SUMA 27
febrero 1998, pp. 97-102

El vídeo didáctico: recurso en la enseñanza de las matemáticas

Antonio Pérez Sanz

IDEAS Y RECURSOS

Este artículo, basado en una experiencia de aula con alumnos de 4.° de ESO del IES Salvador Dalí de Madrid, pretende someter a reflexión, por parte del profesorado, la conveniencia de diversificar los recursos que se utilizan en la clase de Matemáticas, deteniéndonos en dos de gran potencialidad: la historia de las matemáticas y los medios audiovisuales. Como no hay nada más didáctico que un buen ejemplo, se ha seleccionado un tema histórico que puede parecer muy manido, Pitágoras, y un documento audiovisual, de gran atractivo para los alumnos de esta edad, para desarrollar una serie de actividades en que se pone de manifiesto la rentabilidad didáctica de estos recursos.

TRADICIONALMENTE las Matemáticas que se han «impartido» en los centros de enseñanza primaria y secundaria responden a la idea de las Matemáticas como un edificio acabado, con unos sólidos cimientos inamovibles, construido, en el pasado y por otras personas, con unas normas arquitectónicas fijas e inmutables, con unos materiales de construcción perfectamente tipificados y hasta con unos criterios «decorativos» rígidos y estandarizados.

A los alumnos se les presenta este grandioso edificio, como un monumento del pasado ante el cual su postura debe ser la de admiración mágica o, a lo sumo, la de meros usuarios, que pueden llegar a dominar las normas que rigen el deambular por los pasillos, encontrar las dependencias adecuadas y la forma de encontrar en los archivos el teorema preciso para resolver su problema concreto.

Ante sus ojos, el matemático aparece como un casero celoso que impide realizar cualquier tipo de obra, (abrir ventanas, proyectar escaleras interiores, poner ascensores...).

Para el alumno el aprendizaje de las matemáticas consiste en saber moverse dentro de este edificio de la manera más eficaz, sin que la mayoría de las veces se le faciliten respuestas a sus preguntas acerca de quién, cuándo, cómo y por qué se construyó tal o cual planta, por qué se construyó esta habitación y no otra, cual es su finalidad, quién trabaja dentro y para qué sirve su trabajo.

En resumen, las matemáticas que se le han presentado al alumno son algunos ladrillos de este gran edificio, y una serie de consejos sobre ellos. El objetivo es *ver* cuantos más ladrillos mejor, no importa mucho conocer por qué están ahí, o quién los puso, o cómo están hechos, o qué relación tienen con otros ladrillos o, sencillamente, para qué le pueden servir a él.

Esta concepción de las matemáticas como un edificio axiomático-lógico-deductivo implica una metodología en la que prima el método lógico sobre el psicológico, la enseñanza pasiva sobre la activa, sobrecargada de abstracciones, excesivamente conceptualizada, una enseñanza basada en las clases magistrales, compartimentada, con una actitud pasiva y acrítica por parte del alumno y, por lo tanto, dogmática y alejada de la realidad y de los intereses de los alumnos.

Lo curioso es que esta presentación estática y acabada del cuerpo del saber de las Matemáticas debería haber propiciado al menos una inquietud por el desarrollo histórico de la propia ciencia. Y sin embargo, y sólo desde hace unos años, las únicas referencias históricas sobre los contenidos que los alumnos están estudiando la constituyen esas breves reseñas o curiosidades históricas, que al principio del tema o al final, pero siempre como algo separado del cuerpo central, ofrecen algunos libros de texto. Es decir, se desprecia de manera general la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico en el aula y lo que es peor como contenido propio de aprendizaje.

Si algún profesor duda de una afirmación tan tajante le propongo una prueba irrefutable: proponga a los alumnos, no importa de qué nivel, incluso de COU o de los primeros cursos de cualquier carrera de Ciencias, que le diga los nombres de diez matemáticos que conozca, excluidos los griegos, y el siglo en que vivieron. ¡Se van a sorprender!

Si en lugar de matemáticos hubiésemos preguntado por pintores, músicos, novelistas, poetas... los resultados hubiesen sido notablemente mejores. La sociedad propicia de hecho esta incultura científica. Nadie, con una formación universitaria, reconocería no saber quien era Molière y en cambio nadie se avergüenza de no tener ni idea de quién era Gauss.

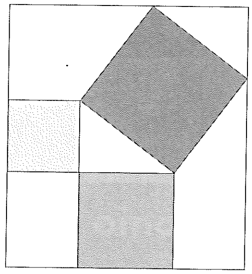
Hoy más que nunca, como afirma el profesor José Luis Montesinos[1], la principal función de las Matemáticas es la de *formar alumnos* y éstas *han de ser presentadas a través de la Historia,* en relación con la Filosofía y con el Arte, con la Física y la Cosmología, como un organismo vivo, en evolución e íntimamente ligada a los deseos del hombre de comprender la realidad.

Veamos mediante un sencillo ejemplo cómo se puede llevar a la práctica del aula una metodología basada en esta idea. Ésta es una propuesta de trabajo para desarrollar en el segundo ciclo de ESO.

Lo que hoy nos pueden enseñar Pitágoras y la Escuela Pitagórica

Presentación

Todo el mundo conoce a Pitágoras aunque sólo sea por el teorema que lleva su nombre.



...se desprecia de manera general la Historia de las Matemáticas como recurso didáctico en el aula y lo que es peor como contenido propio de aprendizaje.

«El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los dos catetos».

Antes de profundizar en este teorema por qué no investigamos algo acerca de Pitágoras y de su época.

¿Quién era?, ¿dónde y cuándo vivió?, ¿qué culturas le influyeron?, ¿qué era la escuela pitagórica?, ¿cómo estaban organizados?, ¿que Matemáticas utilizaron?, ¿que otros descubrimientos hicieron?, ¿cuáles han llegado hasta nosotros?, ¿cómo y para qué los utilizamos?....

Como veremos investigar sobre todos estos interrogantes nos va a permitir no sólo entender un poco más del mundo clásico sino desarrollar e investigar sobre un buen número de contenidos del currículum de este curso distribuidos en varios bloques: Números, Álgebra, Geometría, Azar... Pero vamos a desarrollar no sólo contenidos conceptuales sino también procedimentales y actitudinales...

Actividad previa:

- Búsqueda de información sobre la escuela pitagórica y los pitagóricos.
  - Época: siglo VI a de C.
  - Localización geográfica en un mapa: Samos, Sicilia, Siracusa.
  - Influencias en Platón: *Timeo.*
- Doctrina pitagórica de los números.
  - Números naturales y poligonales: triangulares, cuadrados, pentagonales...
  - Razón y proporción: proporción «continua», sección áurea.
  - Números y armonía musical.
- Geometría:
  - Teorema de Pitágoras: antecedentes.
  - El pentagrama: la estrella pitagórica y la sección áurea.

El profesor guiará y orientará esta búsqueda de información, proporcionando materiales fotocopiados, seleccionando textos e ilustraciones –sería conveniente contar con la colaboración del depar-

1 MONTESINOS, J. L. (1995): «La historia de la Matemática en la enseñanza secundaria: La Matemática vertebradora de la cultura», en *Actas de las VII JAEM,* SMPM, Madrid.

tamento de Cultura Clásica y de Música del centro–. Se puede utilizar en esta fase el vídeo *Donald en el país de las Matemáticas*[2].

Una vez explorados y contextualizados los conocimientos matemáticos más característicos de la escuela pitagórica se seleccionan uno o dos más asequibles al desarrollo cognitivo de los alumnos. Sugerimos estos dos:

1. Números poligonales.
2. La sección áurea.

Realizamos una propuesta detallada del desarrollo de uno de ellos.

Números poligonales

Se plantea a los alumnos una investigación de carácter lúdico por la aparente falta de complejidad de este tipo de números. El profesor ha de recalcar la idea de que los pitagóricos tenían una noción intuitiva de número asociada a un punto, no tan abstracta como la que podemos tener en la actualidad.

Por otra parte se ha de resaltar el hecho de que eran fundamentalmente geómetras con un escaso desarrollo de la aritmética al no contar con ningún sistema de numeración ágil y flexible, (de ahí su necesidad de objetivar el concepto de número a través de puntos o como relación entre segmentos).

Actividad de investigación

Se utiliza como material el vídeo *Números triangulaes y números cuadrados*[3], Programa 19 de la serie Ojo Matemático, cuyos contenidos aparecen esquemáticamente reflejados en el cuadro adjunto.

Asimismo se elaboró una Hoja para el alumno[4], que está reproducida en la página siguiente.

Reflexionemos sobre los contenidos curriculares de la ESO[5] tratados mediante las actividades propuestas en dicha hoja. Entre éstos hay que destacar los reseñados en el cuadro 1.

Una vez explorados y contextualizados los conocimientos matemático más característicos de la escuela pitagórica se seleccionan uno o dos más asequibles al desarrollo cognitivo de los alumnos.

2 *Donald en el país de las Matemáticas.* Vídeo Walt Disney. Clásicos.

3 Ojo Matemático. Metrovídeo S.L. Madrid. 1992.

4 Modelo elaborado por el autor y aplicado a alumnos de 3.° de ESO del IES Salvador Dalí de Madrid.

5 *Matemáticas. Secundaria Obligatoria.* MEC. 1992.

NÚMEROS TRIANGULARES
Y NÚMEROS CUADRADOS

Serie Ojo Matemático

Programa 19

CONTENIDOS

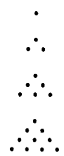
00:46	Un trabajador del supermercado se siente desolado al caerse la pirámide de rollos de papel. Tiene que reconstruirla, pero ¿cuántos rollos hay que colocar en cada estrato?
02:40	Alumnos investigando pirámides con latas de judías.
03:17	Definición de números triangulares.
03:35	Alumnos contando caramelos con bandejas triangulares.
06:10	Alumnos investigando números triangulares con cilindros.
06:40	Modelos de números triangulares y conexiones entre ellos.
07:34	Dibujos animados. Gauss: sumando números del 1 al 100.
08:46	Alumnos dándose las manos: ¿cuántos choques de mano hay?
11:05	Triángulo de Pascal. ¿Cómo se construye y qué diseños de números contiene?
12:05	Gráfico de números cuadrados. Diseños hechos sobre ellos.
14:08	Reconstrucción de la pirámide de rollos de papel.
15:53	Dibujos animados. Modificación del triángulo de Pascal para números cuadrados.
16:17	Una solución alternativa para el problema de los choques de mano.
18:25	Éxito en la reconstrucción de la pirámide del supermercado. Se puede construir no una sino dos.

Modelos numéricos

1. Números triangulares

Podemos representar los números enteros mediante colecciones de puntos. Cada punto representa una unidad. Los siguientes números se pueden disponer formando un triángulo. Se les llama **números triangulares**

Observa en los cuatro primeros números triángulares cómo se forma cada triángulo a partir del anterior:



1

2

3

4

Para contar todos los puntos de un número tiangular basta con que cuentes los puntos por las filas empezando por la fila superior o sumes los puntos de cada fila.

a) Escribe los tres siguientes números triangulares:

_____, _____, _____

b) Rodea con un círculo los números que sean triangulares:

34 45 55 86 132

c) ¿Cuál es el décimo número triangular? ______________

d) ¿Y el décimo quinto? ______________

e) Escribe, sin dibujarlo, el que ocupa el lugar 31: ______________

f) Escribe una fórmula general para obtener cualquier número triangular:

g) ¿Cuántos choques de mano se producen cuando se encuentran 5 amigos?

____

h) ¿Y si son 6? ______________

i) ¿Y si fueran 8? ______________

Encuentra una fórmula general que nos proporcione el número de choques de mano cuando haya n personas.

¿Encuentras alguna relación entre esta fórmula y los números triangulares?

En el vídeo, el tendero intenta construir pirámides triangulares en las que cada piso está formado por un número triangular de rollos de papel. Según subimos en la pirámide cada piso es el número triangular anterior hasta llegar a 1.

j) ¿Cuántos rollos se necesitan para construir una pirámide de 7 pisos?

k) ¿Se puede construir una pirámide triangular con 140 rollos? ______________

l) ¿Cuántos pisos tendría la pirámide triangular más grande que podría construir sin pasarse de esos 140 rollos? ______________

m) ¿Cuántos rollos de los 140 le sobrarían? ______________

2. Números cuadrados

Los números cuadrados son aquellos cuyos puntos forman un cuadrado. Coinciden con los cuadrados de los números enteros.

Comprueba que todo número cuadrado es suma de números impares consecutivos empezando por 1:

$1 = 1;\quad 1 + 3 = 4;\quad 1 + 3 + 5 = 9;\quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$

o) Escribe los 6 primeros términos de las secuencias de los números triangulares y cuadrados:

N.ºs triangulares: _____, _____, _____, _____, _____, _____,

N.ºs cuadrados: _____, _____, _____, _____, _____, _____,

Compara ambas secuencias. Escribe la relación que hay entre los números triangulares y los cuadrados.

Las pirámides cuadradas se forman igual que las triangulares, pero ahora cada piso está formado por un número cuadrado. Según asciendes cada piso es el número cuadrado anterior hasta llegar a 1.

Hay una relación entre las pirámides triangulares y las cuadradas. Para descubrirla haz estos cálculos:

p) ¿Cuántos rollos tiene una pirámide triangular de 5 pisos? ______________

q) ¿Cuántos rollos tiene una pirámide triangular de 4 pisos? ______________

r) ¿Cuántos rollos tiene una pirámide cuadrada de 5 pisos? ______________

s) Escribe la relación que hay entre las pirámides cuadradas y las triangulares:

____

3. Números pentagonales y hexagonales

t) Escribe los diez primeros números pentagonales. Intenta encontrar una fórmuila para obtener cualquier número pentagonal.

u) Haz lo mismo con los números hexagonales

CONCEPTOS	PROCEDIMIENTOS	ACTITUDES
1. Números naturales y enteros: • Significados y usos de los diferentes tipos de números: contar, medir, ordenar, codificar, expresar cantidades, particiones o relaciones entre magnitudes. 3. Las operaciones: • Significados y usos de las operaciones en diferentes contextos y con diferentes clases de números 4. Relaciones entre los números. 7. Algoritmos básicos e instrumentos de cálculo. • Significado y uso de las propiedades de las operaciones para la elaboración de estrategias de cálculo mental y escrito. 8. El lenguaje algebraico: • Significado y uso de las letras para representar números. Fórmulas y ecuaciones. • Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas	1. Números naturales y enteros: • Significados y usos de los diferentes tipos de números: contar, medir, ordenar, codificar, expresar cantidades, particiones o relaciones entre magnitudes. 3. Las operaciones: • Significados y usos de las operaciones en diferentes contextos y con diferentes clases de números 4. Relaciones entre los números 7. Algoritmos básicos e instrumentos de cálculo. • Significado y uso de las propiedades de las operaciones para la elaboración de estrategias de cálculo mental y escrito. 8. El lenguaje algebraico: • Significado y uso de las letras para representar números. Fórmulas y ecuaciones. • Reglas para desarrollar y simplificar expresiones literales sencillas.	*Referentes a la apreciación de las matemáticas:* 1. Valoración de la precisión, simplicidad y utilidad del lenguaje numérico y algebraico para representar, resolver y comunicar diferentes situaciones. 2. Incorporación del lenguaje numérico y del cálculo y estimación de cantidades a la forma de proceder habitual. 3. Sensibilidad, interés y valoración crítica ante informaciones y mensajes de naturaleza numérica. 5. Curiosidad e interés por enfrentarse a problemas numéricos e investigar las regularidades y relaciones que aparecen en conjuntos de números o códigos numéricos. *Referentes a la organización y hábitos de trabajo:* 7. Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones de problemas numéricos. 8. Disposición favorable a la revisión y mejora del resultado... 9. Interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas numéricos distintas de las propias. 10. Sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos.

Cuadro 1

De hecho con estas actividades hemos podido abordar un alto porcentaje de contenidos del bloque de Números del currículum. Pero hay algo más: los materiales utilizados y la gradación de los niveles de dificultad de las preguntas planteadas nos permite realizar en el aula un tratamiento preciso y claro de la diversidad de los alumnos: no todos van a conseguir responder a todas las preguntas y sobre todo no lo van a hacer siguiendo los mismos métodos ni con el mismo nivel de rigor y precisión.

Como el desarrollo de las actividades se produce en al menos tres sesiones, se pueden introducir dinámicas de trabajo en pequeños grupos con intereses o niveles parejos o complementarios que posibiliten al alumno un contraste de opiniones con sus compañeros y construir conocimientos a partir de las ideas propias y ajenas.

...la ventaja de esta investigación, [...] es que deja puertas abiertas para seguir profundizando en el estudio de regularidades numéricas más complejas.

Pero la ventaja de esta investigación, que no olvidemos ha surgido de una exploración histórica, es que deja puertas abiertas para seguir profundizando en el estudio de regularidades numéricas más complejas que nos pueden llevar de manera natural, (la actividad de los choques de manos ya nos lo sugiere de manera clara), al estudio de técnicas de recuento relacionadas con el azar y la combinatoria.

De hecho si observamos el triángulo de Pascal, en la diagonal marcada aparecen los números triangulares, pero además en la inmediata inferior aparecen los números tetragonales, es decir, los que forman las pirámides triangulares, cuyos pisos son a su vez números triangulares. Bastante más fácil es descubrir que en la diagonal superior aparecen los números naturales.

Como se puede observar sin mucho esfuerzo el triángulo de Pascal es algo mucho más rico en relaciones numéricas que lo que tradicionalmente habíamos pensado al limitarlo a una mera tabla de coeficientes del desarrollo del binomio de Newton.

```
               1
            1     1
         1     2     1
      1     3     3     1
   1     4     6     4     1
1     5    10    10     5     1
1     6    15    20    15     6     1
```

Números tetragonales

Números triagonales

Como sugerencia, y una vez que el profesor haya explicado cómo se obtienen los números del triángulo de Pascal (cada uno es la suma de los dos que tiene encima), podemos preguntar a esos alumnos que siempre nos demandan profundizar un poco más qué pasaría si cambiamos los unos de uno de los lados externos del triángulo de Pascal por *doses*.

¿Qué relaciones numéricas se pueden encontrar?

Antonio Pérez
IES Salvador Dalí
Madrid
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
«Emma Castelnuovo»


```
                2
             1     2
          1     3     2
       1     4     5     2
    1     5     9     7     2
 1     6    14    16     9     2
```

¿Qué sucedería si en lugar de doses colocamos treses o cuatros?

Como se ha podido comprobar, a partir de un pequeño hilo de la historia, en apariencia pueril e intrascendente, hemos descubierto un ovillo sorprendente rico en relaciones numéricas que además nos ha permitido asociar una serie de sucesiones numéricas, en un principio poco atractivas para los alumnos, con una serie de modelos geométricos bastante más sugerentes que las meras fórmulas algebraicas de siempre.

La historia de las matemáticas es un mundo rico en situaciones similares. Es hora, siempre lo ha sido, de aprovecharnos de ello y convertir a la Historia de las Matemáticas, en el poderoso recurso didáctico que siempre ha debido ser.

N.º 189. Un vinatero ha vendido 235'50 Hl. de vino a 43'50 ptas. uno, con la condición de cobrar el 6 % anual de interés por el tiempo que tarden a pagárselos. Al cobrarlos recibe 10.397'92 ptas. ¿Cuánto tiempo tardó en cobrarlos?

$235'50 \times 43'50 = 10,244'25$

$10,397'92 - 10,244'25 = 153'67$

$\frac{10,244'25 \times 6}{100} = 614'65$

$\frac{360}{614'65} \times 153'67 = 90$ días $= 3$ meses.

	Medidas de longitud, peso y capacidad.
CÁLCULO MENTAL	¿Cuántos dm. tiene un Hm.? ¿Cuántos cl. tiene un Kl.? ¿Cuántos Dg. tiene un Kg.? etc., etc.
Núm. 63	¿Cuántos cm. hay en 7 Hm.? ¿Cuántos ml. hay en 4 Dl.? ¿Cuántos Dg. hay en 3 qqm.? Etc. etc.
	¿Cuántos Dm. hay en 3 dm.? ¿Cuántos Hg. hay en 8 g.? Etc., etc.