuándo, cómo y por qué se construyó tal o cual planta, por qué se construyó esta habitación y no otra, cual es su finalidad, quién trabaja dentro y para qué sirve su trabajo.

En resumen, las matemáticas que se le han presentado al alumno son algunos ladrillos de este gran edificio, y una serie de consejos sobre ellos. El objetivo es *ver* cuantos más ladrillos mejor, no importa mucho conocer por qué están ahí, o quién los puso, o cómo están hechos, o qué relación tienen con otros ladrillos o, sencillamente, para qué le pueden servir a él.

Esta concepción de las matemáticas como un edificio axiomático-lógico-deductivo implica una metodología en la que prima el método lógico sobre el psicológico, la enseñanza pasiva sobre la activa, sobrecargada de abstracciones, excesivamente conceptualizada, una enseñanza basada en las clases magistrales, compartimentada, con una actitud pasiva y acrítica por parte del alumno y, por lo tanto, dogmática y alejada de la realidad y de los intereses de los alumnos.

Lo curioso es que esta presentación estática y acabada del cuerpo del saber de las Matemáticas debería haber propiciado al menos una inquietud por el desarrollo histórico de la propia ciencia. Y sin embargo, y sólo desde hace unos años, las únicas referencias históricas sobre los contenidos que los alumnos están estudiando la constituyen esas breves reseñas o curiosidades históricas, que al principio del tema o al final, pero siempre como algo separado del cuerpo central, ofrecen algunos libros de texto. Es decir, se desprecia de manera general la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico en el aula y lo que es peor como contenido propio de aprendizaje.

Si algún profesor duda de una afirmación tan tajante le propongo una prueba irrefutable: proponga a los alumnos, no importa de qué nivel, incluso de COU o de los primeros cursos de cualquier carrera de Ciencias, que le diga los nombres de diez matemáticos que conozca, excluidos los griegos, y el siglo en que vivieron. ¡Se van a sorprender!

Si en lugar de matemáticos hubiésemos preguntado por pintores, músicos, novelistas, poetas... los resultados hubiesen sido notablemente mejores. La sociedad propicia de hecho esta incultura científica. Nadie, con una formación universitaria, reconocería no saber quien era Molière y en cambio nadie se avergüenza de no tener ni idea de quién era Gauss.

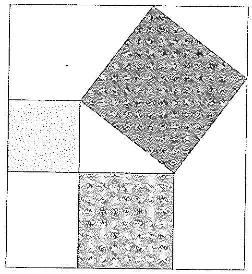
Hoy más que nunca, como afirma el profesor José Luis Montesinos[1], la principal función de las Matemáticas es la de *formar alumnos* y éstas *han de ser presentadas a través de la Historia,* en relación con la Filosofía y con el Arte, con la Física y la Cosmología, como un organismo vivo, en evolución e íntimamente ligada a los deseos del hombre de comprender la realidad.

Veamos mediante un sencillo ejemplo cómo se puede llevar a la práctica del aula una metodología basada en esta idea. Ésta es una propuesta de trabajo para desarrollar en el segundo ciclo de ESO.

Lo que hoy nos pueden enseñar Pitágoras y la Escuela Pitagórica

Presentación

Todo el mundo conoce a Pitágoras aunque sólo sea por el teorema que lleva su nombre.



«El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los dos catetos».

Antes de profundizar en este teorema por qué no investigamos algo acerca de Pitágoras y de su época.

¿Quién era?, ¿dónde y cuándo vivió?, ¿qué culturas le influyeron?, ¿qué era la escuela pitagórica?, ¿cómo estaban organizados?, ¿que Matemáticas utilizaron?, ¿que otros descubrimientos hicieron?, ¿cuáles han llegado hasta nosotros?, ¿cómo y para qué los utilizamos?....

Como veremos investigar sobre todos estos interrogantes nos va a permitir no sólo entender un poco más del mundo clásico sino desarrollar e investigar sobre un buen número de contenidos del currículum de este curso distribuidos en varios bloques: Números, Álgebra, Geometría, Azar... Pero vamos a desarrollar no sólo contenidos conceptuales sino también procedimentales y actitudinales...

Actividad previa:

- Búsqueda de información sobre la escuela pitagórica y los pitagóricos.
  - Época: siglo VI a de C.
  - Localización geográfica en un mapa: Samos, Sicilia, Siracusa.
  - Influencias en Platón: *Timeo.*
- Doctrina pitagórica de los números.
  - Números naturales y poligonales: triangulares, cuadrados, pentagonales...
  - Razón y proporción: proporción «continua», sección áurea.
  - Números y armonía musical.
- Geometría:
  - Teorema de Pitágoras: antecedentes.
  - El pentagrama: la estrella pitagórica y la sección áurea.

El profesor guiará y orientará esta búsqueda de información, proporcionando materiales fotocopiados, seleccionando textos e ilustraciones –sería conveniente contar con la colaboración del depar-

...se desprecia de manera general la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico en el aula y lo que es peor como contenido propio de aprendizaje.

1 MONTESINOS, J. L. (1995): «La historia de la Matemática en la enseñanza secundaria: La Matemática vertebradora de la cultura», en *Actas de las VII JAEM,* SMPM, Madrid.

tamento de Cultura Clásica y de Música del centro–. Se puede utilizar en esta fase el vídeo *Donald en el país de las Matemáticas*[2].

Una vez explorados y contextualizados los conocimientos matemáticos más característicos de la escuela pitagórica se seleccionan uno o dos más asequibles al desarrollo cognitivo de los alumnos. Sugerimos estos dos:

1. Números poligonales.
2. La sección áurea.

Realizamos una propuesta detallada del desarrollo de uno de ellos.

Números poligonales

Se plantea a los alumnos una investigación de carácter lúdico por la aparente falta de complejidad de este tipo de números. El profesor ha de recalcar la idea de que los pitagóricos tenían una noción intuitiva de número asociada a un punto, no tan abstracta como la que podemos tener en la actualidad.

Por otra parte se ha de resaltar el hecho de que eran fundamentalmente geómetras con un escaso desarrollo de la aritmética al no contar con ningún sistema de numeración ágil y flexible, (de ahí su necesidad de objetivar el concepto de número a través de puntos o como relación entre segmentos).

Actividad de investigación

Se utiliza como material el vídeo *Números triangulaes y números cuadrados*[3], Programa 19 de la serie Ojo Matemático, cuyos contenidos aparecen esquemáticamente reflejados en el cuadro adjunto.

Asimismo se elaboró una Hoja para el alumno[4], que está reproducida en la página siguiente.

Reflexionemos sobre los contenidos curriculares de la ESO[5] tratados mediante las actividades propuestas en dicha hoja. Entre éstos hay que destacar los reseñados en el cuadro 1.

Una vez explorados y contextualizados los conocimientos matemático más característicos de la escuela pitagórica se seleccionan uno o dos más asequibles al desarrollo cognitivo de los alumnos.

2 *Donald en el país de las Matemáticas*. Vídeo Walt Disney. Clásicos.

3 Ojo Matemático. Metrovídeo S.L. Madrid. 1992.

4 Modelo elaborado por el autor y aplicado a alumnos de 3.° de ESO del IES Salvador Dalí de Madrid.

5 *Matemáticas. Secundaria Obligatoria*. MEC. 1992.

NÚMEROS TRIANGULARES
Y NÚMEROS CUADRADOS

Serie Ojo Matemático

Programa 19

CONTENIDOS

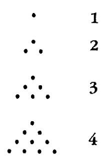
00:46	Un trabajador del supermercado se siente desolado al caerse la pirámide de rollos de papel. Tiene que reconstruirla, pero ¿cuántos rollos hay que colocar en cada estrato?
02:40	Alumnos investigando pirámides con latas de judías.
03:17	Definición de números triangulares.
03:35	Alumnos contando caramelos con bandejas triangulares.
06:10	Alumnos investigando números triangulares con cilindros.
06:40	Modelos de números triangulares y conexiones entre ellos.
07:34	Dibujos animados. Gauss: sumando números del 1 al 100.
08:46	Alumnos dándose las manos: ¿cuántos choques de mano hay?
11:05	Triángulo de Pascal. ¿Cómo se construye y qué diseños de números contiene?
12:05	Gráfico de números cuadrados. Diseños hechos sobre ellos.
14:08	Reconstrucción de la pirámide de rollos de papel.
15:53	Dibujos animados. Modificación del triángulo de Pascal para números cuadrados.
16:17	Una solución alternativa para el problema de los choques de mano.
18:25	Éxito en la reconstrucción de la pirámide del supermercado. Se puede construir no una sino dos.

MODELOS NUMÉRICOS

1. Números triangulares

Podemos representar los números enteros mediante colecciones de puntos. Cada punto representa una unidad. Los siguientes números se pueden disponer formando un triángulo. Se les llama **números triangulares**

Observa en los cuatro primeros números triángulares cómo se forma cada triángulo a partir del anterior:



Para contar todos los puntos de un número tiangular basta con que cuentes los puntos por las filas empezando por la fila superior o sumes los puntos de cada fila.

a) Escribe los tres siguientes números triangulares:

_____, _____, _____

b) Rodea con un círculo los números que sean triangulares:

34 45 55 86 132

c) ¿Cuál es el décimo número triangular? ______________

d) ¿Y el décimo quinto? ______________

e) Escribe, sin dibujarlo, el que ocupa el lugar 31: ______________

f) Escribe una fórmula general para obtener cualquier número triangular:

g) ¿Cuántos choques de mano se producen cuando se encuentran 5 amigos?

____

h) ¿Y si son 6? ______________

i) ¿Y si fueran 8? ______________

Encuentra una fórmula general que nos proporcione el número de choques de mano cuando haya n personas.

¿Encuentras alguna relación entre esta fórmula y los números triangulares?

En el vídeo, el tendero intenta construir pirámides triangulares en las que cada piso está formado por un número triangular de rollos de papel. Según subimos en la pirámide cada piso es el número triangular anterior hasta llegar a 1.

j) ¿Cuántos rollos se necesitan para construir una pirámide de 7 pisos?

k) ¿Se puede construir una pirámide triangular con 140 rollos? ______________

l) ¿Cuántos pisos tendría la pirámide triangular más grande que podría construir sin pasarse de esos 140 rollos? ______________

m) ¿Cuántos rollos de los 140 le sobrarían? ______________

2. Números cuadrados

Los números cuadrados son aquellos cuyos puntos forman un cuadrado. Coinciden con los cuadrados de los números enteros.

Comprueba que todo número cuadrado es suma de números impares consecutivos empezando por 1:

$1 = 1$; $1 + 3 = 4$; $1 + 3 + 5 = 9$; $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

o) Escribe los 6 primeros términos de las secuencias de los números triangulares y cuadrados:

N.ºs triangulares: ____, ____, ____, ____, ____, ____,

N.ºs cuadrados: ____, ____, ____, ____, ____, ____,

Compara ambas secuencias. Escribe la relación que hay entre los números triangulares y los cuadrados.

Las pirámides cuadradas se forman igual que las triangulares, pero ahora cada piso está formado por un número cuadrado. Según asciendes cada piso es el número cuadrado anterior hasta llegar a 1.

Hay una relación entre las pirámides triangulares y las cuadradas. Para descubrirla haz estos cálculos:

p) ¿Cuántos rollos tiene una pirámide triangular de 5 pisos? ______________

q) ¿Cuántos rollos tiene una pirámide triangular de 4 pisos? ______________

r) ¿Cuántos rollos tiene una pirámide cuadrada de 5 pisos? ______________

s) Escribe la relación que hay entre las pirámides cuadradas y las triangulares:

____

3. Números pentagonales y hexagonales

t) Escribe los diez primeros números pentagonales. Intenta encontrar una fórmula para obtener cualquier número pentagonal.

u) Haz lo mismo con los números hexagonales

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
1. Números naturales y enteros: • Significados y usos de los diferentes tipos de números: contar, medir, ordenar, codificar, expresar cantidades, particiones o relaciones entre magnitudes. 3. Las operaciones: • Significados y usos de las operaciones en diferentes contextos y con diferentes clases de números 4. Relaciones entre los números. 7. Algoritmos básicos e instrumentos de cálculo. • Significado y uso de las propiedades de las operaciones para la elaboración de estrategias de cálculo mental y escrito. 8. El lenguaje algebraico: • Significado y uso de las letras para representar números. Fórmulas y ecuaciones. • Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas	1. Números naturales y enteros: • Significados y usos de los diferentes tipos de números: contar, medir, ordenar, codificar, expresar cantidades, particiones o relaciones entre magnitudes. 3. Las operaciones: • Significados y usos de las operaciones en diferentes contextos y con diferentes clases de números 4. Relaciones entre los números 7. Algoritmos básicos e instrumentos de cálculo. • Significado y uso de las propiedades de las operaciones para la elaboración de estrategias de cálculo mental y escrito. 8. El lenguaje algebraico: • Significado y uso de las letras para representar números. Fórmulas y ecuaciones. • Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas.	*Referentes a la apreciación de las matemáticas:* 1. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico y algebraico para representar, resolver y comunicar diferentes situaciones. 2. Incorporación del lenguaje numérico y del cálculo y estimación de cantidades a la forma de proceder habitual. 3. Sensibilidad, interés y valoración crítica ante informaciones y mensajes de naturaleza numérica. 5. Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números o códigos numéricos. *Referentes a la organización y hábitos de trabajo:* 7. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones de problemas numéricos. 8. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado... 9. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas numéricos distintas de las propias. 10. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos.

Cuadro 1

De hecho con estas actividades hemos podido abordar un alto porcentaje de contenidos del bloque de Números del currículum. Pero hay algo más: los materiales utilizados y la gradación de los niveles de dificultad de las preguntas planteadas nos permite realizar en el aula un tratamiento preciso y claro de la diversidad de los alumnos: no todos van a conseguir responder a todas las preguntas y sobre todo no lo van a hacer siguiendo los mismos métodos ni con el mismo nivel de rigor y precisión.

Como el desarrollo de las actividades se produce en al menos tres sesiones, se pueden introducir dinámicas de trabajo en pequeños grupos con intereses o niveles parejos o complementarios que posibiliten al alumno un contraste de opiniones con sus compañeros y construir conocimientos a partir de las ideas propias y ajenas.

...la ventaja de esta investigación, [...] es que deja puertas abiertas para seguir profundizando en el estudio de regularidades numéricas más complejas.

Pero la ventaja de esta investigación, que no olvidemos ha surgido de una exploración histórica, es que deja puertas abiertas para seguir profundizando en el estudio de regularidades numéricas más complejas que nos pueden llevar de manera natural, (la actividad de los choques de manos ya nos lo sugiere de manera clara), al estudio de técnicas de recuento relacionadas con el azar y la combinatoria.

De hecho si observamos el triángulo de Pascal, en la diagonal marcada aparecen los números triangulares, pero además en la inmediata inferior aparecen los números tetragonales, es decir, los que forman las pirámides triangulares, cuyos pisos son a su vez números triangulares. Bastante más fácil es descubrir que en la diagonal superior aparecen los números naturales.

Como se puede observar sin mucho esfuerzo el triángulo de Pascal es algo mucho más rico en relaciones numéricas que lo que tradicionalmente habíamos pensado al limitarlo a una mera tabla de coeficientes del desarrollo del binomio de Newton.

```
            1
          1   1
        1   2   1
      1   3   3   1
    1   4   6   4   1
  1   5  10  10   5   1
1   6  15  20  15   6   1
```

Números tetragonales

Números triagonales

Como sugerencia, y una vez que el profesor haya explicado cómo se obtienen los números del triángulo de Pascal (cada uno es la suma de los dos que tiene encima), podemos preguntar a esos alumnos que siempre nos demandan profundizar un poco más qué pasaría si cambiamos los unos de uno de los lados externos del triángulo de Pascal por *doses*.

¿Qué relaciones numéricas se pueden encontrar?

Antonio Pérez
IES Salvador Dalí
Madrid
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»

```
             2
           1   2
         1   3   2
       1   4   5   2
     1   5   9   7   2
   1   6  14  16   9   2
```

¿Qué sucedería si en lugar de doses colocamos treses o cuatros?

Como se ha podido comprobar, a partir de un pequeño hilo de la historia, en apariencia pueril e intrascendente, hemos descubierto un ovillo sorprendente rico en relaciones numéricas que además nos ha permitido asociar una serie de sucesiones numéricas, en un principio poco atractivas para los alumnos, con una serie de modelos geométricos bastante más sugerentes que las meras fórmulas algebraicas de siempre.

La historia de las matemáticas es un mundo rico en situaciones similares. Es hora, siempre lo ha sido, de aprovecharnos de ello y convertir a la Historia de las Matemáticas, en el poderoso recurso didáctico que siempre ha debido ser.

N.º 189. Un vinatero ha vendido 235'50 Hl. de vino a 43'50 ptas. uno, con la condición de cobrar el 6 % anual de interés por el tiempo que tarden a pagárselos. Al cobrarlos recibe 10.397'92 ptas. ¿Cuánto tiempo tardó en cobrarlos?

$$235'50 \times 43'50 = 10{,}244'25$$

$$10{,}397'92 - 10{,}244'25 = 153'67$$

$$\frac{10{,}244'25 \times 6}{100} = 614'65$$

$$\frac{360}{614'65} \times 153'67 = 90 \text{ días} = 3 \text{ meses.}$$

Medidas de longitud, peso y capacidad.

CÁLCULO MENTAL

Núm. 63

¿Cuántos dm. tiene un Hm.? ¿Cuántos cl. tiene un Kl.? ¿Cuántos Dg. tiene un Kg.? etc., etc.

¿Cuántos cm. hay en 7 Hm.? ¿Cuántos ml. hay en 4 Dl.? ¿Cuántos Dg. hay en 3 qqm.? Etc. etc.

¿Cuántos Dm. hay en 3 dm.? ¿Cuántos Hg. hay en 8 g.? Etc., etc.

SUMA 28
junio 1998, pp. 103-107

Simulación de la paradoja de Stein con la hoja de cálculo

Rafael Cortés Mora

La hoja de cálculo constituye un potente entorno para la experimentación en clase de estadística, comparable al laboratorio en la de ciencias experimentales. Entre sus múltiples aplicaciones se encuentra la de proporcionar un medio para la comprobación experimental de resultados teóricos. Para ilustrarlo, proponemos un modelo para verificar el teorema de Stein relativo a la estimación óptima de un conjunto de k > 2 medias. El carácter paradójico de este resultado lo convierte en un ejemplo ideal para este tipo de simulaciones.

LA HOJA de cálculo constituye una poderosa herramienta didáctica para la enseñanza de la estadística. Proporciona un entorno ideal para la simulación de experiencias aleatorias, para la comprobación experimental de resultados teóricos y para la investigación.

La posibilidad de comprobar experimentalmente resultados teóricos es especialmente importante cuando no se dispone del aparato matemático requerido para su demostración rigurosa, como ocurre frecuentemente en la enseñanza secundaria. El alumno no tiene más remedio que «creer» los enunciados del profesor y hacer uso de ellos en las aplicaciones y en los ejercicios que se le proponen. En ocasiones, estos resultados chocan con sus «creencias» previas y surge una «necesidad» de comprobación. El objetivo de este trabajo es, precisamente, ejemplificar la situación que acabamos de describir. Se ha elegido un resultado poco conocido, cuya naturaleza paradójica provocará la mencionada «necesidad» de comprobación. Se trata del teorema de Stein, cuyo campo de aplicación es la construcción de estimadores óptimos para un conjunto de $k > 2$ medias.

Conviene recalcar que nuestro objetivo no es presentar una actividad para ser trabajada con los alumnos (de hecho, los contenidos desarrollados exceden el nivel de la enseñanza secundaria) sino mostrar, mediante un ejemplo, la necesidad de tratar la estadística de forma experimental y las posibilidades que ofrece para ello la hoja de cálculo.

Estimación de parámetros

El objetivo esencial de la estadística inferencial o inductiva es obtener conocimiento de grandes conjuntos de datos o poblaciones a partir de subconjuntos del mismo llamados muestras. Uno de sus problemas fundamentales lo constituye la estimación de parámetros que surge cuando la distribución de la característica estudiada depende de un parámetro ω que debe estimarse a partir de los datos obtenidos en una muestra. Para ello, se utilizan los denominados estimadores o funciones de la muestra $T(x_1,\ldots,x_n)$ cuyos valores en el muestreo deben ser próximos a ω.

Una de las propiedades exigidas a estos estimadores es que su esperanza matemática coincida con el valor del parámetro a estimar, es decir, que $E(T) = \omega$. Con ello queda garantizada la convergencia del promedio de las estimaciones hacia el verdadero valor del parámetro. Un estimador que verifica esta propiedad se dice que es *insesgado* o centrado. En caso contrario, es decir, cuando $E(T) = \omega + e(\omega)$, se dice que el estimador es *sesgado*, y a la expresión $e(\omega)$ se la denomina sesgo o *error sistemático* del estimador. Por ejemplo, la media muestral

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

es un estimador centrado de la media poblacional ($E(\overline{x}) = \mu$) mientras que la varianza muestral

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

es un estimador sesgado de la varianza poblacional σ^2 ya que

$$E(s^2) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Para corregir este sesgo, suele utilizarse el estimador

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

el cuál verifica que.

$$E(\hat{s}^2) = \frac{n}{n-1}E(s^2) = \sigma^2$$

Para valorar la eficiencia de un estimador, suele utilizarse el *error cuadrático esperado* $E(T - \omega)^2$. Cuanto menor sea esta cantidad, más eficiente será el estimador, ya que, en promedio, proporcionará estimaciones más cercanas a ω. Cuando los estimadores son centrados el error cuadrático esperado coincide con la varianza:

$$E(T - \omega)^2 = E(T - E(T))^2 = var(T)$$

Al comparar pues estimadores insesgados, se preferirá siempre al que tenga menor varianza. Si para una distribución dada existe un estimador insesgado, cuya varianza es inferior a la de cualquier otro, se dice que el estimador es el *más eficiente*. Si la distribución es normal, puede demostrarse que la media muestral $\overline{x}$ es el estimador más eficiente para la media poblacional, es decir, ninguna otra función insesgada de los datos puede estimar la media más exactamente que $\overline{x}$.

El objetivo esencial de la estadística inferencial o inductiva es obtener conocimiento de grandes conjuntos de datos o poblaciones a partir de subconjuntos del mismo llamados muestras.

Cuando se elimina la hipótesis de estimación insesgada, los estimadores deben compararse mediante el error cuadrático esperado. Supongamos, por ejemplo, los siguientes cuatro estimadores para la media de una población normal $N(\mu, \sigma)$:

$T_1(x_1,\ldots x_n) = \overline{x}$

$T_1(x_1,\ldots x_n) = Md$

$T_1(x_1,\ldots x_n) = \overline{x}/2$

$T_1(x_1,\ldots x_n) = 0$

que son, respectivamente: la media muestral o promedio, la mediana de los datos muestrales, la mitad de la media muestral y la función constante igual a 0.

Al calcular el error cuadrático esperado para cada uno de ellos se obtiene:

$$E(T_1 - \mu)^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(T_2 - \mu)^2 = \frac{\pi}{2}\frac{\sigma^2}{n} \cong 1,57\frac{\sigma^2}{n}$$

$$E(T_3 - \mu)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right)$$

$$E(T_4 - \mu)^2 = \mu^2$$

En el gráfico 1 se representan los errores cuadráticos de los cuatro estimadores en función del parámetro μ. Puede observarse como los errores cuadráticos esperados de la media y de la mediana (estimadores 1 y 2, respectivamente) no dependen del verdadero valor de μ. Entre estos dos estimadores, la media es uniformemente mejor que la mediana ya que, para cualquier valor de μ, su error cuadrático esperado es inferior. En la terminología de la teoría de la estimación, se dice que la mediana es un estimador *inadmisible* de μ pues existe otro uniformemente mejor. Hay que recalcar que se están comparando estimadores para la media de una distribución normal; si la distribución base no es normal, pueden darse otros resultados.

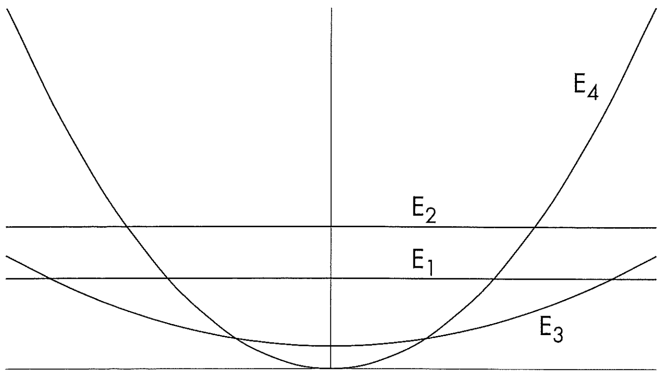


Gráfico 1

Para los estimadores 3 y 4, ambos sesgados hacia el valor $\mu = 0$, las funciones de error no son constantes. Las estimaciones que proporcionan serán muy precisas cuando el verdadero valor de μ se encuentre próximo a 0. En cambio, cuando μ se aleja de 0, crece rápidamente el error cuadrático esperado aunque este crecimiento es más rápido para T_4 que para T_3.

El teorema de Stein

Puede demostrarse que el promedio $\overline{x}$ es un estimador admisible para la media de una población normal; es decir, no existe otro estimador uniformemente mejor. Este resultado sigue siendo válido cuando son dos las medias a estimar. En cambio, Stein (1961), en colaboración con James, demostró que no es cierto en el caso de $k > 2$ medias; en otras palabras, cuando hay que estimar un conjunto de más de 2 medias, hacerlo a partir de sus promedios individuales es un procedimiento inadmisible. La demostración del teorema es constructiva en el sentido que proporciona un ejemplo de estimador para *k* medias cuyo error cuadrático esperado es uniformemente inferior al obtenido con los promedios individuales.

Con la ayuda de un ejemplo, se vislumbra la naturaleza paradójica de este resultado. Supongamos que se quiere estimar la eficacia de varios jugadores de baloncesto en el lanzamiento de tiros libres. De alguna manera, lo que se quiere obtener es una estimación del porcentaje de acierto en dichos lanzamientos que alcanzarán al final de la temporada. Para ello, se observan los 30 primeros lanzamientos de cada uno de los jugadores. Si hay que dar una estimación de la eficacia de los jugadores al final de la temporada con los datos de la muestra, la primera respuesta que a uno se le ocurre es dar como mejor estimación los porcentajes de acierto individuales obtenidos en la muestra. El teorema de Stein afirma que existe otra respuesta mejor y, además, proporciona un método para construirla: los denominados *estimadores de James-Stein.*

La esencia del método de Stein consiste en contraer los promedios individuales hacia el gran promedio, según un factor de contracción que depende del grado de dispersión de los promedios observados.

La esencia del método de Stein consiste en contraer los promedios individuales hacia el gran promedio (es decir hacia el promedio de los promedios), según un factor de contracción que depende del grado de dispersión de los promedios observados. Siguiendo con el ejemplo del baloncesto, el estimador de Stein de un jugador determinado se obtiene contrayendo su porcentaje de aciertos en los 30 primeros lanzamientos hacia el porcentaje medio observado entre todos los jugadores. Si el porcentaje de un jugador es superior al gran promedio, deberá disminuirse; en caso contrario, aumentarse. En cierta forma, el método de Stein postula que, en general, un promedio inicial alto se transformará en uno menos alto y, viceversa, uno inicialmente bajo no será, al final, tan bajo.

Matemáticamente, la expresión de los estimadores de James-Stein es:

$$z_i = \overline{y} + c(y_i - \overline{y})$$

El factor de contracción *c* depende del número de medias a estimar y de su dispersión. Su expresión es:

$$c = 1 - \frac{(k-3)\sigma^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2}$$

donde:

$\overline{y}$: gran promedio

y_i: promedios individuales

σ: desviación típica

k: número de medias a estimar

La interdependencia entre las estimaciones resalta aún más el aspecto paradójico del resultado. ¿Por qué el grado de acierto inicial de un jugador ha de influir en la estimación de la eficacia de otro jugador? La respuesta a ésta y a otras preguntas debe hacerse a partir de un análisis exhaustivo del comportamiento de estos estimadores y del error cuadrático esperado para diferentes valores de los parámetros a estimar (las medias verdaderas). Su realización excede los límites de este trabajo y, para ello remitimos al lector al artículo de Bradley Efron (1977). Nuestra propuesta es menos ambiciosa: ya que no podemos demostrar el teorema, ¡intentemos comprobarlo!

Simulación con la hoja de cálculo

El modelo ha sido implementado sobre la hoja de cálculo Microsoft Excel 4.0, aunque es fácilmente trasportable a cualquier otra con semejante nivel de prestaciones. Consiste básicamente en simular 15 experiencias con la distribución binomial de parámetros n = 30 y p variable. Con los resultados obtenidos, se calculan las estimaciones de Stein para las proporciones teóricas *p* conocidas, lo que permite compararlas con los promedios observados y observar cuál de los dos métodos proporciona resultados más cercanos a los valores verdaderos.

La simulación completa puede verse en la tabla 1. En la parte superior de la hoja (filas 1 a 5) figuran los parámetros básicos del modelo: el tamaño de las muestras *n* y el número de medias a estimar k. También, en esa zona, se recogen los valores globales calculados a partir de los datos observados: el gran promedio *my*, la varianza *mvar* (calculada promediando las varianzas de las 15 distribuciones simuladas), el factor de contracción *c* y los errores cuadráticos totales de los dos conjuntos de estimadores (*SC* y para los promedios y *SCz* para los estimadores de Stein).

	A	B	C	D	E	F	G
1	n=	30					
2	k=	15		SCy=	0,1058		
3	my=	0,6422					
4	mvar=	0,0076		SCz=	0,0569		
5	c=	0,52844719					
6							
7	p	y	(y-my)^2	var	z	(p-y)^2	(p-z)^2
8	0,6	0,5333	0,0119	0,0080	0,5847	0,0044	0,0002
9	0,65	0,6667	0,0006	0,0076	0,6551	0,0003	0,0000
10	0,58	0,5000	0,0202	0,0081	0,5671	0,0064	0,0002
11	0,45	0,5000	0,0202	0,0083	0,5671	0,0025	0,0137
12	0,7	0,8000	0,0249	0,0070	0,7256	0,0100	0,0007
13	0,72	0,8333	0,0365	0,0067	0,7432	0,0128	0,0005
14	0,68	0,6333	0,0001	0,0073	0,6375	0,0022	0,0018
15	0,66	0,7333	0,0083	0,0075	0,6904	0,0054	0,0009
16	0,7	0,6333	0,0001	0,0070	0,6375	0,0044	0,0039
17	0,64	0,6333	0,0001	0,0077	0,6375	0,0000	0,0000
18	0,48	0,6667	0,0006	0,0083	0,6551	0,0348	0,0307
19	0,54	0,5000	0,0202	0,0083	0,5671	0,0016	0,0007
20	0,66	0,6333	0,0001	0,0075	0,6375	0,0007	0,0005
21	0,64	0,5333	0,0119	0,0077	0,5847	0,0114	0,0031
22	0,74	0,8333	0,0365	0,0064	0,7432	0,0087	0,0000

Tabla 1

El área A8:G22 contiene los resultados de las 15 simulaciones. El contenido de las columnas es el siguiente:

Columna A: contiene los valores verdaderos p de las proporciones a estimar.

Columna B: incluye los promedios obtenidos en la simulaciones. Por ejemplo, la casilla B8 contiene la fórmula =Binomial(B1;A8)/B1 que devuelve la proporción de éxitos al simular una distribución binomial de parámetros B1=30 y A8=0,6. La función Binomial ha sido implementada utilizando el lenguaje de macros que proporciona Excel. Para ello se ha definido previamente la función Bernoulli(p) que simula una distribución de Bernoulli de parámetro *p* (devuelve 1 con probabilidad *p* y 0 con probabilidad 1–p). La tabla 2 de la página siguiente muestra las implementaciones completas de ambas funciones.

Columna C: contiene los cuadrados de las diferencias entre cada promedio observado y el gran promedio.

Columna D: contiene las varianzas de las distribuciones simuladas. [La varianza de una distribución Binomial (n; p) es p(1–p)/n].

Columna E: contiene las estimaciones de Stein.

Columnas F y G: contienen los cuadrados de las diferencias entre los valores verdaderos y sus correspondientes estimados. La columna F se refiere a los promedios observados y la G a las estimaciones de Stein.

Los gráficos 2 y 3 presentan los resultados de la experimentación. Puede

Bernoulli	Binomial
=RESULTADO(7)	=RESULTADO(7)
=ARGUMENTO("p";15)	=ARGUMENTO("n";15)
=SI(ALEATORIO()<p)	=ARGUMENTO("p";15)
=VOLVER(1)	=ESTABLECER.NOMBRE("suma";0)
=SI.NO()	=PARA("i";1;n)
=VOLVER(0)	=ESTABLECER.NOMBRE("suma";suma+Bernoulli(p))
=FIN.SI()	=SALIR.BUCLE()
	=VOLVER(suma)

Tabla 2

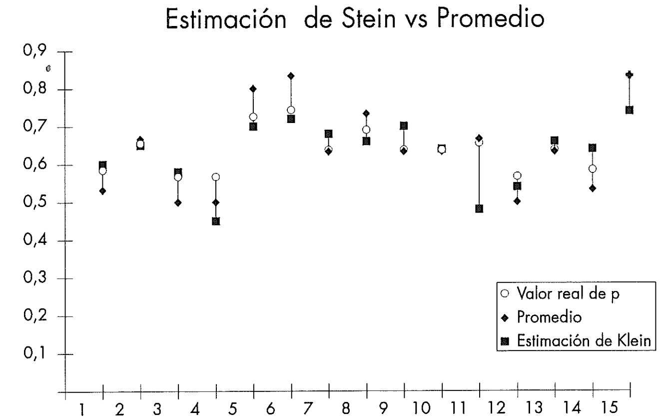


Gráfico 2

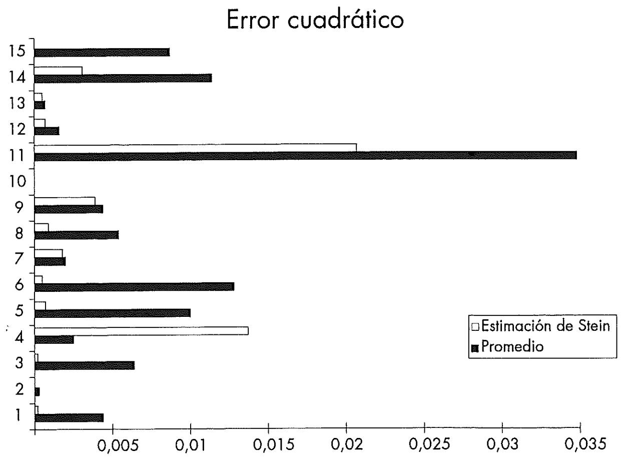


Gráfico 3

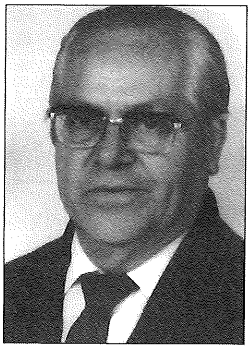
observarse como en 12 de las 15 simulaciones las estimaciones de Stein obtienen mejores resultados. Solamente en un caso fue superior el promedio observado. El error cuadrático total es de 0,1058 para los promedios individuales, casi el doble del obtenido con los estimadores de Stein: 0,0569.

Rafael Cortés
Centro de Profesores
de Palma de Mallorca

Bibliografía

EFRON, B. y C. MORRIS (1977): «La paradoja de Stein en estadística», *Investigación y Ciencia*, n.° 10, 94-102.

RÍOS, S. (1977): *Métodos estadísticos* (segunda edición), Ediciones del Castillo, Madrid.



Convocatoria I Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez»

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas convoca el I Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez», en homenaje de quien fue su Presidente de Honor. Se regirá por las siguientes:

BASES

1. Se trata de premiar la labor docente y los «valores humanos»: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.
2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).
3. El Premio consistirá en el nombramiento de «Socio de Honor» de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.
4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.
5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada en la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.
6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de diciembre de 1998.
7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.
8. Para la concesión del Premio, la Junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:
   - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
   - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
   - Currículo con hechos, anécdotas, etc., referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.
9. SUMA publicará el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.
10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las IX JAEM que se celebrarán en Lugo en septiembre de 1999.

SUMA 28
junio 1998, pp. 109-116

Matemáticas para consumidores críticos (criterios para seleccionar los cereales del desayuno)

Ismael Roldán Castro

Este artículo es la narración de una pequeña investigación matemática realizada con un grupo de 3.° de ESO. Sigue la línea de otro artículo del mismo autor publicado en SUMA que aparece en la bibiografía y se inscribe en el binomio Matemáticas y Consumo. El problema que dio origen a esta experiencia podría formularse así: *¿Es posible adoptar criterios matemáticos para elegir una determinada marca de cereales de trigo chocolateado en un hipermercado?*

IDEAS Y RECURSOS

LA EXPERIENCIA que procedo a narrar se inscribe dentro del binomio Matemáticas y Consumo. O, para ser más exactos, Matemáticas al servicio de Consumidores Críticos. Los alumnos a los que se dirigió esta actividad fueron de 3.° de ESO. Como espero pueda comprobar el lector interesado, la presencia de temas transversales, como la publicidad en TV, el consumo y la nutrición, contribuyeron al entusiasmo que la investigación despertó entre todos los que participamos en ella. La evaluación, sobre la que no me extenderé demasiado, de los aspectos conceptuales, procedimentales y actitudinales, fue positiva en general. Hubiese sido contraproducente plantear una actividad de investigación matemática y multidisciplinar con los habituales modelos competitivos. Quiero decir que, sobre la marcha y durante el desarrollo de las sesiones, las dudas formuladas por los alumnos se resolvían de inmediato, con lo cual, todos acababan por superar debidamente las dificultades encontradas. Ello no quiere decir, sin embargo, que no hubiese diferencias entre los trabajos presentados por los alumnos. Evidentemente, el esmero, la presentación e incluso las estrategias elegidas, demostrarían una vez más la diversidad del grupo.

Los contenidos matemáticos implícitos en la actividad y que se corresponden fundamentalmente con los bloques de Números y Medida, fueron los siguientes:

- Operaciones con números decimales.
- Aproximación y redondeo.
- Notación científica.
- Porcentajes.
- Sistema métrico decimal.
- Relaciones de proporcionalidad entre magnitudes.
- Media aritmética (previa construcción de tablas de frecuencias).

Las condiciones de partida fueron las siguientes: el grupo-clase constaba de 31 alumnos, 4 chicas y 27 chicos. Del total, 20 poseían el Graduado Escolar y el resto, el Certificado de Escolaridad. Con independencia de las titulaciones anteriores, comprobé serias deficiencias tanto de cálculo mental como conceptuales. A modo de ejemplo, puedo citar el caso de algunos alumnos que no dominaban las tablas de multiplicar, no sabían operar con números enteros o desconocían el procedimiento para calcular el m.c.m. o m.c.d. de varios números. Esto último afectaba a más del 75% del grupo.

Capítulo I: De cómo surgió la idea

Animado por los resultados obtenidos tras la experiencia realizada el curso pasado y publicada en la revista SUMA (Roldán, 1996), pedí a los alumnos que se manifestaran acerca de la posible realización de una actividad que tuviese relación con algún producto alimenticio consumido por ellos y con las matemáticas.

Como en la anterior experiencia la leche fue la invitada de honor, ahora la cosa se ponía muy fácil. ¿Qué productos pueden acompañarse con la leche? Aparte del Cola-Cao, Nesquick, galletas y similares (objeto de otra posible futura investigación), intuí que eran los cereales los que probablemente más se utilizarían en los desayunos, posiblemente porque mis propios hijos así es como desayunan habitualmente.

Los resultados del primer sondeo no se hicieron esperar. El 63% de los alumnos del grupo-clase desayunaba a diario cereales. El resto, aunque no lo hiciera habitualmente, los consumía esporádicamente. En cualquier caso, todos se animaron a experimentar. Por consenso del grupo quedaron electos los cereales de trigo chocolateado, objeto de la investigación que comenzaba.

Para conocer la incidencia de esta actividad, en el sentido de establecer un antes y un después, procedimos inicialmente a elegir tres marcas de cereales y a contabilizar cuántos consumidores teníamos de cada una antes de iniciar nuestras investigaciones matemáticas. Las marcas elegidas fueron: Kellog's («Chocos», trigo chocolateado), Pascual («Chocotrebor», trigo integral con chocolate) y Happy Chexl («las *crujientes risas* de trigo con chocolate»). A partr de ahora las simbolizaremos por K, P y H, respectivamente. Obtuvimos la tabla 1.

ESTADO INICIAL DE CONSUMO DE CEREALES		
K	P	H
81%	6%	6%

Tabla 1. El estado de la cuestión

Por consenso del grupo quedaron electos los cereales de trigo chocolateado, objeto de la investigación que comenzaba.

1 Curiosa marca de este tipo de productos, fabricada en Francia y con una denominación en lengua inglesa. Se discutió en clase la posibilidad de que este hecho fuese debido a la creciente incidencia de los anglicismos en publicidad. Es decir, la empresa francesa bien hubiese podido considerar que se vendería mejor su producto con una denominación inglesa, al estar en sintonía con la *moda* publicitaria. Esta circunstancia admite un tratamiento multidisciplinar que promete ser muy interesante. Es, sobre todo, de una incuestionable actualidad (piénsese en las campañas publicitarias de tabaco).

Esos porcentajes están referidos al total de alumnos que consumían los cereales habitualmente, es decir, al 63% mencionado anteriormente. La suma de los tres porcentajes no es 100 debido a que entre estos consumidores había algunos que consumían otras marcas no seleccionadas.

Capítulo II: De cómo discurrieron las dos primeras clases dedicadas a estos menesteres

Esta fase de la experiencia se realizó por parejas. Los alumnos se agruparon libremente. A cada pareja le entregué dos fotocopias que reproduzco en este artículo. A la primera la denominaremos en lo que sigue «Hoja de la actividad» y en ella planteaba ocho ejercicios. La segunda, a la que nos referiremos también en alguna ocasión, la llamaremos «Hoja de datos» y presentaba los datos nutricionales y otras informaciones necesarias, recortadas de sus respectivas cajas de origen, para poder resolver las cuestiones de la primera.

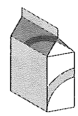
Describo, a continuación, las dificultades más sobresalientes encontradas en cada apartado, así como las cuestiones que se suscitaron paralelamente y que, como veremos, ampliaron notablemente la visión global del ámbito estudiado, aunque formalmente pudieran considerarse extra-matemáticas e incluso, heterodoxas.

Apartado 1

Deseaba, en este primer ejercicio, que observasen el hecho siguiente: en la hoja de datos, al sumar las masas de los distintos componentes nutricionales (excluyendo las vitaminas) de cada producto no se obtenían los 100 g como pudiera esperarse al echar un vistazo al encabezamiento de la columna. Era evidente (ver la hoja de la actividad), como se comprueba en la tabla que confeccionaron, que a mayor número en la celda de «Otros», menor información del producto.

IES Virgen de los Reyes — Ismael Roldán Castro
Matemáticas 3.° ESO — HOJA DE LA ACTIVIDAD

Actividad 3: Decimales, Porcentajes, SMD
(Educación de Consumidores Críticos)



Los choco - krispies

1°.- Utilizando la información nutricional de la página que acompaña a esta actividad, rellena el recuadro siguiente: (elige los correspondientes a 100 g.)

Ten en cuenta que las sumas verticales deben dar 100. Introduce el número que necesites en el cuadro ·Otros· para obtener ese resultado.

	Kellog's	Pascual	Happy Chex
Proteinas			
H. de carbono			
Grasas			
Colesterol			
Fibra			
Sodio			
Otros			
SUMA VERTICAL			

2°.- El precio de cada caja es el siguiente: (precios tomados en el mismo Hiper el 7-11-96 y sin promoción):

Kellog's = 235 pta. Pascual = 175 pta. Happy Chex = 228 pta.

¿Es suficiente este dato para saber cuál es el más económico? Razona tu respuesta y busca en la página de información nutricional algún otro si lo crees conveniente. Finalmente, ordena las marcas de más a menos económica. ¿Cuánto cuestan 100 g. de cada marca?

3°.- En Física se estudia que 1 Julio = 0.24 calorías (1 J = 0.24 cal). Comprueba la equivalencia que aparece en cada marca entre kJ y Kcal. Recuerda que el prefijo K significa 1000.

4°.- Para calcular los porcentajes de los elementos nutritivos del cuadro 1°, ¿Habrá que hacer algunas operaciones matemáticas? Razona tu respuesta.

5°.- Justifica. para cada marca. el párrafo de las tiras de información nutricional que dice:

·ESTE PAQUETE CONTENE MÁS DE ____ RACIONES DE ____ GRAMOS·

6°.- ¿Cuántos miligramos hay en total de vitaminas y minerales en cada marca?

7°.- ¿En qué país crees que se fabrica cada marca? Razona tu respuesta.

8°.- Exponed los argumentos que os parezcan más razonables para elegir una de las marcas anteriores a la hora de ir a comprar este producto alimenticio. Pedid la opinión a vuestros padres y tomad una postura. Redáctadla. La comentaremos en clase.

Hoja de la actividad

Colateralmente, incidí en dos aspectos interesantes en educación nutricional, tan importantes como la matemática y que, en este caso, van indisociablemente unidas: la importancia de la no existencia de colesterol y la preferencia de las grasas polinsaturadas frente a las saturadas y monoinsaturadas. Aquí se valoró especialmente el cereal P porque, a la vista de los datos nutricionales, era el que más información proporcionaba. E1 cereal K ciertamente aportaba menor cantidad de grasas saturadas que los cereales P, sin embargo no daba información de las polinsaturadas ni de las monoinsaturadas, con lo cual no podían compararse con aquéllos.

Importante también fue la discusión acerca de si el cereal H tenía o no colesterol. Algunos alumnos, al rellenar sus tablas de trabajo, colocaron un cero en la celda correspondiente. Les hice reflexionar. La ausencia de esa información no debería presuponer la inexistencia cuantitativa de colesterol. En principio, un consumidor crítico debería, a juicio del profesor, adoptar una actitud cauta y precavida. Es decir, ante un dato tan importante, es preferible elegir una marca que lo explicitase cuantitativamente a otra que no lo hiciese.

También se aprovechó la ocasión para comentar la importancia de una dieta alimenticia rica en fibra. Este dato aparecía reflejado en los cereales K y P, mientras que no aparecía en el H.

El resultado obtenido, una vez realizadas las observaciones y cálculos pertinentes, fue el que aparece en la tabla 2.

Kellogg's

CHOCOS

Una ración de 30 g de *Chocos de Kellogg's* proporciona una cuarta parte de las cantidades diarias recomendadas (CDR) por la CEE de vitaminas (Niacina, Vitamina B_6, Riboflavina (B_2), Tiamina (B_1), Acido Fólico, Vitamina D, Vitamina B_{12}) y una sexta parte de Hierro.

INGREDIENTES

HARINA DE TRIGO, AZUCAR, CACAO, EXTRACTO DE MALTA, SAL, VAINILLA, CANELA, NIACINA, HIERRO, VITAMINA B_6, RIBOFLAVINA (B_2), TIAMINA (B_1), ACIDO FOLICO, VITAMINA D Y VITAMINA B_{12}.

INFORMACION NUTRICIONAL

	Por 100 g		Por ración de 30 g	
Valor energético	1600	KJ	470	KJ
	380	Kcal	110	Kcal
Proteínas	8	g	2	g
Hidratos de carbono	81	g	24	g
de los cuales:				
• Azúcares	36	g	11	g
• Almidón	45	g	13	g
Grasas	2	g	0,6	g
de las cuales:				
• Saturadas	0.8	g	0,2	g
• Colesterol	0	mg	0	mg
Fibra alimentaria	4	g	1	g
Sodio	0,4	g	0,1	g

VITAMINAS			% CDR			% CDR
Niacina	15	mg	85	4,5	mg	25
Vitamina B_6	1,7	mg	85	0,5	mg	25
Riboflavina (B_2)	1,3	mg	85	0,4	mg	25
Tiamina (B_1)	1,2	mg	85	0,4	mg	25
Acido Fólico	167	µg	85	50	µg	25
Vitamina D	4,2	µg	85	1,3	µg	25
Vitamina B_{12}	0,8	µg	85	0,3	µg	25
HIERRO	7,9	mg	60	2,4	mg	17

125 ml de LECHE, añadida a la ración de cereales, le proporciona además:

	ENTERA		SEMIDESCREMADA		DESCREMADA	
Valor energético	350	KJ	240	KJ	170	KJ
	80	Kcal	60	Kcal	40	Kcal
Proteínas	4	g	4	g	4	g
Hidratos de carbono	6	g	6	g	6	g
de los cuales:						
• Azúcares	6	g	6	g	6	g
Grasas	5	g	2	g	0,1	g
de las cuales:						
• Saturadas	3	g	1	g	0,1	g
• Colesterol	17	mg	9	mg	2	mg
Sodio	70	mg	70	mg	70	mg
Calcio	150	mg	150	mg	150	mg
Fósforo	120	mg	120	mg	120	mg

Los cereales, por sus especiales características nutritivas, constituyen una parte fundamental de una alimentación equilibrada y sana y son el complemento ideal para el pleno desarrollo intelectual y físico.

Este paquete ha sido fabricado con PAPEL RECICLADO, con ello Kellogg's contribuye a la CONSERVACION DE LA NATURALEZA

RECICLAME

Humedad máxima 6%

Este paquete contiene más de 12 raciones de las arriba recomendadas

PESO NETO: 375 g

CEREALES PASCUAL

CHOCOTREBOL

TRIGO INTEGRAL CON CHOCOLATE

Los CEREALES PASCUAL están elaborados siguiendo los controles de calidad más exhaustivos, garantizándole toda su riqueza nutritiva y la más alta calidad. Sus hidratos de carbono le aportan el valor energético necesario para el cuerpo humano, el crecimiento y la actividad física y mental.

INGREDIENTES

Harina de trigo integral, azúcar, chocolate (Azúcar, Cacao, Manteca de Cacao, Vainillina), Cacao, extractos naturales de frutas, leche desnatada del 1%, sal, aromas autorizados, vit. C (ácido Ascórbico), vit. B3 (Niacina), hierro, vit. B6 (Piridoxina), vit. B2 (Riboflavina), antioxidante (Palmitato de ascorbilo), vit. B1 (Tiamina), vit. E (Tocoferol), vit. B9 (ácido Fólico), vit. D3 (Colecalciferol), vit. B12 (Cianocobalamina).

INFORMACION NUTRICIONAL

VALORES NUTRICIONALES	100 g	30 g
ENERGIA	1500 KJ	450 KJ
	354 Kcal	106 Kcal
PROTEINAS	12,3 g	3,7 g
H. CARBONO	67,3 g	20,2 g
De los cuales:		
AZUCARES	27,8 g	8,3 g
ALMIDON	39,5 g	11,8 g
GRASAS	4,0 g	1,2 g
De las cuales:		
SATURADAS	2,23 g	0,67 g
MONOINSATURADAS	0,80 g	0,24 g
POLINSATURADAS	0,98 g	0,29 g
COLESTEROL	ausencia	ausencia
FIBRA AUMENTARIA	10,3 g	3,1 g
SODIO	0,34 g	0,10 g

VITAMINAS			
B1 (Tiamina)	1,2 mg	86%*	25%*
B2 (Riboflavina)	1,4 mg	87%*	26%*
B3 (Niacina)	16 mg	88%*	26%*
B6 (Piridoxina)	1,8 mg	90%*	27%*
B9 (Ac. Fólico)	250 µg	125%*	37%*
B12 (Cianocobalamina)	1 µg	100%*	30%*
C (Ac. Ascórbico)	50 mg	83%*	25%*
D3 (Colecalciferol)	2,7 µg	54%*	16%*
MINERALES			
HIERRO	10 mg	71%*	21%*

* CDR REPRESENTA LAS CANTIDADES DIARIAS RECOMENDADAS POR LA C.E.E. DE VITAMINAS Y MINERALES

100 ml. DE LECHE PASCUAL O ZUMOSOL LE PROPORCIONAN A SU RACION DE CEREALES PASCUAL

Valores nutricionales	Entera	Semidesnatada	Desnatada	Zumosol Naranja
Energia (KJ)	257	182	142	214,2
Energia (Kcal)	61	43	34	50,4
Proteinas (g)	2,9	3,0	3,2	0,7
H. carbono (g)	4,4	4,4	4,6	11,9
Grasas (g)	3,6	1,6	max 0,3	
Calcio (mg)	130	132	134	

ESTE PAQUETE CONTIENE MAS DE 12 RACIONES DE 30 g

Este paquete se llena por peso y puede ocurrir que en el transporte el contenido del envase se asiente aparentando menos volumen.

HUMEDAD MAXIMA MENOR DE 6%
MANTENGASE EN LUGAR FRESCO Y SECO

PESO NETO 375 g ℮

Fabricado por: CEREX S. A.
Cobalto,118 • Polígono San Cristóbal
.12 VALLADOLID (España) • R.S.I. 26.02060/VA

Ralston

HAPPY CHEX

LAS CRUJIENTES RISAS DE TRIGO CON CHOCOLATE

UNA RACIÓN DIARIA DE 30 GRAMOS DE RALSTON HAPPY CHEX APORTA UNA GRAN CANTIDAD DE ENERGÍA, VITAMINAS Y MINERALES, TODO ELLO INDISPENSABLE EN UNA DIETA ALIMENTICIA EQUILIBRADA.

Información nutricional - Risas de trigo con chocolate

	POR 100 g.	30 g. con 120 ml. de leche semi-descremada
Energía	1633 Kj. - 391 Kcal.	723 Kj. - 173 Kcal.
Proteínas	9,3 g.	7 g.
Carbohidratos	80,7 g.	29,5 g.
Grasa	3,5 g.	3 g.
Vitaminas y minerales		% C. D. R.*
C	50,0 mg.	25 %
B1	1,2 mg.	30 %
B2	1,4 mg.	35 %
PP	15,0 mg.	25 %
B5	5,0 mg.	30 %
B6	1,7 mg.	25 %
B9	170 µg.	25 %
B12	0,9 µg.	50 %
Hierro	7,0 mg.	15 %
Ingredientes	Harina de Trigo (55%), Azúcar, Cacao, Chocolate en Polvo (3,7%), Aceite Vegetal, Sal Jarabe de Malta, Aroma: Vainilina, Vitaminas: C, Niacina (PP), Acido Pantoténico (B5), Piridoxina (B6), Riboflavina (B2), Tiamina (B1), Acido Fólico (B9), Vitamina B12, Hierro.	

*C. D. R.: Cantidad diaria recomendada por la C. E. E.

®
FABRICADO POR:
RALSTON PURINA FRANCE.
1, PLACE CHARLES DE GAULLE
78180 MONTIGNY LE BRETONNEUX
EMB 40001 D PRODUCT OF FRANCE

Importado en España por:
GALLINA BLANCA PURINA, S. A.
R. S. I. 404189/CAT 402513/B

ESTE PAQUETE DE RALSTON HAPPY CHEX SE VENDE POR PESO Y NO POR VOLUMEN. ES POSIBLE QUE A LO LARGO DEL TRANSPORTE Y MANIPULACIÓN SU CONTENIDO SE ASIENTE, APARENTANDO UNA DISMINUCIÓN DE VOLUMEN.

ESTE PAQUETE CONTIENE MÁS DE 8 RACIONES DE LAS ARRIBA RECOMENDADAS

HUMEDAD MÁXIMA 5 %
MANTENGA EL CEREAL CRUJIENTE DOBLANDO LA BOLSA

PESO NETO
250g ℮

	K	P	H
Proteínas	8	12,3	9,3
H. de carbono	81	67,3	80,7
Grasas	2	4	3,5
Colesterol	0	0	–
Fibra	4	10,3	–
Sodio	0,4	0,34	–
Otros	4,6	5,76	6,5
Total	100 g	100 g	100 g

Tabla 2. Comparación de valores nutricionales

Apartado 2

Aquí les entregué a los alumnos los precios de las cajas de cada marca tal y como aparecen en los expositores del hipermercado en el que realicé la compra. Especifiqué una circunstancia importante, entre otras, para poder comparar precios de marcas: que ninguna estuviese de oferta o promocionada. Les resultó evidente que en el caso de no cumplirse el requisito anterior, los resultados obtenidos estarían falseados.

Durante la realización de este apartado pude comprobar que la práctica totalidad de los alumnos ordenaban las marcas con respecto a los precios que aparecían en la hoja de la actividad. Aunque la ordenación era la correcta, una auténtica casualidad, no ocurría así con el procedimiento utilizado. Fue necesario explicarles que el precio que aparece en el expositor más bien podría denominársele «precio aparente», sobre todo si lo que perseguíamos era comparar precios.

No tardaron en caer en la cuenta de mis pretensiones cuando les planteé un problema similar: un paquete de pipas cuesta 5 pesetas, otro 25 y un tercero 50, ¿cuál es más barato? El dato decisivo: el peso.

Esta era la razón por la que la última pregunta del apartado sugería el cálculo del precio correspondiente a 100 g de producto. De esta forma los precios ya podrían compararse al estar referidos a una misma unidad de peso, en este caso el hectogramo. La mayoría recurrió a la sacrosanta regla de tres, que mientras las magnitudes que relacionen sean directamente proporcionales no causan estragos de ninguna clase[2]. El peligro de acostumbrarse a ellas estriba en no comprobar *a priori* ese requisito previo. Tomaron como datos los pesos netos y precios, obteniendo los resultados siguientes (Tabla 3). El apartado permitió introducir los métodos habituales de aproximaciones numéricas.

	K	P	H
Peso neto	375 g	375 g	250 g
Precio aparente	235 pts.	175 pts.	228 pts
Precio de 100 g	63 pts.	47 pts.	91 pts

Tabla 3. Comparación de precios

Apartado 3

En principio no dejé las calculadoras para que el ejercicio fuese un mero repaso de operaciones con números decimales. Y como era previsible, ocurrió de todo. Resultados sorprendentes. Fue necesario recordar cómo se multiplicaban números decimales. En cualquier caso, los resultados que se obtienen no coinciden, salvo en el caso del cereal H, con los que aparecen en la hoja de datos (tabla 4).

Energía en Kcal([3]) = 0,24 Energía en KJ

	K	P	H
Valor esperado	384 Kcal	360 Kcal	392 Kcal
Dato real	380 Kcal	354 Kcal	391 Kcal

Tabla 4. Conversión de unidades de la energía

Apartado 4

Realmente se trataba de una broma. Si se hubiesen fijado con atención en la tabla de la hoja de la actividad, se habrían percatado, al sumar verticalmente, que obtenían 100. Por tanto, los valores que obtuvieron eran tantos por ciento realmente y no se necesitaban cálculos adicionales.

Aunque algunos no tardaron en reaccionar, otros no sólo no supieron qué hacer sino que respondieron como reproduzco textualmente: «Sí, habrá que realizar operaciones porque para averiguar un porcentaje hace falta operar».

Este singular episodio, más frecuente de lo que pueda imaginarse, les ocurrió a unos alumnos cuyas destrezas en matemáticas eran aceptables. La conclusión que podemos extraer es que, a veces, el problema no está en las mate-

2 Propóngase, tras un ejercicio sencillo de regla de tres simple directa, el siguiente: «Un vehículo sale de Sevilla hacia Huelva y, manteniendo una velocidad constante de 90 Km/h, tarda en llegar 1,1 h. Si viajase a 120 Km/h, ¿cuánto tiempo invertiría? Más de uno dirá ¡1,47 h!

3 Mejores aproximaciones pueden obtenerse tomando la constante de equivalencia con el valor: 1 J = 0,2392344 cal, pero jamás llegan a coincidir con los expuestos en las cajas de las distintas marcas. tan sólo el cereal H sería el que, por aproximación a las unidades, coincidiría exactamente. En cualquier caso, este es un ejercicio diseñado para operar con decimales y no para discutir las razones de las aproximaciones obtenidas.

máticas sino en las dificultades de comprensión lectora del problema. O, quizás también, en la falta de costumbre que pueden tener en reflexionar primero acerca de los datos con los que cuentan y el problema que se les pide resolver. La generalizada tendencia a aplicar de inmediato los algoritmos aprendidos es la causa de curiosos despistes como el que acabamos de referir.

Apartado 5

Las tres marcas recomiendan una ingesta diaria de al menos 30 g de producto. Si esa fuese la cantidad habitual en un desayuno o merienda, se trataba de justificar la afirmación expuesta (ver hoja de datos), aunque con letra pequeña, en los envases del producto:

Este paquete contiene más de_ raciones de 30 g

Una infinidad de sencillos problemas aritméticos son susceptibles de diseñarse con este dato. La casi totalidad de los alumnos no tuvieron dificultad en multiplicar el número de raciones que estimaba cada marca por el factor constante 30 y obtener así una cantidad de producto algo inferior al peso neto.

Apartado 6

La resolución de este apartado requirió repasar las unidades de masa en el S.M.D. así como los múltiplos y los submúltiplos de más frecuente uso. Concretamente el mg y el µg. Como era lógico, hizo su aparición la notación científica y, con ello, las operaciones con potencias de diez. Potencias, claro está, de exponente entero. El primer problema consistía en reducir a mg todas las vitaminas para poder sumar finalmente y comparar las diferentes marcas. La suma con papel y lápiz de números decimales resultó una epopeya y el apoyo logístico de las calculadoras casi empeoró el teatro de operaciones. Hubo que recurrir a la pizarra, en la que pacientemente, se dirimió el combate.

A la vista de las circunstancias narradas, que ya imaginé al diseñar la actividad, no se me ocurrió complicar las cosas aunque lo hubiese deseado. Podría haber utilizado los datos que aparecen en el cuadro de las vitaminas (ver hoja de datos) para calcular las cantidades absolutas que recomienda la C.E.E. que se consuman a diario. De haberlo planteado, quizás no hubiese podido narrarlo. Por súbito infarto del profesor o motín generalizado del alumnado.

A1 final, el esfuerzo casi siempre se ve recompensado por algún éxito. En este caso, la tabla 5.

Quedó de manifiesto la *victoria* del cereal P en la comparación efectuada.

	K	P	H
B1	1,2	1,2	1,2
B2	1,3	1,4	1,4
B3	15	16	15
B6	1,7	1,8	1,7
B9	0,167	0,250	0,170
B12	0,0008	0,001	0,0009
C	0	50	50
Hierro	7,9	10	7
Totales	27,27 mg	80,65 mg	76,47 mg

Tabla 4. Comparación de vitaminas y minerales

La opinión mayoritaria fue que, a la hora de decidirse por una determinada marca, lo primero debería ser la calidad, lo segundo el precio y, ante un eventual empate, que el producto se hubiese fabricado en España.

Apartado 7

Pretendía con esta pregunta propiciar en clase un debate acerca de la conveniencia de tener o no en cuenta, a la hora de elegir un producto, la procedencia del mismo. Con los cereales P y H no hubo dificultad alguna, ya que sus lugares de origen aparecían en la hoja de datos. Puede resultar interesante la narración del problema de la procedencia de los cereales K. En efecto, en la hoja de datos nutricionales no aparecía. Sugerí que se diesen un paseo, en horario no lectivo preferiblemente, por algún hipermercado para buscar el dato. Me consta que algunos así lo hicieron. El resultado aparece reflejado en la tabla 6.

La opinión mayoritaria fue que, a la hora de decidirse por una determinada marca, lo primero debería ser la calidad, lo segundo el precio y, ante un eventual empate, que el producto se hubiese fabricado en España. Sin embargo, no hubo acuerdo en el significado matemático de calidad de un producto[4]. Por el momento, la ventaja nutricional (tablas 2 y 5) se la llevaba el cereal P (el mejor en vitaminas y minerales así como con muy buenos resultados en proteínas y fibra) y en cuanto al precio, también la misma marca optimizaba este valor (tabla 3). Obviamente, coincidía en ese cereal la circunstancia de estar fabricado en nuestro país (tabla

4 Problema que resolvimos en la experiencia ya comentada (Roldán, 1996, 81).

6). Sin embargo, aún no había que lanzar las campanas al vuelo. Quedaba la prueba de fuego: el sabor. Más tarde comprobé que también el *crujir* del cereal era un parámetro que ellos valoraban especialmente (creo que influenciados por determinados spots televisivos).

K	P	H
EE.UU.	España	Francia

Tabla 6. Procedencia de los cereales

Apartado 8

Los alumnos se llevaron a sus casas las tablas calculadas y las reflexiones anteriores. Yo pretendía implicar así a sus padres. Propiciar un ámbito de discusión y debate, para posteriormente, en la clase, construir un panel de opiniones de las que poder sacar conclusiones. Sin embargo, no recogí las respuestas hasta no efectuar el experimento de valoración del sabor, última fase de esta actividad.

Capítulo III: De cómo el sabor equilibra la balanza finalmente

Las cavilaciones precedentes eran necesarias a fin de determinar, sobre el papel, la marca que presentaba los mejores resultados. No obstante, el sabor sería deterrninante en última instancia. Aquí surgió una disyuntiva. O se probaban los cereales con leche, con ciertas complicaciones técnicas superables, o se procedía a degustarlos directamente. Los alumnos fueron quienes decidieron la última opción. Los imprevistos con los que cualquier experimento debe contar, la vida misma es un experimento impredictible, hicieron acto de presencia cuando nos dispusimos a adquirir las cajas de cereales que veníamos investigando. En concreto, el cereal H no aparecía por ningún hipermercado. Durante las tres o cuatro escasas semanas a lo largo de las cuales habíamos desarrollado la actividad, la mencionada marca se había esfumado sin dejar rastro alguno. Obviamente no íbamos a reclamarla al Ministerio de Industria del país vecino, ni tampoco era asunto que compitiese a Paco Lobatón. Puestas así las cosas, optamos por la solución inmediata: se degustarían sólo los cereales K y P.

El procedimiento, análogo al descrito en el artículo al que venimos haciendo referencia (Roldán, 1996, 80), consistió en valorar los cereales de cada marca, sin conocerlas de antemano, con una calificación de 0 a 5. El cero cuando no gustaba absolutamente nada, y el 5, cuando el deleite fuese supremo.

Mejoramos, no obstante, el método con respecto a la experiencia ya aludida por cuanto en esta ocasión cada alumno tuvo ante sí, simultáneamente, los dos vasitos de cereales. Uno para cada marca. Esto posibilitó una comparación personal de los sabores de ambos, un contraste de sabores previo a la decisión de su valoración numérica.

También en esta tesitura ocurrió lo que era previsible. Tras la prueba científica, todos deseaban continuar con el desayuno. Además, los 55 minutos de clase resultaron insuficientes y el profesor de Lengua Española, a quien correspondía la siguiente hora, compartió amablemente los minutos requeridos. No así los cereales chocolateados de los que no quedaron ni los vasitos.

Los resultados los presento en dos bloques. En el primero, aparece un resumen de las diferencias percibidas por la casi totalidad de los alumnos en la degustación. Es el aspecto cualitativo. El segundo bloque presenta los valores medios[5] del sabor de cada cereal y sus correspondientes desviaciones típicas[6].

El cereal K tiene:
- Más sabor.
- El color más oscuro (luego... más chocolate).
- Mayor tamaño.
- Un crujido superior

Una observación, que se derivó de la segunda consideración de los alumnos, fue la siguiente: no necesariamente un color más oscuro implica mayor cantidad de chocolate. Pudieran existir colorantes, aunque ninguna marca los mencionase. Tampoco se aporta el dato de la cantidad de cacao presente en el producto.

El registro de esas diferencias cualitativas lo hicieron los alumnos simultáneamente a la valoración del sabor de cada marca. Ahora bien, en los vasitos donde se depositaron los cereales tan sólo aparecían los símbolos X e Y. Las marcas que ocultaban se darían a conocer una vez finalizada por completo la investigación.

Los resultados del sabor quedan reflejados en la tabla 7.

5 Calculados por los alumnos siguiendo las indicaciones del profesor y tras realizar un recuento en la pizarra.

6 Estas últimas no las calcularon los alumnos. La actividad incluía elementales conocimientos de estadística susceptibles de ser asimilados directamente.

	K	P
Media	4,6	2,6
Desviación típica	1,1	1,6

Tabla 7. Valoración del sabor

Las conclusiones resultaban evidentes. El sabor que más gustó, con diferencia, fue el correspondiente al cereal K. Por ello decíamos, cuando el mejor cereal desde el punto de vista nutricional era el cereal P, que aún había que esperar acontecimientos. Aproveché la ocasión para transmitir a los alumnos que éste es el carácter habitual de la investigación científica. No sale lo que deseamos, sino lo que tiene que salir.

Capítulo IV: El feliz desenlace

Finalmente, solicité de los alumnos las observaciones correspondientes al apartado 8.° que quedó pendiente en la primera fase de la experiencia. Como se recordará, allí se pedía a los padres que junto a sus hijos opinasen acerca de los criterios o argumentos que debían seguir tras los resultados obtenidos cuando fuesen a adquirir este producto.

En resumen, vinieron a decir lo siguiente:

- Todos los cálculos y observaciones están muy bien, pero los cereales K son más famosos y más antiguos. Por ello, son más de fiar.
- El cereal H es el más energético.
- El cereal P es el de mayor calidad.
- Hay que comprar el cereal más barato y que esté más bueno.

Para cerrar la experiencia y poder establecer el *después* al que aludía en el Capítulo I, propuse nuevamente a mis alumnos que manifestasen su potencial disposición de compra tras la información recabada (tabla 8).

	K	P	H
Potencialidad de compra	29%	65%	6%

Tabla 8. El *efecto* de la investigación

Sin embargo, es en un diagrama de barras donde resulta más impactante el contraste entre el *antes* y el *después* de la investigación:

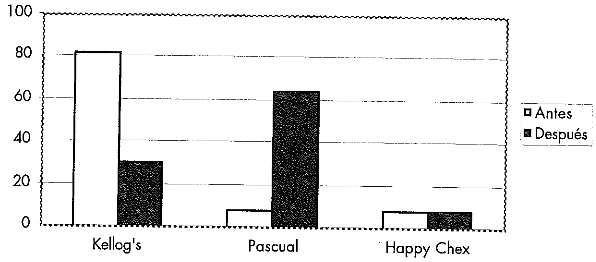


Gráfico 1. Tendencias de compra

Capítulo V: Epílogo

Si existe algún ámbito desde el cual poder contrarrestar los efectos de la publicidad es, sin duda, el de la Educación. Las matemáticas pueden colaborar, como hemos pretendido demostrar, en la consecución de ese objetivo.

Bibliografía

ROLDÁN, I. (1996): «Matemáticas con Leche. Transversalidad Nutricional», SUMA, n.° 22, 79-82.

VV.AA. (1996): *Cuadernos de la Educación Secundaria Obligatoria, Área de Matemáticas,* C.E.J.A., Sevilla.

Ismael Roldán
IES Virgen de los Reyes
Sevilla
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

SUMA 28
junio 1998, pp. 117-120

¿Dónde situar el hospital del Salnés?

Francisco Manuel Rodríguez Mayo

IDEAS Y RECURSOS

Se trata de una propuesta didáctica con la resolución de un problema real: ¿cuál es la ubicación ideal para un hospital comarcal (el del Salnés en Pontevedra)?
La resolución del problema conduce a varios métodos diferentes: un procedimiento analógico (búsqueda del punto de equilibrio de una serie de masas puntuales, que puede relacionarse con el teorema de Steinitz), un método estadístico (cálculo de la media de una variables estadística) y un procedimiento propio del análisis matemático (determinar el mínimo de una función derivable y de otra no derivable).
Finalmente, el problema obliga a una reflexión sobre el significado de la media y de la mediana de una distribución y del método de los mínimos cuadrados utilizado, por ejemplo, para el cálculo de la recta de regresión.

ESTA PROPUESTA didáctica para el aula de Matemáticas puede ser abordada desde una metodología próxima a la «resolución de problemas». Se trata de determinar la mejor ubicación para un hospital comarcal. Es un problema real, con las dificultades que supone manejar datos reales, pero que tambien puede ser formulado sin perder interés con ejemplos teóricos más simples, como los propuestos al final de este artículo.

Como se verá, su resolución puede efectuarse en varios niveles educativos diferentes:

a) Un primer nivel elemental, que solo necesita conocimientos básicos de Estadística y que incluso admite una resolución que no precisa de la herramienta matemática (segundo ciclo de la ESO).
b) Un segundo nivel de Matemática avanzada (2.° curso de bachillerato).

El problema

Un poco de Geografía: La comarca del Salnés abarca la mayor parte del lado sur de la Ría de Arousa (Pontevedra). Es una zona densamente poblada y con una gran dispersión de la población.

La sanidad en Galicia: El sistema de atención primaria en Galicia se basa en la división del territorio en diferentes «Áreas de Saúde», en cada una de las cuales debe existir un hospital de referencia.

En el plan propuesto por la Xunta el Salnés, a pesar de su elevada población, figuraba incluido en el «Área de Saúde de Pontevedra Sur». La movilización de un grupo de ciudadanos agrupados en la «Comisión Veciñal pro Hospital do Salnés» consiguieron, mediante la aprobación de una iniciativa legislativa popular, que se crease el «Area de

Saúde do Salnés» que integra los municipios de Catoira, Vilagarcía de Arousa, Vilanova de Arousa[1], Cambados y Ribadumia.

En consecuencia se debe construir un hospital para esa zona. Pero, ¿dónde debe situarse ese hospital?

Resolviendo problemas

Primera aproximación

— Formular adecuadamente el problema haciendo explícitos los criterios en los que se debe basar la elección. Por ejemplo: ¿En que lugar debe situarse el hospital de modo que los desplazamientos que deban efectuar los posibles enfermos sean mínimos?

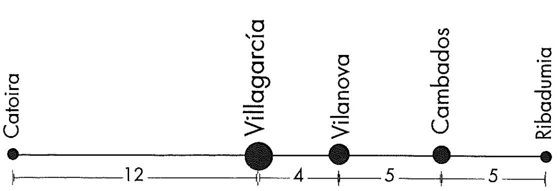
— ¿Qué datos necesitaremos?: La población de la zona y su distribución, las vías de comunicación existentes, lugares posibles, etc.

Municipio	*Población*
Catoira	3.653
Vilagarcía	31.853
Vilanova	15.104
Cambados	12.668
Ribadumia	4.005

— Reformular el problema en función de los datos. Es un primer paso hacia la «abstracción» y «matematización» del problema.

- Dada la gran cantidad de núcleos de población supondremos, para simplificar, que la población de cada municipio está concentrada en su capital.
- Si bien existen numerosas vías de comunicación, sólo existe una de importancia que une los núcleos urbanos de todos los municipios. El hospital debe estar en esa carretera.

— Matematizando: Representamos la carretera por un segmento y los núcleos urbanos por puntos a lo largo de ese segmento.



1 Con posterioridad a la elaboración de esta propuesta, se aprobó la segregación de la «Illa de Arousa» del municipio de Vilanova de Arousa, pasando a formar un municipio independiente.

Dada la dificultad de conseguir los datos del nuevo municipio, he optado por mantener la resolución del problema con los municipios de Vilanova y la Illa agrupados.

Buscar un método de resolución

Existen diferentes estrategias generales que pueden ser de utilidad:

— Buscar similitudes entre el problema y tipos conocidos para poder aplicar el correspondiente método de resolución, modificandolo ligeramente de ser necesario. Es el método favorito de nuestros estudiantes pero, en este caso, no parece ser muy útil al tratarse de un problema nuevo.

— Intentar resolver un problema similar pero más simple.

Por ejemplo, determinar el emplazamiento óptimo para dos pueblos con igual población. Este problema puede conducirnos a la solución.

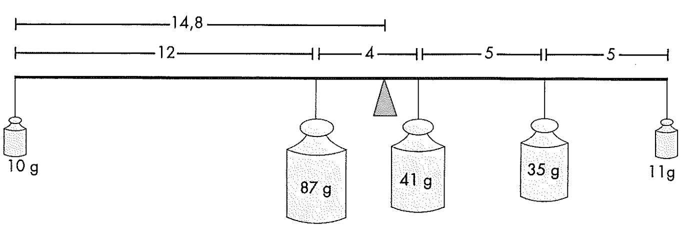
Solución 1

La solución ideal, cuando se trate de dos pueblos con poblaciones iguales, parece ser el punto *medio* entre los dos (permita el lector que, por el momento, demos por válida esta idea intuitiva).

Dado que el punto medio es el punto de equilibrio, podemos construir un modelo *analógico* de la situación y buscar ese punto de equilibrio:

1. Necesitamos un trozo de varilla roscada y diferentes pesas proporcionales a la población de cada municipio.
2. Colgamos las pesas en la varilla a distancias proporcionales a las reales.
3. Determinamos el punto de equilibrio.

La solución obtenida es un lugar situado entre Vilagarcía y Vilanova a una distancia de 14,8 desde Catoira.



Solución 2

El método anterior no es muy preciso. ¿Podemos determinar el punto medio numéricamente con lo que conseguiríamos una mayor precisión?

El primer paso para transformar un problema geométrico en numérico, es introducir coordenadas: optamos por elegir el origen en el primer pueblo (Catoira). Cada punto del segmento queda determinado por su distancia al origen.

La posición es una variable estadística discreta, x_i, que toma los valores 0, 12, 16, 21 y 26 siendo la frecuencia de cada valor la población del municipio respectivo, p_i.

La posición del punto de equilibrio será la media de esa variable:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot p_i}{\sum_{i=1}^{5} p_i} =$$

$$= \frac{0 \cdot 3653 + 12 \cdot 31853 + 16 \cdot 15104 + 21 \cdot 12668 + 26 \cdot 4005}{3653 + 31853 + 15104 + 12668 + 4005} = 14{,}774$$

Nota: Un buen ejercicio es comprobar que la solución obtenida no depende del sistema de coordenadas elegido.

Solución 3

Las soluciones anteriores se basan en la suposición de que la media es efectivamente el punto respecto al cual los desplazamientos son mínimos. Esa suposición obedece a una idea intuitiva pero no ha sido establecida formalmente.

Podemos abordar directamente el problema de determinar cual es el punto óptimo.

Si x es la posición del hospital, la función que describe el desplazamiento que efectúan los posibles enfermos es:

$$D = 3653 \cdot |x-0| + 31853 \cdot |x-12| + 15104 \cdot |x-16| + 12668 \cdot |x-21| + 4005 \cdot |x-26|$$

Nuestro método de obtención de mínimos consiste en derivar e igualar a 0, pero la función desplazamiento contiene valores absolutos y, por lo tanto, no es derivable. Sustituimos el valor absoluto **por elevar al cuadrado (ojo)** para conseguir la derivabilidad:

$$SD = \sqrt{3653(x-0)^2 + 31853(x-12)^2 + 15104(x-16)^2 + 12668(x-21)^2 + 4005(x-26)^2}$$

Derivando y simplificando:

$$SD' = \frac{3653(x-0) + 31853(x-12) + 15104(x-16) + 12668(x-21) + 4005(x-26)}{\sqrt{3653(x-0)^2 + 31853(x-12)^2 + 15104(x-16)^2 + 12668(x-21)^2 + 4005(x-26)^2}}$$

Igualando a 0 y despejando x (las operaciones se dejan indicadas para facilitar la interpretación de la expresión final):

$$3653(x-0) + 31853(x-12) + 15104(x-16) + 12668(x-21) + 4005(x-26) = 0$$

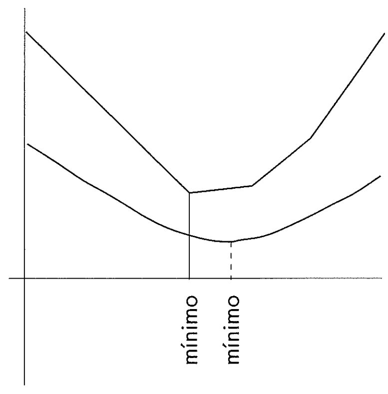
$$x = \frac{0 \cdot 3653 + 12 \cdot 31853 + 16 \cdot 15104 + 21 \cdot 12668 + 26 \cdot 4005}{3653 + 31853 + 15104 + 12668 + 4005} = 14{,}774$$

Como puede apreciarse, la expresión final es la misma que la utilizada para el cálculo de la media, lo que *casi* demuestra que nuestra suposición acerca de la media como posición correspondiente al desplazamiento mínimo es correcta.

Casi demuestra no es demuestra

El problema es que la función que hemos utilizado no es exactamente la que describe el desplazamiento.

Utilizando una calculadora gráfica o un programa de cálculo simbólico podemos encontrar el mínimo de una función sin necesidad de que sea derivable.



Sorpresa: La gráficas de la función desplazamiento (trozos de rectas) y de la función desplazamiento modificada (hipérbola) son las que aparecen en la figura y sus mínimos no coinciden.

La función desplazamiento alcanza el mínimo en x = 12 y no en x = 14,774.

¿Por qué en x = 12? x = 12 es la mediana de la distribución de las distancias.

Es evidente (ahora): La mediana divide a la distribución en dos partes iguales. Desplazarse una cantidad cualquiera a un lado de la mediana beneficia en esa cantidad, *como mucho*, a la mitad de los elementos de la distribución y perjudica, *por lo menos*, en esa misma cantidad a los elementos de la otra mitad.

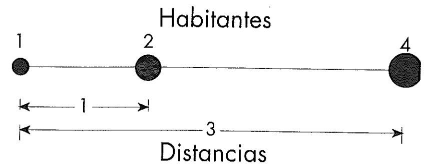
La media proporciona el punto óptimo cuando el criterio es el equilibrio (en este caso, la distribución homogénea de los gastos de desplazamiento entre la población). No olvidemos que la suma de las desviaciones respecto a la media es 0.

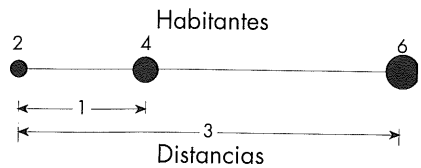
Quizás es el momento de que el lector reflexione sobre la importancia de los métodos algebraicos y de conceptos como el de media o el de recta de regresión (recta de mínimos cuadrados).

Nota final

El anterior es un problema real con las dificultades y complejidades que eso conlleva.

Problemas teóricos semejantes pero de mayor simplicidad en cuanto a su escritura son los siguientes (en el segundo ejemplo la mediana no corresponde a ninguno de los valores de la distribución):

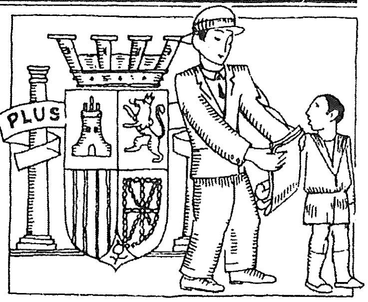




Francisco M. Rodríguez*
IES de Carril
Villagarcía de Arousa
ENCIGA

* La idea inicial del artículo (planteamiento y soluciones 1 y 2) surgieron de un trabajo conjunto de Roberto Vidal, Marina Germinás y el autor.

N.° 194. Un rentista ha vendido 15 títulos serie A (de 500 ptas.) de la Deuda interior 4 °/₀ del Estado al cambio de 62'75. ¿Cuánto ha cobrado?

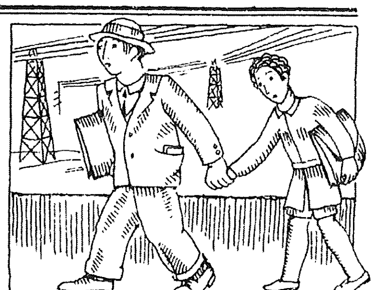


15 X 500 = 7500 ptas. nominales.

$$\frac{62'75}{100} \times 7500 = 4706'25$$

ptas. que ha cobrado.

N.° 195. Hemos comprado 25 obligaciones de 500 ptas. de la Chade 6 °/₀ al cambio de 102'50. ¿Cuánto hemos tenido que pagar?



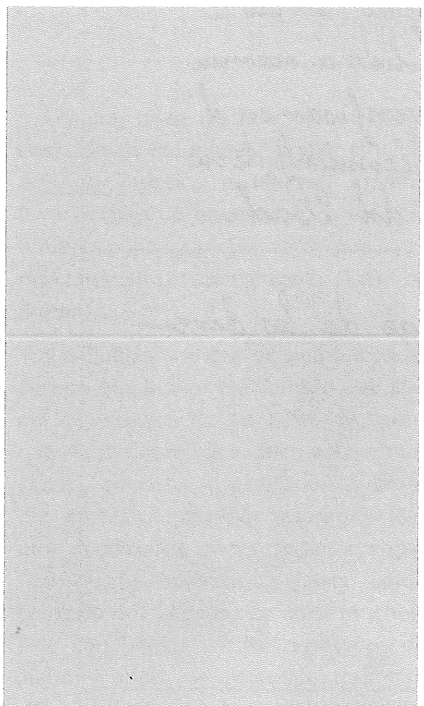
25 X 500 = 12,500 ptas.

$$\frac{102'50}{100} \times 12{,}500 = 12{,}812'50$$ ptas. efectivas.

SUMA 28
junio 1998, pp. 121-123

Federico siempre, no sólo este año

Pedro José Martínez Fernández

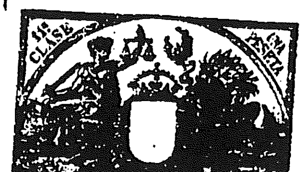


Se reproduce el examen de ingreso de bachillerato que hizo el poeta granadino Federico García Lorca en el instituto Nicolás Salmerón de Almería en 1908.
TAI

MISCELÁNEA

DEMASIADA GENTE ha querido convertir este año en el año de Federico, pero no lo han conseguido; entre otras razones porque Federico está todos los años y va a seguir estando con todas sus virtudes... y defectos. La razón por la que aparecen estas líneas en la revista SUMA no es otra que la de mostraros un documento que se encuentra en el archivo histórico del Instituto en el que tengo mi destino, el IES Nicolás Salmerón y Alonso de Almería. Este instituto tiene más de 150 años, se creó en 1845; como es lógico, por él han pasado todas las personas almerienses que han destacado de alguna manera: desde políticos como D. Nicolás Salmerón que fuera presidente del gobierno hasta, seguramente, algún licenciado en químicas que ejerce como barrendero, pasando quizás por alguna ama de casa famosa por su maña sacudiendo alfombras, o algún delincuente sagaz e intrépido. Sin embargo, mientras que de D. Nicolás oiremos hablar hasta la saciedad, de los demás no oiremos ni una sílaba; ni siquiera se habla de Albertina Cebrián y Alonso, la primera mujer almeriense que cursó estudios de bachillerato superior y que obtuvo la calificación de sobresaliente en todas las asignaturas entre 1880 y 1885. No se sabe qué fue de Albertina, quizás pasaría a formar parte de ese ejercito anónimo de mujeres denostadas por la Historia. Albertina tuvo que «sufrir» (tal y como consta en el expediente) el examen de ingreso, el mismo examen de ingreso que haría Federico años más tarde en ese mismo instituto, y el mismo que hicimos los que ahora tenemos más de 40 «tacos». Y ese es precisamente el documento al que aludía hace unas líneas. Podéis ver una reproducción del mismo en este artículo. Por un lado está la solicitud firmada por el propio Federico cuando no era más que un niño y por otro el examen que hizo de su puño y letra. Si observáis atentamente veréis que comete faltas de ortografía pero la división le sale perfectamente. Matemáticas

17 B.3.637.241



Iltmo. Sr. Director del Instituto Gral y Técnico de Almería.

Federico García Lorca, natural de Fuente Vaqueros (Granada) vecino de Almería y de diez años de edad, con la consideración y respeto debido á V.S. expone: Que desea ser admitido á examen de ingreso en los que se han de verificar en el próximo septiembre en ese Establecimiento de su digna dirección, para el estudio del Bachillerato, por lo cual

A. V. S. suplica se digne admitirlo, previo pago de los derechos correspondientes.

Dios guarde á V. S. muchos años

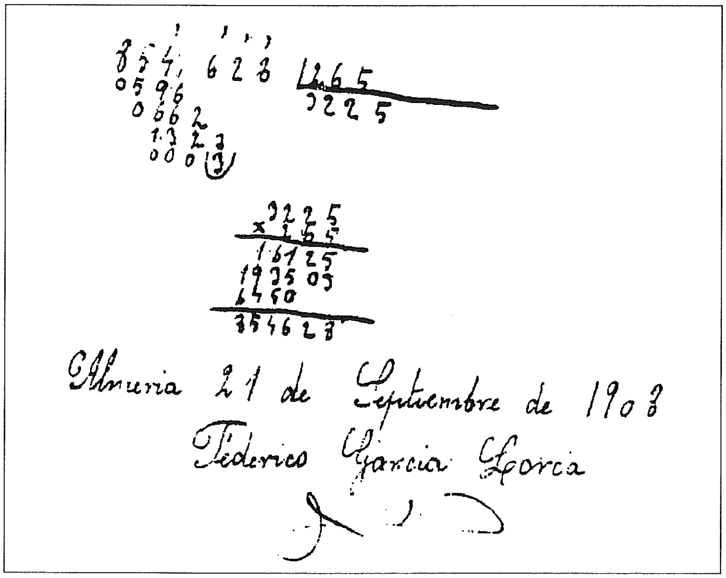
Almería 28 de agosto de 1908

Federico García Lorca

Solicitud presentada por Federico García Lorca para el examen de ingreso

Aquellos que allí vienen son los que traen el cuerpo de Crisóstomo, y el pié de aquella montaña es el lugar donde él mandó que lo enterrásen.

Ejercicio de «dictado» del examen de ingreso



«División» del examen de ingreso

y Lengua. ¿Han cambiado mucho las cosas desde entonces? Durante el tiempo que Federico residió en Almería tuvo ocasión de empaparse de las costumbres y maneras de vivir de por aquí, más tarde su pluma vomitaría *Bodas de Sangre.*

Voy a hablaros ahora de una anécdota curiosa que hemos encontrado este año en los ensayos de un taller de teatro que dirijo desde hace cinco años en mi centro, nuestros montajes están basados en textos propios; pero antes leemos decenas de obras de autores que van desde Aristófanes hasta Lorca pasando por Cervantes y otros muchos. Este año hemos usado fragmentos de algunas obras de Federico, que han sido salpicadas de nuestra ignorancia, impregnadas de nuestra ilusión, manchadas por nuestras ansias y precisamente mientras leíamos un fragmento de *Yerma*, descubrimos lo que podría ser un desliz matemático de Federico. Se trata de una escena en la que Yerma habla con una vieja y trata de sonsacarle la respuesta a ¿por qué ella está seca?, refiriéndose a su esterilidad; en un momento dado de esa escena la vieja dice a Yerma «¿Por qué no? También yo vengo de traer la comida a mi esposo. Es viejo. Todavía trabaja. Tengo nueve hijos como nueve soles, pero, como ninguno es hembra, aquí me tienes a mí de un lado para otro». Sigue el diálogo y un poquito más tarde, en la misma página, habla la vieja de nuevo y dice «...Te vas a reír de mí. He tenido dos maridos, catorce hijos, seis murieron y sin embargo no estoy triste y...». Si tuvo catorce hijos y seis murieron le quedan ocho y no nueve. Quizás no sea un desliz y sea intencionado para poner de manifiesto la poca importancia que le daba la vieja al número de hijos, después de todo había tenido tanto...

...y nos sale Verde, Federico.
Verde intenso como la sangre de tu Alma,
cuajadita de silencios;
y la Luna se esconde debajo de tus llantos
cuando la muerte te mira cara a cara.
¡Y no quiero llantos!

Para terminar, una nana que escribí al infinito en una noche repletita de nieve hirviendo, pero que hoy va dedicada a Federico, y a Vicente Alexandre, y a Dámaso Alonso, y a Ángel Ganivet y a mi abuelo, y a todos los que cumplen cien años este año... estén vivos o muertos, y a todos los niños que no pueden dejar de manchar de ilusión el mundo que les rodea:

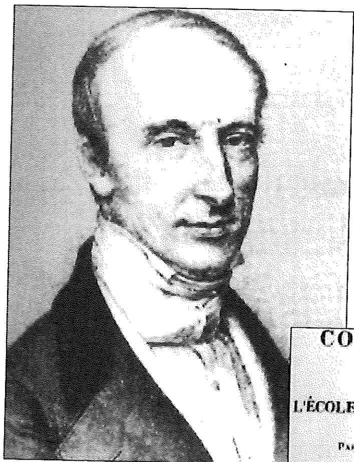
Caballito de cartón
con alas de arena,
deja que el niño monte en tu grupa
de color canela
y llévalo a ver la Luna,
Luna lunita, luna lunera.
Caballito de cartón,
caballito de quimera.

∞^{∞}

Pedro José Martínez
IES Nicolás Salmerón
Almería
SAEM Thales

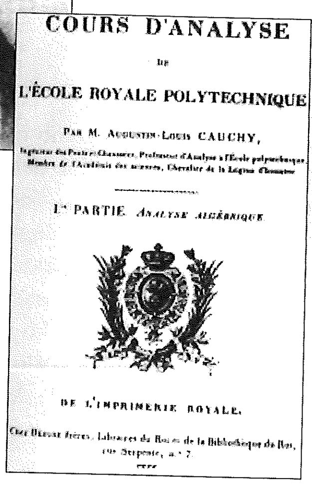
AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY

Cours d'Analise



Primera edición, 1821

La SAEM «Thales», en colaboración con el Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, va a publicar una edición facsimilar de un ejemplar del libro, que se conserva en la Biblioteca. Actualmente se está trabajando ya en su reproducción, por lo que consideramos que en breve podrá ofrecerse a los interesados.



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

La edición constará de 1.000 ejemplares numerados, impresos sobre papel verjurado conquerol y encuadernados en cartoné.

Estimamos que el precio de coste unitario estará alrededor de las 5.500 pesetas. Si usted está interesado en adquirir un ejemplar de esta joya bibliográfica, puede reservar un ejemplar cumplimentando el boletín adjunto y remitiéndolo a la mayor brevedad a la dirección que se indica.

Boletín de reserva

D. (Dª): ____

con domicilio en ____________________ provincia de ______________ C.P. ________

calle ______________________________ n.° ______ piso ______ letra _____ Teléfono ________

E-mail ______________ DESEO MEDIANTE EL PRESENTE DOCUMENTO RESERVAR ________ EJEMPLAR(ES) de la edición facsimilar de la edición de 1821 del libro Cours d'Analyse, de A. L. Cauchy, entendiendo que ésta sólo será efectiva una vez se haya publicado y haya efectuado el importe de su precio de coste más gastos de envío.

Las peticiones se atenderán por riguroso orden de entrada.

La SAEM «Thales» me comunicará la fecha de publicación, así como su importe exacto, disponiendo desde ese momento de quince días para hacer definitiva la reserva.

Fdo.:

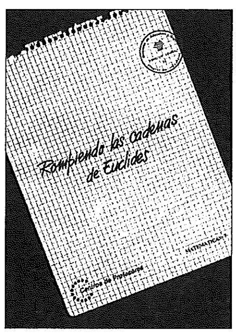
Enviar a: SAEM «Thales», Facultad de Matemáticas. Apdo.: 1160. 41080 Sevilla

SUMA 28
junio 1998

Un libro para la ilusión

ROMPIENDO LAS CADENAS DE EUCLIDES
David Fielker
MEC, Madrid, 1987
ISBN: 84-505-6503-0
85 páginas

Huyendo del homenaje. Buscando una revitalización. Quisiera traer aquí, a este rincón para la nostalgia de las reseñas «largas» de SUMA, una obra clave. Un catalizador de la reflexión didáctica de nuestro país en las dos últimas décadas. Uno de los pilares del cambio curricular en matemáticas en los primeros momentos de su gestación. Ahora bien, precisada la intención, surge el problema: ¿Qué libro elegir? Estaba por una parte el *Informe Cockroft*[1]. Destinado a desencadenar profundos cambios en los programas de matemáticas del mundo entero, nunca desempeñó plenamente su papel. A pesar de ello sigue siendo un referente didáctico inexcusable. Una sabia colección de consejos. Una disección en vivo de las carencias de un modelo de enseñanza-aprendizaje que lleva decenios agonizando. Por otra, *Es posible*. Su título es un canto a la esperanza. Su contenido un ejemplo vivo de compatibilidad entre investigación en matemáticas, construcción del conocimiento y una dinámica activa de resolución de problemas. Finalmente: *De 12 a 16*. Un texto perfectamente actual. Un paso adelante de difícil retorno.



Al final me elegí éste. Las razones «técnicas» que justifican la decisión serían perfectamente válidas, en mayor o menor medida, para todos ellos. Pero una vez más se impuso la vena sentimental.

Tres razones y media para una elección

La primera porque estuvo en el origen de aquella apuesta fuerte y arriesgada de las autoridades educativas, que más tarde supimos que era un farol. Su historia discurre paralela a la de la Reforma. Y no me refiero a este híbrido cochambroso en el que nos movemos, sino a la otra. A la de aquellos que, pese a las dificultades, la viven cada día.

RECENSIONES

La segunda porque marca un antes y un después en la concepción de la asignatura de matemáticas. En ese sentido resulta emblemático. Tras el *How to solve it* de Polya, los libros sobre resolución de problemas surgieron como setas. Todos pura teoría. Fielker se atrevió a utilizar las vivencias de sus alumnos como argumento.

La tercera porque, dentro de este compromiso con una didáctica renovada, hace una apuesta humanista sin paliativos. No sólo para el alumno, también para el profesor[2]. Un envite que marcó, que marca, diferencias. Diferencias que a la postre han resultado insalvables. Incluso entre quienes defendían una renovación tibia (de corte socialdemócrata) y los que mantenían, y mantienen, una postura más radical a favor de la libertad y la creatividad. O sea, del individuo.

Y aún me atrevería a vislumbrar una cuarta.

La filosofía de las matemáticas, arrastrada a esa particular guerra santa entre logicistas, constructivistas y formalistas, había acabado por aceptar la fundamentación como fin único y exclusiva razón de ser, hasta el punto de confundirse con la metamatemática. El positivismo lógico, de manos de la escuela de Viena, acabó por conducir al resto de la filosofía de la ciencia a ese callejón sin salida. Fracasados todos estos intentos[3] fundacionales Popper, Polya y Lakatos vuelven la vista hacia las matemáticas informales como sinónimo de creación, más allá de una crisis de fundamentos no resuelta. Este libro aparece en escena como un reflejo en la práctica docente de esta nueva orientación en filosofía de la ciencia.

Van tomando cuerpo unas matemáticas en permanente proceso de elaboración, en las que la inducción, una vez que Popper le negara su capacidad justificativa de las leyes científicas, adquiere un papel relevante como génesis constructiva del conocimiento científico en general, y del matemático en particular. Se gesta así un modelo filosófico incompleto que se ajusta mucho mejor que cualquier otro, en opinión de Ferferman, a «una disposición de ánimo progresivamente más crítica y [sobre todo] menos autoritaria». En él se encuadraría la obra de Fielker y su visión de la enseñanza. También él cree en una ciencia en permanente estado de transformación; con una comunidad científica, la clase[4], en la que el método inductivo no tiene a su cargo la validación sino la generación de hipótesis, especulaciones, conjeturas y contraejemplos. En el que las pruebas y refutaciones que se van generando tienen la virtualidad de someter a consideración del usuario la rentabilidad matemática y «moral» de los diferentes esquemas de pensamiento en uso. Al tiempo que construye el propio conocimiento matemático, que nace más con aspiraciones de consenso que de infalibilidad. Por eso una didáctica basada en la resolución de problemas. Por eso un método cuasiempirista en el que la alumna (y el alumno) como el matemático profesional, fía a la intuición, casi siempre vaga pero fructífera y, sobre todo, convincente. Avanzando a tientas, cual sonámbulo[5], precisando, retrocediendo,... Cercando la solución, una y mil veces, antes de alcanzarla.

Porque buscan a la investigadora, al artista, al Maestro, a la Maestra.

Por eso, a mi entender, una formulación de la clase que huye del formalismo y el logicismo (del dogmatismo, en definitiva) está más próxima que cualquier otra a las nuevas consideraciones humanistas de la filosofía de la ciencia. Por eso supone una apuesta de futuro de gran envergadura. Pero, como todas las que se adelantan a su tiempo, acaban durmiendo en el ostracismo de la incomprensión hasta que un renacimiento de las mentalidades sepa encajarlas.

Sin embargo, como dije antes, las razones sentimentales se impusieron a cualesquiera otras. Y elegí este libro como podía haber elegido *De 12 a 16* o *Es posible...*

Porque abren ventanas a la imaginación, corazones al desconcierto.

Porque excitan sensibilidades y estimulan el pensamiento divergente.

Porque desconfían de la evidencia y ponen cerco a la rutina.

Porque discrepan de la obviedad.

Porque hacen dudar de los sentidos. Porque los provocan.

Porque ponen en entredicho «las buenas costumbres».

Abriendo puertas a la libertad, al apasionamiento, al entusiasmo...

Desterrando la indiferencia. Liberando la emoción.

Recuperando el placer de la forma.

Porque permiten disfrutar de las matemáticas. Entusiasmarse con ellas.

Porque trasmiten lo que viven.

Porque no buscan al pedagogo, a la sicóloga o al metodólogo.

Porque buscan a la investigadora, al artista, al Maestro, a la Maestra.

Pero también, porque la versión española de este libro, como la del constructivismo, el LOGO o la Reforma Educativa, murió antes de haber nacido. Superada, antes de cualquier validación práctica, por virtud de la crítica de quienes apuestan con descaro por las bajas pasiones, adornadas de opiniones mordaces, apasionadas y falaces. De quienes tomando el miedo como argumento optan por la mediocridad para no dejar al

1 Desarrollado en 1982 bajo el título *Las Matemáticas sí cuentan* es mucho más conocido por el apellido de su director.

2 También para la alumna. De igual modo para la profesora.

3 Los logicistas sumiendo en un farragoso enredo lo que pretendía ser claridad y sencillez, los constructivistas arrastrados por su propia impotencia reconstructiva y los formalistas, víctimas de los teoremas de incompletitud de Gödel.

4 En una disposición intelectual muy similar a la de los personajes de Lakatos en *Pruebas y Refutaciones*.

5 En el sentido con que A. Koestler da título a su historia de la cosmología.

descubierto la suya propia. La historia de este libro es la historia del perdedor. A pesar de la provocación que supone su título, ni el morbo animó su lectura. No supuso peligro alguno para el «establishment». No precisó de la acrimonia del encumbrado teórico de turno. Simplemente pasó desapercibido. Su título llama a la revolución. Pero revolución es sinónimo de ruptura y eso exige un desgarro interno. Soltarse de la ubre del formalismo que nos amamantó más de 17 años[6] y que pretendemos que nos siga alimentando de por vida. Es pues la historia de lo que pudo haber sido y no fue. El ejemplo más carismático de cómo cualquier idea, por excelente que sea, puesta en la mesa del burócrata o en boca del político de turno se pudre al instante.

Hurgando en su intimidad

Choca en primer lugar el artífice de la edición. Pero es que hubo un instante glorioso, aunque efímero, en que el propio Ministerio se creyó sus propuestas. En estos momentos, en que aquella visión del mundo educativo ha quedado reducida a dudosos cambios estructurales, puede parecer mentira que alguna vez el MEC hiciera un envite decidido por la imaginación. Pero sí, existió ese minuto fugaz en el que este país tuvo un proyecto vital para la educación de sus progenies. Por el camino se perdieron los medios financieros necesarios para llevarlo a cabo. Y aparecieron los miedos. Y se hicieron fuertes las posturas más inmovilistas que empezaron a clamar airadas su propia impotencia. Y cayó el ministro. Y nadie, ni desde la izquierda política, ni sindical, se atrevió a dar mucho más que pasos vacilantes y timoratos. Pese a todo, se aprobó en el Parlamento, sin apenas oposición, una Ley Orgánica que daba luz a un muerto. Desapareció la idea de currículum abierto. Y se dilapidó con ella el entusiasmo y el trabajo de aquella tribu de ingenuos que llegamos a creer en el final de esa larga etapa en la que la escuela se había adjudicado como finalidad única la transmisión ideológica de un modelo social que cree en la sumisión, la obediencia y el sufrimiento como valores supremos. Y que teme a la creatividad y al libre pensamiento más que a la peste.

Choca en primer lugar el artífice de la edición. Pero es que hubo un instante glorioso, aunque efímero, en que el propio Ministerio se creyó sus propuestas.

Es cierto que aquel intento partió de la propia vitalidad del profesorado, entonces agrupado en un sinfín de Movimientos de Renovación Pedagógica[7]. Y que surgió de una necesidad apremiante: El modelo transmisivo, completamente agotado, había puesto de manifiesto su ineficacia e incapacidad para transferir conocimientos. Pero no es menos cierto que padeció, casi desde su inicio, un marcado rechazo social[8]. El rechazo de una sociedad que evolucionaba hacia un modelo económico globalizado (por ende dependiente) y hacia un sistema de pensamiento único en el que hasta los más íntimos anhelos los diseña la publicidad.

Hoy podemos decir sin ambages, para tranquilidad aparente y espuria de muchos (sobre todo si son docentes) que todo sigue igual[9]. Se instrumentaliza la memorización como motor primordial del aprendizaje y la disciplina algorítmica como objetivo fundamental. Como sinónimo de oficio. Definición parca y sutil, pero lapidaria, de lo que debe ser el quehacer matemático de un adolescente.

En otros aspectos parece haberse dado un paso atrás. Seguir pensando que se pueden llenar las cabezas vacías con el único recurso de nuestra palabra, nuestra claridad expositiva y nuestro poder de convicción, incluso de seducción. O que se puede mantener el interés mediante la propia coherencia interna de la asignatura, o a través del miedo a un futuro dudoso cristalizado en un examen. A estas alturas del siglo de las comunicaciones, con un dominio casi exclusivo de los modelos de transmisión visual rápida colorista y seductora, ya no es una ingenuidad, es un suicidio. Una insensatez tan grande como pensar que las cosas son aprendidas por el mero hecho de ser contadas, incluso repetidas (examinadas). Podemos seguir en esa huida hacia delante que muchas veces no se sabe si es hacia la jubilación o hacia la locura. Seguramente tenemos derecho a cargarnos el constructivismo como referencia didáctica sin haberle dado la más mínima concesión. Por haber sido ungido de carácter institucional. Una postura apriorística y presuntuosa que inevitablemente debería abocarnos a buscar una alternativa. La realidad lleva años persiguiéndonos. Tantos como nos venimos refugiando en la repetición mimética. Tantos como llevamos usándola de coartada. Lustros escondidos en el silencio de un fracaso evidente, del que somos sabedores y del que una incontinencia irreflexiva, todavía hoy, se atreve a proclamar sin pudor: ¡Pero si a ese grupo le di yo clase el año pasado!; ¡Claro que vimos las derivadas!, !es más, ni uno sólo pasó que no aplicara correctamente la regla de la cadena!, etc. De ahí que este libro siga plenamente vigente. Por eso esta referencia huye del homenaje al decadente y apuesta por la vitalidad.

Al traspasar la primera página...

Pero... ¿de qué trata el libro? Difícil resumirlo en una frase. Minucias. Propuestas aparentemente fútiles. De esas que, a priori, cuesta creer que vayan dirigidas a la clase de Matemáticas. A lo sumo al Taller.

6 Antes empezaba la escolarización a los 5 años.

7 Todavía conservo un listado de 1984 con 66 de ellos en el área de Matemáticas.

8 ¡Con qué alegría utilizamos esta palabra en la que se generaliza a todo el pueblo el pensamiento de sus periodistas o sus dirigentes políticos, económicos y religiosos! Siendo, además, que tan sólo los segundos son electos.

9 Al margen de los cambios estructurales (y de la cosecha de nuestro desprecio) que han impuesto unas aulas con unas peculiaridades que nos han pillado sin capacidad de análisis ni de reacción para ofrecer alternativas, anclados en el modelo único, elitista y rígido que acabará por afectar, más si cabe, nuestra salud profesional y mental.

Así es, habla de esos conceptos inequívocos que todos conocemos desde que éramos escolares. De esas verdades profundas que jamás nadie puso en duda y que, sin saberlo, conforman las dictaduras interiores que atenazan el pensamiento. Que asientan esa tiranía que nos fuerza a ver las matemáticas como un edificio acabado que tan sólo es posible transitar de forma ordenada y algorítmica. Plano en mano, con mucha disciplina, controlando las iniciativas personales. Sin hacerse concesiones más allá de los estrechos pasillos tantas veces visitados.

Pero el arte de Fielker radica precisamente en eso. En preguntar lo obvio. Obvio no por evidente sino por estar situado, justo, delante de nosotros. Por formar parte de ese interminable listado de axiomas privados sobre el que nadie, antes que él, parece haber hecho preguntas. Preguntas simples en su planteamiento, pero profundas en intención. Preguntas hechas con ojos de niño, aparentemente ingenuas. Las mismas que llevaron a Ifrah a través de los cinco continentes y a las que ha dedicado su vida. Y es que esas preguntas tienen una virtud especial. Dirigidas a la línea de flotación de nuestras creencias, permiten dinamitar unos cimientos armados de ideas preconcebidas y con ello reconstruir de nuevo el edificio entero. Y permite hacerlo con la libertad y la seguridad de quien se cree, ahora sí, el rey del Universo. De quien ha perdido el miedo para adentrarse en el bosque. De quien no necesita plano, ni brazo de lazarillo, ni maestra, ni guía para recorrer todos los caminos y transitar todos los senderos. De quien se sabe independiente de una meta. De quien intuye que ya nunca necesitará alcorces porque está irremediablemente destinado a disfrutar en cada rincón.

Por eso el libro está dirigido a espíritus libres, o cuando menos capaces de asumir riesgos para serlo. Por eso, si usted prefiere unas Matemáticas en gris en lugar de en rojo y negro, no lo lea, por favor. La probabilidad de desestabilizarse es demasiado alta. Sea prudente. O al menos reconozca que se lo advertí.

El texto, que incluye propuestas de trabajo, suficientes por sí solas para llenar de contenido un curso entero, es mucho más que un listado de actividades de aula comentadas al hilo de su puesta en escena. Es una invitación al lector a generarlas. Aspecto fundamental si se tiene en cuenta que uno de los mayores riesgos que conlleva una dinámica continuada de resolución de problemas es el envejecimiento de sus situaciones didácticas. Sin embargo, resulta alentador percibir desde el primer capítulo que cualquier pregunta es buena si se es ambicioso en la respuesta. ¿Cómo clasificar los cuadriláteros en función de sus diagonales? ¿Qué sucede con las de un poliedro cuando se construyen con hilos de diferentes colores según su longitud? ¿Cuántas de las de un polígono no se cortan entre sí?...

Huyendo de maquillajes teóricos y fundamentaciones altisonantes constituye una propuesta de diálogo permanente con el lector, que camina desde un ¡es posible plantearse un cambio! hasta un !elabore Vd. su propio currículo!, ambicioso y alternativo, de Geometría sintética. Pasando por un ¡así funciona en clase! y un ¡elabore Vd. sus propias preguntas! que es como decir sus propios problemas, sus propias investigaciones. Por eso es una referencia permanente en cada momento del periplo profesional de cada cual. Útil cuando se está comenzando a aplicar una didáctica de resolución de problemas y cuando unos años más tarde el adocenamiento, la rutina y el desgaste de las actividades varias veces repetidas te persigue. Y lo es incluso cuando las autoridades educativas manifiestan su desconfianza en el docente imponiéndole unos cuantos ejercicios de estilo de corte burocrático. Todo ello en 74 páginas de profundo y extenso programa de trabajo para grupos y departamentos de profesores, previo a cualquier intento de secuenciación en geometría.

...ninguna pregunta es ingenua. La simplicidad sólo cabe en las respuestas. Una duda invita a otra duda y ahora es uno mismo quién entrevera sus propias inquietudes. Los teoremas se desgranan de forma natural, al principio ingenuos, luego sutiles, más tarde sofisticados, siempre seductores.

Asomar la cabeza al abismo

Comienza con una pregunta desalentadora. Con una referencia al santasantorum griego: ¿Cómo se clasifican los cuadriláteros? Una caracterización, que más tarde asumirían sin chistar los árabes y con ellos todo el mundo cristiano occidental, hasta nuestros días. Intrascendente desde el punto de vista del desarrollo de las Matemáticas pero no del de su aprendizaje. Una clasificación incompleta que mezcla los criterios atendiendo de forma sesgada y parcial tan sólo a algunas de sus características. Un buen ejemplo de lo que no debe ser una clasificación. Una oportunidad de oro para establecer definiciones al hilo de las clases de equivalencia que van surgiendo.

En este primer capítulo, las preguntas se desgranan lentamente, como alimento sutil para mentes inquietas. Se percibe al instante que no será posible leerlo de una «tacada». Imposible tragar deprisa unas dudas tan simples como inquietantes. La curiosidad está activada. La tentación de coger el lápiz es muy fuerte. Son demasiado asequibles. La respuesta parece estar a la vuelta de la esquina. Pero ninguna pregunta es ingenua. La simplicidad sólo cabe en las respuestas. Una duda invita a otra duda y ahora es uno mismo quién entrevera sus propias inquietudes. Los teoremas se desgranan de forma natural, al principio ingenuos, luego sutiles, más tarde sofisticados, siempre seductores. El edificio gana altura, lenta, imperceptiblemente, distinto al que acabamos de derribar. Pero el afán de saber va descubriendo nuevas grietas entre las que asoman inquietantes mundos inexplorados.

Los materiales surgen con naturalidad. Sin estridencias. Sin protagonismos excesivos. Para ayudar a la intuición. Como soporte visual del razonamiento. Nunca como objetos de estudio en sí mismos.

Los caminos se bifurcan, los senderos son cada vez más diversos y atractivos. «Permitidme una nueva digresión –dice el autor– aunque ya no sé si estoy en el tema o en la variación». Y entonces, cuando llevo varios días sin importarme lo más mínimo no haber pasado de las primeras páginas de ese primer artículo, aparece el comentario. Cauto, casi imperceptible: «Algunos alumnos (...) hallando los subgrupos». ¡¿Pero si se suponía dirigido a EGB[10]?! Y la reflexión queda en el aire para quien quiera hacerla: Elija: ¿les da usted una clasificación ya hecha y les obliga a que la memoricen o les deja disfrutar, como lo hizo usted misma, construyéndola?

Intento «leer» el siguiente capítulo. ¡Hummm el tema no me atrae! vamos a por el tercero. Este sí parece interesante. Bien, nos hemos concedido el derecho a romper el orden del libro, el pretendido currículo del autor. Nuestra atención ya no está en él sino en nosotros mismos. Ha dejado de interesarnos el programa previsto. Nuestro interés ha pasado del texto a la geometría.

Las preguntas siguen saltando ante nosotros, de improviso, como un atentado a nuestras creencias. Rompiendo las barreras educativas que sustentan nuestros bloqueos. ¿Qué es un cuadrilátero? ¿Ya tiene su definición? Póngala a prueba. ¿Lo es el que aparece en la figura 1? ¡¿Cómo?! ¿Que quiere cambiarla? La exclusión de monstruos que diría Lakatos se ha puesto en marcha. Por si nos quedaba alguna duda de la profunda asimilación del paradigma oficial que soportamos. ¡Bueno, está bien! lo de la figura 1 no es un cuadrilátero, pero lo de la figura 2 sí es un pentágono, ¿no? Al menos «siempre» se le tuvo por tal. ¿Le da miedo que lo sea? ¿Por qué? Arriésguese. Derribe de nuevo el edificio. Llame a la cita a todas las definiciones y teoremas sobre cuadriláteros que recuerde. ¿Cuáles se mantienen? Elaboremos otros nuevos. ¿Soportan las clasificaciones que acaba de construir esta definición «general» de cuadrilátero? Como el propio autor señala más adelante: «está en la esencia de las matemáticas hacer preguntas como estas». ¿Está dispuesto a dar un paso más? ¿Se atreve a vencer el vértigo de las tres dimensiones?

Los materiales surgen con naturalidad. Sin estridencias. Sin protagonismos excesivos. Para ayudar a la intuición. Como soporte visual del razonamiento. Nunca como objetos de estudio en sí mismos.

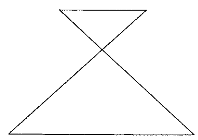


Figura 1

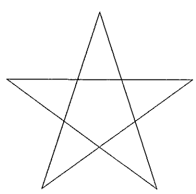


Figura 2

10 Así aparece en la primera página de la publicación española. Una comprensible, y más que disculpable, ingenuidad fruto de la necesidad del MEC de establecer referentes en aquellos momentos.

«Lo que los alumnos encontraron, en esta exploración, no fue una parte esencial de las matemáticas correspondientes al programa de nivel 0, sino la sensación de poder inherente a las Matemáticas (...)». «Parece que existe una gran cantidad de material fascinante sin salirse de los cuadriláteros, simplemente pensando en ellos de diferentes maneras, librándose el maestro de las tradiciones euclidianas, algo que no ha estado jamás en la intención ni siquiera en el umbral de tolerancia de la mayor parte de programas y libros de texto. Requiere también (...) una actitud especial respecto a la enseñanza (...), la creencia de que los procesos matemáticos son, al menos, tan importantes como los resultados; y (...) que esta actitud puedan ponerla en práctica los alumnos libremente» (pág. 14).

La importancia de los capítulos 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 es evidente. Tanto como los temas de fondo que los ocupan: Analogía, Reversibilidad, Manipulación Mental de Imágenes, Rigor (como sinónimo de proceder sistemático y exhaustivo), Generalización y Estrategias para Generar Problemas. Otros asuntos, no menos importantes, llaman nuestra atención al hilo las propuestas: la Invarianza, el Tratamiento del Error, el Posicionamiento ante la Prueba, el Espíritu de ir más allá, de trascender la propuesta,... El capítulo 9 es un adorno. Una concesión a la galería. Si usted leyó los anteriores, ya no lo necesita. Salvo para reafirmar sus convicciones con la complicidad.

Un quejido

Que la geometría desapareciese una vez de los currículos es un hecho que no debería escandalizar a nadie. El modelo euclidiano es demasiado formal. Sus métodos de trabajo exigen un grado de atención minuciosa y de rigor exquisito, difíciles de mantener para un adolescente, digamos, de clase media. Para más inri demuestra obviedades de las que hace rato que nos habían convencido la vista y la experiencia. Nadie va a negar su importancia histórica. Ni su valor como base de todo el desarrollo matemático ulterior. Pero la reflexión en didáctica surge de la imposibilidad de trasladar a la mente de forma lineal los resultados científicos, por fundamentales y trascendentes que sean.

Decía Freudenthal que hay una geometría para cada edad. Nadie duda a estas alturas del valor formativo del análisis de la forma. Ni de su importancia en la construcción del lenguaje algebraico. El reto consiste por tanto en superar a Euclides. En introducir en las aulas una geometría menos restrictiva, más especulativa, menos formal. Ese es el logro magistral de este trabajo de Fielker. Pero, sin entrar en otros aspectos que sobrepasan los límites de la propia disciplina, esa es también la cruel trascendencia del injustificado silencio de este libro. Tras él, el abismo siguió existiendo. Pocos se atrevieron a dignificar este tipo de Geometría. Los mismos que percibieron la importancia de lo que estaba en juego. La realidad ha acabado imponiéndose con su contumacia y pesadez habituales y la Geometría ha vuelto a desaparecer de nuestros currículos reales.

Pero cuidado, evitemos crear sinónimos donde no los hay. El autor habla en este libro de generar un programa de Geometría sintética alternativo a Euclides, lo que no significa que no se haga geometría euclidiana. Significa que se huye decididamente del modelo formalista tanto en la exposición, o en la forma de trabajo, como en la elección de las propuestas. Pero no en los temas elegidos. Podemos ir más lejos. Fielker propone una línea de actuación dirigida al profesorado inserta en una determinada manera de entender el trabajo en el aula. Ninguna de ellas, ni la propuesta al profesorado, ni el trabajo en el aula, implican en sí mismas un cambio de programas. Se puede asumir, algunos llevamos años haciéndolo, el reto de enfocar de este modo los actuales currículos. Los de la ESO ahora o los del BUP antes. El cambio de contenidos, imprescindible en el caso de la geometría, tiene otro origen y otra razón de ser.

Fielker toma como referencia el *Informe Cockroft*, como no podía ser de otro modo. Pero elige de su lista de Bases los temas «banales» como: «reconocer y nombrar», «saber apreciar» o «comprender y usar» y lo hace –según confiesa en la introducción– de un modo muy diferente al que refleja el informe. Loable actitud, en los tiempos que corren, ésta de concederse libertades frente a los referentes. De ser discrepantes aunque no disidentes. A partir de ahí hace una apuesta por una geometría euclidiana y sintética. O si se prefiere, por un tratamiento sintético de la geometría euclidiana. Por el operar directo con los objetos del espacio euclidiano (puntos, rectas, planos, figuras, formas,...) y sus relaciones mutuas. Para ellos reivindica el derecho a prescindir de los Métodos Euclidianos (así con mayúsculas) y del contenido Euclidiano. Una elección consciente que no rechaza otras formas de hacer geometría, al contrario. Su apuesta radica en la convicción de que ésta es más asequible a los alumnos. No parece necesitar a los esposos Van Hyele para llegar a esa convicción.

Acerca del autor

Fielker, que espero[11] que siga siendo profesor del Abbey Wood Center de Londres, fue editor de la revista *Mathematics Teaching* a principios de los ochenta, y Formador de Docentes durante casi 30 años en un Centro de Profesores. De allí se tomó la idea, una vez más, de institucionalizar y dar cauce a la formación permanente del profesorado, por aquellos primeros años de la década de los ochenta una necesidad sentida por una gran mayoría de los docentes. El resultado en España fueron unos centros de profesores marcados por el «tráfico de influencias» y un organigrama profundamente antidemocrático que agonizan en estos momentos víctimas de la inhibición administrativa, de los miedos y la ineficacia de sus gestores y de unos asesores sumisos, más preocupados de no tener que volver a su plaza, a menudo lejana, que del mínimo compromiso que les exige su trabajo[12]. Pero víctimas también de nuestro elitismo e indiferencia, que es como decir de nuestra insensibilidad, que nos impidió aprovechar una inversión anual aproximada de 100.000 pts. por docente y año. Un duro reflejo de nuestra incapacidad para trascender la condición funcionarial y entender nuestro trabajo dentro del marco de una profesionalización necesaria y una creatividad imprescindible.

Vaya a clase y lance una propuesta. La que más le guste de las que plantea Fielker o de las suyas propias y súmese al viaje con la inseguridad del neófito y el entusiasmo del converso. Recale en los procedimientos empleados. En los suyos y en los ajenos. Nunca defrauda el recorrido.

Dos reflexiones finales y un padrenuestro

Hemos hablado de hacer matemáticas. Pero ¿qué es hacer matemáticas? ¿Cómo responder a ello si jamás se nos dejó conjeturar, ni elaborar una definición propia fruto de una clasificación eficaz, un teorema surgido de una intuición fructífera, una generalización vivificadora o una demostración propia que trascendiera la mera aplicación directa del modelo deductivista? Si jamás hicimos matemáticas de verdad. Si ni siquiera nos contaron como las hacían otros. Si tan sólo nos hablaban del resultado. Si, presas de nuestro modelo formal, únicamente se nos permitía «redescubrir» el camino, empezando por el final, claro.

Pero en esto, como en el amor, de poco sirven las experiencias ajenas. Esa es la diferencia entre la película y la vida. Por eso la solución es fácil. Vaya a clase y lance una propuesta. La que más le guste de las que plantea Fielker o de las suyas propias y súmese al viaje con la inseguridad del neófito y el entusiasmo del converso. Recale en los procedimientos empleados. En los suyos y en los ajenos. Nunca defrauda el recorrido.

Ahora bien, si tras «leer» el libro todavía necesita razones para una apuesta decidida en este sentido, anote ésta, ahora, que como siempre, el profesorado de secundaria anda tan preocupado por la selectividad. ¿Por qué la aparición de matemáticos de lujo en la universidad española sigue la ley única del azar[13]? ¿No es razón suficiente para pensar que una instrucción formalista es un modelo improductivo y caduco? ¿Por qué conformarse con la situación? ¿Por qué no aspirar a la «producción» generalizada de matemáticos creativos, algo más que simples gregarios[14] ilustres? ¿Qué nos impide intentar otros modelos de formación inicial?

11 Eso significaría que los desmanes ingleses en política educativa de los últimos años no habrían conseguido cerrarlo, como él mismo vaticinaba en Galicia en 1988.

12 Generalización injusta, pero sociológicamente correcta, porque viene salpicada, hora aquí, otrora allá, de gloriosas excepciones.

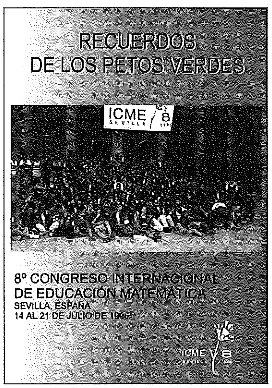
13 Émile Borel. *Las probabilidades y la vida.*

14 Argot ciclista.

Pero esa ambición requiere un último paréntesis. Mientras algunos intuíamos el riesgo de elitismo que podía llevar implícita esta forma de trabajo si se usaba para potenciar la diversidad en lugar de para mitigarla, existía un convencimiento generalizado de que propuestas de este tipo sólo beneficiaban a los alumnos intelectualmente más débiles. La aparente ingenuidad de la pregunta inicial que asume el papel de desencadenante aportaba su grano de arena a esa convicción. Nada más lejos de la realidad. Desde el primer día que llevas al aula una propuesta «tipo Fielker» es imposible dejar de percibir su efecto amplificador en las respuestas. El rendimiento de cada persona parece depender de forma exponencial de sus capacidades y de la propia potencialidad del problema. Algo del tipo R=PC. Resulta doloroso en estos momentos, tal como han evolucionado los acontecimientos, que esta preocupación la hayan resuelto, los pocos libros de texto que han simulado ocuparse del tema, por la vía de elegir actividades que hagan que la base sea menor que uno. No les vendría mal a algunos de sus autores empaparse de este texto de Fielker en vista del despiste que asola sus propuestas sobre rectas, planos, figuras, formas,... y de su aparente incapacidad para salirse de esquemas preestablecidos. Y a los demás aprovecharnos de las honrosas excepciones que nos ofrece el mercado.

Carlos Usón

RECUERDOS
DE LOS PETOS VERDES
J. E. Carrero
y E. M. Fedriani (coords.)
SAEM Thales
Sevilla, 1998
129 páginas

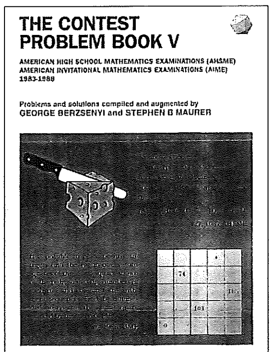


Aclaremos el título de esta publicación para quienes no tuvieron la suerte de estar en Sevilla en julio del 96 asistiendo al ICME-8. Un Congreso de la magnitud del ICME (recordemos que asistieron más de 4.000 congresistas) requiere el concurso de muchas personas trabajando en labores muy diversas. El Comité de Organización tuvo la buena idea de buscar la colaboración de alumnos de últimos cursos de carrera (fundamentalmente de Matemáticas) para que desempeñaran la labor de azafatas y azafatos, de tal manera que tuviesen libre parte del tiempo y pudiesen asistir a las sesiones y actividades científicas como unos congresistas más. En total fueron 288 alumnos, de diversas universidades españolas y algunas extranjeras, los que «a las órdenes» de Juan Núñez, se esforzaron informando, asistiendo a los participantes, repartiendo documentación, montando la cacharrería propia de estos acontecimientos, moviendo mesas, recibiendo quejas, en definitiva... trabajando duro. Y para distinguirlos (sobre todo por lo de las quejas) llevaban puesto un... peto verde.

Ahora ya se sabe de qué va este libro. Es la historia y las anécdotas (éstas también son historia) de las cosas que ocurrieron en Sevilla, bajo un prisma distinto de lo que suelen reflejar unas actas, contadas por unos espectadores especiales y que tuvieron una parte importante en el éxito del ICME-8.

A quien lo lea le resultará divertido, a ellos, a los «petos verdes», seguro que además les parecerá entrañable.

Emilio Palacián



THE CONTEST PROBLEM BOOK V
George Berzsenyi
y Stephen B. Maurer
Mathematical Association of America
286 páginas

Muchos de vosotros conocéis los AHSME (American High School Mathematics Examinations), concurso de problemas que se celebra anualmente en EE.UU. entre estudiantes de Secundaria, con una participación que supera los 400.000 y que la editorial Euler en sus números 8, 9 y 10 de su colección «La Tortuga de Aquiles» ha dado a conocer en España.

Menos conocidos son los AIME (American Invitational Mathematics Examination), concurso en el que participa un porcentaje de alumnos que en los AHSME superó determinada puntuación (aproximadamente participan 3.000 estudiantes). Ambos concursos sirven como selección para participar en la Olimpiada Matemática de los Estados Unidos.

En este libro que cito aparecen los problemas –junto con sus soluciones muy detalladas– propuestos en estos dos concursos entre los años 1983 y 1988.

Ya con esto, el libro creo que merecería la pena; muchos de los problemas de los AHSME y prácticamente todos los de los AIME son verdaderamente curiosos y los hay de todos los niveles: algunos para ser atacados por casi todos los alumnos y otros de nivel prácticamente de Olimpiada Internacional.

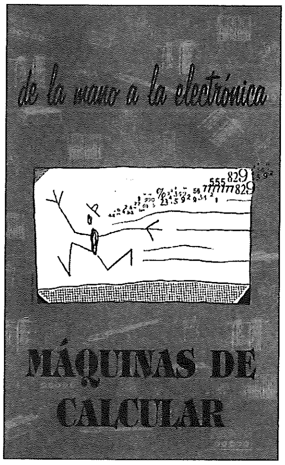
Pero el libro tiene mucho más:

- Un índice, para trabajar con un tipo específico de problemas si se cree conveniente.
- Referencias muy precisas de otros 75 libros de problemas análogos, así como de 17 revistas donde aparecen problemas muchos de ellos asequibles a alumnos de Secundaria.
- Una colección de problemas que "se han caído" de estos dos concursos, con comentarios verdaderamente interesantes sobre las razones que movieron a los organizadores a no proponer estos problemas.
- Información estadística sobre el porcentaje de aciertos en cada uno de los problemas.

Todo ello hacen de este libro una verdadera delicia para los que estamos convencidos que la resolución de problemas es el corazón de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Joaquín Hernández Gómez

DE LA MANO A LA ELECTRÓNICA
MÁQUINAS DE CALCULAR
Ángel Ramírez Martínez
Ed. CPR de Huesca
Huesca, 1997
ISBN: 84-88230-16-8
29 páginas



Suele decirse que lo bueno, si breve, es dos veces breve. Así sucede con este catálogo, escrito para la segunda exposición de máquinas de calcular organizada por su autor en la UNED de Barbastro. Un sucinto folleto de 28 páginas, que enlaza con verdadera maestría la historia de la ciencia (técnica), la didáctica y el compromiso personal de quien apuesta por «el placer de pensar y la poesía de los números frente al aprendizaje forzado de trabajos rutinarios».

Estructurado en tres partes, suscita la primera una profunda reflexión didáctica sobre una etapa de transición entre unos algoritmos socialmente superados y otros escolarmente rechazados. Este final de siglo, en que tan sólo el magisterio de forma mayoritaria, con su inmovilismo secular, mantiene abierta la trinchera frente a las calculadoras, con la excusa vana de que los algoritmos de lápiz y papel enseñan algo sobre las operaciones que construyen. Como si unos y otras no hubieran sido creadas para automatizar en lugar de para pensar. Como si la única diferencia no radicase en sustituir la mecánica electromagnética por la neuronal.

Quienes se aferran a los actuales algoritmos con el entusiasmo de la ortodoxia, frenando el desarrollo de otros nuevos con la inercia de su inmovilismo, olvidan que aquella aportación indo-arábiga, ahora tan elogiada, fue vilipendiada en su momento con idéntica energía. Calificada de satánica, su práctica sirvió de excusa para acercar a la hoguera a más de uno. Urge calibrar por tanto, al hilo de las ideas que se suscitan en este primer capítulo, si aquellas reticencias de los «abacistas», enmascarando intereses gremiales, difieren mucho de las actuales.

La secuencia de teclas en una calculadora genera un algoritmo altamente sintético. Su sencillez de ejecución, su exactitud, comodidad e inmediata mecanización (no precisa memorizar las tablas) lo hacen difícilmente superable. Su naturalidad es tal que parece como si no existiera. Por esa razón se ha impuesto en la sociedad de forma tan rápida y espontánea. Tanto, que encontrarse a alguien con un lápiz y un papel haciendo una «cuenta», fuera de la escuela, resulta hoy un anacronismo mayor que viajar en mulo.

Un algoritmo, del tipo que sea, busca la simplicidad y la eficacia en la automatización irreflexiva. No le preocupa en absoluto su alejamiento del concepto que explota. Ni tampoco ser críptico. Le obsesiona la utilidad y el estar al alcance de cualquier usuario. En ese sentido, las manos, los guijarros, el ábaco, las tablillas indo-arábigas, la calculadora mecánica, la electrónica,... no son más que hitos de un mismo camino. El que nos lleva a superar la inevitable percepción de que «no es digno del ser humano perder su tiempo en un trabajo de esclavos» (Leibnitz).

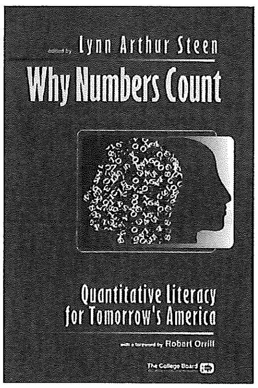
A la historia de esta apuesta colectiva por domesticar el trabajo rutinario, por liberar la mente de una actividad irrelevante, por poner a su disposición un tiempo precioso que dedicar a la reflexión, a la creatividad, al placer o al disfrute de la belleza, dedica Ángel la parte central de su libro. Engarzada entre el posicionamiento didáctico, del que hablábamos antes, y las posibilidades de trabajo dentro del aula de su último capítulo. Recorrer las diferentes etapas de este esfuerzo resulta, además de apasionante, clarificador. Porque el relato abre la puerta a infinidad de conexiones entre el desarrollo social, científico y técnico de Occidente en las últimas décadas de este siglo. Ahora bien, he de advertir, que quien, tentado por una primera aproximación al tema, se acerca a este libro buscando mayor detalle sufrirá inevitablemente la desazón que imponen las limitaciones de tamaño propias de una publicación de este tipo. Máxime si, como sucede en este caso, la intensidad del relato anima a profundizar en las tesis que plantea.

Propone el folleto, por último, recurrir a la reflexión. Para ir más allá de la pura automatización. Para aprovechar todas las posibilidades que ofrecen unas y otras formas de cálculo. Para plantear problemas sugerentes que permitan profundizar en el sentido de cada operación y en la razón de ser de su algoritmo. Para ese, o cualquier otro fin, liberan tiempo las calculadoras. A esa finalidad dedica también el autor, bajo el sugerente título del «ángel de los números», ese tercer capítulo.

Si a todo ello unimos el gusto exquisito con que se montó la exposición de Barbastro y el fuerte calado didáctico que rezumaban los carteles que la acompañaban, esta reseña se convierte en una invitación a las diferentes Sociedades de Profesores de Matemáticas a seguir la línea marcada por las JAEM de Madrid y organizar exposiciones similares a la que nos ocupa. Pero también a correr el riesgo de abrirlas simultáneamente a los centros educativos de la zona y a la sociedad en general. Que el balance, al menos en este caso, resulta positivo lo atestigua el elevado número de asistentes.

Carlos Usón

WHY NUMBERS COUNT
QUANTITATIVE LITERACY FOR TOMORROW'S AMERICA
Lynn Artur Steen (edit.)
College Entrance Examination Board
New York, 1997
ISBN 0-87447-577-5
194 + 28 páginas



El College Board es una organización, sin ánimo de lucro, fundada en 1900 e integrada por diferentes escuelas, facultades y organizaciones educativas que trabajan conjuntamente para ayudar a los estudiantes americanos en su transición hacia los estudios superiores. Para ello trata de conocer las necesidades de las escuelas, facultades, educadores, estudiantes y sus familias, etc., con el fin de desarrollar estándares de excelencia. Una de las acciones que promueve es la realización de estudios y publicaciones, encargadas a autores cualificados para escribir con autoridad, sobre temas relacionados con sus objetivos. Es decir, con la promoción universal a una educación superior, y la igualdad de oportunidades en el acceso a la misma. El trabajo que comentaremos a continuación, se enmarca dentro de estas coordenadas.

El ciudadano de finales del siglo XX se ve «presa de una creciente marea de números», en palabras de Lynn Arthur Steen, editor de este libro. Esta situación no ha sobrevenido de repente, sino que se viene fraguando a lo largo de los últimos siglos, pero se ha acelerado enormemente con la irrupción de los ordenadores y la explosión de las comunicaciones. Para aquellos que tienen competencia cuantitativa el ordenador es una herramienta que pone a su alcance toda la potencia de los números, lo que les permite manejar gran cantidad de información cuantitativa en la que basar sus decisiones. Pero los que carecen de ella, los «ciudadanos sin cultura numérica de hoy son tan vulnerables como los analfabetos en los tiempos de Gutenberg».

El peligro de que la población quede dividida en dos clases según cual sea su competencia numérica es real, lo que sin duda es inaceptable en una sociedad democrática moderna. Para tratar de evitarlo es importante describir en qué consiste hoy día la competencia cuantitativa de tal manera que sea posible adoptar acciones que permitan que sea alcanzada por todos.

El libro recoge ensayos y entrevistas a diversas personas que provienen del mundo de la industria, los negocios, los medios de comunicación, la ciencia, la administración, etc. Los autores intervienen desde distintas experiencias laborales pero fundamentalmente como consumidores de matemáticas. Los expertos en educación matemática tambien se pronuncian al final, pero la intención que preside el volumen es que a través de un amplio debate aumente la compresión del problema buscando el sentido ante todo en el mundo del trabajo y la práctica.

Una primera conclusión que se desprende de la lectura de las distintas aportaciones es que la competencia cuantitativa significa cosas distintas según a quien se le pregunte. Es útil en muchas áreas, tanto en la escuela como en casa, en el trabajo o en la diversión, o al afrontar los deberes como ciudadanos. Requiere un trabajo conjunto sobre la capacidad de leer y escribir así como la de trabajar con números. Evoluciona con la tecnología y está configurada por la sociedad.

El reconocimiento de la necesidad de la competencia cuantitativa es general entre todos los autores, aunque dado el plantel tan diverso es lógico que no exista unanimidad en el contenido específico del término. Un poco más allá de «lo básico» existen pocas coincidencias. Pero de lo que se trata es de «desplegar para la discusión pública las diversas perspectivas, a menudo conflictivas».

L. Steen, en otro texto[1] resumió las cinco dimensiones que deben constituir el contenido de la competencia numérica: práctica para uso inmediato en las tareas diarias; cívica, para entender y tomar decisiones sobre las propuestas políticas más importantes; profesional, para proporcionar las destrezas necesarias para el empleo; recreativa, para apreciar los juegos, el deporte, las loterías, etc., y cultural, ya que constituye una parte importante de nuestra civilización. Ahora bien, esta caracterización que proporciona un marco adecuado para la discusión, deja pendiente la importante cuestión de establecer prioridades. En el libro, desde diversos puntos de vista, los autores se pronuncian sobre esta cuestión.

J. Dossey, dentro de su ensayo «National Indicators of Quantitatuve Liteacy», como otros educadores matemáticos, habla de competencia cuantitativa como de un cajón el el que caben las principales partes del pensamiento matemático: cantidad, azar, estadística, álgebra, geometría, etc. Es decir, los contenidos de los cursos más o menos tradicionales de matemáticas. Esta perpectiva responde a uno de los extremos hacia los que se ha orientado la educación matemática: el que la considera una disciplina cuyo estudio tiene una estructura formal, en la que, en realidad, cada curso es la preparación para el curso siguiente. Dentro de este punto de vista un enfoque alternativo, lo proporciona G. Cobb que se centra en el razonamiento más que en la competencia, ya que considera que el cálculo no será una necesidad primaria de los ciudadanos en el futuro. Los últimos intentos de reforma de la educación matemática recogen esta propuesta al hablar de la necesidad de que los alumnos tengan facilidad para moverse entre distintas formas de representación matemática: algebraica, numérica, gráfica y verbal.

Otros autores, cuyo enfoque se dirige a las necesidades del empleo, caracterizan la competencia numérica de forma más específica y consideran como uno de sus aspectos más pragmático la resolución de problemas del mundo real que debe producir soluciones válidas matemáticamente y útiles en la práctica. Como apunta G. Cobb en «Mere Literacy Is Not Enough», no es suficiente con las herramientas matemáticas o el razonamiento, sino que una buena cantidad de estrategias para la resolución de problemas reales depende del contexto en el que éstos se plantean.

P. Denning, en «Quantitative Practices», desde la perspectiva de los ingenieros y empresarios habla de la importancia de la práctica cuantitativa muy ligada a la tecnología, no preocupada por teorías o modelos y descripciones, sino en procesos que hacen cosas, para promver la participación activa de los ciudadanos en el mundo en el que viven.

Estos últimos enfoques se orientan hacia el otro extremo de la educación matemática que se ha ligado a destrezas específicas de cada área de trabajo. Esta orientación, en su caso extremo, cada vez responde de peor manera a las necesidades de un mercado de trabajo que cambia con celeridad y en el que no sólo se prevé que un trabajador realice varios cambios de ocupación a lo largo de su vida, sino que también la naturaleza de los propios trabajos puede sufrir cambios profundos que requieran de destrezas cuantitativas sofisticadas.

Las propuestas de reforma deberán combinar las dos orientaciones, disciplinar y práctica en una propuesta única. A lo largo del estudio se revela que la tarea de conseguir la competencia cuantitativa supera el marco de las clases de matemáticas y debe ser abordado desde diversas materias. Como resume en el prólogo Robert Orrill, como un mensaje que se desprende de las distintas contribuciones que aparecen en el libro, «las oportunidades para practicar y usar destrezas cuantitativas debe ser parte de todas las materias y estar asumido por los profesores de todas las disciplinas».

Entrar en el contenido de cada uno de los artículos de que consta el libro supera el alcance de esta reseña, pero baste decir que por donde se abre y se lee se encuentra alguna reflexión que contribuye a ilustrar el contenido de la competencia cuantitativa y que todo él en conjunto proporciona un principio para una discusión que conduzca a buscar la solución al problema.

Julio Sancho

1 Lynn Arthur STEEN (1990): *Numeracy*, Daedalus, Spring, 211-231.

SUMA 28
junio 1998

Seminario de la Federación sobre recursos y materiales

CRÓNICAS

SEMINARIO DE LA FESPM: Recursos para el aprendizaje en el aula de matemáticas. Elaboración y uso de material didáctico

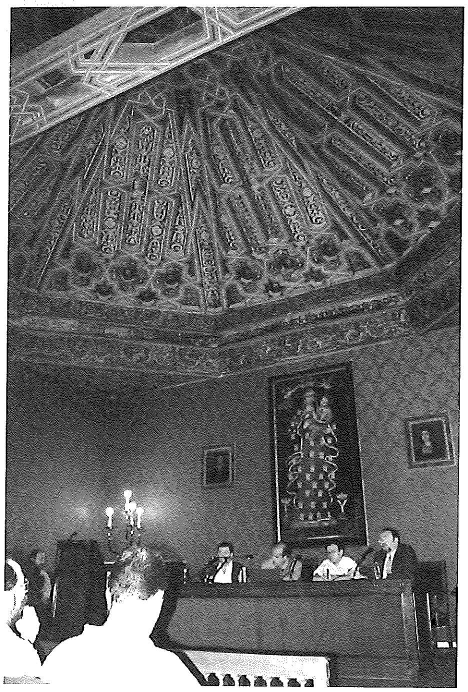
Se ha celebrado en Granada, durante los días 20, 21, 22 y 23 de mayo de 1998, convocado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Han participado alrededor de 80 profesores entre representantes de las sociedades federadas e invitados como expertos a las distintas mesas de trabajo que se organizaron.

Tomando como punto de partida una de las conclusiones del Seminario, celebrado en El Escorial, «Implantación de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria» (ver SUMA, n.° 27), en la que se afirma: «La FESPM debería realizar un esfuerzo para difundir la existencia de estos materiales e invitar a las administraciones educativas a realizar una distribución que garantice la presencia real en los centros y departamentos de estos materiales», se consideró oportuna y necesaria, por parte de la Federación y de Thales, una reflexión en profundidad sobre este tema en un Seminario, a nivel nacional, que fuese el germen de un gran banco de datos de materiales y recursos educativos para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

Los objetivos del Seminario, entre otros, han sido:

a) Analizar los recursos que se pueden utilizar en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

b) Enumerar algunos de los recursos existentes en los centros o departamentos y en el mercado, estudiando la utilización real que se hace de dichos recursos.



Acto de apertura del Seminario. Se podría decir lo del «incomparable marco»... (Foto: A. Pola)

c) Sugerir y discutir ciertas posibilidades de elaboración propia a nivel personal, de centro o de departamento de dichos recursos, reflexionando sobre las dificultades, limitaciones y ventajas que esto implica.

d) Proponer diversos canales de difusión, localización, documentación e instrucciones y posibilidades de uso de «Recursos para el aprendizaje en el aula de Matemáticas», al alcance de cualquier docente de la materia que esté interesado en los mismos.

El Seminario estuvo organizado en torno a ocho mesas de trabajo con los siguientes contenidos:

1. Nuevas tecnologías.
2. Juegos.
3. Materiales comercializados.
4. Bricolaje.
5. Exposiciones.
6. Biblioteca de aula. Documentación.
7. Matemáticas e Investigación.
8. Matemáticas y...

Previamente a la celebración del Seminario se elaboraron una serie de documentos de trabajo (42 en total) por parte de los ponentes que constituye una información completísima sobre los temas tratados. Los coordinadores de las mesas realizaron una ardua tarea para sintetizar toda esta documentación en las cincuenta páginas del documento base que fue entregado a los asistentes al inicio del Seminario y que sirvió como guía tanto en las exposiciones que tuvieron lugar como en los posteriores debates.

El último día se dedicó a la presentación y debate de las conclusiones provisionales de cada una de las mesas, así como de unas más generales que sintetizaran lo que había sido el Seminario. Tanto unas como otras se analizarán por cada uno de los asistentes para que, con las modificaciones que se puedan introducir, se eleven a conclusiones definitivas.

Debido a la cantidad y calidad del material recogido, es intención de la Federación, si las cuestiones financieras lo permiten, elaborar un número monográfico y extraordinario de SUMA dedicado al Seminario.

Es de justicia rasaltar el enorme y eficaz trabajo desarrollado por la Comisión Organizadora, encabezada por su Coordinador José María Sánchez Molina, que, además de cuidar al máximo todas las cuestiones de tipo técnico y científico, hicieron con sus amables detalles que todos los asistentes nos sintiésemos como en nuestra casa, a pesar del apretado horario que tuvimos que «sufrir». Si bien es verdad que este «sufrimiento» se difuminó con la visita nocturna a la Alhambra, mostrada, historiada, matematizada y recreada por Rafael Pérez y Ceferino Ruiz: ¡fue una delicia!

Emilio Palacián

Mesa n.° 2. Juegos (Foto: F. Villarroya)

Investigación en el aula de Matemáticas

Un año más se han celebrado en Granada las jornadas «Investigación en el aula de matemáticas», organizadas por la Sociedad Andaluza de Educación matemática Thales y el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

En ésta, su tercera edición, «la tarea docente» ha sido el tema en el que se han centrado los trabajos desarrollados a lo largo de dos fines de semana, como ya viene siendo habitual. Durante los días 20, 21 y 22 de noviembre y 11, 12 y 13 de diciembre, más de un centenar de participantes de todos los niveles educativos –infantil, primaria, secundaria y universidad– han compartido ponencias, comunicaciones y talleres, además de los fructíferos diálogos de pasillo, en torno a los distintos aspectos de la tarea docente del profesor de matemáticas, tanto las componentes teóricas que abarcan aspectos relacionados con la matemática y su didáctica, como la dimensión práctica que incluye esquemas de planificación, gestión y gobierno de la clase.

Como en las ediciones anteriores las jornadas han estado abiertas, la cuota de inscripción era prácticamente simbólica para los miembros de la sociedad, a los estudiantes de últimos cursos de carrera, quienes habitualmente ven impedida su participación en estas actividades por no ser profesores en ejercicio, condición exigida por las instituciones que realizan actividades de perfeccionamiento.

Antes de hacer referencia a las ponencias y comunicaciones más destacadas es necesario felicitar al Comité de Organización por el buen desarrollo de dichas jornadas, así como por la buena coordinación, que de nuevo se ha puesto de manifiesto, entre el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y la Junta Directiva de la SAEM Thales de Granada.

Las ponencias individuales versaron sobre:

- El profesor de Matemáticas, un profesional reflexivo (Pablo Flores Martínez).
- El profesor, versus Maestro de matemáticas (Antonio Tortosa López).
- El oficio de Maestro y la enseñanza de las Matemáticas (Manuel Alcalá Hernández).
- Profesor sin nombre (Rafael Pérez Gómez).
- El profesor de Matemáticas y su necesidad de formación (Antonio Marín del Moral).

Acentuando el sentido participativo de las jornadas se ha incluido por primera vez el taller como forma de comunicación. Los temas tratados bajo esta modalidad han sido enormemente variados: «La colmena de números», «El uso del ordenador en la enseñanza primaria», «El agua», «Internet», «Las matemáticas en la Selectividad» o «Números en figuras».

En el apartado de comunicaciones se presentaron por parte del departamento de Didáctica de la Matemática trabajos que desarrollan aspectos de la educación matemática y sus implicaciones en la tarea docente: «Aportaciones de la investigación en educación estadística para la tarea docente», «Reflexiones semióticas con los futuros maestros sobre la división y las fracciones», «Diseño, desarrollo y evaluación del currículo: Los organizadores del currículo», «Los profesores de matemáticas y la educación ambiental»... Así mismo se presentaron otras comunicaciones directamente relacionadas con el trabajo en el aula como: «Una experiencia del comentario de texto en matemáticas: existencia del número irracional», «Traducción de terminología matemática al inglés y al francés. Aplicaciones didácticas en las clases de idiomas y de matemáticas», «Evolución de un grupo de alumnos en la resolución de problemas»... Todas ellas quedan recogidas en las actas de dichas jornadas que ya se encuentran en manos de los asistentes.

El acto de clausura estuvo presidido por el Decano de la Facultad de Ciencias de la Educación, Antonio Romero, y los profesores Luis Rico y Antonio Pérez como Director del Departamento de Didáctica de la Matemática y Presidente de la SAEM Thales, respectivamente, acompañados por el Delegado de la SAEM en Granada, José Mª Sánchez Molina. Todos ellos elogiaron el nivel de participación y la calidad de las ponencias y comunicaciones, animando a la organización a continuar con la actividad que tanto interés despierta.

Miguel Ángel Fresno Martínez

SAEM Thales. Granada

IX Olimpíada Matemática Nacional

ACTIVIDADES CULTURALES

CARBONERAS, del 18 de Mayo al 19 de Junio

1 9 9 8

Carboneras

CONVOCA: F.E.S.P.M.

ORGANIZA: S.A.E.M. THALES (Deleg. de Almería)

EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CARBONERAS

Grupo Endesa

ENDESA - CSE - CTL ALMERIA - AIE PUCARSA

ediciones sm

JUNTA DE ANDALUCIA
Consejería de Educación y Ciencia
Delegación Provincial de Almería

"HISALBA"
HORNOS IBERICOS ALBA, S.A.

DSM Deretil
DSM

COLABORAN: Centros de Profesorado de Almería, El Ejido y Cuevas/Olula

SUMA 28
junio 1998

IX Olimpiada Matemática de la FESPM y...

IX Olimpiada Matemática Nacional de la FESPM

Esta actividad va dirigida a estudiantes de 2.° de ESO y con ella pretendemos fundamentalmente fomentar el gusto por las Matemáticas mostrando una visión de las mismas complementaria (y más agradable y divertida) a la que se suele dar en las aulas, favorecer las relaciones de amistad entre los chavales que participan y propiciar la innovación en la forma de enseñar Matemáticas entre el profesorado. Entendemos la Matemática como una parte más de la formación integral de nuestras chicas y chicos y la utilizamos como excusa para inculcarles valores tan importantes como la solidaridad, el compañerismo, el trabajo en equipo, la tolerancia, el espíritu crítico, etc.

Hace nueve años se planteó por parte de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, la posibilidad de organizar una fase nacional de la Olimpíada Matemática y así se hizo; desde entonces la Olimpiada Matemática Nacional (en adelante OMN) se ha organizado en Navarra, Canarias, Huelva, Andorra, Burgos, Alicante-Castellón, Valencia de Alcántara y Asturias. En 1998 será Carboneras (Almería) la localidad que organice la IX OMN. Será la segunda vez que Andalucía organiza una OMN.

Somos conscientes de la envergadura de un proyecto de esta índole. Una OMN cuenta con la participación, en sus diversas fases, de decenas de miles de niñas y niños que estudian en miles de colegios públicos y privados de casi todas las comunidades autónomas y provincias de España y de Andorra y de miles de profesoras y profesores que colaboran con las distintas Sociedades que componen la FESPM.

Pero además de un equipo de personas dispuestas a trabajar altruista y con eficacia, hacen falta una serie de

CONVOCATORIAS

recursos económicos y materiales para la organización de una OMN. A lo largo de dos años en Almería hemos llamado a las puertas de docenas de empresas, casas comerciales, entidades y organismos públicos, hasta conseguir los recursos suficientes para organizar dignamente esta actividad de ámbito nacional. A todos los que han prestado su colaboración nuestro agradecimeinto.

Patrocina:

Excmo. Ayuntamiento de Carboneras, Junta de Andalucía-Consejería de Educación y Ciencia (Delegación Provincial de Almería), Grupo Endesa (ENDESA-CSE-CTL ALMERÍA-AIE; PUCARSA), Ediciones SM, DSM Deretil, HISALBA.

Convoca:

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

Organiza:

Sociedad Andaluza de Educación Matemática (SAEM) «Thales» (Delegación Provincial de Almería).

Comité Organizador:

Pedro José Martínez Fernández (Coordinador Nacional), Francisco Morales Haro, Ricardo Contreras Calvache y José Villegas Alcántara.

Gabinete de Prensa:

Catalina Serrano Meca y José María Arcas Martínez-Salas.

Colaboran:

María García Zamora, Carmen Pino Villalba, Juan Enrique González Jiménez, Pedro González Ventura, Fco. José Villegas Martín y componentes del grupo de coordinadoras y coordinadores de la Olimpiada Matemática Thales de Andalucía.

Entidades colaboradoras:

Centros de Profesorado de Almería, Cuevas/Olula y El Ejido, Delegación Provincial de Cultura de Almería, Universidad de Almería, Pescadores de Carboneras, s.c.a., Academia Platón de Granada, Almerimátik, Patronato Provincial de Turismo, Fotosur, Ideal, La Voz de Almería, Caja Rural de Almería y Anaya.

Participantes:

Participarán chicos y chicas de:

Albacete (2), Andalucía (9), Andorra (2), Aragón (3), Asturias (3), Canarias (3), Cantabria (3), Castilla-León (3), Cataluña (3), Extremadura (3), Galicia (3), Madrid (3), Melilla (1), Murcia (2), Navarra (3) y Valencia (3).

Todos ellos irán acompañados por el coordinador respectivo de la Olimpiada en la fase autonómica.

No habrá premios paras las ganadoras o ganadores; sí obsequios y diplomas para todas y todos.

Programa de actividades

Domingo, 21

- Recepción de participantes.
- Fiesta de bienvenida.

Lunes, 22

- Prueba por equipos en la Central Térmica de ENDESA.
- Visita a la Central Térmica.
- Presentación de prueba fotográfica: *Mar y Matemáticas*.
- Visita a la fábrica de cemento HISALBA de Carboneras.
- Recepción en el Ayuntamiento de Carboneras.
- Actividades LCR.

Martes, 23

- Visita a la Central Solar de Tabernas.
- Visita lúdica al poblado del oeste y al zoológico de Tabernas.
- Visita al Observatorio de Calar Alto.
- Observación astronómica coordinada por el grupo «Orión».

Miércoles, 24

- Prueba individual y debate coloquio sobre la misma.
- Reunión nacional de coordinadores.
- Finaliza el plazo para entrega de carretes del concurso de fotografía.
- Simultánea de ajedrez con el campeón de España y gran maestro internacional, Alfonso Romero.

Jueves, 25

- Excursión a Granada visitando la Alhambra.
- Charla del Profesor Rafael Pérez Gómez en el Parque de las Ciencias de Granada.
- Visita al Parque de las Ciencias.
- Salida hacia Mojácar.

Viernes, 26

- Recorrido turístico por el PNMTCGN. Incluye: Visita al CRIN, recorrido en barco por el cabo de Gata y baño en las playas de Mónsul y Genoveses.
- Exposición de fotografías del concurso.
- Visita a Deretil y alrededores (arqueología industrial).
- Fiesta de despedida y clausura extraoficial.

Sábado, 27

- Acto final oficial de la IX OMN, con entrega de diplomas y homenaje al profesor D. Gonzalo Sánchez Vázquez.

Otras actividades:

A partir del 18 de mayo estarán abiertas al público y a colegios las siguientes exposiciones:

- Exposición de fotografía Matemática de la SAEM THALES de Andalucía.
- Exposición de instrumentos y unidades de medida tradicionales.
- Exposición sobre la mujer y las Matemáticas.
- Exposición sobre mar y Matemáticas.

Durante los días de la olimpíada se realizarán las siguientes:

- Exposición de materiales didácticos para manipular en Matemáticas.
- Problema diario propuesto en prensa local, radio y TV.
- Problema propuesto a los coordinadores por las alumnas y alumnos participantes.
- Pruebas sorpresa.
- Internet a disposición de los participantes.
- Exposición de fotografías hechas por los participantes en la prueba de fotografía matemática.
- Montaje teatral a cargo del Taller de teatro «der» Nicolás.
- Reportaje fotográfico en CD ROM que se entregará a los participantes.

Página WEB de la olimpíada:

HIPERVÍNCULO

http://www.arrakis.es/~fvillegas/IXOlimpiada.htm

Y, por supuesto, siempre presente en esta IX Olimpíada GONZALO, nuestro querido profesor, en cuyo homenaje la celebraremos en Carboneras (Almería) los días 21 a 27 de junio de 1998.

Pedro José Martínez Fernández

Coordinador Nacional

IX Olimpiada Matemática Nacional

Primer Congreso Internacional de Etnomatemáticas (1-ICEM)

Se celebrará en Granada los días 2 al 5 de septiembre de 1998 organizado por la Universidad de Granada.

El 1-ICEM es un foro de debate científico que contribuirá a expandir las Etnomatemáticas como una forma de pensamiento iniciada por el grupo ISGEm.

Desde su origen en 1985, Ubiratán D'Ambrosio y sus miembros realizan estudios matemáticos e históricos, en contextos de interculturalidad y de grupos sociales deprimidos y analizan las condiciones sociales y políticas de los currículos de enseñanza de las Matemáticas. Ensayan la delimitación teórico-epistemológica del conocimiento matemático actual y su diversidad, influenciada por los usos de matemáticas en contextos científicos, tecnológicos y sociales. Existe una revista del grupo titulada *ISGEm Newsletter* con periodicidad semestral.

En el ISGEm se consideran como *gentes etnomatemáticas* a cuantos compartan una visión plural de las Matemáticas y de la cultura considerando:

- En el actual mundo multicultural y a la vez intercomunicado, la Matemática es un producto cultural, de innegable poder de resolución de situaciones problemáticas y de gran capacidad de identificación social.
- Es parte del pensamiento y del modo de concebir el mundo.
- Por ello puede convertirse en punto de encuentro de las personas preocupadas por la educación matemática para el desarrollo, por la dignidad y equidad de todos los pueblos y por la paz.

En el 1-ICEM se van a estudiar específicamente tres bloques de problemas:

A. Elementos teóricos, definitorios y explicativos de Etnomatemática.

B. Aprendizajes y cognición dentro y fuera de la escuela. El profesor.

C. Condiciones socioculturales y políticas del currículum matemático.

Además de las conferencias y ponencias encargadas a expertos en este tema, los participantes podrán presentar comunicaciones, posters y vídeos. Los idiomas oficiales del congreso serán el español e inglés.

Para más información dirigirse a:

ICEM-1. Mª Luisa Oliveras
Dpto. Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Campus Cartuja. 18071 Granada
Fax: 958 24 63 59
E-mail: oliveras@platon.ugr.es
Web: http://www.ugr.es/local/oliveras

XIV Cursos sobre Aspectos Didácticos en la Enseñanza Secundaria (Matemáticas)

Tendrá lugar en Zaragoza los días 7, 8 y 9 de septiembre de 1998, organizado por el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza, de acuerdo con el siguiente programa:

- Números, operaciones y cálculo: problemas y recursos para la ESO, por Jordi Deulofeu.
- Educación Matemática y temas transversales: la educación para la paz y la igualdad entre sexos, por José Joaquín Arrieta.
- Juegos y estrategias de pensamiento, por Fernando Corbalán.
- Un taller de Matemáticas, por Luis Balbuena.
- Los alumnos deben aprender ¡Matemáticas!, por Salvador Guerrero.

Más información:

ICE Universidad de Zaragoza
C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 Zaragoza
Tel.: 976 76 14 94. Fax: 976 76 13 45
E-mail: secice@posta.unizar.es
Web: http://ice.unizar.es

I Congreso sobre Comunicación Social de la Ciencia

Con el título «Comunicar la Ciencia en el siglo XXI» tendrá lugar en Granada del 25 al 27 de marzo de 1999. Está organizado por el Parque de las Ciencias, la Universidad de Granada y el Consejo Superior de Investigaciones Científicas.

El papel de la Ciencia y la Tecnología en la sociedad contemporánea cobra cada día mayor importancia. La velocidad y calado de los cambios que el desarrollo científico implica, exige una mayor participación social y nuevas estrategias de acceso permanente a la cultura científica. En este marco, la comunicación y divulgación están llamadas a desempeñar una función cada vez más decisiva en las sociedades democráticas. La ciencia debe normalizarse como una parte más de la cultura.

El Congreso pretende ser un foro de reflexión sobre las cuestiones planteadas que interesan a periodistas, divulgadores, científicos, educadores, instituciones museísticas, industria, editoriales, administraciones públicas, entidades educativas y culturales, etc.

La estructura del Congreso estará formada por ponencias marco, mesas redondas y comunicaciones y pósters, alrededor de los siguientes ámbitos de trabajo:

- Ciencia y Periodismo.
- Ciencia y Cultura.
- Ciencia y Educación.
- Ciencia y Medio Ambiente.
- Centros de Divulgación Científica.

Se puede solicitar más información dirigiéndose a:

Parque de las Ciencias
Avd. Del Mediterráneo, s/n.
18006 Granada
Tel.: 958 133 870. Fax: 958 133 582
E-mail: cpciencias@parqueciencias.com
www.parqueciencias.com/congreso

I Jornadas Estatales de Experiencias Educativas

Los departamentos y centros de la Universidad Autónoma de Barcelona vinculados al ámbito educativo, organizan los días 8, 9 y 10 de septiembre de 1998 las I Jornadas Estatales de Experiencias Educativas, con la finalidad de potenciar su desarrollo e intercambio. Las áreas temáticas consideradas son: Ciencias de la Naturaleza, Matemáticas, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Expresión Artística, Educación Física, Tecnología, Organización y Gestión de Instituciones, Planificación y Gestión de la Educación no Formal y otras.

Paralelamente, Editorial Praxis beca las cinco mejores experiencias de mayor interés que hayan sido seleccionadas de cada una de las áreas temáticas. La beca consiste en: inscripción gratuita en las jornadas, beca de 20.000 pesetas para gastos personales y publicación de un resumen de la experiencia.

Para más información dirigirse a:

I Jornadas Estatales
de Experiencias Educativas
Instituto de Ciencias de la Educación
Universidad Autónoma de Barcelona.
Edificio A
08193 Bellaterra (Barcelona)
Tel.: 93 581 19 78

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.
2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.
3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).
5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.
6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.
7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.
8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.
9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma*, n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).
11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)

☐ N.^{os} sueltos: ______________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad | | | | | Oficina | | | | | DC | | | Cuenta | | | | | | | | | | |
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM