SUMA 28
junio 1998, pp. 5-9

Una visión distinta de un problema clásico (II)

Jorge Hernández Herce
Mercedes González Menorca

En un artículo anterior, publicado en el n.° 24 de SUMA, abordábamos un problema clásico desde un punto de vista diferente. Ahora, aplicamos la misma técnica de resolución geométrica para otras dos desigualdades clásicas que relacionan las razones trigonométricas de un ángulo con el arco.

ARTÍCULOS

EN EL ARTÍCULO «Una visión distinta de un problema clásico», publicado en el número 24 de SUMA (febrero 1997), abordábamos una desigualdad clásica desde un punto de vista diferente. Allí indicábamos que la técnica usada para demostrar

$$\frac{\text{Sen}\,\alpha}{\alpha} > \frac{\text{Sen}\,\beta}{\beta} \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

nos servía también para probar que

$$\frac{\text{Tan}\,\alpha}{\alpha} < \frac{\text{Tan}\,\beta}{\beta} \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Tal vez sólo para ello no nos hubiéramos animado a escribir esta continuación, sin embargo, buscando relaciones entre el *arco* y el *ángulo*, encontramos (Kürschak, 1963) el siguiente enunciado

$$\beta < \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\,\beta + \text{Tag}\,\beta\right] \quad \text{si} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Junto con el enunciado se presentan dos soluciones distintas. Una de ellas, como es fácil suponer, razonaba en términos de áreas. Sin embargo, abordaremos el problema en la misma línea que habíamos utilizado para las dos expresiones anteriores, es decir, *arrastrando el ángulo* para intentar conseguir una *posición de Thales.*

Como esta visión es distinta y, además, utilizamos la relación de las tangentes, vamos a presentar aquí ambos resultados como continuación del artículo antes citado.

De las tangentes

Nuestro primer objetivo era probar

$$\frac{\text{Tan}\,\alpha}{\alpha} < \frac{\text{Tan}\,\beta}{\beta} \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Para ello recurrimos a la figura 1 en la que hemos tomado

$$|OA| = |OB| = |OC| = 1$$

$$\text{arco}(AB) = \alpha \ , \ \text{arco}(AC) = \beta$$

y, por consiguiente

$$|AS| = \text{Tan}\alpha \ , \ |AR| = \text{Tan}\beta$$

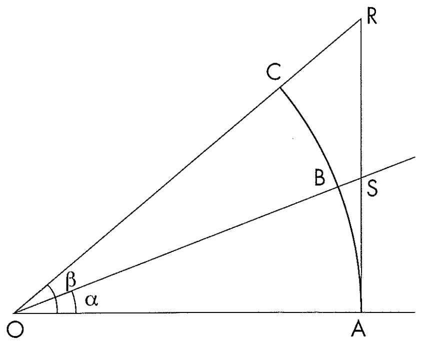

Figura 1

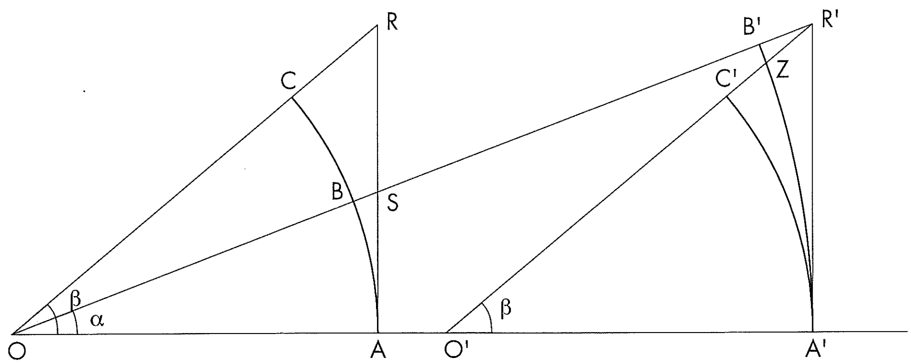

Figura 2

Arrastremos el ángulo β hacia la derecha de modo que |A'R'| = |AR| y R' se encuentre sobre la prolongación de la línea OS. El arco(A'C') es pues igual al arco(AC).

Tracemos el arco de centro O y radio |OA'| que será el arco(A'B').

Visto así, tenemos en la figura 2 que

$$\alpha \cdot |OA| = \text{arco}(AB)$$

$$\alpha \cdot |OA'| = \text{arco}(A'B')$$

Es claro entonces que se verifica la siguiente relación

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{\text{arco}(AB)}{\text{arco}(A'B')}$$

Y por simple proporcionalidad

$$\frac{|OA|}{|OA'|} = \frac{|AS|}{|A'R'|}$$

De ambas expresiones se sigue que

$$\frac{|AS|}{|A'R'|} = \frac{\text{arco}(AS)}{\text{arco}(A'B')} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\text{Tan}\alpha}{\text{Tan}\beta} = \frac{\alpha}{\text{arco}(A'B')} \quad [*]$$

Si somos capaces de ver que

$$\text{arco}(A'B') > \text{arco}(A'C') = \beta$$

habremos conseguido nuestro propósito.

Si despejamos un poco la figura anterior y nos fijamos en la figura 3, «parece» bastante claro lo que queremos probar pues, no sólo se cumplirá lo previsto sino más aún:

$$\text{arco}(A'B') > \text{arco}(A'Z) > \text{arco}(A'C') = \beta$$

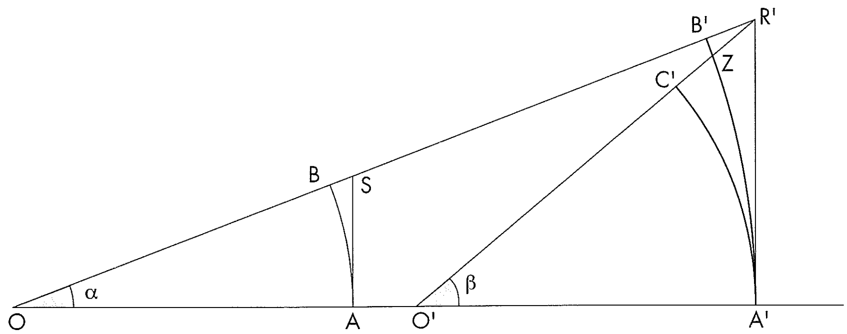

Figura 3

Para verificar esto último, vamos a añadir algunas líneas auxiliares que construyan la figura 4 en la que

$$|OO'| = |O''O'| \ , \ |OA'| = |O''A''|$$

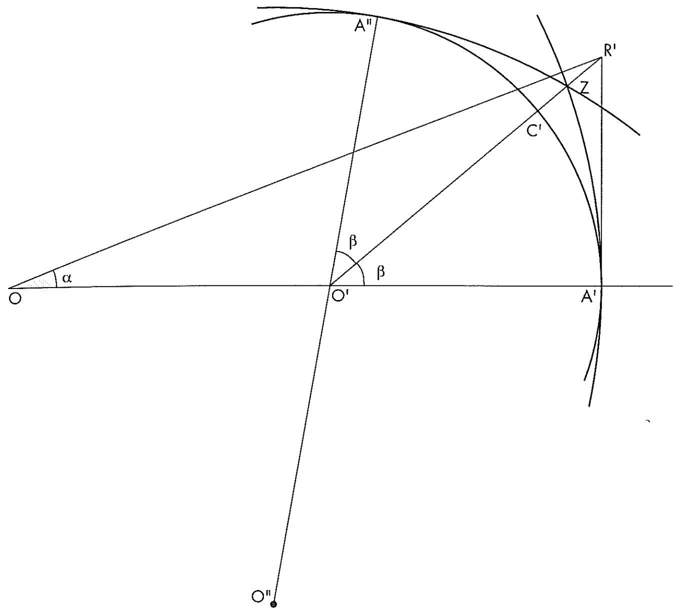

Figura 4

En realidad hemos tomado la figura 3 y hemos aplicado una simetría respecto a la recta O'R'. Como se observa, no hemos trazado todas las líneas del dibujo simétrico para no provocar confusión. para completar la imagen simétrica nos faltaría un segmento O"R' que es el simétrico del OR' y el segmento A"R' que sería el simétrico del A'R'.

Se observa perfectamente que el sector circular determinado por O'A'A" es menor que la figura determinada por los dos fragmentos O'A'Z y O'A"Z, Como además son figuras convexas y tienen los lados $|O'A'|$ y $|O'A''|$ iguales, podemos deducir que:

$$2 \text{ arco}(A'Z) = \text{arco}(A'Z) + \text{arco}(A''Z) >$$

$$> \text{arco}(A'C') + \text{arco}(A''C') = 2 \text{ arco}(A'C')$$

y de aquí es inmediato que:

$$\text{arco}(A'B') > \text{arco}(A'Z) > \text{arco}(A'C') = \beta$$

Lo que sustituyendo en [*] da lo quebuscábamos:

$$\frac{\text{Tag}\alpha}{\text{Tag}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\text{Tag}\alpha}{\alpha} < \frac{\text{Tag}\beta}{\beta}$$

De la semisuma del seno y la tangente

Nuestro segundo objetivo era:

$$\beta < \frac{1}{2}\left[\text{Sen}\beta + \text{Tag}\beta\right] \quad \text{si} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

La expresión anterior se podría leer: «el arco es menor que la media aritmética del seno y la tangente, cuando el ángulo es agudo».

En apariencia, no hay una desigualdad como las analizadas entre el seno y el arco, sin embargo, tranformémosla ligeramente:

$$\beta < \frac{1}{2}\left[\frac{\text{Sen}\beta \cdot \text{Cos}\beta + \text{Sen}\beta}{\text{Cos}\beta}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\beta}{1+\text{Cos}\beta} < \frac{\text{Sen}\beta}{2 \cdot \text{Cos}\beta}$$

(si $0 < \beta < \pi/2$)

Ahora sí que disponemos de una desigualdad en términos de arcos y funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Construyamos la figura 5 partiendo de que:

$$|OA| = |OB| = 1$$
$$|OC| = \text{Cos}\beta$$
$$|BC| = \text{Sen}\beta$$

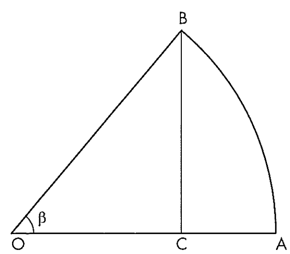

Figura 5

«Arrastrando el ángulo hacia la derecha» hasta que obtengamos una posición de Thales en la que $|CA'| = |CB'| = 1$ y entonces (figura 6):

$$|CC'| = \text{Cos}\beta$$
$$|B'C'| = \text{Sen}\beta$$
$$|OA'| = |OC| + |CA'| = \text{Cos}\beta + 1$$
$$|OC'| = |OC| + |CC'| = 2\text{Cos}\beta$$

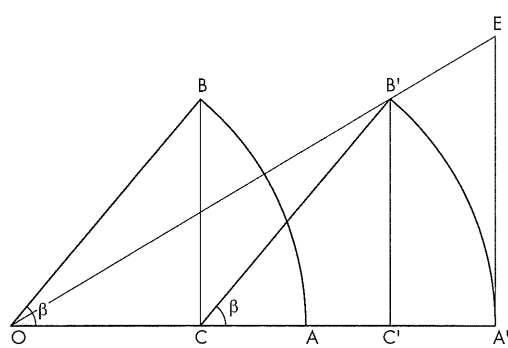

Figura 6

Aplicando proporcionalidad de triángulos resulta que:

$$\frac{|EA'|}{|OA'|} = \frac{|B'C'|}{|OC'|} \Leftrightarrow \frac{|EA'|}{1+\operatorname{Cos}\beta} < \frac{\operatorname{Sen}\beta}{2\cdot\operatorname{Cos}\beta} \quad [**]$$

Fijémonos que esta última expresión es casi la que queremos demostrar. Para ello sólo es preciso probar que:

$$|EA'| > \operatorname{arco}(A'B') = \beta.$$

Para comprobar este resultado, tracemos alguna línea auxiliar más en la figura anterior, obteniendo la siguiente figura 7:

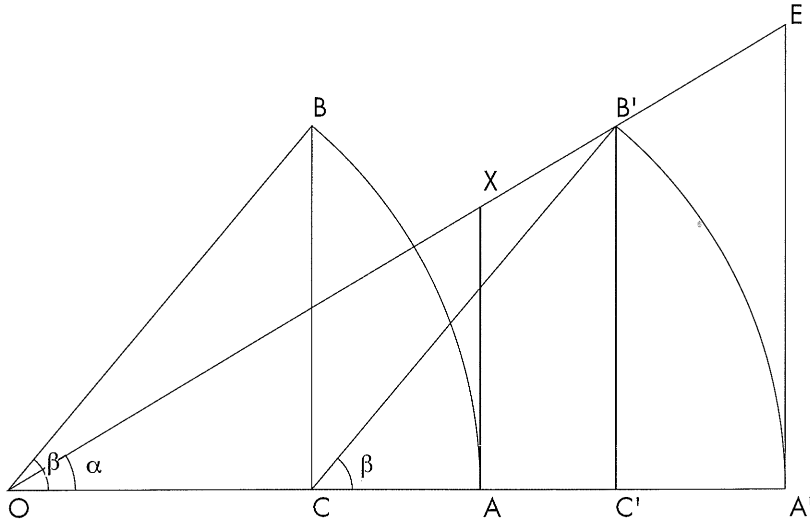

Figura 7

Si aplicamos proporcionalidad de triángulos, como

$$|AX| = \operatorname{Tag}\alpha \text{ y } |OA| = 1$$

$$\frac{|AX|}{1} = \frac{|BC'|}{|OC'|} \Leftrightarrow \frac{|AX|}{1} = \frac{\operatorname{Sen}\beta}{2\cdot\operatorname{Cos}\beta} \Leftrightarrow \operatorname{Tag}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{Tag}\beta \Leftrightarrow \frac{\operatorname{Tag}\alpha}{\operatorname{Tag}\beta} = \frac{1}{2}$$

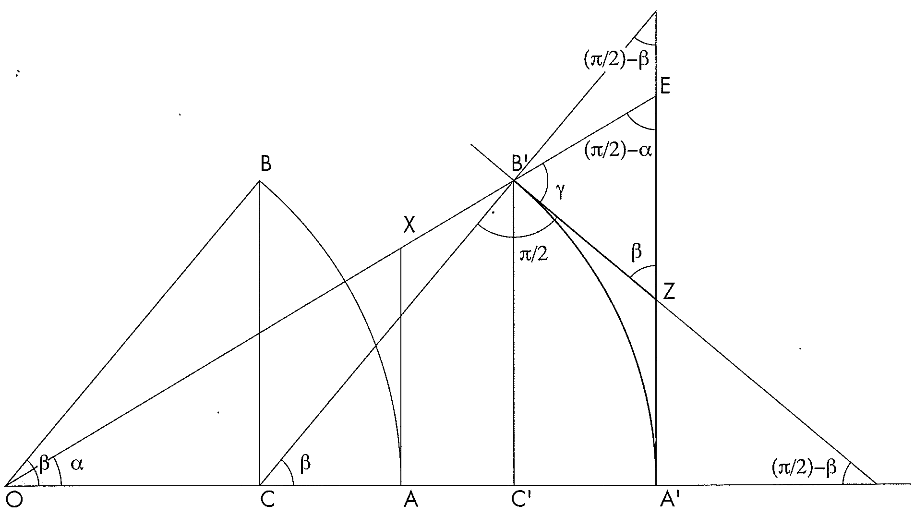

Figura 8

Los ángulos α y β cumplen las condiciones de la relación vista en el apartado anterior, por ello, podemos afirmar que:

$$\frac{1}{2} = \frac{\operatorname{Tag}\alpha}{\operatorname{Tag}\beta} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta < 2\alpha \quad [***]$$

Vamos ahora a centrarnos en la esquina superior derecha de la figura 7, añadiendo líneas auxiliares para definir el triángulo EB'Z (figura 8).

Mirando ángulos y aplicando [***]:

$$\gamma = \pi - [(\pi/2) - \alpha] - \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma = (\pi/2) - (\beta - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma > (\pi/2) - \alpha$$

Como en un triángulo, a mayor ángulo le corresponde mayor lado: $|EZ| > |B'Z|$. Y por eso:

$$|EA'| = |EZ| + |ZA'| > |B'Z| + |ZA'|$$

Ahora $|B'Z| + |ZA'|$ forman una convexa que contiene al arco(A'B'), acabamos de ver lo que queríamos:

$$|EA'| > \operatorname{arco}(A'B') = \beta$$

Otras observaciones importantes

a) En realidad, el transformar la expresión de partida en una desigualdad diferente, nos ha ocultado ligeramente que:

$$|EA'| = \frac{1}{2}(\operatorname{Sen}\beta + \operatorname{Tag}\beta)$$

En efecto, basta aplicar la proporcionalidad de los triángulos y la relación es evidente.

b) Hasta qué punto es ajustada la desigualdad demostrada en el apartado anterior, lo da la tabla 1 de la página siguiente de valores en incrementos de 0,1 radianes.

En definitiva, como es sabido, el seno es una aproximación al arco mejor que la tangente ($\operatorname{Tag}\beta - \beta > \beta - \operatorname{Sen}\beta$) y esto determina que:

$$\beta < \frac{1}{2}\left[\operatorname{Sen}\beta + \operatorname{Tag}\beta\right] \quad \text{si} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$$

Bibliografía

FERNÁNDEZ HERCE, J. y M. GONZÁLEZ MENORCA (1997): «Una visión distinta de un problema clásico», *SUMA*, n.° 24, 59-62.

FIOL, M. L. y J. M. FORTUNY (1990): *Proporcionalidad directa. La forma y el número*, Síntesis, Madrid.

GARCÍA ARENAS, J. y C. BERTRÁN I INFANTE (1978): *Geometría y experiencias*, Alhambra, Madrid.

GRUPO BETA (1990): *Proporcionalidad geométrica y semejanza*, Síntesis, Madrid.

GUZMÁN, M. de (1976): *Mirar y ver. Nueve ensayos de geometría intuitiva*, Alhambra, Madrid.

KÜRSCHAK, J. (1963): *Hungarian problem Book. Vol. 2*, The mathematical Association of America, Random House, New York.

ROANES MACÍAS, E. (1987): *Introducción a la geometría*, Anaya, Madrid.

VV.AA. (1978): *Geometría. Curso Superior*, Bruño, Madrid.

Jorge Fernández
Mercedes González
Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas
Isaac Newton

β	$Sen\beta$	$Tag\beta$	$(Sen\beta+Tag\beta)/2$
$\pi/2 - 1,5 = 0,0708$	0,07074	0,07091	0,07083
$\pi/2 - 1,4 = 0,1708$	0,16997	0,17248	0,17122
$\pi/2 - 1,3 = 0,2708$	0,26750	0,27762	0,27256
$\pi/2 - 1,2 = 0,3708$	0,36236	0,38878	0,37557
$\pi/2 - 1,1 = 0,4708$	0,45360	0,50897	0,48128
$\pi/2 - 1,0 = 0,5708$	0,54030	0,64209	0,59120
$\pi/2 - 0,9 = 0,6708$	0,62161	0,79355	0,70758
$\pi/2 - 0,8 = 0,7708$	0,69671	0,97121	0,83396
$\pi/2 - 0,7 = 0,8708$	0,76484	1,18724	0,97604
$\pi/2 - 0,6 = 0,9708$	0,82534	1,46170	1,14352
$\pi/2 - 0,5 = 1,0708$	0,87758	1,83049	1,35404
$\pi/2 - 0,4 = 1,1708$	0,92106	2,36522	1,64314
$\pi/2 - 0,3 = 1,2708$	0,95534	3,23273	2,09403
$\pi/2 - 0,2 = 1,3708$	0,98007	4,93315	2,95661
$\pi/2 - 0,1 = 1,4708$	0,99500	9,96664	5,48082

Tabla 1