SUMA 28
junio 1998, pp. 53-58

La enigmática figura matemática del reverso del billete de 10.000 pesetas

Gabriel Ruiz Garzón

ARTÍCULOS

Este artículo trata sobre la figura matemática que se encuentra en el reverso del billete de 10.000 pesetas exponiendo su significado matemático dentro de su contexto histórico. Ciertos aspectos numismáticos pueden ser utilizados como un recurso matemático.

HACE unos días, debo reconocer que no con la frecuencia que desearía, cayó en mis manos, un billete de 10.000 ptas. (figura 1). El reverso del mismo, su parte central, está ocupada por Jorge Juan (1713-1773), pero lo que me llamó la atención, por infrecuente, fue la figura matemática, un arco de circunferencia junto a otras líneas, situadas por debajo de la efigie de Jorge Juan.

Figura 1

Antes de desentrañar tan enigmática figura veamos algo sobre el autor de la misma, Jorge Juan y de los trabajos desarrollados en el virreinato del Perú, donde desarrollaron tanto experiencias geodésicas como astronómicas.

El autor del dibujo y la fase geodésica

Jorge Juan y Santacilia nace en Novelda (Alicante) en 1713. En 1734 participó, junto a Antonio de Ulloa y de la

Torre-Giral (1716-1759), en la expedición enviada a Quito para medir el arco del meridiano terrestre. Medir la longitud de un arco de un meridiano terrestre consiste en determinar la distancia que separa dos puntos de un círculo máximo cuya diferencia de latitud es conocida. El cociente entre las distancias lineal y angular proporciona el valor de un grado que, supuesta esférica la Tierra, permite concluir la forma del planeta.

Ya Pitágoras afirmó que la Tierra tenía forma esférica por ser ésta la forma más perfecta posible.

Newton demostraba en los *Principia* que la Tierra era achatada en los polos, debido a la fuerza centrífuga producida por el giro terrestre a lo largo del eje polar.

Por otra parte, los trabajos de medición del meridiano que pasa por París entre Dunquerque y Collioure, llevados a cabo entre otros por J. Picard, G. D. Cassini y La Hire daban conclusiones radicalmente diferentes a las obtenidas por Newton: sostenían que la Tierra era un esferoide achatado por el ecuador.

Para dilucidar tal controversia, que adquirió tintes nacionalistas, ingleses o newtonianos contra franceses o cartesianos, la Academia de Ciencias de París proponía la medición de la longitud de un grado de meridiano, en lugares con diferente latitud, con objeto de cuantificar la variación de la curvatura terrestre y por tanto la forma de la Tierra.

Los lugares elegidos para efectuar tal medición son Laponia y el virreinato del Perú.

A Laponia viajaron los matemáticos Alexis Clairaut (1713-1765) y Maupertuis (1698-1759).

Para acceder al virreinato el rey de Francia Louis XIV pidió permiso a su nieto, Felipe V. El rey español dio el visto bueno pero puso como condición que acompañaran a los académicos franceses Louis Godin (1704-1760), Pierre Bouguer (1698-1758) y Charles Marie de La Condamine (1701-1774), dos conocedores españoles de la matemática y de la astronomía. Los elegidos son dos jóvenes Guardias Marinas de la Academia de Cádiz, Antonio de Ulloa y Jorge Juan, éste último conocido en la Academia gaditana por el apelativo de «Euclides», debido a su sabiduría matemática.

La primera fase del trabajo llevado a cabo por la expedición fue la medición del arco del meridiano terrestre. Se utilizó el «Método de la triangulación geodésica». Consistía en medir una determinada longitud o *base fundamental*; ésta se constituía en un lado de una serie de triángulos encadenados que cubría todo el recorrido. De cada uno de ellos se conocían los tres ángulos y la longitud de uno de los lados, con estos datos se obtenía trigonométricamente la longitud del otro lado.

Como vemos en la figura 2, AC es la base fundamental o lado conocido y AB es el arco de meridiano que hay que determinar. Desde A y C se tienden visuales al punto D, formando un primer triángulo. Conocida AC y los dos ángulos adyacentes es posible calcular todos los restantes elementos. Para conocer en primera instancia la distancia AE, contamos en el triángulo AEC con el conocimiento de un lado, el ángulo C y el ángulo EAC y por tanto podemos conocer AE. Se prosigue de la misma manera con el triángulo CDF y así, sucesivamente, hasta el final. Al acabar el proceso se vuelve a medir un lado MN del último triángulo de la serie, llamado base de comprobación, que permite verificar la exactitud de todo el proceso.

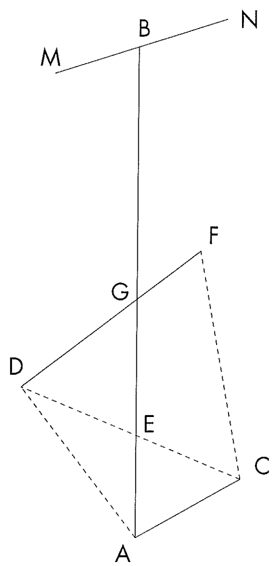

Figura 2

...la fase astronómica consistía, básicamente, en determinar la posición de los extremos de la triangulación y con ella la amplitud del arco del meridiano.

La fase astronómica y la enigmática figura matemática

Concluida la fase geodésica de la expedición, la fase astronómica consistía, básicamente, en determinar la posición de los extremos de la triangulación y con ella la amplitud del arco del meridiano. Para determinar la posición de un punto, necesitamos calcular su latitud y su longitud.

Cálculo de la latitud

Si consideramos la Tierra como un punto O dentro de la esfera celeste, consideramos también el triángulo esférico de posición del Sol PSZ (figura 3), donde P es polo norte, S es el Sol y Z el cenit o punto en la esfera celeste directamente encima del observador.

Denotaremos también por N y H, el norte y el sur astronómico respectivamente.

Llamaremos horizonte astronómico al plano determinado por los puntos ONH, siendo el meridiano del lugar el círculo PZP'Z'.

El ecuador celeste es el plano determinado por ON'H'.

En ese triángulo de posición definiremos:

PZ = Colatitud o complemento de la latitud del lugar = 90° – l, donde la latitud l coincide con la altura del polo, o sea, el ángulo NOP.

ZS = Distancia cenital o complemento de la altura = z = 90° – a, donde la altura del Sol, a, en la figura coincide con QS, viene dada por el ángulo que forma el horizonte y la estrella, mirados al mismo tiempo desde el punto de observación.

PS = Distancia polar o complemento de la declinación = 90° – d, donde la declinación *d*, en la figura coincide con MS, es la distancia esférica del ecuador al astro.

El ángulo horario ZPS ó ángulo *h*, coincide con H'M, es el ángulo del meridiano del lugar PZP'Z' con el círculo horario PSP' que pasa por la estrella.

El ángulo PZS = 180° – A, donde *A* es el Acimut, que en la figura coincide con HQ, es el ángulo que forma el plano vertical que pasa por la estrella con el meridiano contado a partir del sur, en sentido retrógrado (sur, oeste, norte, este).

En el triángulo esférico de posición se cumple que:

$$\cos z = \operatorname{sen} l \cdot \operatorname{sen} d + \cos l \cdot \cos d \cdot \cos h$$

y cuando el Sol culmina, es decir, en el momento de paso por el meridiano del lugar, el ángulo horario h = 0, y, por tanto $\cos z_m = \cos(d - l)$, de donde $l = d - z_m$, y de una manera más general

$$l = z_m \pm d$$

Así pues conocida la distancia cenital z_m puede calcularse la latitud *l*, con sólo extraer de las tablas correspondientes el valor de la declinación *d*, para el día y la hora en que se efectuó la observación. Tales tablas de declinación eran de fácil accesibilidad en aquella época.

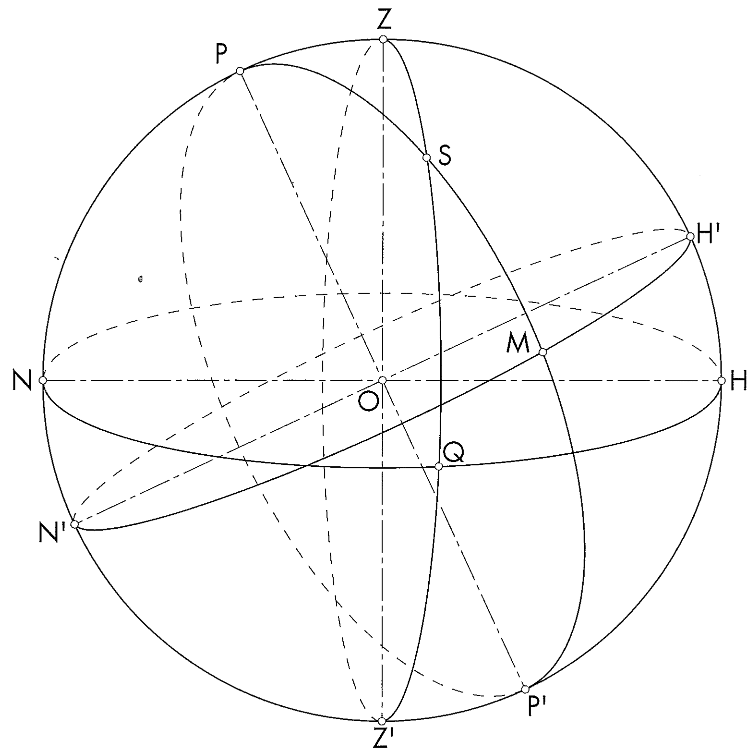

Figura 3

Cálculo de la longitud

El cálculo de la longitud consistía básicamente en determinar el momento exacto en que se sucedía un fenómeno celeste.

El cálculo de la longitud (distancia de un lugar respecto al primer meridiano, medida en grados) consistía básicamente en determinar el momento exacto en que se sucedía un fenómeno celeste (eclipses, ocultaciones de los satélites de Júpiter, etc., a veces de difícil observación) y compararlo con la hora en que había sido observado en un punto de referencia. La diferencia de tiempo es la diferencia en longitud, reduciendo el tiempo a partes del Ecuador.

Ante la falta de cronómetros (hasta bien avanzado el siglo XVIII no se contó con los primeros), se utilizaba un péndulo horario, que para ponerlo en marcha se precisaba fijar el mediodía solar verdadero, es decir, la hora a la cual en el péndulo son las doce en punto, y esto se hacía por la observación del paso del Sol por el meridiano del lugar.

El método utilizado era el llamado «Método de las alturas correspondientes».

Este método se basa en que desde que sale el Sol de una cierta altura por la mañana, hasta que llega al meridiano, transcurre el mismo tiempo, salvo una corrección de la que hablaremos, que desde que sale del meridiano hasta que obtiene la misma altura por la tarde.

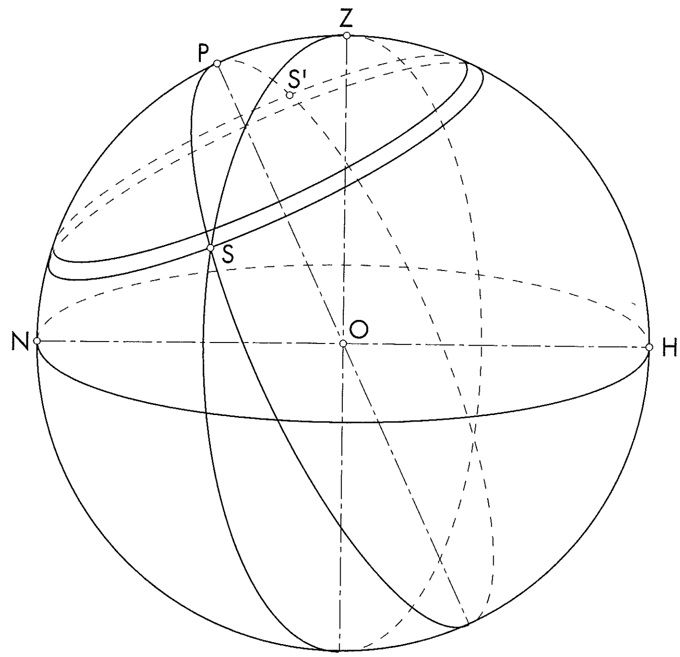

Figura 4

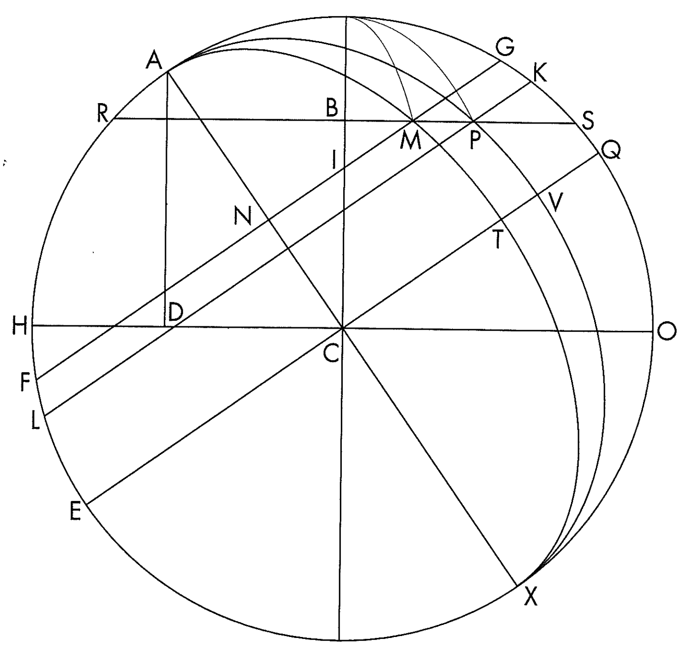

Figura 5

Sean H_c y H'_c las horas que marca el péndulo cuando el Sol tiene la misma altura. Entonces si la declinación fuera constante, el mediodía vendrá dado por la fórmula:

$$H_m = H_c + \frac{H'_c - H_c}{2}$$

Puesto que varía la declinación desde que se toma una altura por la mañana hasta la otra correspondiente por la tarde, hemos de calcular la corrección ε aplicable a la fórmula anterior, que será igual a la mitad del incremento que recibe el ángulo horario entre las dos alturas correspondientes $\varepsilon = \Delta h/30$ (figura 4).

La figura matemática. Una corrección al método de las alturas correspondientes

Jorge Juan utiliza, en sus *Observaciones*, para el cálculo de dicha corrección un argumento geométrico que ahora reproducimos.

Con objeto de evitarse la resolución de triángulos esféricos, se lleva el problema al plano mediante la proyección de la esfera sobre el plano del meridiano, cuya figura es la que parcialmente aparece en el reverso del billete. Nosotros seguiremos su razonamiento utilizando la figura completa (figura 5). Sea:

AQXE el Meridiano

HO el Horizonte.

EQ la Equinoccial.

AX el eje.

FMG paralelo en que se encontraba el astro por la mañana.

LPK paralelo en que se encontraba el astro por la tarde.

RMPS círculo de altura en que se encontraba el astro al tiempo de hacer ambas observaciones o almicantarat.

AMX el círculo horario en que se hallaba en la primera medida.

APX el círculo horario de la segunda medida.

Como no es igual el tiempo que pasa de ir desde un horario al meridiano, al que va desde éste al otro horario, entonces tampoco será igual el tiempo de ir desde M a S que de S a P. Nuestro objetivo es calcular esa diferencia, es decir, el valor del ángulo MAP y su medida el arco equinoccial TV. Sean:

r = CA radio de la esfera

s = AD seno de la altura del polo o latitud del lugar

c = CD coseno de la altura

m = CB seno del astro sobre el horizonte

n = BR = BS coseno del astro sobre el horizonte

x = CN seno de la declinación

y = NG = NF coseno de la declinación

u = CT coseno del ángulo horario

z = seno del ángulo horario

Por ser semejantes los triángulos ADC y CNI

$$\frac{CI}{r}=\frac{x}{s} \quad , \quad \frac{NI}{c}=\frac{x}{s} \quad \Rightarrow$$

$$CI=\frac{rx}{s} \quad , \quad NI=\frac{cx}{s} \quad \Rightarrow$$

$$BI = BC - CI = m-\frac{rx}{s}=\frac{ms-rx}{s}$$

Por otra parte son semejantes los triángulos ADC y MBI, luego

$$\frac{c}{r}=\frac{BI}{IM}=\frac{\frac{ms-rx}{s}}{IM} \quad \Rightarrow$$

$$IM=\frac{rms-rrx}{cs} \quad \Rightarrow$$

$$NM = NI + IM = \frac{cx}{s}+\frac{rms-rrx}{cs}=\frac{ccx+rms-rrx}{cs}=\frac{rms-x(rr-cc)}{cs}$$

utilizando el Teorema de Pitágoras

$$NM=\frac{rms-xss}{cs}=\frac{rm-sx}{c}$$

Por otra parte

$$\frac{NM}{NG}=\frac{CT}{CQ} \quad \Rightarrow \quad \frac{NM}{y}=\frac{u}{r} \quad \Rightarrow \quad NM=\frac{yu}{r}$$

Igualando las dos anteriores expresiones

$$\frac{rm-sx}{c}=\frac{yu}{r} \quad \Rightarrow \quad rrm-rsx=cyu$$

Suponiendo la declinación y el ángulo horario variables y las demás cantidades constantes, tomando «la diferencia» de la anterior ecuación,

$$-rs\Delta x = cy\Delta u + cu\Delta y$$

multiplicando por *x* queda

$$rsy\Delta y - cux\Delta y = cyx\Delta u$$

Suponiendo que el arco de la declinación GQ es d y el arco cuyo seno es CT es *h*.

Tomando GK por una diferencia infinitamente pequeña e igual a Δd y la diferencia de los arcos CT y CV como Δh.

$$\frac{r}{x}=\frac{\Delta d}{\Delta y} \quad \Rightarrow \quad \Delta y=\frac{x\Delta d}{r}$$

$$\frac{r}{z}=\frac{\Delta h}{\Delta u} \quad \Rightarrow \quad \Delta u=\frac{z\Delta h}{r}$$

sustituyendo en la ecuación anterior

$$rsy\left(\frac{x\Delta d}{r}\right)-cux\left(\frac{x\Delta d}{r}\right)=cyx\left(\frac{z\Delta h}{r}\right)$$

dividiendo entre la expresión cyz y despejando Δh queda

$$\Delta h=\Delta d\left(\frac{sr}{cz}-\frac{xu}{yz}\right)=\Delta d\,(\mathrm{tg}\,l\cdot\cos\mathrm{ec}\,h-\mathrm{tg}\,d\cdot\cot g\,h)$$

que es la medida del ángulo MAP cuya mitad reducida a tiempo debe ser añadida o sustraída del mediodía, hallado por el método de las alturas correspondientes, para obtener el verdadero valor.

La anterior expresión también puede deducirse a partir del triángulo de posición PSZ donde se verifica que:

$$\mathrm{sen}\,a = \mathrm{sen}\,l\cdot\mathrm{sen}\,d + \cos l\cdot\cos d\cdot\cos h$$

expresión que diferenciada respecto de la declinación *d*, suponiendo la latitud *l* y la altura *a* constantes, y tras unos pequeños cálculos algebraicos, nos permite encontrar la variación del ángulo horario *h* ya expuesta.

Epílogo

Tanto el viaje a Laponia como la expedición al Perú aunque confirmaban la verosimilitud de la tesis newtoniana sobre la forma de la Tierra, la falta de instrumentos más precisos dificultaban zanjar la cuestión definitivamente.

A la vuelta del viaje a Perú Jorge Juan y Antonio de Ulloa escribieron conjuntamente, en 1748, *Relación del viaje a la América Meridional.* Jorge Juan se ocupó también de

Grabado que figura en la obra de Jorge Juan y Antonio de Ulloa, *Relación del viaje a la América meridional.*

la parte matemática de las *Observaciones Astronómicas y Físicas*, donde aparece, en la página 116, el símbolo ∞, quizás en una de las primeras veces, ya que su uso se extendería mucho más tarde. En *Noticias secretas de América*, Jorge Juan y Antonio de Ulloa criticaban determinados abusos cometidos contra los indios por parte de los corregidores y encomenderos.

La otra figura situada en la parte superior del billete, corresponde al dibujo de una caja de cuadernas de un navío diseñado por Jorge Juan. En 1771 Jorge Juan publica el *Examen marítimo teórico práctico o Tratado de mecánica aplicado a la construcción, conocimiento y manejo de navíos y demás embarcaciones.*

Su preocupación no fue sólo la construcción naval. En 1753 bajo la dirección de Jorge Juan inicia sus trabajos el primer Observatorio de la Marina de Cádiz. Durante la estancia en esta ciudad fundó en 1775 la tertulia Asamblea Amistosa Literaria donde se trataban temas de matemáticas, física, astronomía, medicina, etc.

Fue el introductor del cálculo diferencial e integral en los planes de estudios de la Academia de Guardias Marinas. En 1757 escribió un *Compendio de navegación para el uso de los caballeros guardias marinas* en el que trata de los problemas básicos de la navegación, como son el rumbo, distancia y posición (latitud, longitud y uso de cartas marítimas).

Gabriel Ruiz
Escuela Universitaria
de Empresariales. Jerez
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»

Bibliografía

CAPEL, H. (1982): *Geografía y Matemáticas en la España del siglo XVIII*, Oikos-Tau, Barcelona.

JUAN, J. (1748): *Observaciones astrómicas y phísicas hechas de orden de S. M en los Reynos del Perú*, Imprenta Real, Madrid.

JUAN, J. (1771): *Examen Marítimo Theórico Práctico*, Imprenta Real, Madrid.

LAFUENTE, A. y A. J. DELGADO (1984): *La geometrización de la Tierra (1735-1744)*, CSIC, Madrid.

LAFUENTE, A. y A. MAZUECOS (1987): *Los caballeros del punto fijo*, Serbal/CSIC, Barcelona.