SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

n.º 27

27

FEBRERO
1998

SUMA 27
febrero 1998

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 5.700 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de este número son obras del escultor José Miguel Fuertes.

SUMA 27
febrero 1998

Matemáticas y actualidad

EDITORIAL

LAS MATEMÁTICAS parece que se han puesto de moda. Últimamente han aparecido en los medios de comunicación diversas noticias y comentarios relacionados con ellas, de forma directa o indirecta. Resulta estimulante leer el editorial de un periódico o escuchar una tertulia radiofónica en que se utilice a las matemáticas como un argumento de peso, aunque con cierta frecuencia se ponga de manifiesto un anumerismo bastante pronunciado.

En el mes de noviembre pasado un sorteo, el de los excedentes de cupo para el servicio militar, consiguió que todo el país hablase de cosas como azar, probabilidad, aleatorio, sesgado, equiprobable..., aunque, en general, con bastante desconocimiento por parte de periodistas y políticos, e incluso con serios errores por personas que por su profesión tienen menos disculpa. Constituyó una oportunidad única de llevar la actualidad al aula de Matemáticas y estamos seguros de que fue aprovechada por el profesorado.

Las últimas navidades llevaron a la sección de best-sellers *de los escaparates de las librerías un libro que habla de matemáticas,* El diablo de los números, *y entró en las listas de los libros más vendidos. Pudo ser por la personalidad del autor, o por el lanzamiento publicitario, incluidos suplementos semanales de gran tirada, pero en todo caso es una noticia agradable. Es posible que algún desengachado de las Matemáticas les haya dado una nueva oportunidad.*

También la enseñanza de nuestra materia ha estado sometida a discusión. Los resultados del Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS) fueron motivo, incluso en altas instancias, para ponerla en entredicho, debido al bajo *rendimiento de nuestros alumnos. Incluso sirvió para descalificar de alguna manera la reforma actual, ¿desconociendo? que las pruebas se habían aplicado en 7.° y 8.° de EGB y no en la ESO.*

Nuestra Federación siempre ha tratado de estar implicada en los debates que afectan a la enseñanza de las Matemáticas, dentro de este marco convocó sendos seminarios de trabajo en El Escorial y Jaca en los que se trataron temas tan actuales como son la implantación de la ESO y de los nuevos Bachilleratos.

Este número de SUMA, como no podía ser menos, contiene artículos relacionados con estos temas de actualidad. Esperamos que las Matemáticas sigan estando presentes en los medios de comunicación –eso sí, mejor utilizadas–, que el interés por la enseñanza de las Matemáticas siga en progresión y sirva para profundizar en su mejora y que los colaboradores de SUMA sigan enviando trabajos que analicen los temas de actualidad que vayan surgiendo.

SUMA 27
febrero 1998, pp. 5-7

Carta abierta de la Secretaria General de la Federación

Carmen Azcárate

QUERIDAS SOCIAS y queridos socios de la FESPM:

Ha pasado más de un año desde que tomé el relevo de la Secretaría General de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas de la mano de Luis Balbuena que había ocupado el cargo durante cinco años. Conmigo, en la Comisión Permanente, están Ricardo Luengo, Maria Jesús Luelmo y Florencio Villarroya, presidente, vicepresidenta y tesorero de la Federación, respectivamente.

Mi incorporación a la Secretaría General coincidió con la clausura del ICME en Sevilla, un congreso de éxito indiscutible, que supuso un largo y agotador esfuerzo para nuestra Federación, para todas las sociedades y, en particular, para la Sociedad «Thales» que se encargó de su organización. El resultado ha valido la pena y ha confirmado la cohesión, estabilidad, eficacia y solidez de nuestra Federación. Es el mejor tributo que le podíamos ofrecer a nuestro compañero Gonzalo Sánchez Vázquez, principal impulsor de la presencia del ICME en Sevilla, presidente de la Federación durante su celebración, en la que no pudo participar, aquejado de una grave enfermedad que le llevó a la muerte.

A partir de ese momento, el reto que afrontamos las nuevas Junta de Gobierno y Comisión Permanente era retornar al trabajo cotidiano, tanto de las sociedades, como de las actividades de la Federación. En los años transcurridos desde su creación, por las Sociedades Andaluzas, Canaria, Aragonesa y de Castellón, allá por 1989, esta Federación ha crecido mucho, tanto en número de sociedades federadas, como en número de socios de cada una de dichas sociedades. Esto nos ha llevado a revisar, no la estructura y el funcionamiento de nuestra organización, sino los estatutos y reglamento interno, superados en algunos puntos por el devenir de los acontecimientos.

Actualmente la Federación consta de 14 sociedades con más de 4.500 socios, es decir, constituye una organización importante y, sobre todo, compleja si tenemos en cuenta la gran diversidad, y por tanto riqueza, de las sociedades que la componen. Como consecuencia de esta situación la Junta de Gobierno, en su sesión del 30 de noviembre de 1996, acordó constituir una comisión de revisión de los estatutos y del reglamento interno de la Federación, comisión formada por Javier Brihuega, Salvador Guerrero y Luis Balbuena, que ya nos han presentado un primer borrador de los mismos. Entramos, por tanto, en una fase de discusión y de aprobación de unos nuevos estatutos que nos abocará a una nueva etapa de unos nuevos estatutos que nos servirán en una nueva etapa de consolidación y crecimiento. Esperamos poder contar «pronto» con nuevas sociedades en Euzkadi, Castilla-La Mancha, Murcia, La Rioja, Baleares...

En segundo lugar, cabía preguntarse ¿cuáles son la actividades propias de la Federación? ¿qué podemos ofrecer a nuestros socios, a los profesores de Matemáticas del Estado Español, a la sociedad española, en general? En este sentido podemos distinguir, por un lado, las actividades ya tradicionales como son la revista SUMA, las Olimpiadas Matemáticas (8.° EGB y 2.° ESO) de la Federación y las JAEM, nuestras jornadas bienales, y por otro, las actividades de formación y de reflexión acerca de temas, tanto referentes a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, como de política educativa, en aquellos aspectos en que estén implicadas las matemáticas (que por cierto, son casi todos) y que se organizan en forma de seminarios puntuales, de tres o cuatro días de duración, a los que asisten representantes de todas las sociedades federadas y otras personas invitadas.

Esperamos poder contar «pronto» con nuevas sociedades en Euzkadi, Castilla-La Mancha, Murcia, La Rioja, Baleares...

Recuerdo brevemente las actividades de la FESPM durante el año 1997:

- La revista SUMA ha salido puntualmente con sus tres números anuales: febrero (24), junio (25) y noviembre (26). El número 25 se dedicó a la memoria de Gonzalo Sánchez Vázquez. Su número de páginas aumenta, gracias al esfuerzo de sus directores, y de todos aquellos que envían sus colaboraciones.
- La Sociedad Asturiana de Educación Matemática Agustín de Pedrayes organizó la fase final de las VIII Olimpiadas Matemáticas de la FESPM en Gijón entre los días 23 y 28 de junio de 1997, como culminación de las diferentes olimpiadas que organizan la mayoría de las sociedades. Participaron 43 estudiantes y 15 profesores acompañantes.
- La Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas organizó las VIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM) en Salamanca los días 9, 10 y 11 de septiembre de 1997. Asistieron un total de 667 participantes de los cuales 515 eran socios de la FESPM. En estas Jornadas la FESPM convocó el Premio Gonzalo Sánchez Vázquez, aprobado en la Junta de Gobierno celebrada el 7 de junio de 1997 y cuyas bases se publican en este mismo número de SUMA.
- La Organización Española para la Coeducación Matemática «Ada Byron», organizó el curso «Matemáticas y Coeducación» los días 24, 25 y 26 de abril de 1997, con un centenar de participantes.
- La Sociedad Aragonesa «P. Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas ha organizado el «Seminario para el estudio de los nuevos bachilleratos y su coordinación con los nuevos planes de la Universidad», en Jaca, los días 16, 17 y 18 de octubre de 1997. En este número 27 de SUMA se publican las conclusiones de dicho seminario.
- La Sociedad de Profesores de Matemáticas Madrileña «Emma Castelnuovo» ha organizado el seminario «Implantación de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria: un análisis en el contexto internacional», en El Escorial, los días 27, 28 y 29 de noviembre de 1997. En este número 27 de SUMA también se exponen las conclusiones de dicho seminario.

Pero nuestras actividades, no se cierran en nuestro país. Hemos reforzado nuestras relaciones con las sociedades de Educación Matemática actualmente existentes, por un lado, en algunos países de Iberoamérica, nombrando a Luis Balbuena «Vocal de la Junta de Gobierno de la FESPM para las relaciones con Iberoamérica» (acuerdo de la Junta de Gobierno del 30 de noviembre de 1996). Luis y otros compañeros han asistido a congresos de dichos países, pronunciando conferencias. Por otro lado, en esa misma Junta se nombró el responsable de las relaciones con Europa, a Florencio Villarroya (hace algunos días hemos recibido una invitación de las sociedades francesa y belga para formar una Federación Europea de Profesores de Matemáticas).

Además hay otras cuestiones que nos preocupan y que no son de fácil solución. Por ejemplo, hace ya más de dos años que la Junta de Gobierno de la FESPM se propuso crear un Servicio de Publicaciones; sin embargo, esta intención no se ha concretado todavía. Esperemos que los nuevos estatutos sienten unas bases que nos permitan desbloquear esta cuestión.

Queridos socios y queridas socias de la FESPM, espero que este breve repaso de nuestras actividades nos ayuden a todos a mantener nuestra ilusión y nos animen en nuestras actividades como profesores y profesoras de Matemáticas en este lugar y en este tiempo que nos ha tocado compartir.

Carmen Azcárate
Secretaria General
de la Federación Española
de Sociedades de Profesores
de Matemáticas
(FESPM)

Complemento
Arenisca, 162x47x14
José Miguel Fuertes

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Antoni Vila
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Fidela Velázquez
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: J. Antonio Rupérez Padrón
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Modesto Sierra Vázquez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez
IES José María Pereda. C./ General Dávila, 288. 39007-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 27
febrero 1998, pp. 9-16

Seminario para el estudio de los nuevos Bachilleratos y su coordinación con los nuevos planes de la Universidad*

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro S. Ciruelo»

SEMINARIO FESPM

LA FINALIDAD de este Seminario está contemplada en su título. Ante los nuevos bachilleratos y ante los nuevos planes de los estudios universitarios, parece conveniente que exista una cierta coordinación entre ambos niveles.

Hasta ahora esta coordinación sólo se ha llevado a cabo en algunos casos muy concretos (hay experiencias muy meritorias) y en la coordinación de COU, entre el coordinador de la universidad correspondiente y los profesores de bachillerato, con vistas casi exclusivamente a determinar los contenidos de las Pruebas de Acceso a la Universidad.

Recientemente se han elaborado, por parte del MEC, los nuevos currículos de ESO y Bachillerato y, simultáneamente, los nuevos planes de los distintos estudios universitarios, por parte de las universidades, y sorprende que no haya habido, que nosotros sepamos, ningún tipo de comunicación entre las personas que los han confeccionado; que se hayan hecho de forma totalmente independiente como si los destinatarios de ambos fueran conjuntos disjuntos.

No hay que esforzarse en demasía para ver la conveniencia (la necesidad más bien) de esta coordinación. Nuestra impresión es que el profesorado de ambos niveles lo está demandando.

Un apunte más: si la coordinación es necesaria en todas las materias, en Matemáticas lo es en mayor grado. Las Matemáticas no es una asignatura aséptica en ningún nivel, es de las más problemáticas. En diversos estudios sobre actitudes de los estudiantes las Matemáticas suelen aparecer como la asignatura más útil y más importante pero también como la más aburrida y la más difícil. No es ningún secreto el alto índice de suspensos (no nos gusta lo del fracaso) que hay en nuestra asignatura en Bachillerato y, sobre todo, en la Universidad, que en algu-

* Documento elaborado en el Seminario convocado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizado por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro S. Ciruelo».

Fue coordinado por Emilio Palacián y Florencio Villarroya y se celebró en Jaca (Huesca) los días 16, 17 y 18 de octubre de 1997.

El presente informe ha sido redactado por: Pilar Alonso, Jesús Antolín, Guillermo Dorda, Emilio Palacián, Ana Pola, Julio Sancho, José María Sorando y Florencio Villarroya.

nos casos excede lo razonable. No se trata de distribuir responsabilidades, a lo que los docentes somos muy aficionados, es muy fácil decir que los alumnos vienen mal preparados del nivel anterior o que los profesores del nivel siguiente son muy duros. Se trataría de reflexionar conjuntamente sobre los problemas que nuestra materia tiene en los dos niveles y establecer si es posible una serie de recomendaciones dirigidas a las administraciones educativas y al profesorado correspondiente para intentar paliar los problemas existentes en este siempre paso difícil del Bachillerato a la Universidad.

Asimismo, pensamos que éste tiene que ser un primer paso en dicho sentido, y que a partir de aquí las sociedades de profesores de Matemáticas deben iniciar procesos semejantes a éste en sus comunidades autónomas para que en el futuro ya no se pueda hablar de que los profesores de cada nivel van cada uno por su lado. Sabemos que es una tarea difícil, pero merece la pena, al menos, intentarlo.

...las sociedades de profesores de Matemáticas deben iniciar procesos semejantes a éste en sus comunidades autónomas...

Desarrollo del Seminario

Durante los días 16, 17 y 18 de octubre de 1997 se celebró en la Residencia Universitaria de Jaca (Huesca) en el que participaron 52 profesores y profesoras de educación secundaria y de universidad, de diferentes comunidades españolas. Este encuentro estaba organizado por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas, y formaba parte del plan de actividades de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Cada sociedad estaba representada por varios socios y además se invitaba a uno de los coordinadores de COU de cada comunidad. Participaron varios profesores de la Universidad de Zaragoza en las mesas redondas.

El seminario se inició con la sesión de inauguración en la que intervinieron: Tomás Escudero, Vicerrector de Evaluación y Mejora de la Enseñanza de la Universidad de Zaragoza; Alfonso García Roldán, Director Provincial del MEC de Zaragoza; Carmen Azcárate, Secretaria General de la FESPM; Florencio Villarroya y Emilio Palacián, coordinadores del seminario.

Durante la mañana del viernes se desarrollaron dos mesas redondas y una conferencia, que debían servir para sugerir temas para el debate de los asistentes, constituidos en dos grupos de trabajo, uno sobre cada una de las modalidades del Bachillerato.

La primera mesa redonda tenía por objeto analizar las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, que se cursan en el Bachillerato de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. En la misma participaron Javier Brihuega, una de las personas que participó en la elaboración del currículum, Ana Pola, profesora de Matemáticas en el IES Avempace de Zaragoza, con experiencia en la impartición de esta materia, Isabel Pérez, profesora de Matemáticas en la Facultad de Económicas de la Universidad de Zaragoza y que había sido coordinadora de las Matemáticas II de COU, y José María Cuadrat, profesor de la Facultad de Geografía. Fue moderada por Florencio Villarroya.

La segunda mesa redonda giró en torno a las Matemáticas del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y del Tecnológico. Participaron en la misma Antonio Pérez Sanz, que tomó parte en la elaboración del currículo de esta materia, Julio Sancho, profesor del IES Avempace de Zaragoza con experiencia en su impartición, Emilio Rubio, profesor de Estadística de la Facultad de Medicina de la Universidad de Zaragoza y Manuel Vázquez, Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza. Fue moderada por Emilio Palacián.

La conferencia de Josep Gascón, profesor de matemáticas de la Universidad Autónoma de Barcelona, llevó por título «Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar Matemáticas en Secundaria a estudiar Matemáticas en la Universidad». Está publicada en el número 26 (noviembre 1997) de la revista SUMA.

...hizo hincapié en dos aspectos básicos de estas matemáticas: su carácter de matemáticas aplicadas y la utilización de las denominadas nuevas tecnologías [Javier Brihuega]

Resumen de la Mesa Redonda sobre las Matemáticas en el Bachillerato de Humanidades y CC.SS.

La primera intervención correspondió a Javier Brihuega, quien tras hacer alusión a la parte del currículo que fija el Estado (60%) y la que corresponde a cada comunidad autónoma con competencias (40%), hizo hincapié en dos aspectos básicos de estas matemáticas: su carácter de matemáticas aplicadas y la utilización de las denominadas nuevas tecnologías, especialmente calculadoras gráficas y ordenadores. Destacó asimismo la importancia del bloque de

Estadística y de la Resolución de Problemas, así como el carácter instrumental de los bloques de Cálculo, Álgebra y Análisis.

Ana Pola centró su intervención en los problemas que se encuentra al desarrollar esta asignatura en el aula. La diversidad del alumnado y la angustia por no poder terminar los programas son dos de sus principales preocupaciones. Piensa, asimismo, que estas matemáticas le parecen «cortas» para algunos alumnos, por lo que plantea la posibilidad de que hubiera una doble vía. Considera que, pese a las buenas intenciones legislativas, en los centros no se tienen los medios adecuados para hacer un uso efectivo de las nuevas tecnologías.

Isabel Pérez incide en que la existencia del salto tan grande que existe entre el bachillerato y la universidad, y la descoordinación que hay, se puede explicar por cómo se elaboran las propias leyes. También incide en la necesidad de reglamentar la figura del coordinador o armonizador, figura no contemplada en el Bachillerato LOGSE y que sí existía en el COU. Hace alusión al grave problema que se plantea en Económicas cuando se juntan alumnos que provienen de las dos modalidades de Bachillerato y de las dos de COU. A su juicio las mayores deficiencias que observa en el alumnado que llega a la universidad es la falta de destreza en cuestiones básicas, así como en el paso de lo concreto a lo abstracto. Cree, además, que en los planes de estudio de la licenciatura se ha reducido mucho el tiempo dedicado a las matemáticas y los muchos contenidos que tienen que dar en ese tiempo, por lo que, a su juicio, consideraría más conveniente que los alumnos cursasen en el Bachillerato LOGSE las Matemáticas II.

El papel cada día más relevante de las matemáticas, especialmente la estadística, en los estudios de Geografía fue destacado ampliamente por José María Cuadrat en su intervención. Piensa que la orientación de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales es muy adecuada a las necesidades matemáticas que requiere el alumnado que se incorpore a estos estudios.

Acto inaugural del Seminario

...en los centros no se tienen los medios adecuados para hacer un uso efectivo de las nuevas tecnologías. [Ana Pola]

...se debe reglamentar la figura del coordinador o armonizador... [Isabel Pérez]

Es cada día más relevante el papel de las matemáticas, en los estudios de Geografía [José Mª Cuadrat]

...es falso que estas matemáticas no sean una continuación de las de la ESO. [Antonio Pérez]

Resumen de la Mesa Redonda sobre las Matemáticas en los Bachilleratos de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnológico

En su intervención, Antonio Pérez expuso las premisas planteadas por el Ministerio a los grupos que debían elaborar el currículo de las diversas materias del bachillerato. En su opinión, es falso que estas matemáticas no sean una continuación de las de la ESO y lo justificó a partir del preámbulo del Decreto de Currículum. Hizo especial énfasis en los términos en que están redactados los objetivos y los criterios de evaluación, y alude al problema político que se plantea con el reparto 60%/40% en los contenidos entre el Ministerio y las comunidades autónomas, problemas que ya se empiezan a ver en la ESO (se refirió a la posible reforma de las Humanidades).

Julio Sancho, desde su experiencia impartiendo esta materia, piensa que no hay continuidad, especialmente en relación a lo metodológico, entre la ESO y el Bachillerato. Esta diferencia es aún más acusada en el segundo curso, donde la falta de tiempo para desarrollar los contenidos es muy acusada. Cree que la presencia de las PAU y la propia concepción que tiene el profesorado hacen parecer que la única salida de este bachillerato es la universidad. Hizo alusión a cómo las pruebas de acceso condicionan el desarrollo del programa de Matemáticas II. Se lamenta de que, al llegar a la universidad, los profesores comienzan dando por supuesto que los estudiantes dominan temas que ni siquiera han visto como, por ejemplo, los espacios vectoriales. Como su compañera del otro bachillerato, es muy escéptico sobre el uso de las nuevas tecnologías, por la falta de medios en los centros y sugiere que sean reconocidas las prácticas de matemáticas al profesorado de esta materia. A su entender la oferta de matemáticas en este curso debería ser más diversificada, por ejemplo, unas matemáticas básicas y varias asignaturas complementarias. También solicitó que los profesores encargados de la elaboración de las pruebas de acceso tengan en cuenta los criterios de evaluación oficiales del bachillerato y que en la Universidad se parta realmente de los conocimientos que poseen los alumnos.

Emilio Rubio inició su exposición destacando el papel de las matemáticas en las diversas carreras relacionadas con las ciencias de la salud. A su juicio, en lo que él denomina Ciencias de la Vida, las necesidades se concretarían en: un 90% de Estadística y Probabilidad, un 3% de Investigación Operativa, y en porcentajes menores el resto, es decir, Álgebra, Análisis, etc. Por eso cree que las matemáticas que mejor cubrirían estas necesidades serían precisamente las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Destaca asimismo el carácter práctico de su materia, tanto por el hecho de trabajar siempre con datos reales, procedentes de tesis, estudios, etc, como por el mayor peso de las clases prácticas sobre las teóricas.

Para Manuel Vázquez lo más importante sería no dar en el bachillerato una imagen de las matemáticas distinta de la que tienen en la Universidad. Propone que las matemáticas sean un poco más demostrativas, aunque sin pasarse, que no sean tan algorítmicas. Para ello sugiere que se aumente el número de horas, pero no los programas, lo que favorecería la comprensión de los conceptos. Le preocupa la situación que se está produciendo en la carrera de Físicas, donde el número de créditos de matemáticas ha descendido de 75 a 39, así como en las carreras de ingeniería, donde ha habido reducciones similares, sin que haya habido modificaciones sustanciales en los programas.

Grupos de trabajo

Durante las tardes del viernes y sábado los asistentes se distribuyeron en dos grupos para dialogar sobre cada una de las materias de Matemáticas de las modalidades: Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología y Ciencias Sociales y Humanidades.

Conclusiones del grupo de trabajo del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y Tecnología

Carácter formativo

Existe bastante consenso en que las Matemáticas tienen que tener una triple finalidad –y así se afirma en el DCB de secundaria–: formativa, funcional e instrumental y esta última la descompondríamos en tres: instrumental para la «vida», instrumental como herramienta para la comprensión de otras ciencias (entendidas en sentido amplio) e instrumental para poder seguir estudiando matemáticas.

Estas tres finalidades se deberían tener en cuenta de forma equilibrada cuando se hagan las programaciones de las matemáticas en el bachillerato. En los últimos tiempos este equilibrio no se ha cumplido: las matemáticas se han impartido fundamentalmente teniendo en cuenta el carácter instrumental y, en especial, el carácter instrumental del estudio de las matemáticas para seguir progresando en las mismas, con lo que ha tenido un carácter endogámico bastante acentuado. Existe el peligro de que con los nuevos bachilleratos se siga dando este fenómeno o, como mucho, considerádolas como instrumental de forma más amplia (incluyendo la instrumentalidad para la vida y para otras materias), pero en todo caso olvidando el carácter formativo que deben tener en esta etapa.

Así pues, se recomienda que se intente dar más peso a este carácter formativo y que en la realidad diaria se contemple el equilibrio aludido. Es evidente que las matemáticas poseen unas potencialidades que la hacen idónea para desarrollar determinadas facetas intelectuales de los alumnos: rigor intelectual, abstracción, juego de la deducción junto a la inducción, formalización, lenguaje sin ambigüedades,...

Este carácter formativo de las matemáticas incide, además, en el carácter cultural que deben tener las matemáticas y que tiene que ser transmitido a los alumnos. No sólo es que las matemáticas tengan una historia y, por tanto, formen parte de la historia de la cultura de la humanidad, sino que, además, son uno de los saberes esenciales culturales por la gran aplicabilidad que tienen en diversos órdenes de la vida y por su carácter formativo y cultural en su sentido más amplio; lo que en definitiva

...las pruebas de acceso condicionan el desarrollo del programa de Matemáticas II. [Julio Sancho]

...las matemáticas que mejor cubrirían las necesidades (de las carreras biomédicas) serían precisamente las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales [Emilio Rubio]

...no dar en el bachillerato una imagen de las matemáticas distinta de la que tienen en la Universidad [Manuel Vázquez]

viene a afirmar la necesidad del equilibrio de las tres finalidades enunciadas al inicio de este apartado.

El peso de las Matemáticas en el currículo de los Bachilleratos

Existe la impresión en ciertos sectores, no siempre relacionados directamente con la enseñanza, de que los nuevos bachilleratos inciden especialmente en aspectos científicos y técnicos en contraposición con los humanísticos. Parece como si todos los alumnos de bachillerato tuviesen un currículo excesivamente sesgado a favor de materias «científicas y técnicas» en detrimento de materias «humanísticas».

Esto en modo alguno es cierto. Por ejemplo, los alumnos del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud tienen, a lo largo de los dos cursos de bachillerato, como máximo 36 horas de clase de materias «científicas» y 18 horas de materias «humanísticas». Los de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales reciben como máximo 8 horas de materias «científicas» y 46 de «humanísticas». Además, según datos del MEC, la distribución del alumnado matriculado por modalidades en Bachillerato LOGSE está bastante equilibrada entre «alumnos científicos y técnicos» y «alumnos humanísticos» (Ciencias de la Naturaleza y la Salud: 36,9%; Tecnología: 13,9%; Humanidades y Ciencias Sociales: 43,5%; Artes: 5,7%).

Creemos que queda bastante claro que no se puede decir, al menos con un cierto rigor, que los bachilleratos actuales están excesivamente tecnificados. Es un argumento que no se sostiene mínimamente.

Deseamos transmitir a la sociedad no dudas sino certezas: la Matemática es un hecho cultural significativo y, además, tiene una dificultad intrínseca relevante, lo que debe implicar la necesidad de una dedicación escolar importante. Consideramos imprescindible que se reconozca esta dedicación para lo que se necesitaría:

...no se puede decir, al menos con un cierto rigor, que los bachilleratos actuales están excesivamente tecnificados.

...la Matemática es un hecho cultural significativo y, además tiene una dificultad intrínseca relevante, lo que debe implicar la necesidad de una dedicación escolar importante.

- Un mayor horario en la ESO dedicado a las Matemáticas, para que sin ningún aumento de los contenidos, éstos puedan llevarse a cabo con la metodología y profundidad que indican los diseños curriculares oficiales. Con un mínimo de cuatro horas de Matemáticas los alumnos llegarían en mejores condiciones al bachillerato lo que también redundaría en una mejor cualificación a la hora de iniciar sus estudios universitarios.
- La creación de un aula-laboratorio de Matemáticas con la dotación material y humana necesarias para poder enseñar las Matemáticas acorde con los nuevos instrumentos tecnológicos y dar cumplimiento a las nuevas orientaciones metodológicas reflejadas en los documentos oficiales sobre la ESO y el Bachillerato.

Pruebas de Acceso a la Universidad

La norma que regula estas pruebas, que tiene carácter transitorio, pretende tratar a los alumnos provenientes de los dos planes de estudios (COU y Bachillerato LOGSE), en su acceso a la universidad, de la misma forma. El formato actual de las Pruebas de Acceso de Matemáticas del bachillerato LOGSE, aun cuando hay diferencias notables según las universidades, en general no responde ni a la metodología, ni a los criterios de evaluación que se recogen en el diseño curricular del mismo. Las características de estas pruebas son un referente para el trabajo en el aula de los profesores, pues cualquier prueba externa condiciona fuertemente el desarrollo del currículo. La responsabilidad de la prueba de acceso recae en una comisión, que en cada universidad ha resuelto la coordinación de forma diferente (desde las que no existe, hasta otras en que hay comisiones mixtas de profesores de matemáticas de ambos niveles), sin existir una regulación ni financiación adecuada.

La previsible reforma de las Pruebas de Acceso a la Universidad debería:

- Reconocer explícitamente la influencia de las pruebas de acceso en la configuración del currículo y aprovecharla para orientar su desarrollo.
- Ser coherente con los criterios de evaluación de la asignatura que figuran en el currículo.
- Regular la coordinación para el diseño de estas pruebas, con participación de profesorado de universidad y bachillerato, y dotarla de la financiación adecuada.

Tránsito entre las EEMM y la Universidad

Es un hecho que en los últimos años se ha ido produciendo un paulatino aumento de la exigencia en las asignaturas de contenido matemático en los primeros cursos universitarios. Paralelamente, el acceso de un mayor número de estudiantes a la universidad, debido a la extensión de la escolarización, produce un descenso del nivel medio de los alumnos en matemáticas. Todo ello ha llevado a que exista un desfase entre los niveles de bachillerato y del primer curso universitario.

La reforma de los planes de estudio de las universidades ha supuesto, en muchos casos, una reducción del tiempo dedicado a las matemáticas con un mantenimiento de los mismos contenidos. Por otra parte, la elaboración de estos planes de estudio, aun siendo responsabilidad de una misma administración, no ha tenido la necesaria coordinación con las reformas habidas en otros niveles educativos. Sobre todo, en los estudios técnicos la enseñanza de las matemáticas pone el énfasis en el dominio de técnicas algorítmicas, relegando la comprensión conceptual adecuada, lo que acrecienta las dificultades de los alumnos.

Ante esta situación creemos conveniente las siguientes acciones:

- La realización de investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas en estas etapas y su difusión entre el profesorado.
- Una mayor atención a la formación didáctica de los profesores y una preocupación por la metodología tanto en bachillerato como en la universidad.
- La coordinación entre los planes de estudio en bachillerato y universidad, lo que supone analizar cuál es la formación conveniente a cada nivel y reconocer los puntos de llegada y partida.
- La elaboración de materiales curriculares que mostraran cómo podrían ser desarrollados estos currículos.
- Al elaborar los programas universitarios que desarrollan los planes de estudio se debería partir de qué y cómo aprenden los alumnos, así como de los conocimientos y destrezas reales que poseen al acceder a la universidad.
- Revisión de los itinerarios para evitar que se pueda acceder a determinadas carreras sin haber cursado las Matemáticas II (en la actualidad se pueden iniciar Físicas o algunas Ingenierías, sin Matemáticas II).
- Creación de una optativa en segundo curso de bachillerato, cuyos contenidos y métodos proporcionaran una aproximación a la formalización del conocimiento matemático, una profundización en algunos aspectos algebraicos y algorítmicos, etc.

Conclusiones del grupo de trabajo del Bachillerato de Ciencias Sociales

A continuación se reflejan las conclusiones a las que se llegó en los temas tratados por el grupo de trabajo sobre la situación de las Matemáticas en el Bachillerato de Ciencias Sociales. Muchos otros temas quedaron sin tratar por limitaciones de tiempo o tan sólo fueron esbozados, como, por ejemplo: la relación entre contenidos y capacidades, la función y la adecuación de los libros de texto, la opción de Matemáticas A o B en 4.° curso de ESO como condicionante, el cambio metodológico al pasar de ESO al Bachillerato, etc. Por lo tanto, la fidelidad a las conclusiones del grupo hace que este documento no sea un estudio exhaustivo, pero a la vez le confiere el valor de ser la expresión del parecer y puntos de acuerdo de un cualificado grupo de profesionales de todos los ámbitos académicos implicados y de variadas procedencias geográficas.

Dos aspectos han centrado principalmente el análisis: por una parte, el significado y las implicaciones de unas matemáticas aplicadas; por otra, las relaciones que se establecen con las etapas educativas anterior y posterior y su tensión con el carácter propio del Bachillerato.

La reforma de los planes de estudio de las universidades ha supuesto, en muchos casos, una reducción del tiempo dedicado a las matemáticas con un mantenimiento de los mismos contenidos.

En Ciencias Sociales [Estadística y Probabilidad] es una de las partes de la Matemática fundamental en la formación de los estudiantes.

Unas matemáticas aplicadas

El hecho de que las Matemáticas que se diseñan para este Bachillerato tengan el carácter de aplicadas concede una gran relevancia a:

- La necesidad de dar a la Estadística y Probabilidad la misma importancia que al Álgebra y al Análisis.
- La resolución de problemas como eje fundamental para el desarrollo de los contenidos.
- La incorporación de medios tecnológicos.

La Estadística y Probabilidad

Debe considerarse como un bloque de contenidos importante a lo largo de toda la Educación Secundaria Obligatoria y no, como frecuentemente ha sucedido, ser aquello de lo que se prescinde en caso de falta de tiempo para acabar los programas. En Ciencias Sociales es una de las partes de la Matemática fundamental en la formación de los estudiantes.

Sin embargo, la incorporación de la Estadística Inferencial abre algunos interrogantes: ¿son capaces de entenderla los alumnos de esta edad?; ¿debería formar parte del currículo de Bachillerato o no? De hecho, la respuesta actual es diversa según de qué comunidad autónoma se trate.

La resolución de problemas

La necesidad de que los alumnos adquieran estrategias para la resolución de problemas es incuestionable. Pero se advierte una diversidad de enfoques al establecer qué se entiende por resolución de problemas: la enseñanza de las estrategias en sí mismas, ejercicios contextualizados o situaciones problemáticas de las Ciencias Sociales.

Se considera que las estrategias para la resolución de problemas debieran desarrollarse, en este Bachillerato, a la vez que se abordan y resuelven situaciones de las Ciencias Sociales, que no deben ser confundidas con los ejercicios con datos obtenidos de la realidad. Pero constatamos la dificultad de encontrar situaciones y problemas ligados a los contenidos y cuyos conceptos de Ciencias Sociales sean comprensibles por los alumnos.

A este respecto, se aprecia una total falta de adecuación de los actuales libros de texto, que parecen haber sido elaborados desde la urgencia de su publicación y sin haber tomado en consideración los anteriores planteamientos. El profesorado no encuentra en estos libros los problemas que se necesitan para desarrollar los objetivos propuestos.

El desarrollo de las capacidades asociadas a la resolución de problemas conlleva una metodología investigadora y participativa, que exige tiempo en clase para orientar el trabajo de los alumnos. Pero, a su vez, está presente el compromiso de cubrir todos los contenidos del curso y aun otros contenidos anteriores (como comentaremos más adelante). Finalmente, la limitación del horario hace que las exigencias de la metodología propuesta y el compromiso sobre los contenidos resulten poco compatibles.

La necesidad de que los alumnos adquieran estrategias para la resolución de problemas es incuestionable.

Existe un amplio acuerdo sobre la conveniencia de la incorporación de las tecnologías de la información y de la comunicación como medios didácticos

Los medios tecnológicos

Existe un amplio acuerdo sobre la conveniencia de la incorporación de las tecnologías de la información y de la comunicación (retroproyector, calculadora gráfica, vídeo, ordenador, etc.) como medios didácticos, lo cual suscita necesidades y abre interrogantes:

- No se trata de un cambio de medios neutro, pues los nuevos medios en este caso crean nuevas situaciones y esto implica, a su vez, cambios del currículo: en la metodología (p.ej: la clase con ordenadores se desarrolla de otro modo), en los contenidos (al simplificarse las rutinas de cálculo, el núcleo de interés se traslada tanto a la comprensión de los conceptos como a la interpretación y la toma de decisiones) y en la evaluación (en este contexto, por ejemplo, ciertas capacidades no se pueden evaluar mediante una prueba escrita).
- El cambio de medios también supone cambios en la organización de los espacios y recursos escolares. Si éstos se deben compartir con otras materias (o con carácter subsidiario respecto de la Informática, en el caso de los ordenadores), los problemas organizativos terminan por conferir un carácter anecdótico a su uso. Ha habido unanimidad en considerar que la solución está en conseguir una asignación horaria sobre el aula de ordenadores y, muy especialmente, en la existencia de un Laboratorio de Matemáticas en cada centro, lo que conlleva: el reconocimiento de un enfoque experimental de las Matemáticas y de las consiguientes clases de prácticas con desdobles, la disposición de un espacio propio para el Laboratorio y una dotación material suficiente y adecuada (materiales manipulables, medios tecnológicos, etc.).
- No basta con disponer de medios ni tampoco se trata de usarlos permanentemente. Se hace necesario, en cada caso, un análisis de la adecuación de los medios a los fines, considerando que nuestro objetivo es hacer Matemáticas, y no es tecnológico en sí mismo.

El Bachillerato entre la ESO y la Universidad

Es una opinión altamente generalizada entre el profesorado de Matemáticas la necesidad de ampliar el horario del área en la ESO con una cuarta clase semanal, que se justifica esencialmente por razones nacidas del contraste entre los objetivos y la realidad de la propia ESO, que deberán ser estudiadas y formuladas en otro seminario dedicado a esta etapa. Pero también desde un análisis de la situación en el Bachillerato constatamos que uno de los requisitos para la mejora de dicha situación es la ampliación del horario en ESO, insuficiente en la actualidad. Esta insuficiencia provoca que los profesores de Bachillerato deban asumir los desajustes de contenidos que se han ido produciendo a lo largo de la etapa anterior y, al mismo tiempo, tratar de homogeneizar conocimientos de alumnos procedentes de distintos centros y opciones. Esta situación limita la posibilidad de cubrir los contenidos propios del Bachillerato con la metodología deseable para Ciencias Sociales.

Por tanto, se reivindica una cuarta clase de Matemáticas en ESO, no para cubrir más contenidos, sino para poder desarrollarlos con la metodología adecuada. Ello, a su vez, favorecería que los programas de bachillerato se desarrollasen en el tiempo disponible.

En general, los contenidos establecidos en este Bachillerato parecen suficientes para acceder a cualquiera de las carreras universitarias de Ciencias Sociales, excepto para algunas facultades de Económicas que exigen mayores conocimientos de Análisis. Éste parece un problema de difícil solución desde el Bachillerato: no se puede sobrecargar el programa para todos los alumnos con el fin de preparar específicamente a algunos para una carrera determinada; tampoco es la solución que estos alumnos sigan las Matemáticas II del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza, inferiores en contenidos de Estadística que también precisan. Por lo tanto, vemos necesario que en las facultades de Económicas se asuman como propias esas necesidades de formación y se conceda una mayor presencia a las Matemáticas en el primer curso.

Las Pruebas de Acceso a la Universidad condiciona, en la práctica, los contenidos y la metodología del Bachillerato, convertido en una carrera por llegar a unas metas, en unas ocasiones establecidas por la ley y en otras marcadas por la Universidad. En esta situación es imprescindible que entre ambos niveles educativos exista una coordinación institucionalizada, y no, como ahora, sin medios y dependiente de las distintas sensibilidades e interpretaciones locales.

Se ha constatado una preocupante falta de reglamentación y una amplia diversidad de prácticas según universidades, en cuanto a la coordinación para dichas pruebas de acceso: en algún caso se ha creado la figura del Armonizador y hay una coordinación efectiva, incluso a través de seminarios permanentes; en otros, dicha coordinación se limita al envío de circulares o convocatoria de reuniones esporádicas; y también hay universidades en las que se desconoce aún quién es el interlocutor válido.

...el Bachillerato debe ser considerado como una etapa con objetivos propios, no determinados exclusivamente por las Pruebas de Acceso a la Universidad...

En cualquier caso, se considera que la necesaria coordinación entre bachillerato y universidad no debería limitarse a la negociación de un examen, sino que también los planes de estudio de la universidad deberían tener en cuenta los programas de bachillerato. De esta manera, no se producirían unas veces solapamientos innecesarios y otras saltos difícilmente superables por los alumnos.

Las aspiraciones de gran parte del alumnado hacen que la Universidad sea obligado punto de referencia durante el Bachillerato. No obstante, éste debe ser considerado como una etapa con objetivos propios, no determinados exclusivamente por las Pruebas de Acceso a la Universidad, ni por una especialización demasiado temprana, sino que abra a un sentido más universal del conocimiento.

En ese sentido, y tras haber constatado la importancia de las Matemáticas en una cultura humanística (donde, por ejemplo, cada vez es más necesaria la utilización del método científico en las Ciencias Sociales), reivindicamos una mayor presencia de las Matemáticas en los planes de estudio de la Educación Secundaria, en sus dos etapas, pues la cultura científica es la que mayor menoscabo horario ha sufrido en la última reordenación del Sistema Educativo.

Pilar Alonso
Jesús Antolín
Guillermo Dorda
Emilio Palacián
Ana Pola
Julio Sancho
José María Sorando
Florencio Villarroya
Sociedad Aragonesa
de Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»

SUMA 27
febrero 1998, pp. 17-24

Implantación de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria: un análisis en el contexto internacional*

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

SEMINARIO FESPM

HACE ahora cinco años que comenzó a implantarse la Educación Secundaria Obligatoria en algunos centros de diferentes lugares. Desde entonces, el número de estudiantes y de centros que se han incorporado a esta etapa educativa ha ido creciendo progresivamente. Tenemos ya alguna experiencia que nos permite hacer un primer balance de sus características más relevantes y sus efectos en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas y de las condiciones en las que se ha ido poniendo en marcha.

Por otra parte, recientemente han salido a la luz pública informaciones y opiniones acerca de la enseñanza de las Matemáticas, no siempre suficientemente matizadas. Quizá la situación de los escolares españoles en estudios comparativos internacionales ha sido lo más llamativo. La superficialidad de las informaciones y análisis sobre estos estudios ha llevado, por ejemplo, a asociarlos a la implantación del nuevo currículo, ignorando así que el alumnado participante era del plan de estudios anterior. Debe destacarse, en todo caso, que la metodología utilizada en estos estudios no tiene en cuenta suficientemente aspectos esenciales de los diferentes sistemas educativos y de sus respectivos currículos de Matemáticas. Los resultados de dichas evaluaciones deben ser tomados, por lo tanto, con todas las cautelas.

El peculiar debate sobre las *humanidades* también ha tocado tangencialmente la enseñanza de las Matemáticas, aunque a menudo por omisión. Se ha dado por supuesto que si las humanidades están en declive es porque lo científico está en auge. En general, las opiniones manifestadas en torno a este debate han evitado reflexionar sobre el hecho de que hay aspectos de la formación de los jóvenes no considerados tradicionalmente en el entorno de las humanidades, como es el caso de la educación

* Documento elaborado en el Seminario convocado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo».

El comité organizador estuvo formado por Javier Brihuega, Guillermo Cabañas, María Eugenia Jiménez, Amparo Hernández, Mercedes Pastor, Charo del Rincón, Vicente Rivière y Carmen Villanueva y fue coordinado por María Jesús Luelmo. Se celebró en El Escorial (Madrid) los días 27, 28 y 29 de noviembre de 1997.

El presente informe ha sido redactado por: Amaya Basarrate, Guillermo Cabañas, Juan Manuel García Dozaragat, María Eugenia Jiménez Aleixandre, María Jesús Luelmo, María José Oliveira, Antonio Pérez y Vicente Rivière.

matemática y que, sin embargo, constituyen una parte muy importante de su desarrollo intelectual y personal.

Todo ello ha dado lugar a la aparición de una cierta preocupación acerca de la enseñanza de las Matemáticas, que no ha sido acompañada de rigor en el análisis de la situación. En este contexto parece posible, y en cierto modo se anuncia, una modificación en la normativa sobre la Educación Secundaria Obligatoria. Ante la posibilidad de que ello produzca un retroceso en la enseñanza de las Matemáticas, pretendemos contribuir con las reflexiones que siguen a que cambie lo que deba cambiar y a que no se modifique lo que se ha comprobado que funciona.

La organización de la educación en España permite que las distintas administraciones educativas hayan tomado, o puedan tomar, decisiones diferentes en relación con aspectos que inciden muy directamente en la enseñanza de las Matemáticas. Conviene aprovechar la riqueza de experiencias que esta situación genera, analizando la viabilidad y la conveniencia de cada una de las alternativas.

Es conveniente también conocer y analizar las reformas que se han llevado a cabo en países de nuestro entorno y que han afectado asimismo a la enseñanza de las Matemáticas en etapas educativas equivalentes. Y ello con todas las prevenciones que se deban tomar por tratarse de contextos y, sobre todo, de situaciones de partida diferentes.

Las personas que asistimos a este Seminario, organizado por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, hemos tenido ocasión de analizar la situación de la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria. Para ello, se ha partido de los cuestionarios en los que cada una de las sociedades federadas expuso la situación de la enseñanza de las Matemáticas en su ámbito territorial, manifestando su opinión inicial acerca del tema de discusión. Se han revisado, en particular, las condiciones en las que se está implantando la Etapa. También hemos analizado, contando con la participación activa en el Seminario de colegas franceses, portugueses e ingleses, algunos aspectos de la enseñanza de las Matemáticas en estos países, así como hemos podido conocer más a fondo los problemas que suscitan las evaluaciones internacionales de rendimiento matemático.

Este documento pretende, en última instancia, ofrecer algunas reflexiones que contribuyan a mejorar la educación matemática en la Secundaria Obligatoria. Recoge las discusiones habidas en los tres grupos de trabajo del Seminario y las aportaciones hechas en las demás actividades (conferencias y mesas redondas). En todo caso son conclusiones provisionales, muy condicionadas por cómo se ha desarrollado la implantación, proceso que ha distorsionado el funcionamiento y los resultados del sistema educativo y que en una situación estable probablemente no tendrían lugar.

Este documento pretende, en última instancia, ofrecer algunas reflexiones que contribuyan a mejorar la educación matemática en la Secundaria Obligatoria.

Condiciones de la implantación

Situación de partida

La educación matemática que proporcionaba el sistema educativo anterior (EGB y EE.MM.) necesitaba de un cambio importante. Aunque nos parezca evidente, es conveniente apuntarlo aquí, recordando el malestar que ya se detectaba en los años ochenta entre el profesorado debido al programa de BUP y al exceso de contenidos que marcaba, y recordando también el alto índice de fracaso y rechazo que suscitaban las Matemáticas entre el alumnado, para evitar comparaciones simplistas con tiempos supuestamente *idílicos*.

Podemos resumir las razones de la necesidad del cambio en tres aspectos:

1. El *currículo* de Matemáticas ya no era el adecuado a las demandas sociales. Había en él demasiada formalización y se centraba el interés en alcanzar automatismos poco útiles. La mayor parte del alumnado era incapaz de utilizar las Matemáticas fuera del aula.
2. Hay una *situación social* distinta (mejora del nivel de vida, acceso a la Educación Secundaria de un mayor sector de la población, fracaso escolar, paro juvenil...) y por tanto el sistema escolar tiene que intentar responder a nuevas demandas sociales.
3. El impacto de las *nuevas tecnologías* en la educación en general, y en la enseñanza de las Matemáticas en particular, abre nuevas posibilidades de aprendizaje (pensemos, por ejemplo, en el tratamiento dinámico de la geometría con la ayuda del ordenador, o en la posibilidad de procesar conjuntos numerosos de datos reales de modo estadístico o gráfico) a la vez que vuelve obsoletas algunas habilidades tradicionales (excesivo énfasis en los mecanismos de cálculo aritmético o simbólico, por ejemplo).

Estas circunstancias obligaron a la puesta en marcha simultánea de dos reformas: la del sistema educativo en su conjunto y la del currículo de las distintas materias. En nuestra opinión, un sector importante del profesorado de Matemáticas ha aceptado de modo positivo el cambio curricular, mientras que es más reticente ante algunos aspectos del cambio global del sistema educativo.

¿Responden estas reformas a las nuevas necesidades? Aún es pronto para saberlo, pero creemos conveniente iniciar desde este momento un análisis de la situación.

Desconcierto y preocupación

La implantación de la Secundaria Obligatoria ha generado un desconcierto y una preocupación considerables. Creemos que esto es debido, fundamentalmente, a las condiciones sumamente precarias e inadecuadas con que el proceso de implantación se ha desarrollado en gran parte de las comunidades autónomas. Algunos ejemplos pueden ser:

- Coexistencia de varios sistemas escolares (FP, BUP, ESO...) con distintas exigencias de acceso a cada uno de ellos.
- Selección poco representativa de los centros que iniciaron la implantación, viéndose muchos de ellos forzados a participar sin la suficiente adaptación previa; tampoco ha sido representativa la muestra del alumnado, que elegía entrar en la ESO cuando fracasaba en BUP o en 8.° de EGB.
- Comienzo de la implantación por 3.° de Secundaria, incorporándose a él el alumnado desde la EGB sin haber cursado el Primer Ciclo de una etapa que se define de un modo global; esto crea en el alumnado la sensación de que no va a aprender nada nuevo.
- Falta de integración, en general, de los dos ciclos de Secundaria en un mismo centro. Es más, en alguno de los centros de Primaria que continúan impartiendo el Primer Ciclo de la ESO, las Matemáticas siguen al cargo de profesorado no habilitado ni preparado para ello. *Las administraciones educativas no deben consentir esta situación, que esperamos sea transitoria y de la menor duración posible: toda la etapa debe cursarse en el mismo centro.* Ha resultado positiva la experiencia de algunas comunidades autónomas en las que hay centros específicos de Secundaria Obligatoria, pues se facilita la coordinación.
- Falta de explicación y de comprensión social hacia las finalidades de la Reforma: desconocimiento de los objetivos por parte de las familias, falta de referencias sobre los contenidos nuevos y su ubicación temporal, etc.
- Desconcierto y ansiedad en el profesorado: miedo a lo nuevo, rechazo a la gran cantidad de trabajo añadido que supone la ESO, aumento de responsabilidades sociales al tener que tomar decisiones importantes sobre promoción y titulación de alumnas y alumnos, etc.
- Sensación de que se produce un descenso del *nivel* en Matemáticas debido, en parte, al menor número de horas dedicadas a la materia. Esto provoca análisis comparativos muy superficiales con respecto al BUP, siendo que no es posible establecer paralelismos simplistas entre sistemas cuando sus objetivos y contextos son completamente diferentes.

Hay alguna experiencia, comentada por los compañeros de Asturias, que ilustran el hecho de que una implantación adecuada y con implicación del profesorado no produce ni desconcierto ni preocupación.

Importancia de las Matemáticas en la formación de las personas

Es un lugar común decir que las Matemáticas son necesarias para *todo*; pero ¿qué Matemáticas necesitamos? y, ¿qué Matemáticas utilizamos? Ante estos interrogantes, la respuesta *las Matemáticas que necesita una persona en su vida social y para su desarrollo personal* no debe ser la única. Debemos ofrecer al alumnado un abanico de opciones que le abra las puertas a otros intereses, perspectivas y estudios. Además, es necesario recobrar la confianza en que se puede aprender, rompiendo con la opinión, errónea a nuestro juicio, de que *en la ESO no se aprende.*

No nos conformamos con un aprendizaje para sobrevivir en el sistema escolar, pedimos muchas más cosas a la educación matemática: desde su utilidad en la vida cotidiana hasta la preparación para estudios superiores, desde la percepción de la belleza hasta el placer de resolver un problema... Las Matemáticas están presentes en nuestra cultura: *¿es posible desarrollar el currículo actual en sólo*

No nos conformamos con un aprendizaje para sobrevivir en el sistema escolar, pedimos muchas más cosas a la educación matemática: desde su utilidad en la vida cotidiana hasta la preparación para estudios superiores, desde la percepción de la belleza hasta el placer de resolver un problema...

tres horas de clase a la semana, como se hace en algunas comunidades? Creemos que no: si pedimos mucho a la educación matemática son necesarias más horas de clase a la semana.

Departamentos o Seminarios de Matemáticas

Entre el profesorado no está suficientemente extendida la costumbre de trabajar en equipo. Es muy conveniente que esta situación cambie, ya que el hecho de trabajar y actuar de forma coordinada influye de manera determinante en la calidad de la enseñanza de las Matemáticas de un centro. *Tanto las administraciones educativas como los equipos directivos tienen la responsabilidad de favorecer la creación de hábitos de trabajo en equipo. Una buena actuación de la Jefatura de Departamento o Seminario puede asegurar, en buena parte, la formación del profesorado, individualmente y como equipo.*

La Secundaria genera nuevas necesidades, sobre todo en estos primeros años de implantación, como son la elaboración de documentos y proyectos para la organización de los centros, además del trabajo propio referido a las Matemáticas. Por otra parte, hay que tener en cuenta que la etapa está compuesta por dos ciclos, de muy difícil coordinación en las actuales circunstancias debido no sólo a la falta de experiencia sino, por un lado, al distinto tipo de profesorado que los imparte y, por otro, a la persistencia de distintos centros para cada uno de los ciclos, a veces, incluso, ubicados en municipios diferentes.

Estos nuevos retos a la labor de los Departamentos o Seminarios hacen que sea necesaria, como mínimo, una hora semanal más de trabajo conjunto para poder desarrollar una tarea eficaz.

El profesorado

Adecuarse a una reforma exige mucho tiempo y trabajo por parte del profesorado, que en nuestro caso no ha sido motivado ni compensado suficientemente, ni siquiera con horas lectivas, como se ha hecho, por ejemplo, con las tutorías.

Se ha iniciado esta reforma sin que una parte del profesorado tenga aún la formación más adecuada para llevarla a cabo. Los esfuerzos de formación se centraron, en muchas ocasiones, en desarrollar determinados aspectos estructurales del nuevo diseño curricular, relegando a veces el análisis de los cambios profundos que afectan a las Matemáticas. *En este tipo de formación queda aún mucho por hacer, tanto en aspectos metodológicos como en determinados temas matemáticos que tradicionalmente han sido ignorados en la formación universitaria inicial.*

Por otra parte, los cambios habidos en la composición de los centros han hecho que aumente la movilidad entre las plantillas, lo que dificulta la creación de equipos docentes y provoca rechazos personales muy fuertes a la nueva situación entre el profesorado afectado.

Consideramos muy positivo el cambio a un currículo que da más importancia a los procedimientos, a las actitudes, pone de relieve la resolución de problemas, proporciona otro enfoque de la geometría y de los números y preconiza una mayor presencia del azar y la estadística, en línea con otros países de nuestro entorno.

El currículo

Consideramos muy positivo el cambio a un currículo que da más importancia a los procedimientos, a las actitudes, pone de relieve la resolución de problemas, proporciona otro enfoque de la geometría y de los números y preconiza una mayor presencia del azar y la estadística, en línea con otros países de nuestro entorno.

Hemos detectado algunas interpretaciones, que creemos erróneas, de la secuenciación, transfiriendo bloques temáticos enteros a un curso determinado. Además, la distribución temporal debe cuidar que no se estudie el mismo bloque de contenidos siempre –de modo un tanto apresurado– a final de curso, como es tradición.

La materia optativa «Taller de Matemáticas» es muy importante como elemento de motivación, favorece el trabajo manipulativo, de creación y de investigación y el desarrollo de la capacidad matemática. En algunas comunidades no se han admitido propuestas de los centros sobre esta materia. Los objetivos de esta optativa no son los mismos que los de las clases de refuerzo, por otra parte necesarias, por lo que pensamos que tanto unas como otras horas se deberían tener en cuenta para la confección de los cupos de profesorado.

Evaluación

El punto de atención del sistema educativo se ha desplazado, a nuestro parecer acertadamente, de las materias al alumnado. Por ello, la promoción y la titulación del alumnado se deben centrar en los objetivos generales de la etapa, valorando el esfuerzo y el trabajo personal, así como la integración social, aspectos a los que nuestra sociedad no da la importancia que realmente tienen en el desarrollo de las personas.

Recursos humanos, materiales y de infraestructura

Llevar a la práctica cotidiana del aula todos los aspectos recogidos en el currículo de Matemáticas de la ESO es complejo, por las dificultades que para el profesorado implica enfrentarse a un currículo abierto, con una metodología renovadora que lleva implícita la utilización de recursos didácticos variados: materiales bibliográficos, impresos, manipulables, calculadoras científicas y gráficas, medios audiovisuales, informáticos y telemáticos.

Antes de entrar a valorar las dificultades que puede suponer la utilización de estos recursos queremos plantear como cuestión determinante la posición del profesorado ante ellos.

Recursos humanos

1. Actitudes del profesorado

No todo el profesorado mantiene una actitud positiva ante los cambios metodológicos contemplados de forma prescriptiva en el currículo de Matemáticas. Quizás podamos apuntar algunas de sus causas, referidas a la utilización de los recursos didácticos:

- Una práctica docente tradicional consolidada e inercial.
- Desconocimiento de la existencia de recursos no tradicionales.
- Ausencia de modelos prácticos de gestión de clase utilizando dichos recursos
- Mitificación del libro de texto como recurso exclusivo y elemento de cierre del currículo.

La integración en la práctica docente de nuevos recursos exige, por una parte, más tiempo de preparación de las clases para el profesorado y, por otra, plantea la necesidad de incrementar el número de horas lectivas de Matemáticas en cada curso de la ESO.

2. Aptitudes del profesorado

Un cambio metodológico de esta envergadura no se improvisa de la noche a la mañana. Ya hemos apuntado antes que el profesorado de Matemáticas en ejercicio no ha recibido una formación universitaria inicial adecuada que le familiarice con la utilización de estos recursos. Los recientes cambios en los planes de estudios de las Facultades de Matemáticas y de las Escuelas de Formación del Profesorado no contribuyen de forma clara a mejorar esta situación. Por otra parte, la práctica docente institucionalizada durante años no ha facilitado, e incluso ha dificultado, la utilización de estos recursos.

La formación permanente referida a los recursos didácticos, concentrada en forma de cursos en su mayoría impartidos en las instituciones oficiales de Formación del Profesorado (CPR, COP...), se ha limitado en general a una presentación descontextualizada de los mismos. Menos frecuentes han sido las presentaciones y reflexiones sobre experiencias de aula prácticas, concretas, integradoras y modelizadoras. La mayor parte del profesorado que utiliza de forma habitual recursos manipulables o medios audiovisuales e informáticos es o ha sido autodidacta al respecto, basándose su práctica en el ensayo-error y en el voluntarismo en muchas ocasiones.

Recursos materiales

La metodología propugnada por la LOGSE cuestiona la exclusividad del profesor, la pizarra y el libro de texto como recursos didácticos y únicos referentes para el alumnado. La comunicación y las interrelaciones dentro del aula deben dejar de ser unidireccionales (profesor-alumno) para pasar a ser multidireccionales (profesor-alumno, profesor-recursos, alumno-recursos, alumno-equipo) y se plantea la necesidad de introducir en el aula, e integrar en el proceso de enseñanza/aprendizaje, distintos tipos de recursos didácticos.

1. Recursos bibliográficos

La reforma ha contribuido en buena medida a la elaboración y traducción de materiales didácticos interesantes, bien de reflexión teórica o de carácter práctico, aunque se echan en falta más experiencias de aula ejemplificadoras. Gracias a esto, una buena parte del profesorado ha leído en estos últimos años más sobre didáctica de las Matemáticas que en varias de las décadas anteriores.

Sin embargo, muchos de estos materiales no han tenido la difusión adecuada entre el profesorado, debido en parte a la descoordinación de esfuerzos entre las distintas autonomías con competencias educativas y el MEC. *La FESPM debería realizar un esfuerzo para difundir la existencia de estos materiales e invitar a las administraciones educativas a realizar una distribución que garantice la presencia real en los centros y Seminarios o Departamentos de estos materiales.*

La integración en la práctica docente de nuevos recursos exige, por una parte, más tiempo de preparación de las clases para el profesorado y, por otra, plantea la necesidad de incrementar el número de horas lectivas de Matemáticas en cada curso de la ESO.

2. Recursos manipulables y calculadoras

Estos materiales existen en el mercado aunque no de manera extensiva y fácilmente accesible. Sus precios son altos, más aún en relación con la escasa dotación económica de los Seminarios o Departamentos de Matemáticas en los centros. En algunos casos, la imaginación del profesorado y la coordinación con el Departamento de Tecnología puede ser una solución parcial a estas dificultades.

La integración de este tipo de recursos en un proceso de aprendizaje por descubrimiento encuentra una serie de dificultades:

- Exigen más tiempo para el desarrollo de los contenidos y esto choca frontalmente con la situación actual de tres horas semanales de Matemáticas en todos los cursos de la ESO en la mayoría de las Comunidades Autónomas. En otros términos más ajustados: los 150 minutos semanales de la actualidad (3 periodos de 50 minutos) frente a los 220 minutos (4 periodos de 55 minutos) del BUP.

  Si queremos abordar todos los contenidos del currículo con una metodología activa, participativa, de aprendizaje por descubrimiento e integrando recursos diversos de forma habitual es imprescindible el aumento a cuatro horas del número de clases de Matemáticas en todos los cursos de la ESO.

- Se choca también con la rigidez de los módulos horarios (50 minutos) y de los espacios escolares, así como con la escasez objetiva de recursos para todo el alumnado del grupo, demasiado numeroso casi siempre.

Para un enfoque experimental de las Matemáticas es conveniente una organización escolar menos rígida que cuente con aulas-laboratorio de Matemáticas dotadas con el material necesario, desdobles de los grupos, posibilidad de actividades con más de un profesor en el grupo...

3. Recursos audiovisuales e informáticos

En la actualidad nadie cuestiona, al menos a nivel intuitivo –no hay estudios serios al respecto en nuestro país–, la rentabilidad didáctica de estos recursos. No existe una tradición de utilización de recursos audiovisuales en Matemáticas, en gran parte debido al deficiente sistema de producción, distribución y comercialización de vídeos didácticos.

En el ámbito del MEC y en algunas comunidades, los CPR o instituciones similares de formación del profesorado, que sí disponen de este material, deberían potenciar una campaña de información-formación sobre la utilización de los medios audiovisuales en Matemáticas, aunque últimamente ha desaparecido en muchos de ellos la figura del asesor de Matemáticas, lo que dificulta cualquier esfuerzo en la formación sobre esta materia.

Para un enfoque experimental de las Matemáticas es conveniente una organización escolar menos rígida que cuente con aulas-laboratorio de Matemáticas dotadas con el material necesario, desdobles de los grupos, posibilidad de actividades con más de un profesor en el grupo...

Las administraciones educativas deberían impulsar una línea de elaboración, difusión y distribución de materiales adaptados al currículo de Secundaria, estimulando la iniciativa privada y un enfoque adecuado de las televisiones educativas. La formación inicial y permanente del profesorado debería contemplar la integración de estos materiales en la práctica docente.

Sin embargo, los recursos informáticos sí gozan de predicamento entre el profesorado, aunque a veces se dedican casi exclusivamente a las asignaturas de informática, vinculadas muchas veces al Departamento o Seminario de Matemáticas.

A pesar del esfuerzo realizado por algunas administraciones –MEC, Cataluña, Canarias, Andalucía...– para dotar a los centros de Secundaria en la década anterior de material informático, la situación en al actualidad no es muy esperanzadora:

- Los equipos informáticos de los centros han quedado obsoletos con relación al nuevo software.
- Paradójicamente, y gracias en parte a Internet y al abaratamiento de los programas, el acceso a software educativo de Matemáticas adecuado al currículo de Secundaria, está creciendo en progresión geométrica.
- El aula de informática está alcanzando un nivel de ocupación muy alto, tanto por parte de las asignaturas específicas de informática como por su utilización en cada vez más materias. Esto hace difícil su disponibilidad en el momento preciso en el que el desarrollo de la programación aconseja la utilización de estos medios.

Parece llegado el momento de empezar a pensar, en la línea antes apuntada de creación de espacios específicos de materia, en la utilización de un ordenador en el aula, accesible en todo momento al profesor/a y al alumnado y utilizable como pizarra electrónica y herramienta de investigación.

El profesorado del Primer Ciclo ha tenido menos oportunidades de acercamiento a los recursos informáticos. *Sería conveniente un esfuerzo específico de formación, ya que consideramos que en este Ciclo pueden tener una gran rentabilidad didáctica.*

En el futuro inmediato nos vamos a enfrentar a dos fenómenos nuevos que merecerán nuestra reflexión, por la repercusión que pueden llegar a tener en el proceso de enseñanza/aprendizaje: el acceso fácil a software e información matemática a través de Internet y la presencia en el mercado de productos multimedia de contenido matemático, accesibles tanto a los centros como al alumnado.

Una sesión de trabajo del Seminario

Infraestructura y organización escolar

El espacio físico de los centros de Secundaria está pensado para una enseñanza tradicional basada en la lección magistral. La incorporación del Primer Ciclo de la ESO en centros de Secundaria, o las necesidades de las nuevas áreas curriculares, ha multiplicado los problemas de infraestructura de los mismos: desaparición de aulas de desdobles, de aulas de audiovisuales, utilización de laboratorios para clases no experimentales... *Es urgente una fuerte inversión en la remodelación y/o ampliación de los centros de Secundaria.*

La organización escolar debe adoptar una estructura más flexible, implantando de forma progresiva las aulas de materia en lugar de las aulas-grupo. También es urgente revisar y actualizar el mobiliario de las aulas: armarios, pupitres que permitan el trabajo en grupo, medios en las aulas, biblioteca de aula...

La atención a la diversidad

Para qué la atención a la diversidad

Una enseñanza obligatoria y comprensiva como la nuestra no sólo debe entenderse como aquella que obliga a chicos y chicas a asistir a un centro escolar hasta los 16 años, sino que, correlativamente, obliga al sistema educativo a ofrecer propuestas educativas de calidad para todos y todas y que permitan, dentro de ese marco escolar común, desarrollar al máximo las capacidades de cada cual.

Admitimos el reconocimiento de la diversidad como un elemento positivo y realista de abordar la existencia de diferencias individuales en nuestro alumnado, en cuanto a estilos y ritmos de aprendizaje, experiencia escolar, capacidades e intereses. Este hecho parece obvio, pero, generalmente, se descuida en la práctica educativa. Recordemos que *el alumno medio* no existe. Es más, la diversidad en el aula puede aprovecharse como principio enriquecedor y optimizador del aprendizaje de todos y cada uno de nuestros alumnos y alumnas.

Admitimos el reconocimiento de la diversidad como un elemento positivo y realista de abordar la existencia de diferencias individuales en nuestro alumnado, en cuanto a estilos y ritmos de aprendizaje, experiencia escolar, capacidades e intereses.

Desde esta óptica, la diferencia ha de verse como la regla, no como la excepción. Es preciso centrar más la atención en lo que *cada alumno puede* aprender, atención que en la actualidad está excesivamente centrada en lo que *todos deben* aprender.

Pero, generalmente, el profesorado vive la diversidad como un problema, pues la falta de atención sistemática desde etapas tempranas hace que se enquisten los problemas de aprendizaje y actitud en determinados alumnos y alumnas que, a veces, dificultan el aprendizaje de los demás.

Qué implica la atención a la diversidad

- Reflexión y acuerdos de los Seminarios o Departamentos de Matemáticas de cada centro sobre las finalidades de la educación matemática y sobre los contenidos nucleares de la misma, que sirvan para orientar sus decisiones posteriores en cuanto a adaptaciones curriculares más o menos significativas adecuadas a grupos o personas concretas.

- Coordinación y asunción de presupuestos comunes entre todos los miembros de la comunidad educativa, con especial énfasis en las familias, acerca de la necesidad, del sentido y de la articulación de la atención a la diversidad.
- Recursos didácticos adecuados.
- La realización sistemática del diagnóstico y de la detección de necesidades de cada uno de los alumnos y alumnas: conocimientos previos, estilos de aprendizaje, bloqueos...
- Una recuperación del sentido de ciclo, especialmente en el Primer Ciclo de la ESO, como marco temporal amplio de consecución de aprendizajes, que permite el desarrollo del alumnado más lento.
- Una adecuada orientación vocacional y profesional al alumnado, que dé sentido positivo y no segregatorio a sus aptitudes e intereses.

Algunas alternativas

En esta línea de nuestra visión de la diversidad, la mayor parte de las alternativas que proponemos han de contemplarse como elementos ordinarios de actuación del profesorado, y no como excepcionales para el tratamiento de casos especiales.

- La mejor metodología es aquella que utiliza estrategias, formas de trabajo, materiales y contextos variados, de modo que se pueda conectar en un momento u otro con el mayor número de alumnos y alumnas.
- Es necesario realizar agrupamientos flexibles del alumnado, que varíen tanto en el tiempo como en el espacio, efectuados con criterios diferentes y que permitan tanto la ampliación como el refuerzo.
- En algunos casos excepcionales, estos agrupamientos permitirán dotar a algunos estudiantes de una formación práctica, con un enfoque de los contenidos desde un contexto radicalmente diferente al académico.
- La diversificación de los medios de evaluación, adaptadas a los distintos estilos de pensamiento matemático y de las capacidades que se pretenden desarrollar.
- Es imprescindible la personalización de los objetivos de aprendizaje, ofertando adaptaciones curriculares más o menos significativas adecuadas a cada caso.

Necesidades

Para poder abordar con garantías de éxito un tratamiento apropiado de la diversidad dentro de la clase de Matemáticas es preciso aplicar de forma inmediata una serie de medidas en los siguientes frentes:

- *Profundizar en líneas de formación de profesorado específicas para enfrentarse a la diversidad del alumnado.*
- *Revisión de los objetivos y tareas del profesorado de apoyo para realizar una misión tan delicada y específica.*
- *Dotación suficiente de los Departamentos de Orientación, que han de estar bien coordinados con los Seminarios o Departamentos de Matemáticas para asumir conjuntamente la elaboración y puesta en práctica de los proyecto de atención a la diversidad.*
- *Cambio de óptica en la elaboración de horarios en los centros, que permitan agrupaciones flexibles del alumnado, la acción del profesorado de apoyo y las reuniones de coordinación.*
- *Cambio de visión en la Administración para la dotación de personal a los centros, que contemple la existencia de desdobles, profesorado de apoyo suficiente, etc.*
- *Dotación de recursos materiales didácticos suficientes en los centros, que permita la puesta en práctica de metodologías variadas.*
- *La utilización de metodologías específicas que contemplen la diversidad del alumnado hace necesaria una mayor continuidad espacio-temporal en el trabajo con las Matemáticas, por lo que consideramos imprescindible que se disponga de una hora más a la semana para las Matemáticas.*
- *Es preciso resolver urgentemente la situación coyuntural de separación espacial de los dos ciclos de la ESO en centros diferentes, que impide la coordinación real y efectiva entre el profesorado y la consideración de la etapa como un todo continuo.*

Para poder abordar con garantías de éxito un tratamiento apropiado de la diversidad dentro de la clase de Matemáticas es preciso aplicar de forma inmediata una serie de medidas...

Amaya Basarrate
Guillermo Cabañas
J. Manuel G. Dozaragat
María Eugenia Jiménez
María Jesús Luelmo
María José Oliveira
Antonio Pérez
Vicente Rivière
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»

SUMA 27
febrero 1998, pp. 25-37

Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas*

Alan J. Bishop

ARTÍCULOS

HE ELEGIDO este título para mi charla porque creo que representa el núcleo del problema del desarrollo del currículum de matemáticas para alumnos de la etapa 12-16. Es un problema al que se ha hecho frente en muchos países, no sólo en Cataluña o en España.

Lo que trataré de hacer en esta charla es:

- Situar este problema en un contexto internacional.
- Presentar un marco curricular que puede ayudar a estructurar algunas soluciones.
- Ofrecer algunos ejemplos de actividades, proyectos e investigaciones, que pueden facilitar el equilibrio al que se refiere el título.

Comprendo que los documentos curriculares en el Primer Nivel de Concreción especifican los contenidos, procedimientos, y actitudes que los profesores deben desarrollar en el Tercer Nivel, usando los ejemplos ofrecidos en el Segundo Nivel. He estudiado los documentos (*Disseny Curricular,* 1993) y he tratado de entender todo lo que he podido de ellos. Por lo tanto, espero que mis ideas les ayuden en la difícil tarea de hacer la «transposición didáctica» desde documentos a la realidad del aula. Deben hacerse cargo también de que no están solos en este trabajo. Muchos profesores a lo largo del mundo también están haciendo frente a este desafío, y espero que los ejemplos que mostraré probarán cómo puede aprenderse de sus esfuerzos.

El contexto internacional

En primer lugar, situemos el problema en un contexto internacional. Coombs (1985), al tratar de interpretar las tendencias educativas mundiale,s nos ha permitido obser-

* Conferencia pronunciada en febrero de 1997 en el Centre de Recerca Matemàtica de l'Institut d'Estudis Catalans con el soporte del Departaent de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Traducción: Julio Sancho

Revisión: Núria Gorgorió

var una distinción importante entre tres tipos de educación matemática. La educación *formal* en matemáticas que es la que nos preocupa aquí, y para la que todos los países tienen sus requerimientos. La educación matemática *no formal* que consiste en cursos optativos y en clases que no son parte de los requerimientos educativos formales y que, a menudo, son después de las horas de escuela. Además, constituye la mayor parte de la oferta de educación matemática para los adultos. La educación matemática *informal* tiene lugar mediante diferentes medios tales como la televisión y los periódicos y es, en cierto sentido, una educación accidental (en Bishop, 1993, se desarrolla más esta distinción).

Coombs indica que la sociedad demanda tantas cosas del currículo de la educación formal que es posible ver dos tendencias. La primera es que, en la educación formal, no puede esperarse tener mucho tiempo para dedicarlo a ningún tema. La segunda consiste en que, tanto la educación no-formal como la educación informal, se están extendiendo con rapidez. La expansión de Internet es, simplemente, un ejemplo del papel creciente de la educación informal.

Por tanto, esto significa que debe pensarse con mucho cuidado lo que debe constituir el currículo formal de matemáticas en la etapa 12-16. De hecho, ésta es una decisión cada vez más complicada a causa de las intensas presiones sociales y políticas que la circundan como se puede ver en muchos países. El diagrama (ver cuadro 1) basado en el de Abraham y Bibby (1988) representa a los grupos sociales involucrados en lo que ellos han llamado «el debate curricular», y en el artículo se muestra cómo el «grupo de preparadores industriales» quiere una instrucción para especialistas en matemáticas como la que a menudo se encuentra en los programas tradicionales, mientras que el «grupo de educadores públicos» está más preocupado por el papel de la educación matemática en la educación general dentro de una sociedad democrática.

Por tanto, ¿qué criterios debería satisfacer la educación matemática formal en la etapa 12-16? Desde mi punto de vista debería ofrecer:

- Algo diferente de la educación matemática informal y no-formal,
- Algo más básico, fundamental y generalizable,
- Algo completo y bien estructurado,
- Algo enriquecedor y estimulante,
- Algo relevante y significativo.

Si han de cumplirse estos criterios, ¿cómo podemos construir un currículo apropiado de matemáticas para que los profesores lo usen en sus clases?

Durante los últimos quince años hemos observado un interés creciente en los aspectos culturales y sociales de educación matemática.

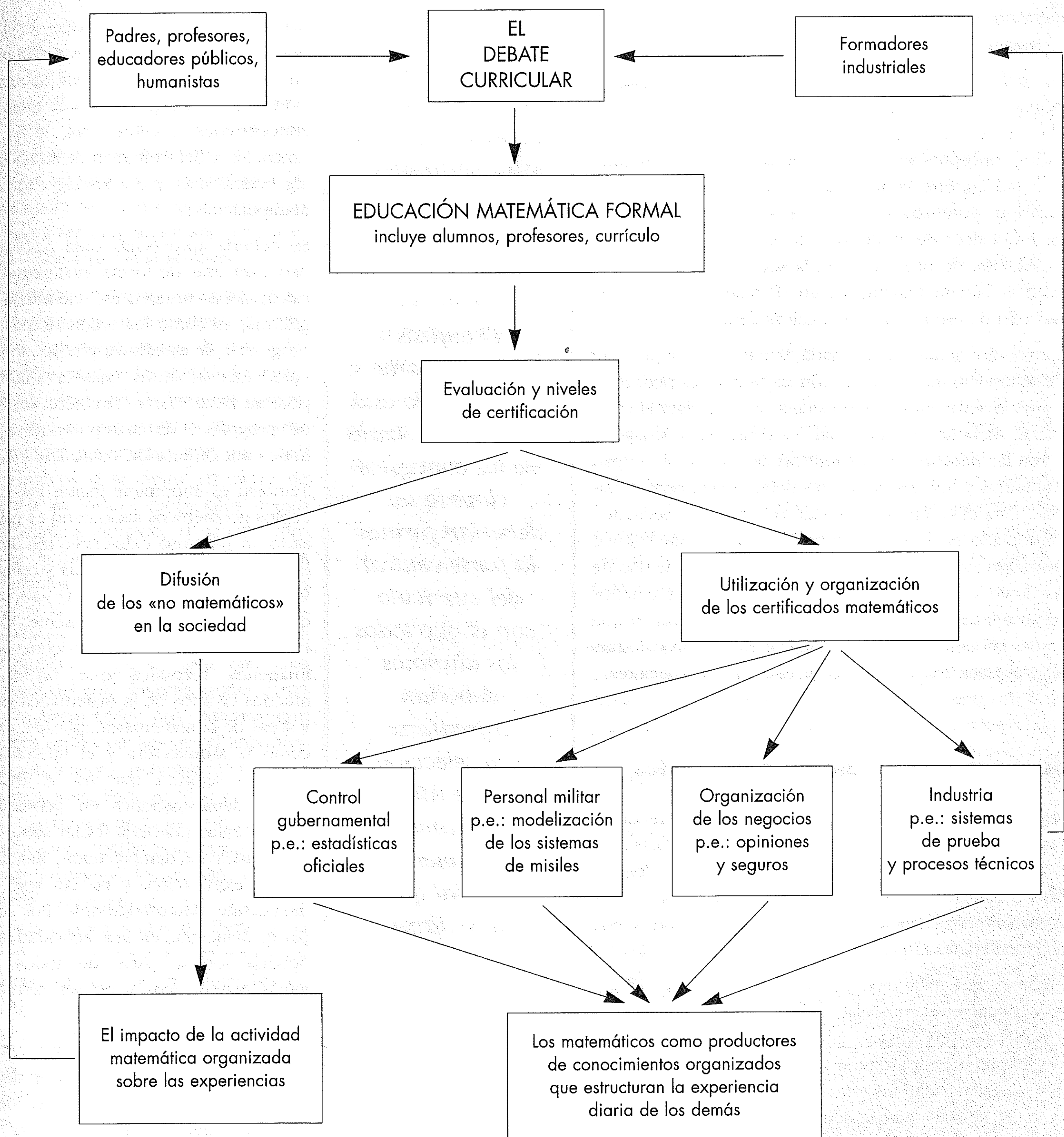
Influencias culturales y sociales

Durante los últimos quince años hemos observado un interés creciente en los aspectos culturales y sociales de educación matemática. La dimensión social se ha revelado importante (Bishop, 1987) para configurar nuestras opiniones sobre el currículum, la enseñanza y el aprendizaje. La dimensión social dirige nuestra atención hacia la gente y las instituciones sociales implicadas, y sobre las influencias políticas y sociales que ejercen los unos sobre las otras y sobre la educación matemática.

En la actualidad, el documento curricular catalán (*Disseny Curricular*, 1993) sobre todo tiene una estructura matemática, con algunas recomendaciones metodológicas. En esencia es una colección de contenidos organizada en listas. El problema es que uno no puede enseñar listas, al menos de manera significativa. No es mucho mejor que intentar de enseñar con la guía de teléfonos, ya que lo normal es que ello conduzca a aprendizaje sin sentido. ¡Seguramente, uno puede tratar de enseñarles a los alumnos a aprender los nombres y números de la guía telefónica, pero la enseñanza de listas difícilmente satisface los criterios que, para una educación formal matemática, hemos dado antes!

Desafortunadamente, desde mi experiencia, los comités encargados de elaborar el currículum, que forman parte de una estructura burocrática, parece que, a menudo, producen listas. Esto es así debido a que los miembros del comité compiten y argumentan en defensa de sus prioridades, necesitan entonces que la lista tenga consistencia lógica y por, último, comprueban si está completa, y todo ello les fuerza a pensar en listas detalladas. Sin embargo, el pensamiento político y burocrático no es lo mismo que el pensamiento pedagógico y educativo. Lo que se necesita es un modelo estructurado que ayude a la «transposición didactica» desde una *lista* de contenidos hasta un *esquema* pedagógico.

LA INSTITUCIÓN SOCIAL DE LAS MATEMÁTICAS



Cuadro 1. Tomado de Abraham y Bibby (1988)

Por fortuna, el movimiento que considera los aspectos culturales y sociales en la educación matemática ha estimulado ese modelo. En mi libro *Mathematical Enculturation* (Bishop, 1988), he tomado la idea de «matemáticas como una cultura» y desarrollo un modelo de currículo pedagógico que da respuesta a la necesidad de una educación matemática general, así como a la necesidad de desarrollar el conocimiento especializado de los alumnos.

El modelo consta de tres componentes: el componente simbólico y conceptual, el componente aplicable y social, y el componente estructural y cultural. El primero se refiere a los conceptos y a los procedimientos que se requieren como soporte conceptual mínimo para una buena educación matemática básica. El segundo enfatiza los usos específicos de modelos matemáticos, como ayuda a la resolución de problemas en la sociedad. El tercero se fija en la cultura matemática en sí misma y procura el desarrollo de estrategias matemáticas generalizables.

Sin embargo, dentro de mi charla, la parte más importante de este modelo tiene que ver con las estrategias pedagógicas para enseñar estos componentes en clase. Para el componente simbólico y conceptual, los constructos pedagógicos son las *actividades matemáticas* de las que se ocupan los alumnos y que los profesores deben seleccionar y planificar. Para el componente social, el constructo pedagógico apropiado es el *proyecto*, y para el componente cultural la *investigación*. A continuación, describiré cada de uno de estos junto con algunos ejemplos, así como los criterios para su selección. Por último, discutiré las maneras en que estos componentes pueden integrarse en un currículo factible y sensato desde el punto de vista de los profesores.

Los conceptos mediante actividades

El énfasis en esta parte del currículo está en el aprendizaje de los conceptos clave mediante actividades especificas dentro de determinados contextos. Los conceptos elegidos deberían formar la parte central del currículo, con el que todos los alumnos deberían enfrentarse y la selección de este núcleo mínimo es el primer paso crucial que debe darse.

Lo primero que debe reconocerse es que el «listín telefónico» del documento curricular no está tan al día como sería necesario. Se deben hacer comparaciones con currículos de otras partes para asegurar que los contenidos tradicionales no están incluidos tan sólo porque siempre lo han estado. El mundo cambia con rápidez, en particular por influencia de la tecnología, y cada nueva propuesta de currículo es una oportunidad para volver a evaluar las prioridades curriculares.

Por ejemplo, en un currículo moderno de matemáticas no es necesario que se enseñen las cuatro operaciones con fracciones. La presencia de las calculadoras y los ordenadores ha provocado que los decimales sean mucho más importantes que las fracciones y que, por ejemplo, la división de fracciones no se use nunca fuera de clase de matemáticas.

El énfasis en esta parte del currículo está en el aprendizaje de los conceptos clave [que] deberían formar la parte central del currículo con el que todos los alumnos deberían enfrentarse y la selección de este núcleo mínimo es el primer paso crucial que debe darse.

Así mismo, las manipulaciones y algoritmos complejos ya no son necesarios en la enseñanza del álgebra. La atención debería dirigirse a las estructuras conceptuales involucradas, y a la obtención y demostración de relaciones algebraicas más que a los algoritmos y manipulaciones.

Se debería aprovechar cada oportunidad para usar de forma inteligente las calculadoras aritméticas, científicas y gráficas, así como los ordenadores con programas de estadística y hojas de cálculo. Los alumnos más avanzados podrían beneficiarse, también, del uso de programas de manipulación algebraica por ordenador, como DERIVE.

También es importante incluir los conceptos geométricos aunque no es necesario un progreso exhaustivo mediante la memorización de teoremas y demostraciones. En la actualidad, sabemos que la importancia de la geometría se extiende a los modelos conceptuales e imágenes mentales que ofrece a muchos campos de la matemática pura y áreas de la matemática aplicada, tales como la arquitectura y el urbanismo. Esto no significa que no se deban incluir demostraciones en geometría, pero el énfasis debería recaer sobre las actividades de demostración, justificación y explicación, y no tan sólo en memorizar demostraciones. Por otra parte, demostrar es una actividad que debería formar parte de todos los temas matemáticos y no ser privativa de la geometría.

Para no mostrarme demasiado crítico con el currículo descrito en el documento oficial, también debería decir que me parece bien que incluya los conceptos estadísticos y probabilísticos, ya que a los ojos de mucha gente estas son dos de las áreas conceptuales claves que serán necesarias en el futuro, tanto en las matemáticas de la industria como en el desarrollo de las mismas matemáticas. También es importante la forma de concebir el campo de la combinatoria como una manera de contar inteligentemente. Además, es muy interesante ver la referencia a la historia de matemáticas. Esto se suele ignorar en los currículos escolares, lo que conduce a que muchos alumnos ignoren que las ideas matemáticas tienen una historia, que han sido inventadas por muchas personas diferentes de muy diversas culturas, y que también hay una cultura de las matemáticas que ha llegado a ser muy importante en sociedades industrializadas actuales.

Si pasamos desde los conceptos clave en sí mismos a su enseñanza, el constructo importante, como se dijo anteriormente, es el de las actividades matemáticas. Estas actividades y sus contextos deberían ser elegidas de manera que sean significativas y relevantes para los alumnos si se desea ser capaz de enseñar las ideas a todos ellos, y esto significará, a menudo, el uso de contextos de fuera del aula. Muchas de las dificultades al enseñar matemáticas, en la etapa 12-16, están causadas por contextos irrelevantes y poco significativos y por profesores que no usan contextos de fuera del aula. Investigaciones como las de Abreu (1993) nos muestran que muchos profesores ignoran el importante conocimiento matemático que los alumnos traen desde su educación informal matemática fuera de la escuela, lo que les causa conflictos culturales y cognitivos. Realmente, los alumnos, con frecuencia, aprenden de sus profesores que sus conocimientos de fuera de la escuela son irrelevantes y sin sentido. El siguiente extracto de una entrevista de Abreu con la hija de un granjero del N.E. de Brasil ilustra parte del problema:

Entrevistador: Me contaste que tu padre no sabe escribir, pero que no hay nadie como él para hacer las sumas oralmente. ¿Como te ayuda en tus tareas de matemáticas?

Severina: Yo le pregunto, por ejemplo, cuánto es 3 por 7 o 8 y él contesta. Cuánto es 3 más 12. Él lo contesta todo.

Estas actividades y sus contextos deberían ser elegidas de manera que sean significativas y relevantes para los alumnos si se desea ser capaz de enseñar las ideas a todos ellos, y esto significará, a menudo, el uso de contextos de fuera del aula.

Entrevistador: ¿Podrías decirme qué piensas de la manera en que tu padre hace las sumas?, ¿es la misma manera o es diferente de la que aprendes en la escuela?

Severina: Es diferente, él lo hace en su cabeza, yo lo hago con el lápiz.

Entrevistador: ¿Qué forma crees tu que es la apropiada?

Severina: La escuela.

Entrevistador: ¿Cuál piensas tu que da el resultado correcto?

Severina: Mi padre.

La confusión en la mente de Severina es evidente. Valora el conocimiento de su padre y reconoce su importancia, a la vez que sabe que la escuela no lo aprecia. Sabe lo que debe hacer el que aprende en la escuela, pero todavía confía en el conocimiento y razonamiento de su padre. Uno se pregunta cuánto tiempo pasará antes de que deje de confiar en él.

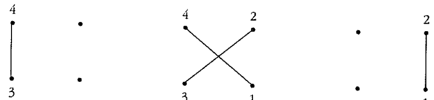
Al trabajar con actividades matemáticas, el papel del profesor consiste en hacer de puente entre las estructuras conceptuales esenciales de las matemáticas y el conocimiento de los alumnos sobre el mundo. En cierto sentido, el profesor es el legitimador del conocimiento al decidir que conocimiento matemático es aceptable e importante en clase. Gran parte del conocimiento del alumno se basa en el mundo exterior que, con frecuencia, no está formulado de forma matemática pero que, no obstante, es accesible al aprendizaje matemático.

De esta manera, la profesora debe actuar como una especie de «antropólogo social», aprendiendo más sobre las vidas de sus alumnos fuera de la escuela. Esto es importante para seleccionar o crear las actividades relevantes y significativas que permitan a los alumnos mostrar y usar el conocimiento que ya tienen. Por supuesto, son los alumnos por sí mismos los que deberán asimilar los nuevos conocimientos en sus esquemas, o acomodar sus esquemas previos, pero la profesora tiene un papel muy importante que jugar en el proceso.

La gama de actividades matemáticas potencialmente útiles en clase en la actualidad es enorme, y el cuadro 2 contiene varios ejemplos para la etapa 12-16 que ilustran su posible variedad. Sabemos que existen muchas situaciones geométricas y numéricas, en el mundo de los alumnos, que pueden proporcionar contextos óptimos para tareas matemáticas. Actividades aritméticas, estadísticas y probabilisticas pueden situarse fácilmente en contextos reales y, como todo el mundo cuenta, la tabla de las representaciones numéricas proporciona una fuente interesante de ejemplos de contraste con los que plantear preguntas acerca de números, sus origenes y representación. Las ilustraciones geométricas, ciertamente, estimulan la creatividad de los profesores para generar actividades y las áreas de orientación espacial y diseño permiten un contacto fácil con el mundo de los alumnos.

Multiplicación Védica

Podemos multiplicar 42 × 21 de la siguiente manera



Tercer paso
4 × 3 = 12

Segundo paso
(4 × 1) + (2 × 3) = 10

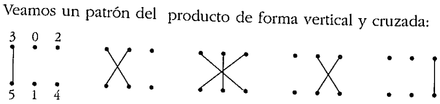
Primer paso
2 × 1 = 2

Comprueba que es correcto.
Trata de multiplicar 33 × 72 de esta manera.

Ahora prueba estos números de 3 cifras: 302 × 514
Son 5 pasos:

	1) 2 × 4 = 8,
302	2) (0 × 4) + (2 × 1) = 2,
514	3) (3 × 4) + (0 × 1) + (2 × 5) = 22, (llevamos 2)
155228	4) (3 × 1) + (0 × 5) = 3, 3 + 2 = 5,
2	5) 3 × 5 = 15.

Veamos un patrón del producto de forma vertical y cruzada:



5.° paso 4.° paso 3.° paso 2.° paso 1.° paso

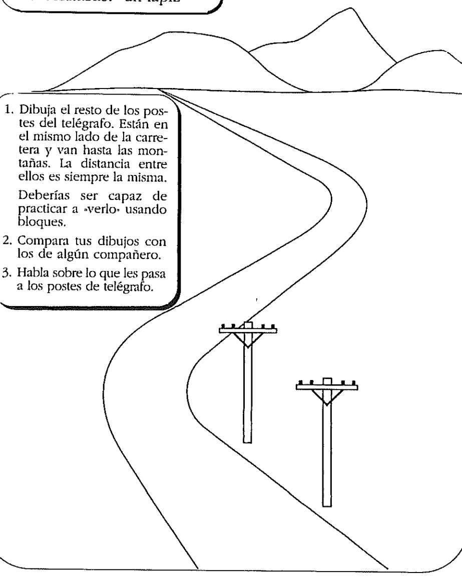
¡Compruébalo!

Intenta hallar 217 × 385 de la misma forma
¿Puedes hacerlo sin dibujar el patrón?
Prueba con 283 × 175
Para los adictos a las matemáticas, ¡halla 8123 × 4204!

Hoja de actividades sobre figuras 3-D

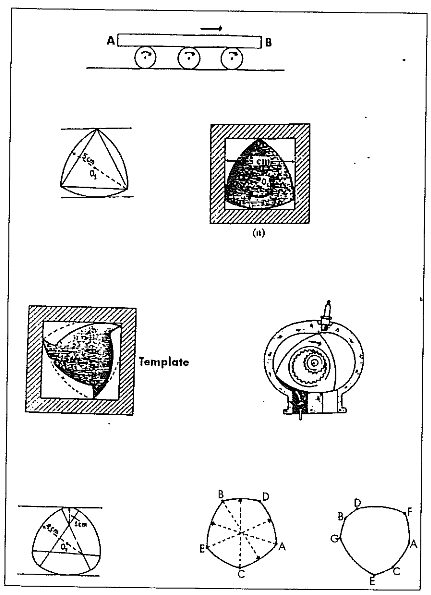
Postes paralelos

Necesitarás: un lápiz



1. Dibuja el resto de los postes del telégrafo. Están en el mismo lado de la carretera y van hasta las montañas. La distancia entre ellos es siempre la misma.
   Deberías ser capaz de practicar a «verlo» usando bloques.
2. Compara tus dibujos con los de algún compañero.
3. Habla sobre lo que les pasa a los postes de telégrafo.

Curvas de anchura constante



Cuadro 2

No aparecen con tanta frecuencia otras actividades que involucren situaciones algebraicas en el mundo de los alumnos fuera de la escuela, pero la «búsqueda de patrones» es la actividad más importante en este caso. En una sección posterior, veremos que las «investigaciones» proporcionan un contexto mejor para aprender sobre las estructuras conceptuales algebraicas, sobre la demostración y sobre la naturaleza estructural del conocimiento matemático.

Todas estas actividades deberían cumplir los siguientes criterios:

- Ser relevantes para la mayoría de los alumnos.
- Ser significativas y razonables para ellos.
- Estar situadas en un contexto familiar o desarrolladas a partir de uno de ellos.
- Tener posibilidades de ser extendida matemáticamente para desafiar a los alumnos más rápidos.
- Estar conectadas con otros conceptos matemáticos.

El profesor debería considerar también cuál es la mejor manera de enseñar con estas actividades. Así como enseñar a toda la clase o individualmente, será importante que los profesores desarrollen sus métodos para enseñar a pequeños grupos. Mientras que educadores de todo el mundo intentan crear situaciones de aprendizaje satisfactorias para todos los alumnos, están encontrando útil el uso de métodos de pequeño grupo. Esto es debido a que permiten que los alumnos colaboren y trabajen juntos sobre los problemas, facilitando así que compartan sus habilidades y conocimientos previos. Los grupos pequeños también crean un contexto de aprendizaje que proporciona apoyo y no es amenazador para los alumnos que no son buenos en matemáticas y que se sienten desafiados al estar en la misma clase que los que tienen más conocimientos que ellos.

En mi experiencia, los profesores de matemáticas no están tan familiarizados como debieran con los métodos de pequeño grupo. Parecen tener miedo de permitir que los alumnos discutan, colaboren, comparen ideas y hagan trabajos conjuntos. Sin embargo, así es como les guista trabajar a los profesores cuando asisten a cursos de formación permanente.

...las «investigaciones» proporcionan un contexto mejor para aprender sobre las estructuras conceptuales algebraicas, sobre la demostración y sobre la naturaleza estructural del conocimiento matemático.

En particular, en matemáticas es posible y deseable trabajar en grupos ya que por su naturaleza es autocorrectiva. Si un alumno pregunta, «¿mi respuesta es correcta?» de forma fácil y legítima, se le puede responder «¿cómo puedes verificar y averiguar por ti mismo si tienes razón? Discútelo en tu grupo». No se trata de una excusa para no darle la respuesta, sino que es una estrategia para hacer que los alumnos se den cuenta de la naturaleza autocorrectiva del conocimiento matemático. Ahora bien, es mucho más fácil para el profesor contestar «Sí» o «No, está mal». ¡La parte dura de enseñar matemáticas, y podría afirmar que la más importante, es cómo enseñar a los alumnos el conocimiento que permite al profesor saber si la respuesta es correcta o errónea!

Otra importante estrategia curricular consiste en aumentar el tiempo dedicado al estudio de un determinado tema. Si los temas se planifican por separado y se secuencian estrictamente, entonces es muy difícil para el profesor atender las diferentes habilidades y ritmos de aprendizaje de los alumnos. Por lo tanto, mejor que pensar en enseñar una lección de una vez, que es lo que se ha hecho usualmente, es más importante que los profesores se animen a enseñar unidades de trabajo que puedan durar unas tres semanas. Este período de tiempo permite cubrir una cantidad considerable de material conceptual mediante actividades variadas. También permite a los alumnos más lentos cubrir los aspectos básicos permitiendo mientras a los más rápidos considerar puntos más complejos. Para ello es necesario pensar cuidadosamente en qué conceptos deben contener estas unidades, y cuáles deben ser los aspectos más básicos que deben aprenderse. Este trabajo no puede ser hecho por profesores aislados, y hace falta que el Ministerio considere la mejor forma de proporcionar apoyo y guía sobre esta idea.

Los proyectos y aplicaciones de las matemáticas

El aspecto conceptual, que hemos planteado antes, normalmente no permite que los alumnos observen los procesos involucrados en el uso de las matemáticas en gran parte de la sociedad. Para ello, es necesario usar proyectos específicos que puedan servir de ejemplo de estos procesos, y en este aspecto del currículo ante todo se buscan proyectos significativos para los alumnos y que sean buenos ejemplos de aplicaciones. Aquí no tenemos el objetivo de cubrir un programa detallado, sino que desearíamos presentar un muestrario de contextos de proyectos.

En la actualidad, la enseñanza con proyectos se usa en todos los niveles de la educación, pero en el pasado su principal uso fue en el trabajo de alto nivel en las universidades y en la industria. Sin embargo, su uso en la enseñanza secundaria no está extendido en todo el mundo, en apariencia porque los profesores piensan que no es una manera fácil de enseñar. De hecho realmente se trata de un método muy fácil de usar, ya que son los alumnos los que deben hacer todo el trabajo, con tal de que el profesor tenga presente que se propone lograr metas diferentes de las que se pretenden en el enfoque habitual de la enseñanza.

Hay tres aspectos diferentes que son particularmente importantes:

- Un buen proyecto da la oportunidad a los alumnos de seguir un tema al nivel que puedan, de maneras diferentes, ofreciendo así una enseñanza individualizada y personalizada, lo que es una forma de tratar de equilibrar la educación general y la preparación especializada.
- Un buen proyecto fomenta el uso de diferentes recursos materiales, que ahora incluye material al que puede accederse con ordenadores. Estos recursos no los proporciona necesariamente la escuela y podrían encontrarse en bibliotecas o en otras fuentes como las industrias, dependiendo del proyecto. Los alumnos de los países donde se usan proyectos son conscientes del provecho obtenido de averiguar información en diferentes fuentes, incluyendo Internet.
- Un buen proyecto fomenta la actividad en un nivel reflexivo, lo que supone que los valores y las opiniones sean, deberían serlo, discutidos.

El ejemplo de proyecto medioambiental que muestra el cuadro 3 satisface estos criterios. Es un proyecto que, básicamente, pide a los alumnos que estudien la cantidad de basura que genera su escuela cada día para hacer estimaciones a partir de ellas a escala nacional, usando estadísticas que deberán reunir, y calcular las consecuencias de réciclar y reducir los desperdicios. Existe la posibilidad de extenderlo de diversas maneras que abarquen discusiones estadísticas sobre muestreos, situaciones típicas, y generalizaciones.

Un buen proyecto, como éste, no es tan sólo un producto, por ejemplo, un ensayo con algunos cálculos e ilustraciones. Es una actividad, a menudo cooperativa, en un contexto particular en el que aparecen muchos problemas, resultados y preguntas, y en la que los alumnos es preciso que sean animados a aclarar el sentido de su implicación personal con las ideas del proyecto. Una profesora describe su proceso de enseñanza en estos términos:

> *Entregué a la clase una colección de problemas para escoger. Eligieron sus problemas y trabajaron con sus amigos en grupos de 2 o 3, teniendo tareas y lecciones de matemáticas durante dos semanas. Tenía cierta idea de lo que quería que sucediese. Quería que trabajasen de forma activa e independiente, entusiasmándose ocasionalmente y generando ideas con las que sorprenderme yendo más allá de sus planes originales, y no los quería aburridos, hartos y diciendo continuamente, ¿ahora que hago, señorita? (ATM, 1987).*

En la actualidad, la enseñanza con proyectos se usa en todos los niveles de la educación, pero en el pasado su principal uso fue en el trabajo de alto nivel en las universidades y en la industria.

Para ello les ayuda a planificar, escucha sus ideas, les ofrece recursos y sugerencias, discute los resultados con ellos, y les ayuda a planificar los informes de su trabajo. Porque un proyecto produce algo que es más importante que el propio trabajo de los alumnos, ya que existe la oportunidad de dar forma a lo que hacen, y de enseñarles indirectamente sobre valores y consecuencias.

Por último, un trabajo de proyecto puede permitir que todos los alumnos se beneficien de la enseñanza, algo mejor que sólo los pocos que lo hacen en la actualidad. En una investigación en Brasil en la que Pompeu comprometió a profesores en el desarrollo de proyectos basados en los conocimientos de sus alumnos fuera de la escuela, los resultados fueron muy alentadores:

> *Hasta ahora los resultados del cuestionario han sido impresionantes. Todos los profesores hicieron cambios importantes en sus puntos de vista sobre la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles, y los alumnos se comprometieron con entusiasmo en las actividades. En vez de la pasividad, memorización y repetición que se asocia a la educación tradicional, hubo una mayor evidencia de actividad comprometida, de alumnos que contribuían con confianza con conocimientos particulares y específicos, de discusión y debate sobre ideas matemáticas significativas* (Bishop y Pompeu, 1991, p. 181).

Este proyecto fue diseñado para hacer conscientes a los niños de la cantidad de basura que producen personalmente en un día y un curso escolar, y después extrapolar este estudio para calcular cuánta basura producen todos los niños de las escuelas primarias de Victoria en un año. Se imaginó que el Campo de Cricket de Melbourne (MCG) era un basurero gigante, y pensamos que ilustrarlo con el «césped sacrosanto» de este famoso terreno de juego cubierto con la basura presentaría una imagen impactante. Los niños podían referirse a la cantidad de basura de dos maneras. Una era averiguar cuánto tiempo se tardaría en llenarlo hasta la altura de la Grada Sur, y la otra hallar qué profundidad alcanzaría la basura cada año, y ajustar las cantidades después de que se hiciese el reciclaje.

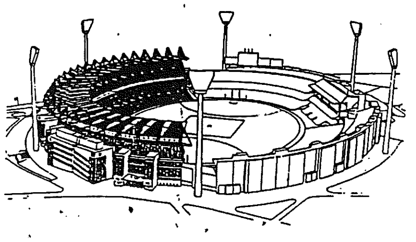


Figura 1:
Representación artística del Campo de Cricket de Melbourne

Tu grupo es un equipo de basureros ecologistas que está decidido a tener influencia sobre la recogida de basuras. Debeis escribir un informe basado en vuestros hallazgos y presentarlo al consejo local.

¿Cuánta basura puede caber en el MCG?

El área del campo de juego del MCG es 22.000 m^2. La Grada Sur tiene 45 m de altura desde el campo. Si imaginamos un cilindro gigante que sube desde el campo de juego hasta lo alto de la Grada Sur, ¿cuál sería su volumen?

¿Cuánta basura se produce en las escuelas de Victoria?

Recientemente, se han tomado muestras de basura en cuatro escuelas primarias de Victoria, una de ellas esta escuela. Se recogió toda la basura producida por los niños y profesores de cada de las escuelas un día cualquiera y se clasificó en varias categorías: papel, plástico, aluminio y restos de alimentos. El vidrio no se consideró un componente significativo dentro de la basura de las escuelas ya que está prohibido en la mayoría de las escuelas de Victoria. Se recogieron los siguientes datos:

N.° de alumnos de las escuelas que participaron en el muestro	1504
N.° total de bolsas de basura producidas en un día	35,1
N.° total de bolsas de papel recogidas	15,75
N.° total de bolsas de plástico recogidas	12,6
N.° total de bolsas de restos de alimentos recogidas	62
N.° total de bolsas de alumnio (latas y papel) recogidas	0,6
N.° de niños en las escuelas primarias de Victoria	430.175
N.° de días escolares en un año	200

1. ¿Cuántos litros de basura producen los alumnos de estas cuatro escuelas cada día? Las bolsas contienen 54 litros.
2. Un litro equivale a 1.000 centímetros cúbicos (abreviadamente cm^3), ¿cuántos centímetros cúbicos de basura producen las cuatro escuelas cada día?
3. Hay 100 cm en 1 m, y por tanto en un metro cuadrado hay $100 \times 100 = 10.000$ cm^2. Imaginar una pila de centímetros cuadrados. ¿Cuántos se necesitarían para construir una pila de un metro de altura?

   Esta es la cantidad de centímetros cúbicos (cm^3) que hay en un metro cúbico (m^3).

   ¿Qué tipo de cosas hay cerca de tu casa que se midan en metros cúbicos?
4. Ahora que sabes cuántos centímetros cúbicos (cm^3) hay en una metro cúbico (m^3), estima la cantidad de metros cúbicos de basura producidos en las escuelas primarias de Victoria cada día? ¿Cada semana? ¿En un año escolar?
5. ¿Cuánto tiempo haría falta para llenar el MCG con la basura de todas las escuelas primarias de Victoria?
6. Atendiendo a los tipos de basura enumerados en la tabla, ¿cuál sería la más conveniente para tratarla y reciclarla si realmente se quiere que se produzca algún cambio en el problema de la basura? Calcular cuánto tiempo haría falta para llenar el MCG si la basura se clasificara en las escuela y se hiciesen reciclar todos los materiales reciclables.

Preparar un informe de grupo sobre las basuras para presentarlo al School Council. Presentar los cálculos pertinentes y explicar lo qué significan.

EXTENSIÓN DEL PROYECTO

Una extensión de este proyecto implica comunicarse con una escuela de otro país que pueda hacer una recogida similar de basura por las escuelas implicadas y presentar a nuestros alumnos los datos de diferente forma a como se presentaron los propios. Con ello, se podrían proponer, para su discusión, una serie de preguntas adicionale y se pueden establecer contactos con las escuelas implicadas en los diferentes países para explicar las diferencias culturales. Por ejemplo: ¿Por qué esos niños recogieron hojas y palos en su escuela como parte de su recogida de basura?

BASURA EN OTROS PAÍSES

Se hizo una recogida de basuras similar en cuatro Escuelas Comunitarias en Papua Nuevo Guinea. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Escuela	N.° de alumnos	Papel/ plástico	hojas/ palos	latas/ vidrio
Wardstrip	966	1,2 m^3	0,97 m^3	0,09 m^3
Rakunai	500	1,17 m^3	3,17 m^3	0,17 m^3
Vanimo	400	1,8 m^3	1,97 m^3	1,7 m^3
Kumin	529	0,09 m^3	0,07 m^3	0,01 m^3
TOTALES				

1. Cuántos m^3 de basura producen los alumnos de estas cuatro escuelas en un día? ¿En una semana? ¿A lo largo de un curso?
2. Hay aproximadamente 450.000 alumnos que asisten a las escuelas comunitarias de PNG. ¿Cuánta basura producen todos los alumnos de las escuelas comunitarias de PNG en una semana y en un año escolar?
3. ¿Cuánto tiempo les llevaría llenar el MCG de basura a los niños de las escuelas del PNG ?
4. ¿Qué diferencias se observan entre las basuras producidas en las escuelas del PNG y en las escuelas de Victoria?
5. Si hacemos abono (compost) con las hojas y los palos, ¿cuánto tiempo costará llenar el MCG?
6. Si todo el vidrio y las latas fuesen recicladas, ¿cuánto tiempo costará llenar el MCG?
7. Esto tan sólo deja el papel y el plástico. Averiguar, para una de las escuelas, las cantidades de papel y el plástico recogidas. Usa esa proporción para estimar cuánto papel hay que reciclar en las escuelas de PNG y si prescindiese de ella cuánta basura no reciclable quedaría? ¿Cuánto tiempo costaría llenar el MCG con lo que queda?

Cuadro 3

Tallas de la ropa

Los alumnos trabajarán en grupo para obtener datos sobre distintas variables involucradas en las tallas de la ropa.

Analizarán los datos para decidir en qué casos se producen relaciones lineales aproximadas, encontrando cuando sea apropiado, las ecuaciones. Por ejemplo, tratarán de relacionar la talla del cuello, el pecho, la cadera con la talla de la cintura.

Cuadro 3 (cont.)

Así, queda claro que el trabajo con proyectos tiene una gran potencialidad en situaciones de enseñanza donde hay grupos heterogéneos de alumnos, y que todos los alumnos pueden beneficiarse de proyectos bien escogidos y apropiados para sus niveles.

Investigaciones y estructuras matemáticas

Las investigaciones tienen cierta similitud con los proyectos en tanto que también deberían usarse a modo de ejemplo, más que para tratar de cubrir un detallado programa. Sin embargo, en este caso el objetivo no es mostrar la aplicabilidad y la utilidad de las ideas matemáticas, sino más bien mostrar la forma en que se derivan y están estructuradas esas ideas. Las investigaciones involucran tanto el razonamiento deductivo como el inductivo, y fomentan la reflexión en un nivel más profundo del que es habitualmente posible en las actividades conceptuales normales.

Son particularmente útiles en situaciones geométricas y algebraicas y quizá la mejor manera de apreciar cómo usarlas sea considerar un ejemplo sencillo de geometría. Imaginemos el siguiente episodio en clase:

Pedimos a los alumnos que dibujen dos puntos sobre un papel en blanco, en la misma línea «horizontal» y separados 10 cm entre sí. Etiquetamos los puntos A y B. Ahora solicitamos buscar un punto C «sobre» la línea AB y tal que el ángulo ACB sea recto.

Una vez que hayan encontrado uno se les anima a encontrar otro, C1, y otro, C2, y otro...

«¿Qué se observa?» «Parece que están sobre un semicírculo» «¿Realmente, estáis todos de acuerdo?»

(Ahora viene una pregunta crucial para la investigación) «Supongamos que el ángulo no es de 90 grados, supongamos que es de 45 grados. Tratad de encontrar algunos nuevos puntos, D1...»

Y varias preguntas nuevas

«¿A qué forma se parece ahora?»

«¿Qué sucede por debajo de la línea AB?»

«¿Siempre será parte de un círculo?»

«Prueba algunos ejemplos más»

«¿Sucede siempre esto?»

«¿Puedes probarlo?»

[Las investigaciones] son particularmente útiles en situaciones geométricas y algebraicas...

Esto muestra la sucesión típica de una investigación:

a) Comenzar con una situación y petición simple.
b) Generar ejemplos.
c) Buscar pautas y sucesiones.
d) ¿Continúan las pautas de esta manera?
e) ¿Por qué?
f) ¿Hay alguna regla general?
g) Intenta demostrarlo.

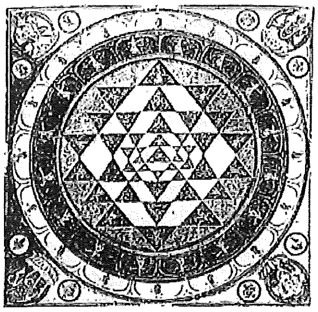
La sucesión desde a) hasta c) fomenta y requiere razonamiento inductivo, mientras que desde d) hasta g) se necesitan habilidades del razonamiento deductivo. En el cuadro 4 hay algún otro «punto de partida» de investigación. Sin embargo, los profesores que se han familiarizado con la idea de enseñar con investigaciones descubren que llega a ser fácil crearlas uno mismo a partir del programa de la etapa 12-16. Por ejemplo, puede darse una nueva vida a cualquier teorema geométrico como resultado de una investigación similar a la del ejemplo anterior y muchas de las actividades de «contar de forma inteligente» se prestan a dar lugar a una investigación algebraica. Como un ejemplo sencillo de un problema de «contar de forma inteligente» consideremos el siguiente:

Un bloque rectangular (un paralelepípedo rectángulo) de 3 cm por 4 cm por 5 cm, está hecho de pequeños cubos de 1 cm de arista. Se pinta por fuera. ¿Cuántos de los pequeños cubos tendrán una sola cara pintada? ¿Cuántos tienen dos, o tres o cuatro, o ninguna cara pintada?

Supongamos que el paralelepípedo tiene otras dimensiones. Investigar la situación.

¿Qué sucederá en el caso general de un paralelepípedo de dimensiones m x n x p?

¿Qué sucede en el caso especial de un cubo?



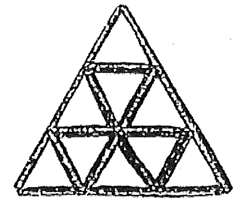
¿CUÁNTOS PEQUEÑOS TRIÁNGULOS HAY EN EL CENTRO DE ESTE DIAGRAMA?

¿CUÁNTOS APUNTAN HACIA ARRIBA?

¿CUÁNTOS APUNTAN HACIA ABAJO?

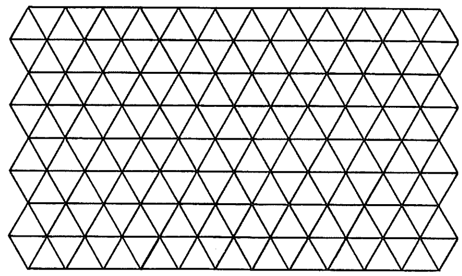
SI SE SIGUEN LAS LÍNEAS SE PUEDEN VER ALGUNOS TRIÁNGULOS GRANDES. ¿CUÁNTOS PUEDES VER TU?

DISEÑA TU PROPIO DIAGRAMA DE CONTEMPLACIÓN EN UNA TRAMA TRIANGULAR. USA PARA ELLO TRIÁNGULOS GRANDES Y PEQUEÑOS.



¿CUÁNTOS TRIÁNGULOS HAY EN ESTE DIAGRAMA? ¿9?, ¿12? ¿13?

INVESTIGA EL MODELO EN OTROS TRIÁNGULOS. (USA LA TRAMA TRIANGULAR)



Cuadrando cincos

Un *truco* para calcular los cuadrados de los números cuya cifra de las unidades es un cinco funciona como sigue:

$15^2 = 10 \times 20 + 25 = 225$

$25^2 = 20 \times 30 + 25 = 625$

$35^2 = 30 \times 40 + 25 = 1.225$

Los estudiantes deben explorar la pauta numérica y explicar con sus propias palabras como funciona generalizandola, para lo que harán uso de la expresión del cuadrado de una suma:

$(10a + 5)^2 = (10a)^2 + 2 \times 5 \times 10a + 52 = 100a(a + 1) + 25$

Se pretende que sepan extender correctamente la pauta, generalizar y comunicar un argumento razonando de forma clara.

Extensiones posibles

- ¿Se puede adaptar el *truco* para números mayores que 100, como 125^2?
- ¿Se aplica el *truco* a los decimales como $2,5^2$?

Cuadro 4

Como con un proyecto, con una investigación la buena profesora estará dispuesta a que los alumnos descubran ideas que ella misma puede no haber percibido antes. Este no debería ser un problema y, desde luego, es un indicador de una buena enseñanza. La buena profesora fomentará siempre que los alumnos vayan más allá de lo que ha hecho ella, y quizás de lo que sabe.

La experiencia deja claro que, con esta forma de enseñar, la buena elección de las investigaciones permite estimular a los alumnos a trabajar , sea el que sea su nivel de habilidad matemática. Como ocurría con el método de proyectos, incluso los alumnos más lentos, pueden animarse a iniciar la investigación y ser capaces de generar algunos ejemplos, comenzando a buscar pautas. Por supuesto, el profesor debe tomar la decisión de cómo y cuánto ha de guiar para permitirles ir más allá. Para los alumnos más rápidos, y aquellos que querrán continuar su estudios matemáticos después de los 16 años, el desarrollo de investigaciones, con éxito, en la etapa 12-16 proporcionará una base óptima para los procesos de demostración y simbolización, así como en los de inducción y deducción.

Creación de un currículum pedagógico a partir de los tres componentes

El desafío final para la planificación de un nuevo currículo pedagógico será la integración de los tres elementos en un todo sensato. Por supuesto, no hay respuesta óptima a este problema tal como ocurre con cualquier problema de educación matemática debido a las diferencias entre los sistemas educativos, organizaciones escolares y experiencia de los profesores. A pesar de todo, se puede dar algún consejo basado en las experiencias de otros países.

Por ejemplo, si se acepta como razonable la idea de unidades de trabajo conceptual de tres semanas de duración, entonces una forma de tener en cuenta los proyectos e investigaciones consiste en utilizarlos alternadamente en cada unidad. Es decir, en una unidad de tres semanas incluir una investigación, en la unidad siguiente incluir un proyecto y así sucesivamente. Por ejemplo, en las 12 unidades posibles durante el año escolar, esto supone que habría seis investigaciones y seis proyectos.

Un esquema inicialmente más razonable podría ser realizar tres investigaciones y tres proyectos con los alumnos de 12 años mientras que tanto los profesores como los alumnos se estén acostumbrando a las nuevas ideas. Entonces sería posible incrementar gradualmente el número, tanto de investigaciones como de proyectos, a lo largo de los años siguientes. Evidentemente, esto dependerá mucho de cómo se desarrollen las bases conceptuales a través de las actividades, y con qué confianza se enfrenten los profesores a las innovaciones.

Se debería hacer un buen uso de la estructura de la escuela y del departamento de matemáticas para permitir a los profesores trabajar cooperativamente en el desarrollo y creación del nuevo currículo escolar de matemáticas.

Otro punto a destacar aquí es que, ningún profesor debería sentir que está haciendo él sólo esta creación y estructuración. Se debería hacer un buen uso de la estructura de la escuela y del departamento de matemáticas para permitir a los profesores trabajar cooperativamente en el desarrollo y creación del nuevo currículo escolar de matemáticas. En los centros con la etapa 12-16, los jefes de departamento de matemáticas tienen una gran responsabilidad coordinando y dando soporte a los profesores individuales y organizando relaciones de cooperación con escuelas parecidas que también estén experimentando estas nuevas ideas.

Las asociaciones profesionales de profesores de matemáticas también pueden jugar un gran papel ayudando a desarrollar materiales para las actividades, investigaciones y proyectos y facilitando el intercambio necesario de ideas y métodos. Este ha sido el caso de *The Mathematicas Association* y *The Association of Teachers of Mathematics* en el Reino Unido, de la *Asociación de Profesores de Matemáticas* en Australia, del *National Council of Teachers of Mathematics* en los Estados Unidos de América del Norte y de los *IREM* en Francia. En cada uno de los casos, la asociación ha sido el foco para que los profesores trabajasen cooperativamente con los colegas investigadores para desarrollar unos currículos escolares de matemáticas innovadores.

Finalmente, el Ministerio de Educación debería darse cuenta de que convertir la «guía telefónica» en un esquema pedagógico que pueda resultar útil es un gran reto para los profesores. Necesitarán un considerable apoyo de formación permanente y recursos para desarrollar los materiales necesarios en sus escuelas. El Ministerio debería considerar seriamente también la idea de un proyecto de desarrollo elaborado por profesores e investigadores que estarían encargados de desarrollar ejemplos de materiales curriculares adecuados a las unidades conceptuales, proyectos e investigaciones basadas en las ideas anteriores. Ésta sería una manera muy útil de comenzar el proceso y ayudaría a aquellos profesores que pudieran sentirse sin coraje ante este proceso de cambio. En otros países, en los que los profesores han estado apoyados y estimulados a participar completamente en este tipo de nuevo desarrollo, se ha puesto de manifiesto que hay mucha energía creativa con posibilidades de ser utilizada en las escuelas.

Por último, es mi deseo que las tres ideas estructurales que he esquematizado os capaciten, individual y colectivamente en vuestro sistema, para desarrollar una educación matemática para vuestros alumnos que no consiga tan sólo el equilibrio entre las necesidades de la educación general y la instrucción especializada, sino que también ayude a crear una experiencia de aprendizaje matemático más actualizado, significativo y satisfactorio. Os deseo «buena suerte» en vuestros esfuerzos.

Alan J. Bishop
Facultad de Educación
Universidad de Monash
Melbourne 3168
Australia

Referencias

ABRAHAM, J. y N. BIBBY, (1988): «Mathematics and society: ethnomathematics and a public educator curriculum», *For the Learning of Mathematics*, vol. 8, N.°2, 2-11

ABREU, G. de (1993): *The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil*, PhD thesis, University of Cambridge, UK.

ATM (1987:) *Getting started with coursework*, Association of Teachers of Mathematics, Derby, UK.

BISHOP, A. J. (1987): «Social and cultural aspects of mathematics education», Conferencia Plenaria en el Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, Valencia, España.

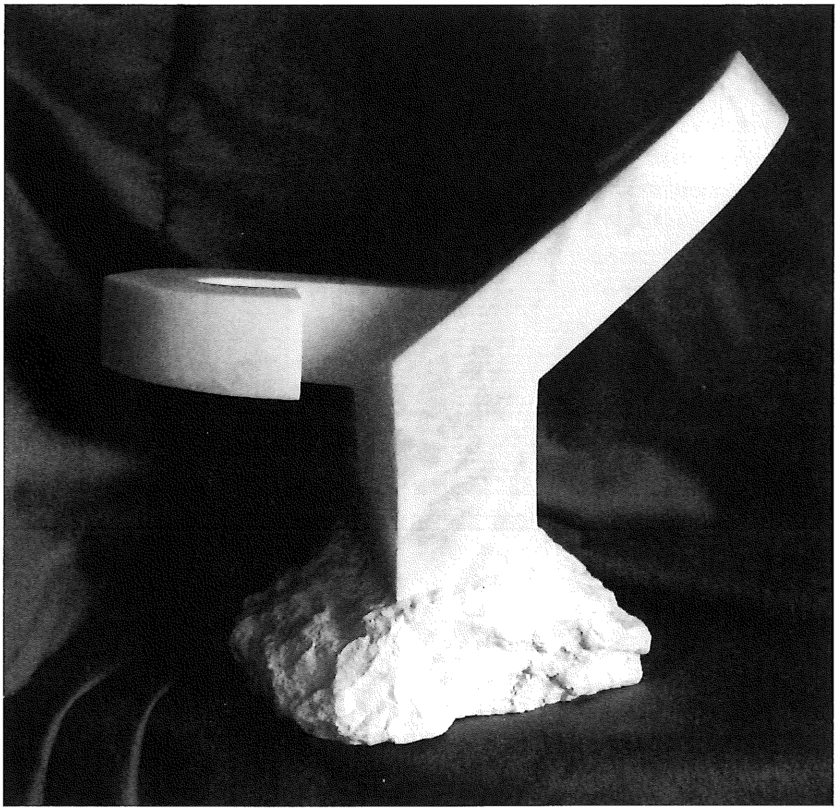
BISHOP, A. J. (1988): *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education*, Kluwer, Dordrecht.

BISHOP, A .J. (1993): «Influences from society», en A. J. BISHOP, K. HART, S. LERMAN y T. NUNES (Eds.): *Significant influences on children's learning of mathematics*, Unesco, París.

BISHOP, A. J. y G. POMPEU (1991): «Influences of an ethnomatematical approach on teacher attitudes to mathematics education», en *Prceedings of PME XV*, vol. 1, 136-148, Assisi, Italy.

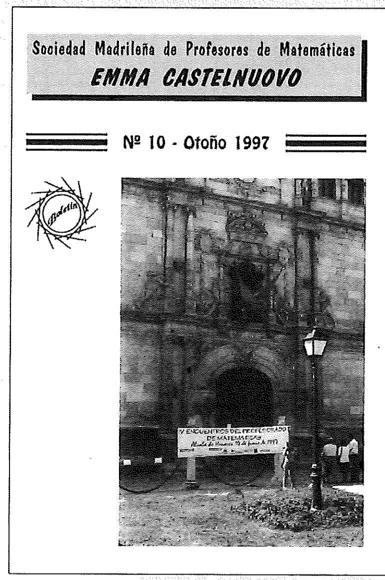
Catalan curriculum document

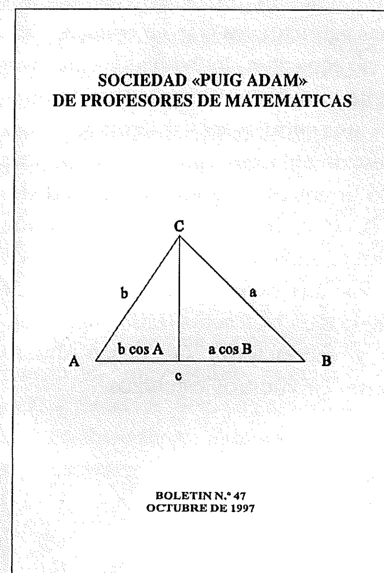
COOMBS, P. H. (1985): *The world crisis in education: the view from the eighties*, Oxford University Press, Oxford.

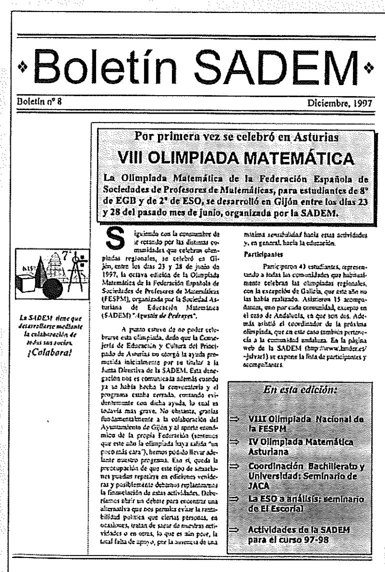


Tres arcos
Alabastro, 40x45x21
José Miguel Fuertes

PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES







•Boletín SADEM•

Boletín nº 8 — Diciembre, 1997

Por primera vez se celebró en Asturias

VIII OLIMPIADA MATEMÁTICA

La Olimpiada Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, para estudiantes de 8º de EGB y de 2º de ESO, se desarrolló en Gijón entre los días 23 y 28 del pasado mes de junio, organizada por la SADEM.

La SADEM tiene que desarrollarse mediante la colaboración de todos sus socios.
¡Colabora!

Siguiendo con la costumbre de ir rotando por las distintas comunidades que celebran olimpiadas regionales, se celebró en Gijón, entre los días 23 y 28 de junio de 1997, la octava edición de la Olimpiada Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), organizada por la Sociedad Asturiana de Educación Matemática (SADEM) "*Agustín de Pedrayes*".

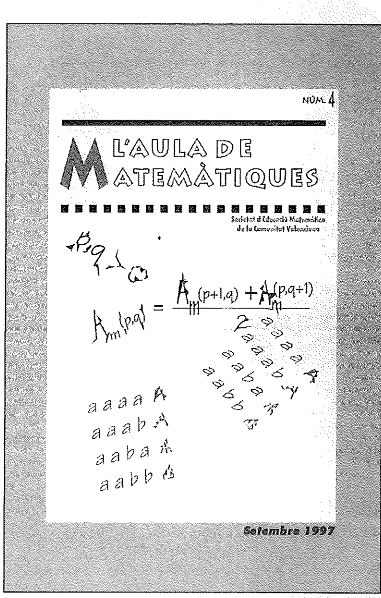
A punto estuvo de no poder celebrarse esta olimpiada, dado que la Consejería de Educación y Cultura del Principado de Asturias no otorgó la ayuda prometida inicialmente por su titular a la Junta Directiva de la SADEM. Esta denegación nos es comunicada además cuando ya se había hecho la convocatoria y el programa estaba cerrado, contando evidentemente con dicha ayuda, lo cual es todavía más grave. No obstante, gracias fundamentalmente a la colaboración del Ayuntamiento de Gijón y al aporte económico de la propia Federación (sentimos que este año la olimpiada haya salido "un poco más cara"), hemos podido llevar adelante nuestro programa. Eso sí, queda la preocupación de que este tipo de situaciones puedan repetirse en ediciones venideras y posiblemente debamos replantearnos la financiación de estas actividades. Deberíamos abrir un debate para encontrar una alternativa que nos permita evitar la rentabilidad política que ciertas personas, en ocasiones, tratan de sacar de nuestras actividades o en otras, lo que es aún peor, la total falta de apoyo, por la ausencia de una mínima *sensibilidad* hacia estas actividades y, en general, hacia la educación.

Participantes

Participaron 43 estudiantes, representando a todas las comunidades que habitualmente celebran las olimpiadas regionales, con la excepción de Galicia, que este año no las había realizado. Asistieron 15 acompañantes, uno por cada comunidad, excepto en el caso de Andalucía, en que son dos. Además asistió el coordinador de la próxima olimpiada, que en este caso también pertenecía a la comunidad andaluza. En la página web de la SADEM (http://www.[illegible]/~jalvar1) se expone la lista de participantes y acompañantes.

En esta edición:

⇒ VIII Olimpiada Nacional de la FESPM
⇒ IV Olimpiada Matemática Asturiana
⇒ Coordinación Bachillerato y Universidad: Seminario de JACA
⇒ La ESO a análisis: seminario de El Escorial
⇒ Actividades de la SADEM para el curso 97-98



SUMA 27
febrero 1998, pp. 39-47

Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias. Análisis de los resultados españoles en matemáticas

Jose Antonio López Varona
M.ª Luisa Moreno Martínez

ARTÍCULOS

En 1995 se realizó una evaluación internacional en matemáticas y ciencias con 41 países participantes, entre ellos España, con alumnos de 7.° y 8.°. Los resultados españoles de matemáticas fueron modestos. Considerando el rendimiento por bloques de contenidos se constatan mejores resultados en álgebra y peores en aritmética, geometría y medida. Los alumnos españoles responden mejor a las preguntas que requieren cálculos rutinarios que a las que exigen comprensión o aplicación práctica de algunos conceptos.
Esos resultados están en consonancia con otras evaluaciones internacionales de matemáticas realizadas en los últimos 10 años y con los resultados obtenidos en las participaciones en las olimpiadas matemácas internacionales a partir de 1991.

Presentación del TIMSS

En todos los países del mundo los estados gastan grandes cantidades del presupuesto en la educación primaria y secundaria. En muchos, la escolarización ya llega al cien por cien de los jóvenes con edad de escolarización obligatoria. A su vez, el deseo de disponer de ciudadanos con una mayor preparación intelectual, por asociarse ésta con la capacidad de desarrollo de un país, hace que se busque darle mayor eficacia al sistema educativo. En ese contexto se vienen realizando en muchos países evaluaciones que tienen como centro el estudio del rendimiento de los alumnos de cursos concretos en algunas materias con la finalidad de determinar si es posible mejorar el grado de preparación de los jóvenes y cómo se puede lograr. Las evaluaciones nacionales presentan algunas limitaciones, pues cada país tiene su propia ordenación del sistema educativo y su tradición y no puede saber qué resultados se obtendrían en otras situaciones. En los últimos 35 años han tenido lugar experiencias de evaluaciones internacionales con una creciente participación de países. Aunque una de las finalidades de las evaluaciones internacionales es la comparación, hay que ser cautos al realizarlas pues son muchas las variables implicadas y es difícil determinar el modo en que inciden en el resultado. No obstante, si se llevan a la práctica con rigor, pueden proporcionar información comparable que sea fiable y útil sobre diversos aspectos del sistema educativo como su organización y su práctica.

Entre 1991 y 1997 se ha llevado a cabo el mayor estudio internacional jamás concebido con la participación de 45 países, cinco cursos implicados (3.° y 4.°: alumnos de 9 años, 7.° y 8.°: alumnos de 13 años y último año de secundaria), con más de medio millón de estudiantes de más de quince mil escuelas evaluados simultáneamente en matemáticas y ciencias. Este estudio ha sido auspiciado por la IEA (International Association for the Evaluation of the Educational Achievement) y es el colofón de su experiencia anterior en dos evaluaciones en matemáticas y otras dos en ciencias. La denominación de la evaluación es *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias* (Third International Mathematics and Science Study), brevemente TIMSS.

España ha participado en el estudio sólo con los alumnos de 7.° y 8.° de EGB. La aplicación de pruebas y cuestionarios ha tenido lugar a finales de 1994 en los países del hemisferio Sur y en el primer semestre de 1995 en el resto. En España se aplicaron en mayo y principios de junio de 1995, con un total de 153 centros y 7.596 alumnos implicados, de ellos 3.855 eran de 8.° y los 3.741 restantes de 7.°.

Aparte de los objetivos que cada país participante se haya marcado para el TIMSS, de forma general se pretende medir y conocer el rendimiento de los alumnos de los niveles evaluados, comparar los resultados entre los países participantes y tratar de explicar las diferencias observadas en función de las características de los sistemas educativos.

El TIMSS, de forma general pretende medir y conocer el rendimiento de los alumnos de los niveles evaluados, comparar los resultados entre los países participantes y tratar de explicar las diferencias observadas en función de las características de los sistemas educativos.

Pruebas y cuestionarios usados

En cada colegio participante se seleccionó una clase de 7.° y otra de 8.°. A los alumnos de las clases seleccionadas se les pasó una prueba conjunta de matemáticas y ciencias y un cuestionario con preguntas sobre su contexto personal, familiar y de centro. A los profesores de matemáticas y ciencias de los alumnos seleccionados se les aplicó un cuestionario para recoger información sobre su historial y contexto profesional, sobre la clase objeto de estudio, sobre el currículo que imparte y cómo lo imparte y sobre el enfoque pedagógico que le da a esa materia. A los directores de los centros seleccionados se les aplicó un cuestionario para recoger información sobre la organización y la vida del centro.

Para elaborar las pruebas se constituyó un banco de 151 preguntas de matemáticas y 135 de ciencias. Hay tres formatos diferentes de preguntas, de opción múltiple con cuatro o cinco alternativas y una sólo correcta, de respuesta abierta y breve en que el alumno debe escribir la solución y de respuesta abierta y extensa en que el alumno debe dar una explicación o escribir en detalle el proceso seguido hasta llegar a la solución. Con este conjunto de preguntas se construyen ocho modelos de cuadernillo con unas 70 preguntas cada uno, aproximadamente la mitad de cada materia. Algunas preguntas son comunes a todos los cuadernillos, otras a una parte de ellos y otras van en un solo cuadernillo.

Cabe hacer dos consideraciones sobre las pruebas de contenido. En primer lugar, su formato es novedoso para nuestros alumnos, hasta el punto de que muchos respondían a preguntas de opción múltiple por primera vez en la prueba. Una consecuencia de ello fue la mala administración del tiempo que originó que muchos alumnos terminaran con mucha antelación. En segundo lugar, hay que considerar las diferencias en el currículo entre los países participantes. Esas diferencias no sólo se presentan en los contenidos, sino también en el énfasis que se les da en cada nivel, en los objetivos y en el enfoque. Es justo reconocer que se hizo un gran esfuerzo para asumir las sugerencias de los países individualmente a fin de reducir los sesgos que inevitablemente llevan las preguntas al aplicarse a una gran heterogeneidad de currículos y culturas.

Los contenidos evaluados

El hecho de que se hayan empleado 151 preguntas de matemáticas en el total de la prueba ha permitido tener presente de manera significativa todas las partes esenciales del currículo. La tabla 1 presenta los seis bloques de contenido en que se ha dividido el currículo, el número de preguntas por cada bloque de contenidos y el porcentaje que ese número representa en el total de la prueba.

	Preguntas		*Respuestas puntuables*	
Bloque de contenidos	*Número*	*Porcentaje*	*Número*	*Porcentaje*
Fracciones y sentido numérico	51	34	52	33
Geometría	23	15	23	15
Álgebra	27	18	29	18
Representación y análisis de datos. Probabilidad	21	14	20	13
Medida	18	12	21	13
Proporcionalidad	11	7	12	8
Total	151	100	157	100

Tabla 1. Didtribución de las preguntas por bloques de contenido

El primer bloque enumerado, Fracciones y sentido numérico, constituye la tercera parte de la prueba. Las preguntas del bloque hacen referencia a operaciones y problemas con números naturales, fracciones y números decimales, estimación y redondeo. Además, se incluye el cálculo y resolución de problemas con porcentajes. El último bloque, Proporcionalidad, está constituido por preguntas sobre el concepto de razón y proporcionalidad y problemas de aplicación. Los contenidos de este bloque se pueden incluir en el primero y en el de Geometría, semejanza, pero se ha preferido considerarlo aparte por el especial énfasis que se le da en el currículo de algunos países. Estos dos bloques hacen referencia a los contenidos más elementales de la aritmética incluidos mayoritariamente en los currículos de los países participantes. El currículo español hasta 8.° de EGB cubre, al menos formalmente, todos los contenidos requeridos por las preguntas de estos dos bloques, excepto la estimación y el redondeo.

El segundo bloque atendiendo al peso en la prueba es el de álgebra, con 23 preguntas sobre expresiones algebraicas, sustituciones rutinarias y resolución de problemas sobre patrones o pautas, relaciones, expresiones y ecuaciones lineales. La cobertura del bloque por el currículo de la EGB es desigual. Los contenidos referentes a expresiones y ecuaciones están ampliamente tratados, pero el trabajo con patrones e incluso relaciones no figura con la importancia que en el currículo de otros países.

El bloque de Geometría comprende la visualización y propiedades de las figuras geométricas en el plano y el espacio y, además, las transformaciones geométricas, simetría, congruencia y semejanza. El currículo cubre ampliamente la geometría del plano excepto transformaciones geométricas, no así la del espacio en que esencialmente se estudia sólo la superficie y volumen de sólidos.

En las preguntas de Medida se pide el concepto de medida, la interpretación de escalas, manejo de las unidades de longitud, área, volumen, masa y tiempo. Además, se pide estimación de medidas, errores y precisión, así como la resolución de problemas de medida. Nuevamente podemos decir que el currículo español cubre formalmente los contenidos de este bloque excepto la estimación, errores y precisión.

...toda comparación del currículo basándose en los documentos en que se establece y en los libros de texto es una comparación formal, pues no es posible considerar el énfasis que se va a poner en cada una de las partes del mismo, ni la forma en que se va a presentar a los alumnos, ni qué conjunto de habilidades de las que hay que poner en juego para unos contenidos concretos se han trabajado en la clase.

En último lugar, consideramos el bloque de Representación, análisis de datos y probabilidad. En este bloque hay preguntas sobre representación, lectura, interpretación y análisis de datos en cuadros, tablas y gráficos. Además aparecen a nivel elemental los conceptos de azar y de probabilidad. La representación y el tratamiento de datos estadísticos se presenta de forma elemental en séptimo de EGB. Las gráficas en el plano cartesiano se presentan por primera vez en octavo de EGB. Sin embargo, el azar y la probabilidad no han sido tratados por el currículo de EGB de forma explícita.

Antes de terminar esta visión del currículo que aparece en las preguntas y su ajuste al currículo seguido por los alumnos españoles evaluados conviene resaltar una vez más el hecho de que todos esos alumnos estaban siguiendo la EGB y que el currículo que siguen los alumnos del plan LOGSE ha sido modificado.

Además, toda comparación del currículo basándose en los documentos en que se establece y en los libros de texto es una comparación formal, pues no es posible considerar el énfasis que se va a poner en cada una de las partes del mismo, ni la forma en que se va a presentar a los alumnos, ni qué conjunto de habilidades de las que hay que poner en juego para unos contenidos concretos se han trabajado en la clase. Es decir, no podemos concretar la oportunidad real de aprendizaje de los alumnos sobre los contenidos pues ésta depende de varios factores como el currículo, las creencias pedagógicas de los profesores, la práctica en clase y los libros de texto. A su vez, sobre esos factores inciden la tradición didáctica del país, la preparación del profesorado y la incidencia de las corrientes pedagógicas modernas.

Puntuaciones de la prueba

Una vez aplicada la prueba a los alumnos se eliminó una pregunta del bloque «Representación y análisis de datos. Probabilidad». Cinco de las 150 preguntas restantes constan de dos partes y una tenía tres partes. Cada parte se ha calificado por separado.

La mayoría de las calificaciones han sido dicotómicas: bien o mal. Algunas calificaciones han tenido una o dos categorías intermedias entre bien y mal dando una puntuación parcial a soluciones que no eran ni correctas ni incorrectas del todo.

En total se dan 157 puntuaciones individualizadas en matemáticas, repartidas por bloques como indica la tabla 1.

En este artículo se dan los resultados en los siguientes tipos de porcentajes de aciertos:

- Porcentaje de aciertos de un país en una pregunta es el porcentaje de alumnos que da una respuesta completamente correcta a la pregunta entre todos los que la tenían que responder.
- Porcentaje de aciertos de un país en un conjunto de preguntas (bloque de contenidos o prueba completa) es la media de los porcentajes de aciertos de las preguntas en ese conjunto.
- Porcentaje internacional es la media de los correspondientes porcentajes de los países participantes.

Resultados globales y por bloques de contenidos en la prueba de matemáticas

En el informe internacional de los alumnos de 13 años se dan resultados de 41 países de 8.° y de 39 de 7.°. La tabla 2 presenta los resultados generales de esos países para los cursos 7.° y 8.°. Esos resultados se dan en términos de porcentajes medios de alumnos que aciertan las preguntas. El porcentaje internacional en 8.° es de 55% y en 7.° es de 49%, mientras que para España son de 51% y 42% respectivamente. En ambos cursos el porcentaje español está claramente por debajo del porcentaje internacional, ocupando el puesto 31.° de 41 en 8.° y el 32.° de 39 en 7.°. De los países de la UE que participan sólo Grecia y Portugal quedan por debajo de España.

El porcentaje de aciertos español en la prueba completa es un 7% más bajo que el internacional en 7.° y un 4% en 8.°.

A nivel internacional hay una diferencia (aumento) de 6% entre el porcentaje de 8.° y el de 7.° que resume lo que han aprendido a lo largo del último curso los alumnos de 8.°. En España ese aumento de 7.° a 8.° es de un 9%, tres puntos superior al internacional. Este mayor aumento puede ser debido a que el contenido del curso 8.° español incide más en aspectos del currículo de la prueba que lo hace en otros países.

La tabla 3 muestra el porcentaje de aciertos y el aumento español e internacional en 7.° y en 8.° en la prueba completa y en los seis bloques de contenidos. El aumento en «Álgebra», «Fracciones y sentido numérico» y en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» español es respectivamente 5%, 4% y 3% superior al internacional. El de «Geometría» es un punto menor y en los otros dos bloques es igual.

El currículo de me matemáticas de 8.° de EGB ponía especial énfasis en el álgebra, lo que podría explicar ese mayor

En ambos cursos el porcentaje español está claramente por debajo del porcentaje internacional, ocupando el puesto 31. de 41 en 8.° y el 32.° de 39 en 7.°.

Alumnos de 8.°		*Alumnos de 7.°*	
País	*%*	*País*	*%*
Singapur	79	Singapur	73
Japón	73	Japón	67
Corea	72	Corea	67
Hong Kong	70	Hong Kong	65
Bélgica (Fl)	66	Bélgica (Fl)	65
Rep. Checa	66	Rep. Checa	57
Eslovaquia	62	Austria	56
Suiza	62	Bulgaria	55
Austria	62	Holanda	55
Hungría	62	Bélgica (Fr)	54
Francia	61	Eslovaquia	54
Eslovenia	61	Hungría	54
Rusia	60	Irlanda	53
Holanda	60	Suiza	53
Bulgaria	60	Rusia	53
Canadá	59	Eslovenia	53
Irlanda	59	Australia	52
Bélgica (Fr.)	59	Tailandia	52
Australia	58	Canadá	52
Tailandia	57	Francia	51
Israel	57	Alemania	49
Suecia	56	EE UU	48
Alemania	54	Inglaterra	47
N. Zelanda	54	Suecia	47
Noruega	54	N. Zelanda	46
Inglaterra	53	Escocia	44
EE UU	53	Noruega	44
Dinamarca	52	Letonia	44
Escocia	52	Dinamarca	44
Letonia	51	Rumanía	43
España	**51**	Islandia	43
Islandia	50	**España**	**42**
Grecia	49	Chipre	42
Rumanía	49	Grecia	40
Lituania	48	Lituania	38
Chipre	48	Portugal	37
Portugal	43	Irán	32
Irán	38	Colombia	26
Kuwait	30	Sudáfrica	23
Colombia	29		
Sudáfrica	24		
Internacional	55	Internacional	49

Tabla 2. Porcentajes de aciertos por países y cursos

Bloque de contenidos	España			Internacional		
	7.°	8.°	Aumento	7.°	8.°	Aumento
Fracciones y sentido numérico	43	52	9	53	58	5
Geometría	43	49	6	49	56	7
Álgebra	41	54	13	44	52	8
Representación y análisis de datos. Probabilidad	52	60	8	57	62	5
Medida	38	44	6	45	51	6
Proporcionalidad	35	40	5	40	45	5
Prueba completa	42	51	9	49	55	6

Tabla 3. Porcentaje de aciertos internacionales y españoles por bloques de contenidos y curso

aumento en el bloque. Igualmente, la representación en el plano cartesiano se introducía por primera vez en 8.°. Esto potenciaría en los alumnos de 8.° la capacidad de resolver problemas de este tipo lo que explicaría ese gran aumento en el bloque de «Representación y análisis de datos», pues una de sus partes es la lectura e interpretación de datos en gráficos y tablas.

La geometría elemental, no analítica, del plano y del espacio se presenta en cursos anteriores a 8.° por lo que los alumnos de ese curso se encuentran en similares condiciones que los de 7.°, lo que justifica que el aumento a nivel internacional en ese bloque sea superior al español.

El porcentaje de aciertos español en la prueba, como vimos, es un 7% más bajo que el internacional en 7.° y un 4% en 8.°. Si nuestro rendimiento en los bloques de contenidos fuese similar al de la prueba completa, cabría esperar que los porcentajes de aciertos en los bloques se diferenciasen de los internacionales de forma similar a como lo hacen los de la prueba completa en cada curso. Nótese que cada bloque tiene diferente dificultad, medida por los porcentajes de aciertos internacionales, pero al considerar y comparar las diferencias entre los porcentajes españoles e internacionales estamos equiparando las dificultades para hacer legítimas las comparaciones. La tabla 4 presenta esas diferencias y en ella se aprecia una enorme heterogeneidad por bloques y cursos. En «Fracciones y sentido numérico» se obtiene un rendimiento un 3% menor que en la prueba completa en 7.° y un 2% en 8.°. En «Geometría» se rinde en 7.° un 1% mejor que en la prueba completa, pero en 8.° es un 3% peor, mientras que en «Álgebra» se obtiene un 4% más en 7.° y un 6% en 8.°. En «Representación y análisis de datos. Probabilidad» se hace un 2% mejor en ambos cursos, en «Medida» se rinde un 3% menos en 8.° y en «Proporcionalidad» un 2% mejor en 7.° y un 1% en 8.°.

Bloque de contenidos	Diferencia	
	7.°	8.°
Fracciones y sentido numérico	–10	–6
Geometría	–6	–7
Álgebra	–3	2
Representación y análisis de datos. Probabilidad	–5	–2
Medida	–7	–7
Proporcionalidad	–5	–5
Prueba completa	–7	–4

Tabla 4. Diferencias entre los porcentajes de aciertos de España e internacionales por bloques de contenidos y por cursos

Podemos concluir que los bloques de contenidos en que peor se rinde son el de «Fracciones y sentido numérico» en 7.° y los de «Geometría» y «Medida» en 8.°. El bloque en el que mejor se rinde tanto en 7.° como en 8.° es el de «Álgebra».

Nuevamente hemos encontrado que el bloque en el que mejor rinden los alumnos españoles es en el de «Álgebra». Una razón que explica esto es que el currículo de EGB introducía muy pronto el álgebra y de forma bastante intensa, con el curso de 8.° dedicado en gran parte a ella y el de 7.° también en parte. En el libro *Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts*, de Howson, se analizan libros de texto de ocho países: Inglaterra, Francia, Japón, Holanda, Noruega, España, Suiza y EEUU. Por parte de España se analizó el libro *Azimut Matemáticas 8.°*, Equipo Signo, Anaya, 1992. Del estudio se desprende que los 29 capítulos del libro de texto contienen álgebra, pues aunque hay alguno dedicado a números y, por ello, podría ser catalogado como de aritmética, el énfasis en la parte estructural de los números lleva a considerarlos de álgebra. Este aparente desequilibrio del currículo explicaría, en parte, la diferencia en el rendimiento en los bloques de contenidos.

...el bloque en el que mejor rinden los alumnos españoles es en el de «Álgebra».

En qué lo hicimos mejor y peor

España se encuentra tanto en 7.° y en 8.° encabezando el último cuarto de países por orden descendente de puntuación, sin embargo considerando las preguntas de manera individualizada las posiciones son muy heterogéneas, encontrando algunas preguntas en las que tenemos porcentajes de aciertos entre los mejores y otras entre los peores.

Si nos fijamos en los porcentajes de aciertos de los alumnos de 8.° en cada pregunta y los comparamos con los correspondientes internacionales encontramos diferencias en uno u otro sentido de más de 20 puntos. Vamos a considerar las preguntas cuyo porcentaje de aciertos en 8.° sea más de un 10% mayor o menor que el internacional.

La Tabla 5 muestra el número de esas preguntas distribuidas por bloques de contenidos. Llama la atención que hay tres veces más preguntas con puntuación inferior, 39, que superior, 13. En «Álgebra» hay cinco preguntas por encima y sólo una por debajo.

Bloque de contenidos	España más de 10% por encima		España más de 10% por debajo	
	Número	%	Número	%
Fracciones y sentido numérico	7	54	19	49
Geometría	0	0	6	15
Álgebra	5	38	1	3
Representación y análisis de datos. Probabilidad	0	0	3	8
Medida	1	8	7	18
Proporcionalidad	0	0	3	8
Total	13	100	39	100

Tabla 5. Preguntas con porcentajes de aciertos de 8.° más de un 10% mayor y menor que el internacional

Las preguntas en que se hizo mejor

A continuación se exponen ejemplos de las preguntas en que los alumnos de 8.° obtiene un porcentaje de aciertos más de un 10% por encima del porcentaje internacional.

Ejemplo 1 (Álgebra):

Hallar x si:

$$10x - 15 = 5x + 20$$

Respuesta: ....

Ejemplo 2 (Álgebra):

Juan tiene 5 sombreros menos que María y Clara tiene 3 veces más sombreros que Juan. Si María tiene n sombreros, ¿cuál de estas expresiones representa el número de sombreros que tiene Clara?

A. $5 - 3n$

B. $3n$

C. $n - 5$

D. $3n - 5$

E. $3(n - 5)$

Ejemplo 3 (Fracciones y sentido numérico):

¿Cuál de estos números es quinientos cuatro con siete décimas?

A. 54'7

B. 504'7

C. 547

D. 5004'7

Ejemplo 4 (Fracciones y sentido numérico):

$$3/4 + (2/3 \times 1/4) =$$

A. 1/8

B. 5/16

C. 17/48

D. 5/6

E. 11/12

Ejemplo 5 (Medida):

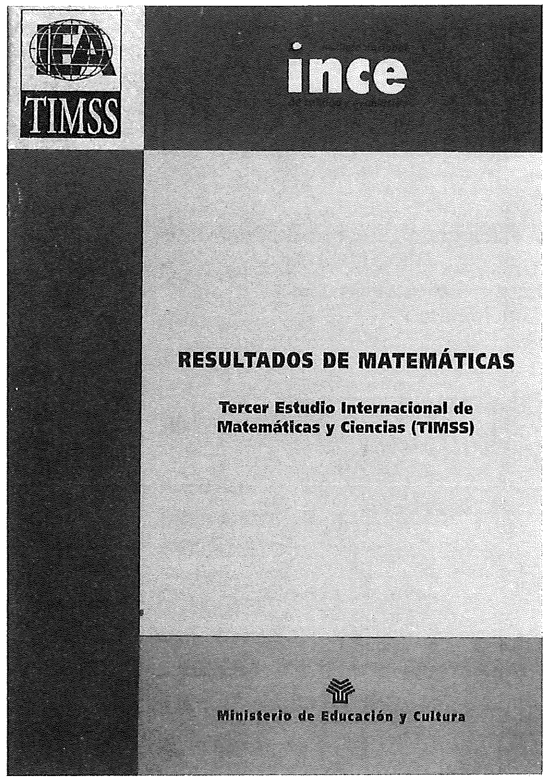
Se pone un pastel al horno a las 7:20. Si el pastel tarda tres cuartos de hora en hacerse, ¿a qué hora habrá que sacarlo del horno?

Respuesta: ....

El resto de las preguntas se presentan resumidas en las siguientes líneas.

- Dividir 8/35 : 4/15
- De cuatro listas de tres fracciones cada una, como 3/4, 6/8, 12/24, seleccionar la única en que las tres fracciones son equivalentes.
- Efectuar 6000 – 2369
- Efectuar 2'201 – 0'53
- Efectuar 3/4 + 8/3 + 11/8
- Si x = –3, –3x vale
- Efectuar 2x/9 – x/9

La mayor parte de estas preguntas implican la realización de operaciones o sustituciones formales, lo que apunta a que ese puede ser el punto fuerte de nuestros alumnos en comparación con los de otros países. Esto parece indicar que el currículo o los profesores ponemos especial énfasis en ello.



Las preguntas en que se hizo peor

Hay treinta y nueve preguntas con puntuaciones más de un 10% por debajo de las internacionales. A fin de ilustrar sobre su tipo se exponen a continuación seis ejemplos, uno de cada bloque y a estos le sigue una breve reseña del conjunto de las treinta y nueve preguntas.

Ejemplo 6 (Fracciones y sentido numérico):

Redondeando a la decena de kilogramo más próxima, el peso de un delfín resulta ser 170 kg. Escribe un peso que pueda ser el verdadero peso del delfín.

Respuesta: ....

[Se considera respuesta correcta dar uno o varios números mayores o iguales que 165 y menores que 175, o una expresión del tipo «De 168 a 171» que defina un intervalo completamente correcto.]

Ejemplo 7 (Geometría):

En un cuadrilátero, dos de sus ángulos miden 110° cada uno, la medida de un tercer ángulo es 90°. ¿Cuál es la medida del ángulo que queda?

A. 50°

B. 90°

C. 130°

D. 140°

E. Ninguna de las anteriores

Ejemplo 8 (Álgebra):

Si 4 veces un número es 48, ¿qué será 1/3 de ese número?

A. 4

B. 8

C. 12

D. 16

Ejemplo 9 (Representación y análisis de datos. Probabilidad):

Cada una de las seis caras de un cubo está pintada de rojo o azul. Al lanzar el cubo, la probabilidad de que quede una cara roja arriba es 2/3. ¿Cuántas caras son rojas?

A. Una

B. Dos

C. Tres

D. Cuatro

E. Cinco

Ejemplo 10 (Proporcionalidad):

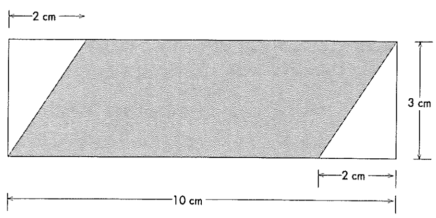
Una clase tiene 28 alumnos. La razón de chicas a chicos es de 3 a 4. ¿Cuántas chicas hay en la clase?

Respuesta: ....

Ejemplo 11 (Medida)

La figura muestra un paralelogramo sombreado dentro de un rectángulo.

¿Cuál es el área del paralelogramo?



Respuesta: ....

[Se considera la respuesta válida venga o no con unidades.]

De esas treinta y nueve preguntas siete conllevan realizar aproximaciones, redondeos o estimaciones, y de las tres preguntas que corresponden al bloque «Representación y análisis de datos. Probabilidad» dos exigen aplicar el concepto de probabilidad. Ya habíamos comentado que esos contenidos (aproximación, redondeo, estimación y probabilidad) no formaban parte del currículo de la EGB lo que podría explicar ese bajo porcentaje de aciertos.

Hay algunas preguntas que implican interpretación o cálculo con razones, proporciones o porcentajes, otras piden comparar números racionales en forma decimal o fraccionaria, en una hay que pasar un número en forma decimal a fraccionaria y en otra se da. Las preguntas de «Geometría» versan sobre ángulos y líneas de simetría de figuras planas y una sobre coordenadas de un punto en el plano y las de «Medida» sobre medidas en figuras (lados, perímetros y áreas). Todos los contenidos exigidos para las preguntas comentadas en este párrafo formaban parte del currículo de la EGB.

En resumen, de las preguntas en que peor han respondido los alumnos de 8.° españoles hay algunas que están claramente fuera del currículo que los alumnos seguían entonces, pero hay otras, la mayoría, que hacen referencia a contenidos del currículo y cuyos malos resultados pueden ser debidos al enfoque que se les da a esos contenidos, a un menor énfasis que el requerido para responder correctamente o a otras causas por averiguar.

Un análisis global de las ideas surgidas del estudio de las preguntas de mejores y peores resultados apunta por una parte que el currículo de la EGB estaba desfasado o no se correspondía con el de muchos países de nuestro entorno. Esos desfases ya se han eliminado en el currículo de la reforma. Por otra parte, hay contenidos en que el bajo rendimiento puede ser debido al enfoque con que se presentan a los alumnos. Parece que las preguntas que requieren cálculo rutinario se responden mejor, pero las que exigen una aplicación práctica de los objetos y conceptos matemáticos se responden peor.

Parece que las preguntas que requieren cálculo rutinario se responden mejor, pero las que exige una aplicación práctica de los objetos y conceptos matemáticos se responden peor.

Resultados en otros eventos internacionales

Ante los resultados negativos obtenidos por España en matemáticas en el TIMSS uno se pregunta si es un resultado aislado que no determina nuestra posición en el mundo en cuanto al aprendizaje de las matemáticas o es de verdad un indicador fiable del nivel que tenemos en relación con los países de nuestro entorno económico y geográfico. Ante esta duda puede ser ilustrativo recoger los resultados cosechados en otros eventos de esta naturaleza en los últimos años y analizarlos en relación con el TIMSS.

En 1988 y en 1991 España participó respectivamente en los IAEP I y II, evaluaciones de matemáticas y ciencias con alumnos de 8.° de EGB en el I y de 8.° y 4.° en el II. Interesan especialmente los resultados de los alumnos de 8.°. En ambos estudios participan entre otros países Irlanda y Estados Unidos.

En los dos estudios los resultados de España en 8.° son bajos. En el IAEP I se tienen mejores resultados que Irlanda y Estados Unidos. En el IAEP II España tiene similares resultados que Estados Unidos, pero peores que Irlanda y en el TIMSS son significativamente peores que los de Irlanda y peores que Estados Unidos, pero no significativamente.

Cabe preguntarse si los malos rendimientos en matemáticas son de la población de estudiantes como un todo pero no de los alumnos mejores. Es decir, queda la sospecha de si nuestros mejores alumnos son equiparables a los mejores de otros países. Las olimpiadas matemáticas son eventos internacionales donde confluyen alumnos de muchos países, buenos alumnos, y compiten en la resolución de problemas. España suele participar en estos eventos con seis alumnos, el máximo número permitido por país, junto con la mayoría de los países de nuestro entorno. En los resultados desde 1991 nuestro país ha ocupado siempre posiciones retrasadas, en torno a las primeras posiciones del último cuarto. La posición con relación a los países de nuestro entorno es similar a la de los estudios de evaluación, estando por debajo de Francia, Estados Unidos, Alemania, Italia y por encima aunque próximo de países como Irlanda y Portugal. Cabe resaltar el caso de Estados Unidos, que aunque en las evaluaciones de la población en su conjunto tiene resultados pobres, en las olimpiadas, con los mejores alumnos, obtiene resultados siempre buenos, entre los primeros países.

En conjunto se observan resultados de España similares en todos estos eventos por lo que podemos considerar que nos están dando la verdadera medida del rendimiento en matemáticas de nuestro sistema escolar.

Consideraciones finales

Lo que aprenden nuestros alumnos de matemáticas medido por los resultados obtenidos en diversas pruebas internacionales parecen no corresponderse con la posición económica de nuestro país. Es verdad que estamos considerando resultados obtenidos por alumnos que habían seguido la EGB y esta ha desaparecido en la actualidad. La reforma ha afectado al currículo y parece que el que se ha implantado está más en consonancia con el que existe en otros países de nuestro entorno.

Estos resultados no pueden dejar indiferentes a los que tienen que ver con la enseñanza de las matemáticas: administraciones educativas, profesores, padres, formadores de profesores, etc.

Estos resultados no pueden dejar indiferentes a los que tienen que ver con la enseñanza de las matemáticas: administraciones educativas, profesores, padres, formadores de profesores, etc.

Es posible que se requiera un debate sobre este problema en el que haya que mirar los resultados de la reforma y discutir si hacen falta ajustes en algunos aspectos como tiempo dedicado a las matemáticas, itinerarios y optatividad, formación y actualización del profesorado, libros de texto, etc.

Espero que este material sirva para mostrar algunas fuentes de información sobre el rendimiento de nuestros alumnos en matemáticas para aquellas personas interesadas su enseñanza.

Más sobre el TIMSS

Si se quiere saber más sobre el TIMSS, aparte de a la bibliografía, se puede acudir a las siguientes direcciones INTERNET:

Del INCE: www.ince.mec.es

Del Boston Colege, con acceso a los informes internacionales y mucha otra información en relación al TIMSS: wwwcsteep.bc.edu/timss

Mi dirección de INTERNET es: varona@ ince.mec.es y en ella puedo recibir preguntas sugerencias y cuanto os interese mandar.

Están disponibles los datos de todos los países que han participado y en la página web del Boston C. informan cómo conseguirlos.

Bibliografía

BEATON, A. E., y otros (1996): *Mathematics Achievement in the Middle School Years*, Center for the Study of Testing Evaluation and Educational Policy, Boston College, Boston.

HOWSON, G. (1995): *TIMSS Monograph No. 3. Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts*, Pacific Educational Press, Vancouver.

LAPOINTE, A. E., N. A. MEAD, y G. W. PHILIPS (1989): *Un mundo de Diferencias. Un Estudio Internacional de Evaluación de las Matemáticas y las Ciencias*, Ministerio de Educación y Ciencia, CIDE, Dirección General de Renovación Pedagógica, Secretaría de Estado.

LAPOINTE, A. E., N. A. MEAD, y G. W. PHILIPS (1992): *Learnig Mathematics*, The International Assessment of Educational Progress (IAEP).

LÓPEZ VARONA, J. A. y M. L. MORENO MARTÍNEZ (1996): «Tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS)», *Revista de Educación*, 311, 315-336.

LÓPEZ VARONA, J. A. y M. L. MORENO MARTÍNEZ (1997): Resultados de Matemáticas. Tercer estudio internacional de Matemáticas y Ciencias (TIMSS), Ministerio de Educación y Cultura, Madrid.

ROBITAILLE, D. F. y R. A. GARDEN (1966): *TIMSS Monograph No. 2 Research and Study Desing*, Pacific Educational Press, Vancouver.

J. Antonio López Varona
Mª Luisa Moreno
Instituto Nacional
de Calidad y Evaluación
(INCE)

Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez»

La Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, en su sesión ordinaria celebrada en Salamanca el 12 de septiembre de 1997, acuerda por unanimidad instituir el Premio «Gonzalo Sánchez Vázquez», en homenaje de quien fue su Presidente de Honor. Se regirá por las siguientes:

BASES

1. Se trata de premiar la labor docente y los «valores humanos»: la entrega desinteresada, el amor, el espíritu tolerante, la buena disposición, etc. hacia sus alumnos, compañeros, amigos y, en general, hacia la enseñanza de la Matemática. Es decir, el magisterio en sentido amplio.
2. La periodicidad del Premio será la misma que la de las Jornadas para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM).
3. El Premio consistirá en el nombramiento de «Socio de Honor» de la FESPM y placa conmemorativa u objeto alegórico.
4. Podrán concurrir al Premio los profesores dedicados a la enseñanza de las Matemáticas en cualquier nivel educativo.
5. Las candidaturas podrán ser presentadas por una sociedad federada en la FESPM. Los promotores presentarán el currículo e informes que estimen pertinentes, entre ellos el informe de la junta directiva de la sociedad o del conjunto de socios proponentes.
6. El plazo de presentación de candidaturas finalizará el 31 de diciembre para el Premio que corresponda entregarse al año siguiente.
7. La concesión del Premio se hará por la Junta de Gobierno de la FESPM. Para ello, el candidato deberá obtener mayoría absoluta en la correspondiente votación. De no alcanzarse mayoría absoluta en primera votación, se procedería a una segunda; de no obtener mayoría absoluta se declarará desierto.
8. Para la concesión del Premio, la Junta de Gobierno atenderá, entre otros, a los siguientes criterios:
   - Su labor docente (dedicación a la enseñanza de la Matemática).
   - Valores humanos (tolerancia, entrega a los demás, talante, espíritu de diálogo, respeto a los compañeros, alumnos, etc.). Constatados por sus avalistas.
   - Currículo con hechos, anécdotas, etc., referidos por los proponentes que pongan de manifiesto estos valores humanos del candidato.
   - Otros criterios a determinar por la propia Junta de Gobierno en cada covocatoria.
9. SUMA publicará el resultado de la concesión del Premio y una semblanza del premiado.
10. La entrega del Premio se llevará a cabo en el acto de apertura o clausura de las JAEM.

SUMA 27
febrero 1998, pp. 49-56

Aproximaciones históricas al área del círculo

Carlos Maza Gómez

ARTÍCULOS

La estrategia de aproximación aparece ligada, en la actual reforma educativa, al procedimiento de estimación y se fundamenta en el preconizado objetivo de que el estudiante construya su propio conocimiento matemático. El aprendizaje del cálculo del área del círculo se basa más en «intuiciones» guiadas del estudiante que en dichos procesos de construcción. A este respecto, los diversos intentos de cuadrar el círculo mediante valores aproximados que se han registrado en la historia de la Matemática y que aquí se exponen y fundamentan, permiten disponer de unas herramientas adecuadas en el aula para conseguir los objetivos citados.

LA APROXIMACIÓN en la Educación Matemática

La actual reforma educativa relaciona de manera estrecha el aprendizaje matemático con la resolución de problemas. Ahora bien, el modelo de esta actividad ha sufrido continuos refinamientos desde que la atención de la comunidad matemática se centró en los problemas a comienzos de los años ochenta. Factores metacognitivos o afectivos, por citar dos ejemplos relevantes, han mostrado una considerable importancia dentro de los dos procesos básicos de la resolución de un problema: la construcción de una representación mental de los elementos y relaciones del problema y el conocimiento y aplicación de heurísticos (English y Halford, 1995).

Esto último tiene relación con uno de los objetivos esenciales de la reforma educativa actual: la consideración del aprendizaje de procedimientos generales por sí mismos. Así, se encuentra en una de sus formulaciones iniciales (MEC, 1989, 491):

> *En una tercera categoría pueden agruparse aquellas estrategias más generales, que comúnmente se conocen como estrategias heurísticas o simplemente heurísticos... Por ejemplo, estimar, avanzar un resultado numérico aproximado antes de embarcarse en su obtención sistemática... A su vez, estimar puede considerarse un caso particular de otro heurístico más general aún: plantear conjeturas e hipótesis, en que se adelantan explicaciones o respuestas, no necesariamente numéricas, a distintas situaciones.*

La aproximación, que puede definirse como «La búsqueda de un dato numérico suficientemente preciso para un determinado propósito» (Segovia y otros, 1989, 22) es un procedimiento estrechamente relacionado con la estimación, que resulta ser un heurístico de mayor generalidad.

No pretendemos en este artículo más que ofrecer una breve introducción, que enmarque y justifique otros contenidos de naturaleza histórica, pero antes de abordarlos hay que mencionar otro aspecto de interés. En efecto, es bastante conocida la reluctancia de los estudiantes a trabajar con aproximaciones e incluso a admitirlas como expresiones matemáticas, de donde se desprende el fenómeno conocido como «intolerancia al error» (Carter, 1986). Ello puede ser debido a la creencia, transmitida en general por el profesorado pero inmersa en la propia sociedad, de que las Matemáticas son una ciencia exacta y, aún más, el paradigma de la exactitud en las Ciencias.

De todo lo dicho se desprende la importancia de disponer de ejemplos concretos para el aula de aproximaciones con las que realizar estimaciones de valores afectados por un determinado error, sea por desconocimiento del valor exacto o (como será el caso en este artículo) por imposibilidad de llegar a él. Estos ejemplos pueden provenir de la vida cotidiana pero también de la historia de la Matemática con lo que, además, se ayudará a desterrar la idea de una naturaleza exacta de la Matemática donde sea inadmisible el error.

Primeras aproximaciones al área del círculo

El caso escogido para ilustrar la acción de aproximar es el problema de transformar el círculo en un cuadrado que, eventualmente, se presentaba con el problema inverso: la circularidad del cuadrado. Estos problemas, relacionados en muchos casos con las medidas de la extensión de un campo, fueron abordados con mayor o menor complejidad matemática lo que responde, paralelamente, a una mejor o peor aproximación.

El problema 50 del papiro Rhind (datado alrededor del 1800 a.C.) plantea y resuelve el siguiente enunciado:

Ejemplo de un campo redondo de diámetro 9 khet. ¿Cuál es el área? [Solución:] Tomar 1/9 del diámetro, el resto es 8. Multiplicar 8 veces 8; son 64. Por tanto, contiene 64 setat de tierra.

Seidenberg (1972) considera este procedimiento formado por los siguientes pasos, para lo que se apoya en un dibujo que aparece en el papiro:

1. Se considera un cuadrado de lado igual al diámetro del campo, 9.
2. Se divide cada lado del cuadrado en tres partes iguales (figura 1), de forma que cada cuadradito sería de 9 setat (siguiendo la denominación egipcia).
3. Se quitan las esquinas, es decir, la mitad de los cuadraditos de los extremos (de extensión 4 1/2 setat). El área de este octógono resulta ser entonces de 63 setat.

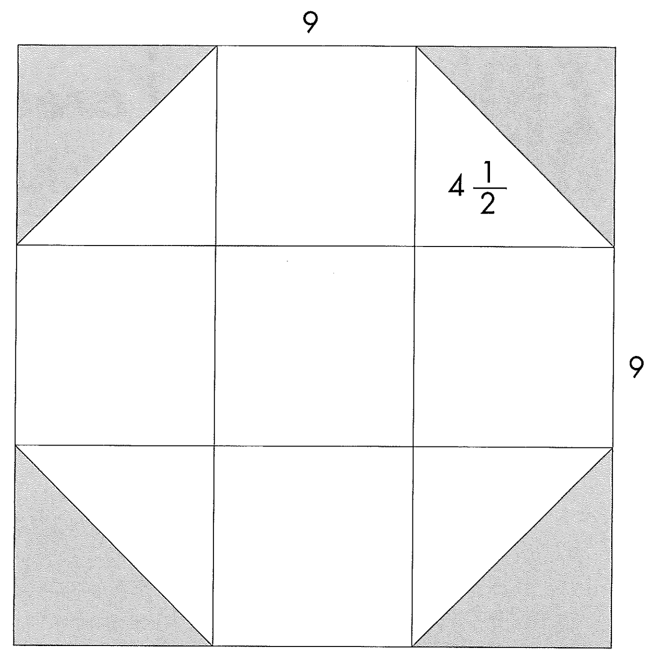


Figura 1

Estos ejemplos pueden provenir de la vida cotidiana pero también de la historia de la Matemática con lo que, además, se ayudará a desterrar la idea de una naturaleza exacta de la Matemática donde sea inadmisible el error.

Esta es, en sí, una aproximación al valor desconocido del área del círculo. Pero como se desea dar una regla sencilla de recordar y de fácil aplicación (una de las características propias de la estimación) se hace una nueva aproximación, esta vez al área del octógono, de manera que

$$\frac{\text{Area (Círculo)}}{\text{Diámetro}^2} = \frac{63}{81} \approx \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

De ahí que la solución de la cuadratura del círculo venga dada en el enunciado del problema 50 por:

$$\text{Area} = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$$

Comparemos esta aproximación, realizada aplicando la construcción de un polígono inscrito de manera implícita en el círculo que se trataba de medir, con otra realizada entre los siglos IX y X. Cita Smeur (1969) el caso planteado en el manuscrito de esta época, *De iugeribus metiundis*:

y así en el siguiente problema, para encontrar el área de un campo redondo con una circunferencia de 80 varas, seguir el método de multiplicar la cuarta parte de 80 por sí misma (pág. 250).

es decir, que el círculo sería igual al área de un cuadrado que tuviera por lado la cuarta parte de la circunferencia. Dado que se toma:

$$\text{Area (Círculo)} = \frac{\text{Circunferencia}^2}{16}$$

ello significaría que se toma un valor de π igual a 4. Obsérvese, no obstante, que esta aproximación no es arbitraria: este círculo equivaldría al cuadrado de lado C/4, es decir, el cuadrado cuyo perímetro coincide con la longitud de la circunferencia. En otras palabras, lo que se busca es un cuadrado isoperimétrico con el círculo dado, en la falsa creencia de que si los contornos tienen la misma longitud las áreas serán iguales.

Cuadrados inscritos y circunscritos

Hacia el siglo IV a.C. desarrolló su labor en Atenas un discípulo de Sócrates (o de Euclides de Megara) llamado Bryson al que se adjudica el intento de cuadratura siguiente (Heath, 1981):

1. Se construyen los cuadrados inscrito y circunscrito al círculo, de manera que éste se encuentre comprendido entre ellos.
2. Se considera el cuadrado intermedio a los dos anteriores.
3. Basándose en que tanto el círculo como este cuadrado intermedio son menores que el cuadrado circunscrito y mayores que el inscrito, entonces ambos deben ser iguales (figura 2).

Hacia el siglo IV a.C. desarrolló su labor en Atenas un discípulo de Sócrates (o de Euclides de Megara) llamado Bryson al que se adjudica el intento de cuadratura siguiente...

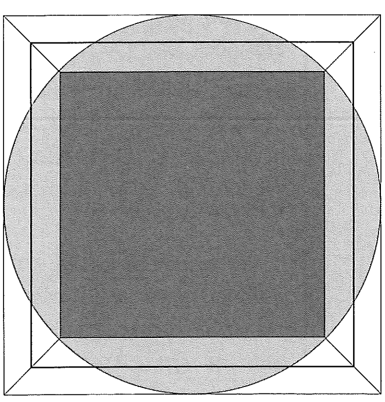


Figura 2

La aproximación podría considerarse «grosera» si no corriéramos el riesgo de ser anacrónicos. No obstante, desde el punto de vista escolar, nos da motivo para calcular el área de los cuadrados mencionados:

El cuadrado circunscrito se caracteriza (Libro IV, prop. 7 de los *Elementos*) porque sus lados son tangentes a la circunferencia, por lo que el lado coincidirá con un diámetro. De ahí que el área sea

$$(2r)^2 = 4r^2$$

mientras que el cuadrado inscrito necesita la aplicación del teorema de Pitágoras para llegar a la conclusión de que su área es

$$\left(\sqrt{2}r\right)^2 = 2r^2$$

Y ahora es necesario interpretar qué quería decir Bryson con lo de «cuadrado intermedio». Su propuesta parece más bien de naturaleza lógica que matemática, en el sentido del erróneo razonamiento que constituye el tercer paso. No obstante, lo podemos interpretar desde el punto de vista matemático.

Si se interpretase que el «cuadrado intermedio» es el de «área intermedia», dicha área sería $3r^2$ (o $3/4\ d^2$). Pero si la interpretación consistiese en considerar el cuadrado «de lado intermedio», dicho lado medio sería:

$$l = \frac{2r+\sqrt{2}r}{2} = r\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

de forma que el área final resultaría ser:

$$A = \left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)r^2 = 2{,}914\ldots r^2$$

Varios siglos antes, en Babilonia (aproximadamente el actual Iraq), se utilizaba un cálculo del área del círculo en función de su circunferencia que tiene relación con el cuadrado intermedio de Bryson. En efecto, se ha documentado (Seidenberg, 1972) que los sacerdotes de la época utilizaban las relaciones:

$$C = 3d \qquad A = C^2/12$$

donde C es la longitud de la circunferencia del campo redondo, d el diámetro y A su área. Como vemos, la expresión de esta última se aproxima mejor al área real del círculo que la análoga medieval de

$$A = C^2/16$$

ya que, entre los babilonios, se manejaría un valor de π de 3.

Pues bien, para Seidenberg (1972), a la expresión del área se llegaría del siguiente modo:

1. Existen datos que indican que era conocida por los babilonios la inscripción de un hexágono regular en

un círculo. Por ejemplo, la utilización de seis radios en las ruedas de los carros asirios así lo atestigua.

2. El perímetro de este hexágono es de 3d, expresión que se habría extendido a la circunferencia dando paso a C = 3d.
3. Si, como en el caso de Bryson, se considera el área del círculo como la del cuadrado intermedio respecto al inscrito y al circunscrito, se tendría, como ya hemos indicado:

$$A = 3/4\ d^2$$

4. De las dos expresiones encontradas, se deduce que:

$$A = \frac{3}{4}d^2 = \frac{Cd}{4} = \frac{C}{2}\frac{d}{2}$$

expresión que también se encuentra como regla 7 en el *Aryabhatiya* (siglo VI) del indio Aryabhata (Smeur, 1969):

> *Regla 7. La mitad de la circunferencia multiplicada por la mitad del diámetro es el área de un círculo* (pág. 258).

lo que da lugar, teniendo en cuenta el valor dado para C, a que

$$A = C^2/12$$

Los Sulba Sutras indios

Una de las tradiciones geométricas más antiguas se remonta a los Sulba Sutras indios, tratados de cuerdas que continúan una tradición de construcción de altares y resolución de otros problemas del ritual planteados en aquella cultura. El *Baudhyana Sulba Sutra* es el más antiguo, datándose entre los 800 y los 500 a.C. (Gupta, 1988).

Una de las tradiciones geométricas más antiguas se remonta a los Sulba Sutras indios, tratados de cuerdas que continúan una tradición de construcción de altares y resolución de otros problemas del ritual planteados en aquella cultura.

El problema fundamental que se plantea en esta obra es la construcción de un altar (como figura plana) de forma y área dadas. Queriendo construir un altar circular el primer problema propuesto fue, curiosamente, el de la «circularidad del cuadrado», que se resuelve del siguiente modo:

En el cuadrado ABCD (figura 3) sea M la intersección de las diagonales. Se dibuja el círculo de centro M y radio MA. Sea ME el radio del círculo perpendicular al lado AD y cortando a AD en G. Sea GN = 1/3 GE. Entonces MN es el radio del círculo que tiene un área igual al cuadrado ABCD.

El problema inverso, el clásico de la cuadratura del círculo, es resuelto a través de la regla siguiente (Seidenberg, 1972):

> *Si quieres cambiar un círculo en un cuadrado, dividir el diámetro en 8 partes, y nuevamente una de estas 8 partes en 29 partes; de estas 29 partes quitar 28, y además la sexta parte [de una de las partes quitadas] menos la octava parte [de la sexta parte]* (pág. 173).

En otras palabras, el lado del cuadrado buscado es

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8\cdot 29} - \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6} + \frac{1}{8\cdot 29\cdot 6\cdot 8}$$

del diámetro del círculo dado. ¿Cómo pudieron llegar a este valor? La búsqueda de una explicación razonable resulta un proceso apasionante.

En efecto, el problema de la circularidad del cuadrado resulta ser un proceso resuelto a través de un recurso meramente geométrico de aproximación. Ahora bien, la cuadratura del círculo se aborda como el problema «algebraicamente» inverso. Así, si se considera que el lado del cuadrado original es *s*, entonces MG = s/2 (figura 4).

Como AG = s/2 resultará que

$$AM = \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

Ello da lugar a:

$$EG = s\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{s}{2} = s\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$GN = \frac{1}{3}EG = s\frac{\sqrt{2}-1}{6}$$

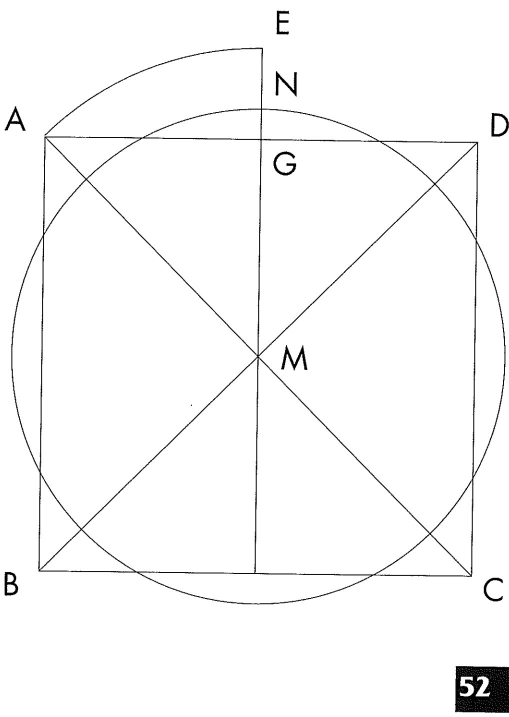


Figura 3

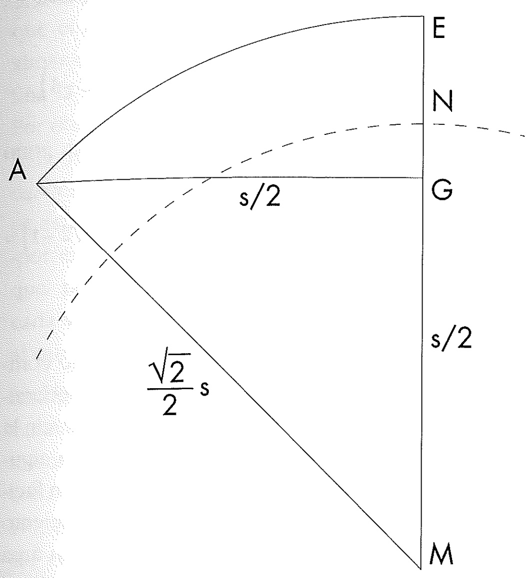


Figura 4

de donde el radio y el diámetro del círculo vendrán dados por:

$$\text{radio} = MN = \frac{s}{2} + s\frac{\sqrt{2}-1}{6} = s\frac{2+\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{diámetro} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$$

por lo que resulta la relación entre el diámetro y el lado del cuadrado:

$$\frac{d}{s} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$$

El valor de la raíz cuadrada de 2 se encuentra, como es sobradamente conocido, en el cálculo de la diagonal de un cuadrado. Este problema, que fue rechazado por la geometría griega por su consideración exclusiva de los números naturales y que fundamenta el interés por un álgebra geométrica en Grecia, es abordado en la India con métodos aproximativos y de manera aritmética.

Aunque existen distintas aproximaciones indias al valor de la raíz cuadrada de 2 uno de los caminos para alcanzar una de ellas podría ser el siguiente (Seidenberg, 1972):

1. Se considera un altar cuadrado de lado 12. Su área será

$$12^2 = 144$$

2. Ahora se plantea el problema de construir un altar cuadrado cuya área sea el doble que la anterior, es decir,

$$2 \cdot 12^2 = 288$$

3. La mejor aproximación parece ser la del cuadrado de lado 17, ya que

$$17^2 = 289$$

4. Esto supone que

$$2 \times 12^2 \approx 17^2 \quad \text{luego} \quad \sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$$

que expresado a través de fracciones unitarias daría:

$$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$$

5. La consideración de esa unidad de diferencia entre 288 y 289 precisaría considerar la sustracción de una fracción cuya construcción vamos a eludir por su complejidad (se puede consultar en el texto citado) y que daría finalmente el valor:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

Pues bien, si esta expresión se sustituye en la relación inversa de la antes planteada se alcanza finalmente el valor del lado del cuadrado en función del diámetro del círculo:

$$\frac{s}{d} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{41}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393}$$

despreciándose el último término.

El procedimiento de exhaustividad

La forma habitual de introducir la fórmula del área del círculo a partir de 6.° de Primaria tiene poco de constructiva. Consiste básicamente en calcular áreas de polígonos a partir del cuadrado y el rectángulo hasta llegar al hexágono o el octógono. A partir de la inscripción de este último, por ejemplo, en un círculo (figura 5) se afirma que, cuando el polígono inscrito (eventualmente puede añadirse el circunscrito) aumente el número de lados, el perímetro tiende a «confundirse» con la circunferencia y la apotema con el radio. Tomando como base la fórmula del área del polígono regular se consigue «transformarla» con los nuevos elementos en el área del círculo.

La forma habitual de introducir la fórmula del área del círculo a partir de 6.° de Primaria tiene poco de constructiva. Consiste básicamente en calcular áreas de polígonos a partir del cuadrado y el rectángulo hasta llegar al hexágono o el octógono.

Recordado esto, quizá sea oportuno defender de nuevo que

> *...el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas en y a partir de la actividad sobre los objetos... Desligado de la actividad constructiva que está en su origen, el conocimiento matemático corre el peligro de caer en puro formalismo y de perder toda su potencialidad como instrumento de representación, explicación y predicción* (MEC, 1989, 482).

Pues bien, esta inducción de la fórmula del área del círculo supone apelar a la «intuición» del alumno, que debe saltar de un polígono de un número finito de lados a otro de número infinito y que debe suponer que en este proceso de lo finito a lo infinito no se alteran las relaciones entre los elementos (de perímetro y apotema a circunferencia y radio). Esta «intuición» puede no existir. Desde el punto de vista didáctico es más aconsejable llevar a cabo algún proceso constructivo en esta dirección. Este proceso será siempre una aproximación.

El procedimiento actual de enseñanza muestra su primer ejemplo en la aportación de Antifón, contemporáneo de Sócrates en Atenas (siglo IV a.C.). En efecto, propone inscribir un polígono en un círculo (por ejemplo, un cuadrado como en la figura 5) para, a continuación, trazar la mediatriz de cada lado, marcar el punto de corte con la circunferencia y unir este punto con los extremos de dicho lado, erigiendo así triángulos isósceles sobre cada lado (Knorr, 1986). En el caso planteado la figura resultante será un octógono.

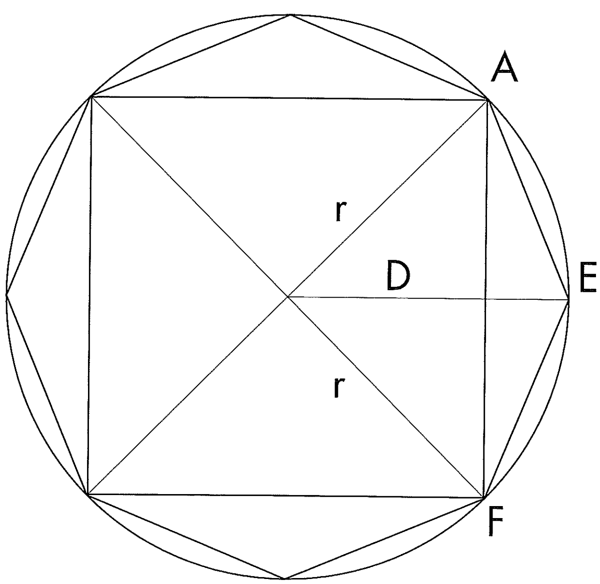


Figura 5

Naturalmente, este proceso se puede repetir tanto como se quiera alcanzando aproximaciones cada vez mayores

El procedimiento actual de enseñanza muestra su primer ejemplo en la aportación de Antifón, contemporáneo de Sócrates en Atenas (siglo IV a.C.).

al área del círculo. Siendo *r* el radio del círculo, el área del triángulo isósceles puede calcularse:

$$\text{Area (Triángulo)} = \frac{1}{2}r^2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

de manera que el área del octógono resultaría ser:

$$\text{Area (Octógono)} = 2r^2 + 4\frac{1}{2}r^2\left(\sqrt{2}-1\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}\,r^2 = 2{,}828\ldots r^2$$

Este tipo de aproximación es algo compleja desde el punto de vista algebraico, pero hay maneras de introducir la misma idea sin cálculo algebraico alguno por lo que puede realizarse con facilidad desde Primaria. El procedimiento es conocido y se basa en hallar un área «por defecto» y «por exceso» cuando el círculo se coloca dibujado en papel transparente sobre tramas de distinto grosor (figura 6).

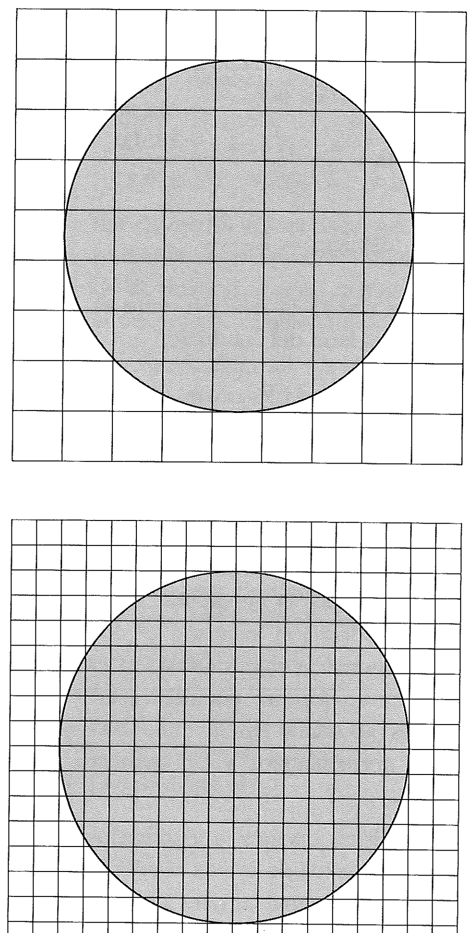


Figura 6

Se puede apreciar, a través de esta construcción y cálculo introductorios, que el área del círculo se puede aproximar con un error menor al hacer más fina la trama que nos sirve de medida. Por otro lado, permite también plantearse la necesidad de contar con dos medidas: una «por defecto» (papel que luego se asignará al polígono inscrito) y otra «por exceso» (al polígono circunscrito), que permitan acotar con un margen cada vez menor ese valor desconocido al que nos vamos aproximando.

Antifón no pasó de proponer un acercamiento al área a partir del desdoblamiento de los lados de un polígono inscrito. Corresponde a Arquímedes (siglo IV), en su obra *Medida del círculo*, aplicar con rigor el método de exhaución (o exhaustividad) de Eudoxio para demostrar por reducción al absurdo que «Un círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo» (Cit. en Vera, 1970, 94).

Entendemos que esta demostración queda fuera del alcance del estudiante de Secundaria por lo que remitimos al lector interesado a la obra citada.

Cuadraturas medievales

Anteriormente se ha mencionado una cuadratura del círculo realizada entre los siglos IX y X, con cierta analogía con los procedimientos babilónicos o egipcios. Sin embargo, existen intentos diversos de los que vamos a dar dos ejemplos finales, siguiendo ambos la tradición griega pero con distintos propósitos: el primero es una nueva aproximación de tipo geométrico construida con evidente ingenio y la segunda resulta una complicada demostración de la existencia de una cuadratura del círculo basada en las propiedades de la proporcionalidad.

Hacia el año 1050, Franco de Lieja escribe un tratado sobre cuadraturas en el que considera un círculo de 14 unidades de diámetro (Smeur, 1988).

Corresponde a Arquímedes (siglo IV), en su obra Medida del círculo, *aplicar con rigor el método de exhaución (o exhaustividad) de Eudoxio para demostrar por reducción al absurdo...*

Siguiendo a Arquímedes, supone que

$$\pi = 3\ 1/7$$

lo que le permite afirmar que su circunferencia es de 44 unidades. A continuación, divide el círculo en 44 sectores iguales, cada uno de ellos correspondiendo a un arco de una unidad de longitud.

Si cada sector se aproxima a un triángulo rectángulo de catetos 1 (el arco) y 7 (el radio) se pueden disponer los 44 triángulos así considerados en forma de rectángulo de 14 por 11 y cuya área (11 x 14 = 154) constituye una buena aproximación al área del círculo (figura 7).

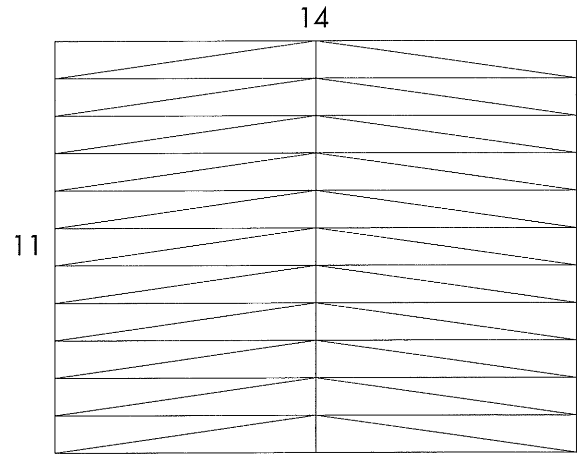


Figura 7

Knorr (1991) realiza un estudio de la autoría de la demostración que, finalmente, vamos a exponer, atribuyéndosela a Johannes de Tinemue (siglo XIII). En ella se parte de un círculo O inscrito en un cuadrado A, para el que se cumple que existe una figura rectilínea o curvilínea M que verifica (figura 8):

$$A:O = O:M$$

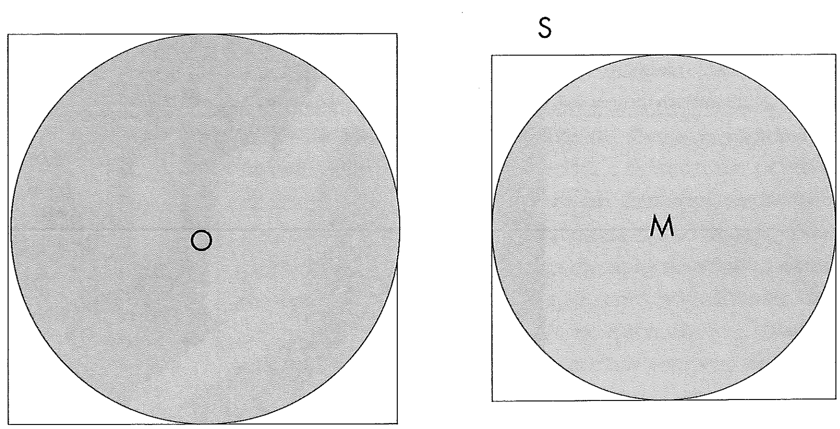


Figura 8

* Si M es un círculo se llamará S al cuadrado circunscrito: Por la proposición 2 del libro XII de los *Elementos*, resultará:

$$A:S = O:M$$

Por la definición 13 del libro V de los *Elementos*:

$$A:O = S:M$$

a lo que si se une la hipótesis de partida resultará:

$$O:M = S:M$$

de donde se deduce que $O = S$, el círculo es igual al cuadrado en área.

* Si M es una figura rectilínea puede transformarse en un cuadrado que denominaremos S: la hipótesis de partida se escribirá entonces

$$A:O = O:S$$

es decir, que O es la tercera proporcional respecto de los cuadrados A y S. El autor considera entonces un rectángulo cuyos lados fueran L_a y L_s, los correspondientes a estos dos cuadrados. Este rectángulo puede transformarse en cuadrado por lo que habríamos encontrado un cuadrado de igual área al círculo O.

Como es posible apreciar, el procedimiento, aunque limitado por falta de generalización, resulta de interés para apreciar los muy distintos intentos medievales para realizar una medida lo más aproximada posible del área del círculo.

Carlos Maza
Departamento de Didáctica de Matemáticas.
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Sevilla.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Referencias bibliográficas

CARTER, H. L. (1986): «Linking estimation to psychological variables in the early years», en *Estimation and mental computation*, NCTM, Virginia.

ENGLISH, L. D. y G. S. HALFORD (1995): *Mathematics Education. Models and Processes*, Lawrence Erlbaum, New Jersey.

GUPTA, R. C. (1988): «New indian values of Pi from the Manava Sulba Sutra», *Centaurus*, vol. 31, 114-126.

HEATH, T. (1981): *A history of greek mathematics (vol. 2)*, Dover Publications, New York.

KNORR, W. R. (1986): *The ancient tradition of geometric problems*, Dover Publications, New York.

KNORR, W. R. (1991): «On a medieval circle quadrature: De circulo quadrando», *Historia Mathematica*, vol. 19, 356-370.

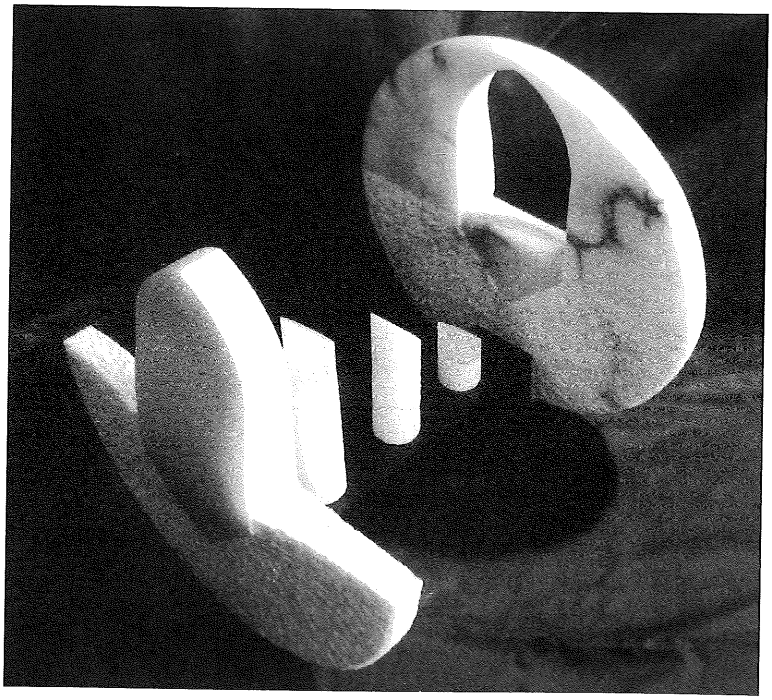
MEC (1989): *Diseño Curricular Base (ESO II)*, MEC, Madrid.

SEIDENBERG, A. (1972): «On the area of a semi-circle», *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 9, 173-211.

SEGOVIA, I. y otros (1989): *Estimación en cálculo y medida*, Síntesis, Madrid.

SMEUR, A. J. (1969): «On the value equivalent to Pi in ancient mathematical texts. A new interpretation», *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 6, 249-270.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos (vol. II)*, Aguilar, Madrid.



Estadio de apertura y cierre
Alabastro-madera, 60x52x52
José Miguel Fuertes

SUMA 27
febrero 1998, pp. 57-63

Investigación sobre los mecanismos de orientación lateral. El aprendizaje de los conceptos izquierda y derecha

José Antonio Fernández Bravo

ARTÍCULOS

Investigación realizada sobre el aprendizaje de los conceptos: izquierda y derecha. Se describe la dificultad de distinción inmediata de estas nociones, existente para muchas personas, y se analizan las causas en un estudio de relación de variables. Se formula una hipótesis de investigación, elaborando una propuesta didáctica de trabajo cuyo contraste con los métodos tradicionales nos sugiere un rendimiento más significativo. Se concluye afirmando cinco niveles de adquisición para el aprendizaje de estos conceptos, asegurando la necesidad de una *Lateralidad Definida* en el sujeto y un método de enseñanza basado en el *Movimiento*.

SE EXTIENDE a muchos de nosotros una dificultad operante en el dominio de los conceptos: izquierda y derecha. ¿A qué se debe este problema acusado por tan elevado número de personas?, ¿qué variables pueden intervenir en su aprendizaje?, ¿existe error de definición desde una epistemología del conocimiento?, ¿es posible que la canalización de su enseñanza no recoja apropiados criterios de distinción?... Personas que dominan estos conceptos con un grado óptimo de intelectualización han recibido la misma enseñanza, e incluso, el mismo ejemplo didáctico, que aquellos que poseen una insuficiencia de asimilación; ¿es cuestión de madurez, de capacidad?, ¿depende de la cantidad de experiencias a las que se ha podido aplicar el concepto? Es posible suponer que se haya antepuesto, en el tiempo, –para algunos sujetos–, el momento de su enseñanza al momento que señala el grado de madurez necesario para su aprendizaje. Parece, también, evidente que la cantidad de experiencias distintas a las que se hayan podido aplicar los conceptos sea directamente proporcional al grado de asimilación de estos; las personas que requieran, por su profesión, una necesidad constante de aplicación utilizarán los conceptos derecha e izquierda mucho mejor que aquellas cuya necesidad de aplicación se presenta de forma esporádica, e incluso, imprevista, cuya inmediatez de reacción debilitará una distinción clara. Surgen, sin embargo, serias preguntas a las que corresponden respuestas adversas: ¿cómo es posible que, –señalando un ejemplo de validez extrema– profesores de autoescuela, quienes normalmente dan órdenes correctas sobre estos conceptos, duden, considerablemente, cuando son ellos quienes reciben, de forma inmediata, órdenes para su aplicación? ¿Depende, entonces, de la cantidad de experiencias? ¿Existe «algo», no dado en la mayoría de los sujetos, que dirige el desarrollo de los conceptos tratados, con independencia de la edad, la madurez, la cantidad de experiencias y la capacidad del individuo? Y, si es así, ¿qué es ese «algo»?

La enseñanza actual del concepto

El análisis de las aportaciones actuales didácticas para la enseñanza de estos conceptos, anota que todas ellas tienen un punto en común: lo introducen como posición. Se elige una mano, supongamos la derecha, y, colocando un objeto conocido por el alumno en dicha mano, se hace corresponder el objeto con la posición en la que éste se encuentra, nombrando a esa posición –y, en este caso, por la mano elegida– con la palabra «derecha». Que el sujeto recuerde la posición no depende de la palabra, sino del objeto que se asocia a la palabra, siendo la palabra consecuencia de la posición determinada por el objeto en cuestión. Ensayado esto unas cuantas veces se nombra, por contraposición, «izquierda», o se pone algo en la otra mano que sirva de distinción asociativa, bien otro objeto, bien el mismo con propiedades distintas. A partir de ahí se dirá que todo lo que esté en el lado de la mano derecha está a nuestra derecha, y, todo lo que esté en el lado de la mano izquierda está a nuestra izquierda. Otras veces, se pinta cada mano de un color distinto para ir asociando mano-color de forma sensorial.

Observaciones sobre el aprendizaje que se realiza a partir de la enseñanza descrita

Para un alumno, el éxito de determinación de la posición de un objeto cualquiera respecto a su derecha o a su izquierda, está en función de que recuerde cuál es su mano derecha y cuál su izquierda. Este recuerdo está en función de que asocie perfectamente los objetos utilizados en el aprendizaje a las manos con las que se corresponden, que, a la vez, está en función de que recuerde los mecanismos de asociación fijados. Si en uno de estos pasos comete error el resultado no será correcto. Supongamos que una persona tiene el mecanismo de asociación: «mano con la que como» a «derecha», y, «mano con la que no como» a «no derecha» o «izquierda», cuando tenga que determinar la posición de un objeto respecto a sí mismo, o realizar un movimiento respecto a una orden de giro dada, tendrá que saber que el mecanismo de asociación es «mano con la que como», «mano con la que no como»; que la «mano con la que come» es la «derecha» y que, todo lo que se encuentre en la posición lateral de su mano derecha, se dice que se encuentra a su derecha; tendrá que determinar si es, o no es así, para llamarlo de una u otra forma. Demasiado análisis de composición de funciones, a nuestro juicio.

¿Existe «algo», no dado en la mayoría de los sujetos, que dirige el desarrollo de los conceptos tratados, con independencia de la edad, la madurez, la cantidad de experiencias y la capacidad del individuo? Y, si es así, ¿qué es ese «algo»?

Observamos que los mecanismos de asociación para la distinción lateral suelen ser indicados con uniformidad para todos los alumnos que tenemos en el aula. Hay que tener cuidado para que esa uniformidad sirva para todos. No sería de utilidad para un zurdo aprender el mecanismo de asociación «mano con la que como» a «derecha». Pero, ¿son válidas para todos las asociaciones que el profesor elige?, ¿cómo determinar la fiabilidad de esta validez sin estudiar si el alumno tiene, o no, una lateralidad definida?[1] ¿Un pañuelo, quizás, atado a una mano que se define posteriormente como correspondencia? No deja de ser una asociación que, con el tiempo, pueda crear ambigüedad; un pañuelo se cogerá en multitud de experiencias cotidianas de su entorno, indistintamente, con una u otra mano. Demasiadas analogías para conseguir una clara diferenciación como la que expone Egan (1981) para el análisis de la orientación espacial. Los alumnos, ante la confusión de alternativa, crearán sus propios criterios de distinción a partir de mecanismos de asociación personales.

Dependiendo de cuál sea nuestra posición, un objeto cualquiera puede estar a nuestra derecha y, también, a nuestra izquierda. Del mismo modo que, dependiendo de cuál sea el sentido de nuestra marcha, para situarnos en una misma calle, unas veces tendremos que girar a la derecha, otras, a la izquierda. Luego, un objeto no está siempre en la misma posición lateral respecto a nosotros; depende de la posición que perciba desde mi situación espacial. La posibilidad de cambio de la posición del objeto se acompaña, únicamente, de la posibilidad de cambio de mi situación espacial. Es, entonces, mi situación la que constituye la posición del objeto, y no, la posición del objeto la que constituye mi situación. El objeto no tiene movimiento alguno; o se mueve el sujeto, o el objeto es movido por el sujeto. De estas consideraciones podemos expresar que *existe una relación entre lugar y tiempo*; habilidad para el movimiento, siguiendo la educación espacial de

1 Generalmente, en los primeros años, se indica una clara tendencia lateral. Pero la lateralización no es sistemática y el proceso de su definición pasa por algunos cambios, que suelen desconcertarnos. Es necesario asegurarnos de que las observaciones realizadas sobre la lateralidad del niño son ciertas y precisas, antes de señalar una determinación lateral fiable.

Bishop (1980). Yo puedo decir que existen dos lados: un lado y otro lado; que un lado es «para allá» y otro lado es «para acá». Lo único que digo es que existen dos lados distintos, y nada más. Eso, nada asegura de la distinción de los lados. Si existen dos lados existe una frontera de separación de los lados, ¿dónde está? Este lado es «para allá», pero, ¿desde dónde es «para allá»? Podemos dibujar una línea recta y afirmar que existen dos lados en ella; cualquier punto de esa recta del que, conscientemente, asegurásemos que pertenece a un lado, podría, perfectamente, pertenecer al otro si no indico, en primer lugar, el punto de origen que genera la existencia de los dos lados afirmados.

Se enseña izquierda y derecha sin crear en el alumno necesidad de descubrimiento alguno para la formación de los conceptos. Siguiendo a Eccles, citado por Símonov (1990, 217), «Cada uno de nosotros sabe lo único que es su mundo interior. El proceso de formación de cada individualidad única se halla fuera de los límites de las investigaciones científicas.» ¿Por qué se sabe que la mano derecha se llama «mano derecha»? Situémonos con la imaginación en los comienzos primitivos de distinción del concepto. No existe distinción lateral en la humanidad y hay que crearla. Nos preguntamos si la humanidad ya sabía cuál era la mano derecha y, por tanto, todo lo que se situase a ese lado se llamó derecha, o, la denominación de la mano fue una consecuencia de la definición de un movimiento lateral. Se tendría que definir primero el eje a partir del cual se considera un lado u otro lado. A partir de ahí se genera inmediatamente una elección con cabida de selección y, por tanto, un movimiento respecto a ese eje; simetría que bien puede ser la concienciación mental de tu posición en el espacio desde la posibilidad de dirigirte lateralmente sobre ese espacio. Como la concienciación mental se da en tu mente se puede considerar eje frontera a la concienciación de ese pensamiento, o, a la metaconciencia del fenómeno, distinguiendo, a partir de entonces la movilidad de concienciación hacia un lado, que se definió universalmente como «derecha» o, hacia el otro, definido universalmente como «izquierda». La conciencia, por ejemplo, de la movilidad «derecha» *concibe* objetos posicionados como resultado de esa movilidad, encontrando un brazo, una mano, una pierna,... a las que, por consecuencia, se les denomina: brazo derecho, mano derecha, pierna derecha,... ¿Qué hubiese ocurrido si a la concienciación de movilidad hacia un lado determinado se le hubiese llamado «Pereka», en vez de «derecha»? Nuestra «mano derecha» no sería nuestra «mano derecha», sino nuestra «mano Pereka». Entonces, la posición de la mano no es causa de posición, sino *posición por consecuencia* de una movilidad de conciencia.

Desarrollando la profundización en la investigación de estos conceptos encontramos algo de razón cuando Símonov (1990, 217) afirma que «Las investigaciones de la lateralización de las funciones de los hemisferios cerebrales han mostrado que la conservación de los enlaces en las zonas gnósticas de la corteza con las estructuras verbales del cerebro, es una condición indispensable del funcionamiento de la conciencia.» Parece ser que una lateralidad claramente definida[2] ayuda a una movilidad de conciencia desde las funciones cerebrales.

Observamos que el vocabulario utilizado crea en muchas ocasiones dificultad de distinción lateral para la realización de una orden dada. Así, por ejemplo, cuando indicamos a un niño que se sitúe a la derecha de la pizarra, normalmente se sitúa a la izquierda de ésta. Algunos profesores lo dan por correcto, cuando nunca debería ser así. La concienciación lateral depende de la concienciación de situación espacial que tenga el alumno, es él quien determina la posición y no el objeto. Hay una clara diferencia entre la orden «sitúate a la derecha de la pizarra», y la orden «sitúate a tú derecha de la pizarra».

Formulación de la hipótesis

Para la creación de una hipótesis, como posible viabilidad de la solución del problema, intervienen, tanto los elementos de la lógica en los razonamientos, como los elementos de la observación, la imaginación y la intuición. La combinación de estos elementos señalan que el «aprendizaje-enseñanza»[3] del fenómeno tratado, más que como posición, hay que entenderlo como movimiento; movilidad de conciencia como selección diferencial entre dos posibilidades, a las que se identifica con un nombre distinto (Fernández Bravo, 1995*b*, 89-97). El resultado del movimiento es una posición de autoconciencia. Si los conceptos izquierda y derecha se enseñan desde una posición determinada evitando la movilidad de pensamiento, se confunde causa con consecuencia, generándo-

2 Entendemos que un sujeto tiene lateralidad definida cuando mecaniza de forma sistemática la fijación de los elementos dominantes: mano, pie,...

3 El aprendizaje no es una variable dependiente, sino un resultado del rendimiento; la enseñanza, sin embargo, sí lo es. En algunas ocasiones hemos querido permutar la expresión «enseñanza-aprendizaje de ...» por «aprendizaje-enseñanza de...», sin querer entrar en ningún juego de palabras, se pretende subordinar la enseñanza al aprendizaje; los métodos de enseñanza son siempre hipótesis que se aceptan o rechazan en función de los resultados del aprendizaje: criterio firme de cualquier investigación pedagógica. La expresión «enseñanza-aprendizaje» sólo sirve cuando significa: se enseña así, para obtener así, pero cuando se enseña así y se obtiene otra cosa que no es así, es necesario permutar la expresión: «aprendizaje- enseñanza», que significa: Se debe aprender así y en consecuencia se debe enseñar para aprender así. Entonces, surge la búsqueda, en una investigación, sobre cómo se debe enseñar para aprender así, cuando esto se consigue se vuelve a la expresión: «enseñanza-aprendizaje», que posee un contenido con alguna diferencia significativa respecto a las anteriores expresiones homófonas. La investigación pedagógica asegura el carácter infinito de cadenas de concepto («Aprendizaje-enseñanza»-«enseñanza-aprendizaje» -«aprendizaje- enseñanza»- «enseñanza-aprendizaje»- ...), y relaciones de cadenas.

se en el sujeto situaciones arbitrarias que dispersan la reflexión y, también, la armonía, adaptándonos a Weyl, «La imagen del equilibrio nos da un camino natural hacia [...] la simetría bilateral, simetría de la derecha y de la izquierda [...] esta simetría bilateral es un concepto estrictamente geométrico y absolutamente preciso» (1975, 16).

La hipótesis de trabajo se formula diciendo que la enseñanza de los conceptos izquierda y derecha debe presentarse una vez que el alumno tenga definida su lateralidad y apoyarla en un método didáctico basado en el movimiento.

La hipótesis de trabajo se formula diciendo que la enseñanza de los conceptos izquierda y derecha debe presentarse una vez que el alumno tenga definida su lateralidad y apoyarla en un método didáctico basado en el movimiento.

Plan de trabajo. Propuesta didáctica

La siguiente propuesta didáctica ha sido creada a partir de las observaciones realizadas y el respeto a las respuestas de nuestros alumnos. La secuenciación de las actividades que se presentan sirve como proceso de aprendizaje. No se debe pasar de una actividad a la siguiente si no se ha dominado perfectamente aquella en la que se está trabajando.

Cuando se haya llegado a superar la última actividad de esta propuesta didáctica, el niño está preparado para trabajar gráficamente en un papel; no antes, aunque así lo parezca. El acto didáctico requiere de cuatro etapas (Fernández Bravo, 1995*a*) claramente definidas y ordenadas para favorecer la intelectualización de cualquier concepto: Elaboración, Enunciación, Concretización y Transferencia o Abstracción. La actuación metodológica y la interpretación gráfica de algunos ejercicios propuestos en los textos comercializados superan la intelectualización que el niño tiene en el ámbito experimental.

Actividades para la percepción de movimientos

Actividad 1

Situaremos a dos niños *frente* a la pizarra. Les daremos un balón para que jueguen, con las manos, a pasárselo de uno a otro sin mover los pies. No pueden jugar solos. Los demás niños irán diciendo cómo se va desarrollando el juego: A se lo ha pasado a B; B se lo ha pasado a A; A se lo ha pasado a B;... Serán tres, los niños que ahora jueguen con el balón frente a la pizarra. El resto comentará en voz alta lo que sucede.

Actividad 2

Sacaremos a dos niños (A, B) y los pondremos frente a la pizarra. (Todos los demás alumnos deberán estar detrás de los dos niños que juegan y, siempre, frente a la pizarra.)

El profesor le dirá a un niño: «Este eres tú», mientras dibuja en la pizarra la representación de un niño. Mirando al otro niño, actuará de la misma forma. Le dará el balón al niño que esté a la izquierda respecto a la visión de los demás niños y le dirá: Juega, como hemos jugado anteriormente. Este niño (A) lanzará el balón al otro niño. Y el profesor, preguntará al resto: ¿Qué ha hecho A?

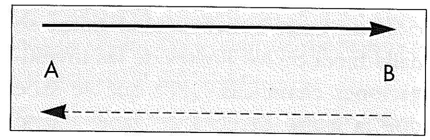
— Pasarle el balón a B.

— Entonces, dirá el profesor: «lo dibujamos así, y sólo así» (representando una línea de color rojo en la pizarra, desde el dibujo que representa al niño A hasta el dibujo que representa al niño B) Pediremos, al niño B, que juegue. Lanzará el balón al niño A.

— ¿Qué ha hecho B?

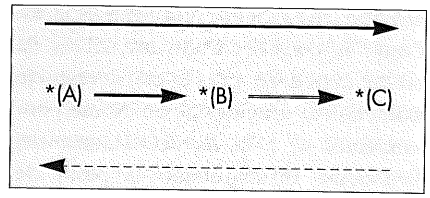
— Pasar el balón a A.

Entonces, dirá el profesor: «Lo dibujamos así, y sólo así» (representando una línea de color verde[4] en la pizarra, desde el dibujo que representa al niño B hasta el dibujo que representa al niño A).



Seguiremos jugando, de la misma forma y varias veces, con otras parejas de niños, pero en vez de representar a los niños mediante dibujos significativos, los representaremos mediante puntos con tiza blanca. «Este eres tú», les diremos mientras nos ven hacer el punto. Jugaremos con tres niños (A, B, C). Dialogaremos y representaremos los movimientos del juego de la misma forma, con tiza roja y tiza verde, según corresponda.

Le daremos el balón al niño A. El niño A se lo puede pasar al niño C. El niño C se lo puede pasar al niño A. El niño A se lo puede pasar al niño B. El niño B se lo puede pasar al niño C.



4 Las representaciones de movimiento con flechas hacia la derecha, y en trazo grueso continuo, deben pintarse con tiza de color *rojo*. Las representaciones de movimiento con flechas hacia la izquierda, y con línea discontinua simple, deben pintarse con tiza de color *verde*. Pudiendo seguir, desde esta aclaración, debido a la carencia de color, tanto la lectura del texto, como la actuación en el aula.

En todos y cada uno de los movimientos se detiene el juego hasta que el profesor lo represente según corresponda. Jugaremos varias veces de la misma forma, y cambiando siempre de niños, generando distintas representaciones.

Actividades para la distinción de movimientos

Actividad 3

Jugaremos con tres niños. Ahora es el profesor el que dirige el juego, sin hablar nada en absoluto, con las representaciones con tiza roja y tiza verde. En la actividad 2 el niño jugaba y, después de jugar, el profesor representaba lo que había sucedido. En esta actividad es el profesor el que representa el movimiento que posteriormente se realizará con el balón, según corresponda.

Actividad 4

Se actúa de la misma forma como hemos actuado en la actividad 2. Pero en esta actividad no es el profesor el que representa los movimientos con la tiza roja o verde, según corresponda, sino otro niño de la clase y, que en ese momento, no juegue con el balón. En la pizarra sólo habrá dos tizas: verde y roja.

Actividad 5

El profesor dibujará tres puntos en la pizarra, que representarán a tres niños. Jugaremos de la misma forma como hemos jugado en la actividad 3, pero en esta actividad no será el profesor el que dirija el juego, sino otro niño. Los que jueguen con el balón tendrán que jugar, según corresponda, y, posteriormente, a la representación con tiza verde o tiza roja del niño que dirige el juego.

Actividad 6

Jugaremos de la misma forma como hemos jugado en la actividad 4. Un niño representa el juego de sus compañeros.

Esta vez el profesor dejará en la pizarra, únicamente, la tiza roja. Empezaremos a jugar. Tres niños se lanzarán el balón y otro niño representará, según corresponda, los movimientos del juego. Llegará un momento, en el que el niño que representa los movimientos no pueda hacerlo porque no hay tiza verde (movimiento hacia la izquierda). Es muy importante esta actividad. Como no hay tiza verde el niño que representa puede hacer lo siguiente:

1. Decir que no puede, que no hay tiza verde, que... Perfecto, eso es lo que estamos buscando, ese niño empieza a distinguir los dos movimientos utilizados. Si estos o parecidos son los razonamientos ante el desafío presentado, le daremos la tiza verde.
2. Al no haber tiza verde y sentir la necesidad de representar el movimiento, utilizará para cualquiera de los movimientos la misma tiza, roja. Si es así, callaremos. Nos dirigiremos hacia la pizarra y borraremos, sin decir nada en absoluto, la representación incorrecta. Esto se hará tantas veces como haga falta. No serán muchas; los niños que observan advertirán que se necesita una tiza verde. Será entonces cuando se la daremos. Y será entonces cuando continuemos el juego.

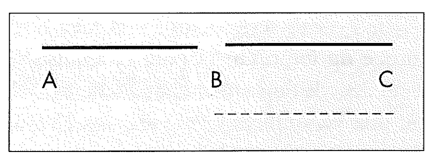
Actividad 7

Sólo jugamos con la tiza roja. Los niños que jueguen: dos, tres, cuatro,... sólo podrán jugar lo que dibuje la línea roja. Ellos serán quienes nos digan cuando acaba el juego[5]. Cada vez empezará a jugar un niño distinto. El profesor representará el juego, una vez que se ha jugado.

Actividades para la intelectualización de movimientos

Actividad 8

El juego está abierto a todos los niños. El profesor dibujará, mientras los niños están con los ojos cerrados, un gráfico cualquiera utilizando las dos tizas, según el color que corresponde a cada movimiento, y sin indicación de sentido mediante flechas. Una vez realizado les mandará abrir los ojos y les invitará a describir los movimientos que se han representado. Estos ejercicios se deben presentar en orden creciente de dificultad.



Según el gráfico anterior, los niños pueden deducir lo siguiente: El niño A ha empezado el juego pasándole el balón al niño B. El niño B se lo ha pasado al niño C y éste se lo ha pasado al niño B.

Actividad 9

Cogeremos un niño al azar. Lo situaremos en el centro de la clase y le taparemos los ojos con un pañuelo. Le daremos un balón.

Estos ejercicios se deben presentar en orden creciente de dificultad.

5 La percepción y distinción de movimientos se requiere en toda instrucción espacial, podemos observarlo con claridad en los trabajos de Smith y Schröeder (1979).

— Lánzalo jugando como la línea roja, le diremos.

— Ahora, tienes que ir a buscarlo.

Observemos que el niño tiene los ojos tapados. Cuando camine buscando el balón lo hará en el mismo sentido en el que lo ha lanzado. Lo que importa no es que lo encuentre; mientras camina en ese sentido es consciente de una movilidad que ha seleccionado mediante intelectualización de movimientos laterales. Situaremos al niño, con los ojos cerrados, en otros puntos del espacio del aula y jugaremos de la misma forma, cambiando el balón por otros objetos cualesquiera. Una vez hayamos observado que no hay confusión alguna, cuando camine en busca del objeto lanzado, le diremos: Estas caminando hacia TU DERECHA. (*En esta actividad, todos los demás niños deben estar, siempre, detrás del niño que realice el juego.*)

Jugaremos con otros niños: con los ojos cerrados, con los ojos abiertos. A partir de ahora, no utilizaremos la expresión «línea roja», sino «tu derecha». La orden de localización de un objeto será la siguiente: Qué ves a TU derecha de...; Pon este objeto a TU derecha de...; Enséñame la mano de TU derecha; ...

No es aconsejable utilizar la expresión «izquierda», como distinción enunciativa del movimiento contrario lateral, hasta que el niño comprenda y domine perfectamente la expresión «derecha». Aunque nombre convencionalmente, en un principio, sólo uno de los movimientos, ha interiorizado los dos, si no fuese así no hubiese distinguido «derecha» como una de dos opciones de movimiento. Ellos suelen crear desde su propio vocabulario la expresión «no derecha», como distinción. «Indudablemente, el lenguaje constituye una condición necesaria para que se completen las estructuras de cierto nivel, pero no es condición suficiente de ninguna construcción operatoria» (Piaget y Beth, 1968, 357).

No es aconsejable utilizar la expresión «izquierda», como distinción enunciativa del movimiento contrario lateral, hasta que el niño comprenda y domine perfectamente la expresión «derecha».

Metodología de la investigación

«El trabajo científico consiste en proponer teorías y en contrastarlas [...] cómo se le ocurre una idea nueva a una persona carece de importancia para el análisis lógico [...] En consecuencia, distinguiré netamente entre el proceso de concebir una idea nueva y los métodos y resultados de examen lógico» (Popper, 1973).

La investigación se realiza sobre una muestra de 186 alumnos de edades comprendidas entre 5 y 9 años, mediante comparación de grupos con dos tratamientos distintos: Tratamiento de enseñanza como *Posición* (aplicando propuestas de actuación similares a las indicadas en «La enseñanza actual del concepto») y Tratamiento de enseñanza como *Movimiento* (aplicando la propuesta didáctica indicada anteriormente en el «Plan de trabajo»).

A estos grupos se les dividió, a su vez, en dos: Grupos cuyos componentes tenían una lateralidad definida, y grupos cuyos componentes tenían una difusa lateralidad definida.

	Enseñanza como Posición	*Enseñanza como Movimiento*
Lateralidad definida	1	2
Lateralidad sin definir	3	4

Se analizaron los datos obtenidos, un mes después de la realización de los distintos tratamientos, que se aplicaron una vez al año, durante dos años sucesivos, trabajando el segundo de estos años, solamente, con los grupos 1 y 2 de la clasificación anterior.

La interpretación de los resultados obtenidos en el análisis de datos, durante el primer año, expresa que:

- Existen diferencias significativas, al nivel del 95%, entre los grupos que lo aprenden como posición (1 y 3) y los grupos que lo aprenden como movimiento (2 y 4), alcanzando estos últimos un nivel de rendimiento más elevado.
- No existen diferencias significativas entre los grupos «Lateralidad definida-Movimiento» (2) y los grupos «Lateralidad sin definir-Movimiento» (4).
- Existen diferencias significativas, al nivel del 95 %, entre los grupos 1 y los grupos 3, alcanzando los grupos 1 un nivel de rendimiento más elevado.
- No existen diferencias significativas entre los grupos «Lateralidad definida-Posición» (1) y los grupos «Lateralidad definida-Movimiento» (2).

La interpretación de los resultados obtenidos en el análisis de datos, durante el segundo año expresa que:

- No existen diferencias significativas entre el rendimiento obtenido por los grupos 1 el primer año, y el rendimiento obtenido por los grupos 1 el segundo año.

- Existen diferencias significativas, al nivel del 95%, entre el rendimiento obtenido por los grupos 2 el primer año, y el rendimiento obtenido por los grupos 2 un año después, alcanzando, el segundo año, un nivel de rendimiento más elevado.

Conclusiones de la investigación

— En los sujetos que han formado la muestra, el aprendizaje de los conceptos derecha e izquierda, no ha dependido de su capacidad o de su madurez.

— De los sujetos que han formado la muestra, sólo los que, teniendo una lateralidad definida, aprendieron los conceptos izquierda y derecha, con un método basado en el Movimiento obtuvieron resultados más satisfactorios que evolucionaron con el paso de un año de tiempo.

— Un buen rendimiento en el aprendizaje de los conceptos izquierda y derecha, depende de cinco niveles de adquisición:

- Nivel I: Lateralidad Definida.
- Nivel II: Percepción de movimientos laterales.
- Nivel III: Distinción de movimientos laterales.
- Nivel IV: Intelectualización de esos movimientos.
- Nivel V: Enunciación convencional de esos movimientos.

La movilidad de concienciación lateral se desarrolla cuando existe en el sujeto una percepción mental de movimientos. Una vez que los haya percibido, tendrá posibilidad de distinción de esos movimientos. Sólo en tanto que han sido distinguidos podrán ser intelectualizados, y sólo en tanto que han sido intelectualizados, podrán ser identificados con la utilización de los nombres convencionales: derecha o izquierda.

Referencias bibliográficas

BISHOP, A. J. (1980): «Spatial abilities and mathematics education - A review», *Studies in Mathematics*, 11, 257-269

EGAN, D. E. (1981): «An analysis of spatial orientation test performance», *Intelligence*, 5, 85-100

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995*a*): «Las cuatro etapas del acto didáctico», *Comunidad Educativa*, n.° 228, 36-40

FERNÁNDEZ BRAVO, J. A. (1995*b*): *Didáctica de la Matemática en la Educación Infantil*, Ediciones Pedagógicas, Madrid.

PIAGET, J. y E. W. BETH (1968): *Relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*, Ciencia Nueva, Madrid.

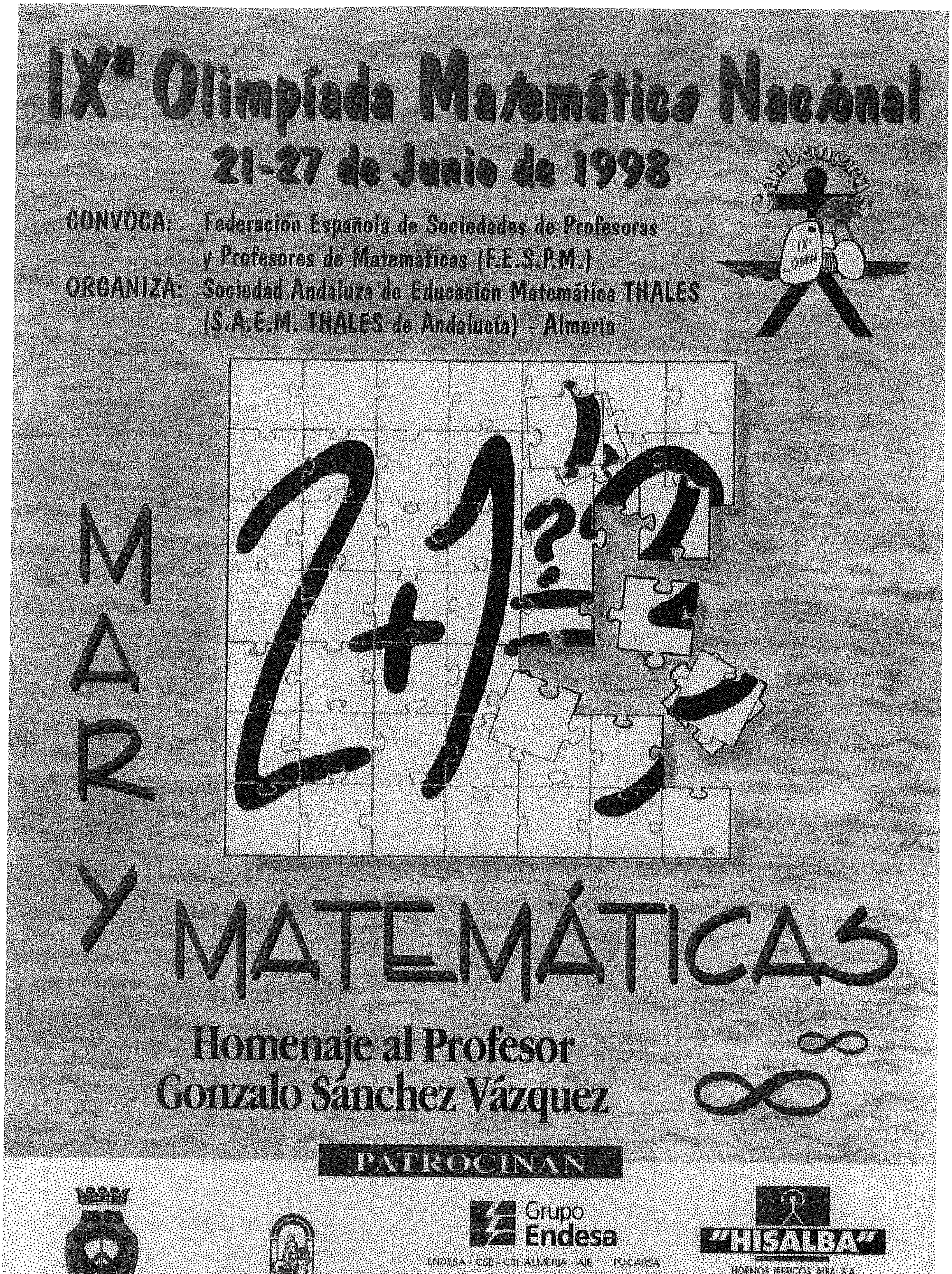
POOPER, K. (1973): *La lógica de la investigación científica*. (Trad. Víctor Sánchez de Zabala), Tecnos, Madrid.

SÍMONOV, P. (1990): *Motivación del cerebro. Actividad nerviosa superior y fundamentos científicos de psicología general*, Mir, Moscú.

SMITH, W. y C. SCHRÖEDER (1979): «Instruction of fourth grade girls and boys on spatial visualization», *Science Education*, 63, 1, 61-66

WEYL, H. (1975): *La simetría*, Ediciones de Promoción Cultural, Barcelona.

J. Antonio Fernández Bravo
Departamento de Didáctica
Facultad de Educación
UNED.
Sociedad Madrileña
de Profesores de Matemáticas
Emma Castelnuovo


IXª Olimpíada Matemática Nacional
21-27 de Junio de 1998
CONVOCA: Federación Española de Sociedades de Profesoras y Profesores de Matemáticas (F.E.S.P.M.)
ORGANIZA: Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES (S.A.E.M. THALES de Andalucía) - Almería
MAR Y MATEMÁTICAS
Homenaje al Profesor Gonzalo Sánchez Vázquez
PATROCINAN
EXCMO. AYUNTAMIENTO DE CARBONERAS
JUNTA DE ANDALUCIA
Grupo Endesa
DSM Deretil
DSM
"HISALBA"
ediciones

SUMA 27
febrero 1998, pp. 65-70

Modelos lineales de ajuste de datos

Antonio R. Quesada
Nicolás Rosillo Fernández

ARTÍCULOS

En este artículo se presentan y contrastan, de acuerdo tanto a la suma de los cuadrados de los residuos como a la existencia de puntos atípicos, los dos modelos lineales que están disponibles en las calculadoras Texas Instruments TI-82 y TI-83. Al mismo tiempo se demuestra la facilidad con que algunos de los cálculos tradicionales relacionados pueden llevarse a cabo cuando, por razones de tipo pedagógico, se estime conveniente.

LOS AVANCES y la masificación de ordenadores personales y otros productos electrónicos, así como la difusión de los medios de comunicación y de internet, están poniendo a nuestra disposición una avalancha, cada vez mayor, de información. Afortunadamente, tanto los nuevos programas de estadística para ordenadores como las calculadoras modernas nos permiten almacenar y analizar datos con un mínimo de esfuerzo y de tiempo. Esta situación, que está creciendo exponencialmente, sugiere la necesidad de equipar a nuestros estudiantes de secundaria con las herramientas y el conocimiento necesario para llevar a cabo análisis de datos. No es de extrañar que el análisis de datos aparezca en las últimas recomendaciones curriculares (NCTM, 1989), y que haya empezado a aparecer en los libros de texto (Core-Plus Mathematics Project, 1997; Demana & Waits, 1997; The North Carolina School of Science and Mathematics, 1992), así como en manuales de reciente publicación (Morgan, 1997).

En este artículo se presentan y contrastan los dos modelos lineales que están disponibles en las calculadoras Texas Instruments TI-82 y TI-83, al mismo tiempo que se demuestra la facilidad con que algunos de los cálculos tradicionales relacionados pueden llevarse a cabo cuando, por razones de tipo pedagógico, se estime conveniente.

Deliberadamente, en deferencia al lector poco familiarizado con estas calculadoras, se han usado una profusión de figuras para describir los distintos procesos que se llevan a cabo, de forma que sea fácil reproducirlos.

La recta de mínimos cuadrados

En primer lugar se considera un ejemplo con el que se ilustra el cálculo de la recta de regresión tradicional que, como es bien sabido, se obtiene de forma que la suma de los cuadrados de los residuos (distancia vertical de un punto dado a la recta) sea mínima.

Ejemplo 1. La tabla que sigue contiene el valor esperado de vida para los ciudadanos estadounidenses en el año 1989. Encuentre un modelo que describa este conjunto de datos y úselo para estimar la esperanza de vida de dos personas con edades de 85 y 43 años respectivamente.

Edad	10	20	30	40	50	60	70	80
Esperanza de vida	66	56	47	37	29	20	14	8

Tabla 1. Centro Nacional de Estadísticas de la Salud de EEUU

Una vez que se entran los datos de la tabla en dos listas, digamos L_1 y L_2 en este caso (figura 1.a), se procede a obtener el diagrama de dispersión seleccionando, como ilustra la figura 1.b, el tipo de grafo y especificando las listas que contienen los datos.

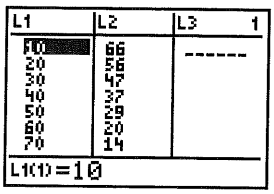


Figura 1.a

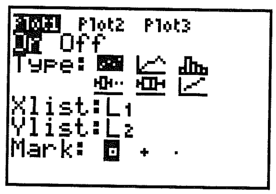


Figura 1.b

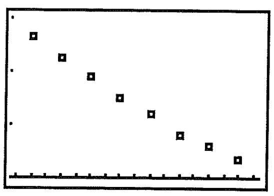


Figura 1.c

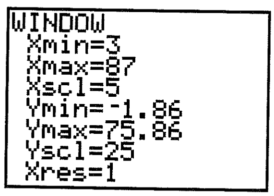


Figura 1.d

En este caso se ha dejado que la calculadora determine las dimensiones de la ventana (figura 1.d) usando *ZoomStat.* Ya que el diagrama parece ser lineal (figura 1.c), se selecciona la recta de mínimos cuadrados (figura 2.a) y en la pantalla base se especifican las listas que contienen los datos, así como la función en la que se quiere almacenar la ecuación (figura 2.b), aunque esto último es opcional (disponible sólo en la TI-83). La calculadora muestra los coeficientes de la ecuación de la recta en la pantalla principal (figura 2.c) a la vez que escribe la ecuación en la función Y_1 elegida (figura 2.d).

A fin de obtener el coeficiente de correlación *r* y su cuadrado r^2 junto a los coeficientes de la recta, se debe seleccionar y ejecutar la instrucción *DiagnosticOn* del CATALOG (disponible sólo en la TI-83). La figura 3.a muestra que la gráfica de la recta se ajusta casi perfectamente a los puntos, lo que confirma el coeficiente de correlación obtenido de casi –1. Una vez obtenido el modelo lineal, se puede sencillamente evaluar la función Y_1 usando la tabla (figuras 3.b y 3.c) o la pantalla principal (figura 3.d) para estimar la esperanza de vida correspondiente a las edades dadas de 43 y 85 años. Sería interesante discutir con los estudiantes los valores esperados para personas de 86 o de 90 años.

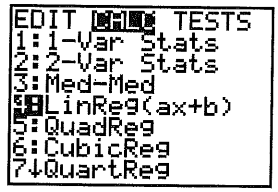


Figura 2.a

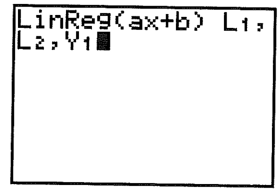


Figura 2.b

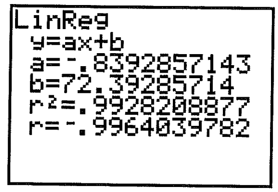


Figura 2.c

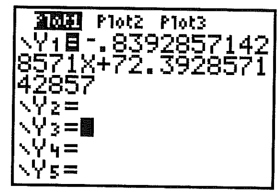


Figura 2.d

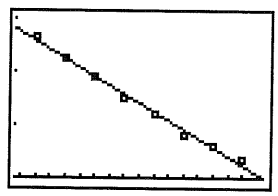


Figura 3.a

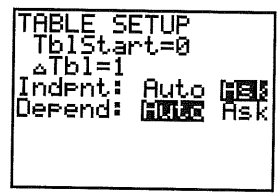


Figura 3.b

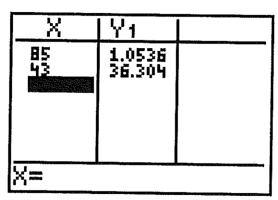


Figura 3.c

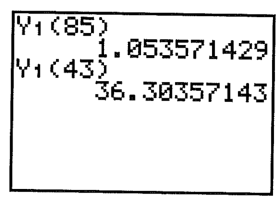


Figura 3.d

Tradicionalmente, dado el conjunto de puntos $\{(x_i, y_i): 1 \leq i \leq n\}$, la recta de mínimos cuadrados $y = ax + b$ que los modela se calcula usando las expresiones:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \qquad [1]$$

En la figura 4.a se han usado estas fórmulas para obtener los coeficientes de la recta de regresión. Las figuras 4.b y 4.c ilustran los mismo cálculos usando el tipo de datos lista y las operaciones asociadas.

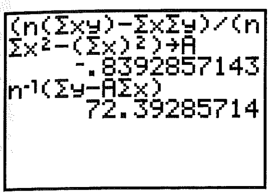


Figura 4.a

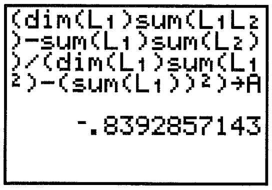


Figura 4.b

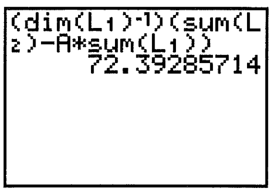


Figura 4.c

La variedad de representaciones disponibles en las nuevas calculadoras permiten abordar un problema usando enfoques completamente distintos. Así, por ejemplo, a continuación se considera cómo obtener la recta de regresión usando sistemas de ecuaciones lineales. Ya que todo par ordenado de la tabla debe satisfacer la ecuación de la recta y = ax + b que se busca, sustituyendo se obtiene el sistema lineal que sigue y que se ha expresado en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{c} 10a + b = 66 \\ 20a + b = 56 \\ \vdots \\ 80a + b = 8 \end{array}\right\} \quad AX = B, \text{ donde } A = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 20 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 80 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 66 \\ 56 \\ \vdots \\ 8 \end{bmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda ambos lados de la ecuación matricial por A^T se consigue que la matriz A^TA, de los coeficientes de X, sea cuadrada, lo que permite resolver por X usando la inversa, esto es,

$$A^TAX = A^TB \text{ de donde } X = (A^TA)^{-1}A^TB.$$

Las figuras 5.a y 5.b muestran las matrices A y B mientras que la figura 5.c contiene los cómputos necesarios y la matriz resultante que de nuevo confirma los resultados anteriores.

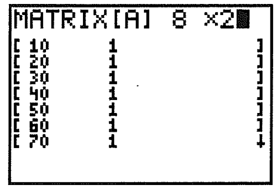


Figura 5.a

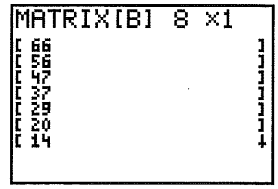


Figura 5.b

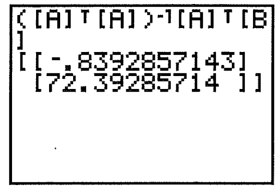


Figura 5.c

Así como antes se obtuvieron los coeficientes de la recta de regresión a partir de sus expresiones formales [1], del mismo modo podemos, por razones pedagógicas, estar interesados en obtener el coeficiente de correlación a partir de alguna de las expresiones que lo definen:

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i - \left(\sum_i x_i \sum_i y_i\right)/n}{(n-1)S_x S_y} = \frac{\sum_i \left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right)}{(n-1)S_x S_y} = \frac{1}{n-1}\sum_i \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}\cdot\frac{y_i - \bar{y}}{S_y} \qquad [2]$$

La figura 6.b muestra como calcular *r* en la pantalla principal usando las variables de la calculadora de acuerdo a la primera y segunda fracción. También se pueden normalizar primero las listas de datos (figura 6.c) y usar las listas resultantes (figura 6.d).

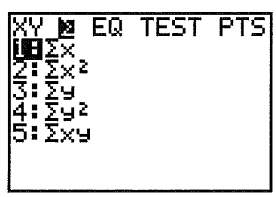


Figura 6.a

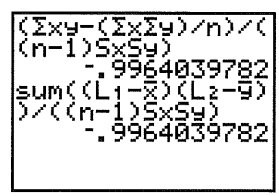


Figura 6.b

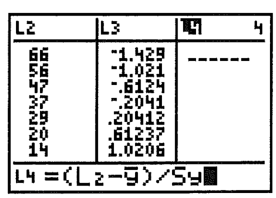


Figura 6.c

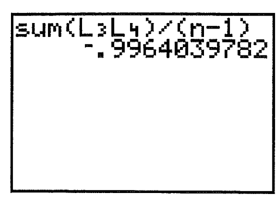


Figura 6.d

Antes de presentar el segundo modelo lineal, conviene ponderar el porqué puede ser deseable el uso de otro modelo.

Ejemplo 2. Consideremos la siguiente tabla de valores cuyos datos se han almacenado en las listas L_1 y L_2 (figura 7.a).

x	1	3	4	5	7	8	9	10	11	12	14	16	23
y	7	11	13	15	15	17	16	18	3	18	20	21	4

Tabla 2

La figura 7.b muestra que, con la excepción de dos puntos alejados, el resto de los puntos sugieren una tendencia lineal. Ahora bien, el efecto de estos dos puntos atípicos en la recta de regresión es contundente. Como vemos en la figura 7.c el coeficiente de correlación es casi nulo, a la vez que, como nos muestra la figura 7.d, la gráfica de la recta de regresión está «alejada» de la mayoría de los puntos. No sería razonable, pues, el hacer proyecciones usando este modelo. A continuación, se presenta un modelo lineal altenativo más resistente a un número reducido de valores extremos.

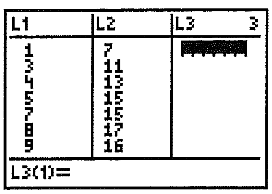


Figura 7.a

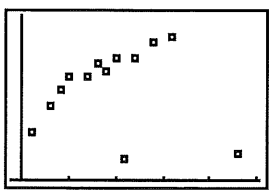


Figura 7.b

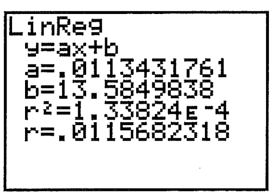


Figura 7.c

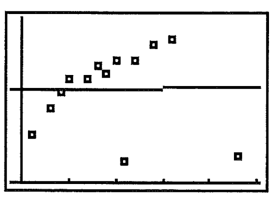


Figura 7.d

La recta med-med

El tipo de situación descrita en el ejemplo anterior lleva a John W. Tukey (1977) a inventar la recta med-med (mediana-mediana) como una recta de ajuste más resistente a los efectos de puntos atípicos, o puntos anormalmente alejados de la mayoría de los puntos del conjunto de datos.

...lleva a John W. Tukey (1977) a inventar la recta med-med (mediana-mediana) como una recta de ajuste más resistente a los efectos de puntos atípicos, o puntos anormalmente alejados de la mayoría de los puntos del conjunto de datos.

Algoritmo para obtener la recta med-med

Dado un conjunto S de n puntos se procede así:

1. Se ordenan los puntos de S en orden creciente de abscisas.
2. Se subdivide el conjunto ordenado de datos en 3 grupos, digamos G_1, G_2 y G_3. Si el número de puntos de S es múltiplo de 3, esto es si $n = 3k$, entonces cada grupo constará de k puntos. Si $n = 3k+1$, se deja que el segundo grupo G_2 conste de $k+1$ puntos. Finalmente si $n = 3k+2$, se asignan $k+1$ puntos a los grupos de los extremos. La única excepción a esta regla se hace cuando dos pares tienen la misma abscisa, en cuyo caso se ubican en el mismo grupo.
3. Se procede a calcular para cada grupo G_i, $1 \leq i \leq 3$, el punto P_i, cuyas coordenadas (x_i, y_i) son, respectivamente, la mediana de las abscisas y la mediana de las ordenadas de los puntos en el grupo.
4. Se obtiene la ecuación de la recta t, de ecuación $y = mx + b$, que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_3(x_3, y_3)$.
5. Por último, se desplaza la recta t un tercio de la distancia vertical entre el punto $P_2(x_2, y_2)$ y la recta, esto es

$$d = \frac{1}{3}\left|(mx_2 + b) - y_2\right|$$

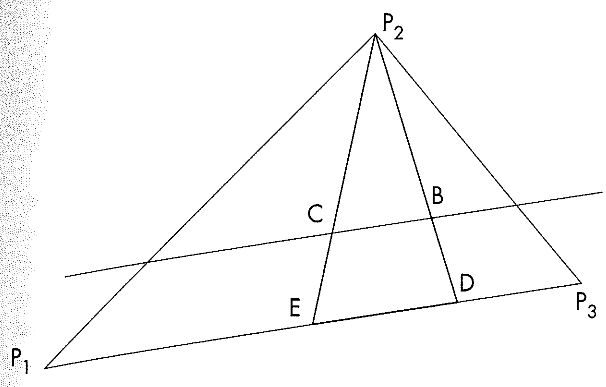
El desplazamiento se hará siempre hacia (x_2, y_2).

Existe otra formulación alternativa de este quinto paso:

5b. Por último, se desplaza la recta t paralelamente a sí misma obligándola a que contenga al punto (a, b), cuyas componentes son

$$a = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{y} \quad b = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

Cualquiera de las formulaciones implica la otra. Para ver esto considérese el triángulo que tiene por vértices $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ y $P_3(x_3, y_3)$ como el de la figura. La recta med-med contendrá el lado formado por P_1 y P_3 y ha de desplazarse un tercio de la distancia que separa D de P_2 (al punto B). Al mismo tiempo, la recta med-med pasará por el baricentro del triángulo descrito (punto C de la figura, siendo P_2E mediana), o lo que es lo mismo, por su centro de gravedad.



Los triángulos P_2CB y P_2ED son semejantes, lo que indica que

$$EC = \frac{1}{3}EP_2 \Leftrightarrow DB = \frac{1}{3}DP_2$$

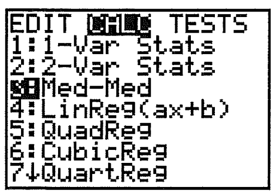


Figura 8.a

Ejemplo 3. A continuación se aplica el algorítmo descrito para hallar la recta med-med asociada a la distribución del ejemplo 2.

Los subgrupos y puntos correspondientes son:

G_1 = {(1, 7), (3, 11), (4, 13), (5, 15)} P_1 = (3,5, 12)

G_2 = {(7, 15), (8, 17), (9, 16), (10, 18), (11, 3)} P_2 = (9, 16)

G_3 = {(12, 18), (14, 20), (16, 21), (23, 4)} P_3 = (15, 19)

La recta que pasa por los puntos P_1 y P_3 es:

$$y-19 = \frac{19-12}{15-3,5}(x-15) \Rightarrow y = \frac{14}{23}x + \frac{227}{23} \approx 0,609x + 9,870$$

Siguiendo el paso 5, para x = 9, se obtiene

$$y = \frac{14 \cdot 9}{23} + \frac{227}{23} = \frac{353}{23} \Rightarrow d = \frac{1}{3}\left|\frac{353}{23} - 16\right| = 0,217$$

por tanto, si la recta que pasa por P_1 y P_3 tiene como ordenada en el origen 9,870, la recta med-med tendrá 9,870 + 0,217 = 10,087, con lo que su ecuación será y = 0,609x + 10,087

Si seguimos las indicaciones del paso 5. b, la recta med-med será de la forma

$$y = \frac{14}{23}x + n$$

donde n se obtendrá obligando a dicha recta a que pase por el punto (a, b) de coordenadas

$$a = \frac{3,5+9+15}{3} = \frac{55}{6} \quad y \quad b = \frac{12+16+19}{3} = \frac{47}{3}$$

Por tanto

$$\frac{47}{3} = \frac{14}{23} \cdot \frac{55}{6} + n \Rightarrow n = \frac{696}{69} = 10,087$$

lo que indica que la recta med-med tiene de ecuación

$$y = \frac{14}{23}x + \frac{696}{69} \approx 0,609x + 10,087$$

que, como se observa en la figura 8.e, produce un ajuste bastante mejor que la recta de regresión antes hallada. Las figuras 8.a, 8.b, 8.c y 8.d ilustran cómo obtener la recta med-med e incluso los tres puntos P_1, P_2 y P_3 que ayudan a determinarla.

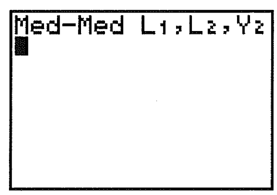


Figura 8.b

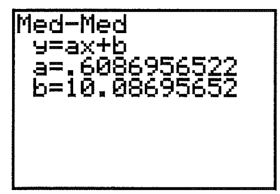


Figura 8.c

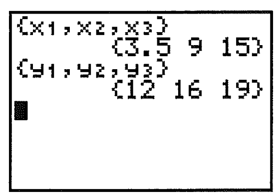


Figura 8.d

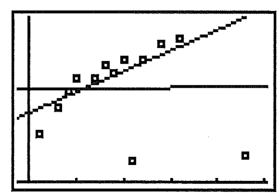


Figura 8.e

El efecto de los puntos patológicos

A la hora de comparar los dos modelos lineales considerados conviene analizar tanto la suma de los cuadrados de los residuos como el efecto de los puntos patológicos en ambos modelos. Para la distribución de la tabla 2, se puede comprobar que la recta de regresión minimiza la suma de los cuadrados de los residuos sólo con introducir en L_3 y L_4 los residuos correspondientes a los dos modelos lineales usados. Ya que en Y_1 se guarda la recta de mínimos cuadrados y en Y_2 la med-med, se definen $L_3 = L_2 - Y_1(L_1)$ y $L_4 = L_2 - Y_2(L_1)$. Debe señalarse que en la TI-83 la lista de residuos se calcula automáticamente con cada modelo lineal y se almacena como la lista LRESID. Por tanto, bastaría definir L_3 = LRESID, respectivamente L_4 = LRESID, immediatamente despues de calcular cada una de las rectas. Como asegura la teoría y se comprueba en la figura 9.b, la recta de mínimos cuadrados da la menor suma, pero como se ha observado en la figura

8.e, tener la menor suma no garantiza el mejor ajuste. Ahora bien, suprimiendo en L_1 y L_2 las entradas correspondientes a los pares de puntos patológicos (11, 3) y (23, 4), y recalculando la recta de mínimos cuadrados, la nueva recta posee una pendiente y una ordenada en origen mucho más próximas a las dadas por la recta med-med obtenida del conjunto inicial de datos (figura 9.d). Este es el principal valor de la recta med-med: recoger la tendencia de la mayoría de los puntos sin necesidad de remover los puntos patológicos del conjunto de datos.

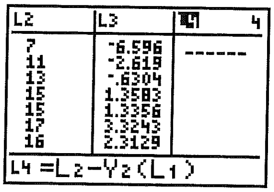


Figura 9.a

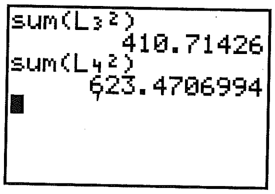


Figura 9.b

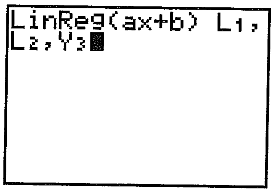


Figura 9.c

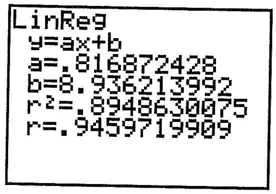


Figura 9.d

La nueva recta de mínimos cuadrados está marcada con trazo grueso en la figura 10.a, y la suma de sus residuos al cuadrado se observa en la figura 10.b.

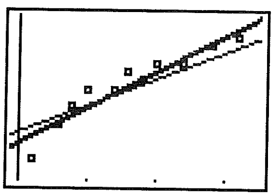


Figura 10.a

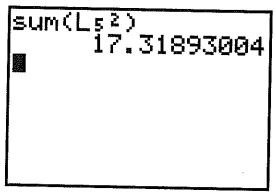


Figura 10.b

Es un ejercicio sencillo el construir conjuntos de datos para comprobar empiricamente el efecto de los puntos atípicos en los modelos lineales estudiados. Asi por ejemplo, podemos pedir a los estudiantes que calculen la recta de mínimos cuadrados y la recta med-med para los tres conjuntos de datos de la tabla 3, y que describan gráfica y algebraicamente como los puntos atípicos (que en este caso son los que no siguen la relación y = 2x-1) afectan los resultados obtenidos.

x	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Y_1	3	7	11	15	19	23	27	31	35	23
Y_2	3	7	11	15	38	23	27	31	35	39
Y_3	7	3	11	15	19	23	27	31	35	39

Tabla 3

La elección de un modelo u otro depende de si queremos incluir todos los datos, extremos o no, o si consideramos suficiente el captar la tendencia de la mayoría de los puntos.

Es importante indicar que si bien cuando se encuentran puntos atípicos se deben revisar los datos para asegurarse de que no se trata de un error, estos puntos a menudo pueden denotar alguna característica adicional del modelo que no se ha considerado.

Conclusión

La elección de un modelo u otro depende de si queremos incluir todos los datos, extremos o no, o si consideramos suficiente el captar la tendencia de la mayoría de los puntos. Es claro que si el conjunto de datos es suficientemente grande, la eliminación de los puntos atípicos puede no ser immediata. En todo caso la decisión, como hemos visto, está entre la recta que minimiza las distancias verticales entre los datos reales y los predichos o la recta menos afectada por los puntos patológicos. En general, la existencia de puntos atípicos cerca del centro del conjunto tiende a afectar la intersección con el eje de ordenadas de la recta de mínimos cuadrados, mientras que cuando estos puntos ocurren cerca de los extremos del conjunto de datos afectan la pendiente de esta recta. De hecho, la influencia de un punto en la pendiente de la recta es directamente proporcional a su distancia al centro del conjunto de datos. En contraste, la recta med-med es relativamente resistente a los efectos de puntos atípicos.

Bibiografía

CORE-PLUS MATHEMATICS PROJECT (1997): *Contemporary Mathematics In Context, A Unified Approach. Course One*, Janson Publications, Inc., Chicago, IL.

DEMANA, F. y B. WAITS (1997): *Precalculus*, Addison-Wesley Pub. Company, Reading, Massachussets.

MORGAN, L. (1997): *Statistics Handbook for the TI-83*, Texas Instruments.

N.C.T.M. (1989): *Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics*, NCTM, Reston, Virginia.

THE NORTH CAROLINA SCHOOL OF SCIENCE AND MATHEMATICS (1992): *Contemporary Precalculus Through Applications*, Janson Publ., Inc., Deham, Massachussets.

Antonio R. Quesada
Department
of Mathematical Sciences
The University of Akron
Nicolás Rosillo
IES Francisco Nieva
Valdepeñas
(Ciudad Real)

SUMA 27
febrero 1998, pp. 71-80

Los Problemas Aritméticos Elementales Verbales (PAEV) de una operación formulados con números muy pequeños

Manuel Aguilar Villagrán
Jaime Martínez Montero

ARTÍCULOS

A través de la comparación de resultados obtenidos entre problemas verbales formulados con números grandes y con números muy pequeños, se ofrecen perfiles característicos de estos problemas en función de la distancia, el paralelismo y el progreso en los resultados curso a curso. Del estudio comparado de estos datos se obtienen conclusiones que ayudan a una mejor acción didáctica y a una más adecuada secuenciación de estos problemas.

HAY una diferencia notable en los rendimientos que alcanzan los alumnos en resolución de PAEV cuando un problema es planteado con números muy pequeños o con números con los que el alumno no tiene más remedio que emplear las operaciones. Establecer este hecho tuvo un cultivo temprano (Knight y Behrens, 1928) al hilo de las investigaciones por el aprendizaje de los hechos básicos, que establecen que el problema es más difícil cuanto mayor sea el resultado. A este respecto, se puede consultar a Aschraft (1982, 1983); Barcody (1988); Groen y Parkman (1972); Groen y Poll (1973); Suppes y Groen (1967); Svenson (1975); Svenson y Broquist (1975); Martínez Montero (1995). Incluso las estrategias que pongan en juego los niños pueden estar influenciadas por el tamaño de los sumandos (Siegler y Robinson, 1982), Vergnaud (1991, 174-175). La diferencia notable, en rendimientos, es, naturalmente, a favor de los problemas presentados con números muy pequeños. Pero las implicaciones concernientes al empleo de los números van más allá de la constatación de que un alumno resuelve mejor un problema si viene con números pequeños que si viene con números grandes. Este es un hecho establecido que aquí se reafirma.

Plantear a los alumnos PAEV con números muy pequeños tiene más utilidades. Suele ser práctica frecuente someter a un elevado número de alumnos a la resolución de tests o pruebas que contienen PAEV cuya solución se dilucida por el alumno eligiendo la operación u operaciones que resuelven el problema, sin necesidad de realizar los cálculos. Esta opción presenta la ventaja de diferenciar, en una solución incorrecta del problema, si ésta se debe a desconocimiento del cálculo o a una mala elección de la operación. Numerosos investigadores, cuando han tenido que trabajar con un elevado número de alumnos, han optado por esta vía (Bell y otros, 1983; Fischbein y otros, 1985; Greer, 1987*a*; Vergnaud, 1983, 1988). Junto a este procedimiento cabe acompañar PAEV idénticos a los propuestos, pero formulados con números muy pequeños y adecuadamente intercalados entre ellos. Del estudio conjunto de las soluciones, se pueden extraer interesantes conclusiones:

a) Se puede establecer el itinerario que sigue el alumno desde que desconoce el camino para la solución hasta que lo resuelve con seguridad y sin dudas.

b) Se puede establecer la «potencia» de aprendizaje que cada tipo de problema tiene para cada curso o agrupamiento de alumnos.

c) Se pueden descartar con certeza todos los casos en que los alumnos resuelven los problemas porque eligen la operación al azar. En el caso de los PAEV de una etapa, la probabilidad de acertar por azar no es pequeña, puesto que alcanza el 25%.

d) En función de las correcciones de resultados derivadas de c), se pueden establecer con mayor exactitud los índices de dificultad y de discriminación de los problemas empleados. Tal modificación puede llegar a ser sustantiva.

e) Las respuestas dadas en los problemas formulados con números pequeños, comparadas con las dadas en los problemas con números grandes, van a ayudar a comprender las ideas previas de los alumnos y las concepciones que tienen de las operaciones elementales.

En el presente artículo nos vamos a ocupar del apartado b), aunque para ello hemos de hacer referencia, siquiera sea de forma somera, a algunas consecuencias que se derivan del apartado a). De acuerdo con nuestra experiencia (Martínez Montero, 1995; Aguilar, 1996), en la resolución correcta de los PAEV de una operación que se les proponen a los alumnos, presentándoles los correspondientes a cada tipo formulados con números muy pequeños y con números muy grandes, los niños siguen el siguiente itinerario:

1.°) No contestan correctamente a ninguno de los dos tipos. El alumno ni comprende la situación que le plantea el problema ni sabe, como es lógico, qué operación la resuelve.

2.°) Suelen dar una respuesta al azar al formulado con números grandes y yerran en el propuesto con números muy pequeños. El alumno sigue sin entender la situación, pero sabe que una de las operaciones propuestas lo debe resolver, por lo que se aventura a elegir una de ellas (a veces por simple azar o, en otras ocasiones, por indicadores semánticos derivados del texto del problema).

3.°) Resuelven bien el propuesto con números muy pequeños y mal el propuesto con números grandes. Aquí ya hay un avance sustancial, puesto que el alumno, al acertar siempre en el caso del problema formulado con números muy pequeños, entiende la situación matemática que tipifica el problema, pero aún no sabe qué operación lo resuelve.

4.°) Resuelven bien ambos. Es decir, entiende la situación y, además, sabe qué operación es el modelo matemático adecuado para resolver la misma.

Naturalmente, en el anterior itinerario las transiciones entre un paso y otro no son uniformes ni llevan el mismo tiempo a todos los alumnos. Pero sí se puede establecer, a partir del estudio de las respuestas, qué camino, en cada curso, le queda al alumno por recorrer y, por tanto, qué potencial de aprendizaje guarda el problema repecto al aprendiz. En este sentido, la comparación de los datos ofrece pistas adecuadas para saber en qué curso se pueden esperar resultados razonables en cada una de las situaciones tipificadas por los problemas.

...sí se puede establecer, a partir del estudio de las respuestas, qué camino, en cada curso, le queda al alumno por recorrer y, por tanto, qué potencial de aprendizaje guarda el problema repecto al aprendiz.

Planteamiento

A partir de una muestra de 182 alumnos de los cursos 3.°, 4.° y 5.° de Primaria, a los que se les han pasado una colección de diversos problemas (cuadro 1) tipificados según las categorías semánticas de Combinación, Cambio, Comparación, Igualación, Isomorfismo de Medidas, Escalares (grandes y pequeños) y Producto Cartesiano (Puig y Cerdán, 1988; Castro Martínez, 1991; Martínez Montero, 1995; Aguilar, 1996), podemos ejemplificar lo que hasta ahora se ha expuesto.

Para facilitar la comprensión de lo que se quiere expresar, hemos agrupado los resultados correspondientes a algunos PAEV en seis categorías distintas. Tales categorías surgen de los parecidos y contrastes que ofrecen los resultados que obtienen los alumnos en cada problema según éste aparezca formulado con números grandes o con

PROBLEMAS DE CAMBIO (CA)

1. En el colegio hay 264 chicos (5). Entran después otros 264 chicos (3). ¿Cuántos chicos hay ahora?
2. En una fábrica trabajan 163 obreros (7). A la hora de comer se van 127 (5). ¿Cuántos obreros quedan en la fábrica?
3. La clase de 3.° tiene 164 libros (5). Los niños llevan más libros, y ahora hay en la clase 215 (7). ¿Cuántos libros han llevado los niños?
4. Tengo 262 pesetas (5). Le he dado dinero a mi hermano y me han quedado 158 (2) pesetas. ¿Cuántas pesetas le he dado a mi hermano?
5. Salen a jugar al recreo 122 niños (1). Con los que ya estaban jugando allí se han juntado 231 (4) niños. ¿Cuántos niños había antes de que salieran los demás?
6. Los niños se llavan a dibujar al patio 124 (2) lápices de colores. Ahora quedan en la clase 67 (3) lápices. ¿Cuántos había antes de salir a dibujar?

PROBLEMAS DE COMPARACIÓN (CM)

1. Juan tiene 259 (4) pesetas. Andrés tiene 193 (2) pesetas. ¿Cuántas pesetas más tiene Juan?
2. Inés tiene 162 (8) cromos. María tiene 144 (3). ¿Cuántos cromos menos tiene María?
3. El Real Madrid ha marcado 89 (6) goles. El Barcelona ha marcado 22 (2) goles más. ¿Cuántos goles ha marcado el Barcelona?
4. En una tienda de chucherías hay 168 (7) chicles. Hay 23 (3) piruletas menos que chicles. ¿Cuántas piruletas hay?
5. Tengo 126 (5) cromos, y tengo 53 (2) más que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?
6. Tengo 268 (3) pesetas, y tengo 134 (2) pesetas menos que Jaime. ¿Cuánto dinero tiene Jaime?

PROBLEMAS DE IGUALACIÓN (IG)

1. Daniel tiene 156 (4) pesetas. Alberto tiene 125 (2). ¿Cuántas pesetas más debe tener Alberto para tener las mismas que Daniel?
2. Sonia tiene 248 (5) pesetas y Sara tiene 197 (2). ¿Cuántas pesetas tiene que gastarse Sonia para tener las mismas que Sara?
3. Tengo 58 (6) cromos. Si Andrea gana 7 (3) cromos tiene los mismos que yo. ¿Cuántos cromos tiene Andrea?
4. Tengo 153 (5) pesetas. Si Concha perdiera 94 (2) pesetas le quedarían las mismas que a mí. ¿Cuántas pesetas tiene Concha?
5. Tengo 125 (6) pesetas. Si me dieran 118 (2) pesetas tendría las mismas que Marcos. ¿Cuántas pesetas tiene Marcos?
6. Tengo 72 (5) cromos. Si pierdo 43 (2) cromos, me quedan los mismos que a Antonio. ¿Cuántos cromos tiene Antonio?

PROBLEMAS DE COMBINACIÓN (CO)

1. En una granja hay 223 (3) gallinas y 168 (2) patos. ¿Cuántas aves hay en total?
2. En una granja hay 564 (6) aves contando gallinas y patos. 315 (4) son gallinas. ¿Cuántos patos hay?

PROBLEMAS DE ISOMORFISMO DE MEDIDAS (IM)

1. El colegio va a comprar 150 (2) cuadernos. Cada cuaderno cuesta 125 (5) pesetas. ¿Cuánto costarán todos los cuadernos?
2. Van a repartir 120 (8) lápices entre los 30 (4) niños de la clase. Todos los niños reciben el mismo número de lápices. ¿Cuántos les dan a cada uno?
3. Se van a guardar 240 (6) piruletas en bolsas. En cada bolsa caben 40 (2) piruletas. ¿Cuántas bolsas van a hacer falta?

PROBLEMAS DE ESCALARES GRANDES (EG)

1. Eugenia tiene 123 (2) pesetas. Sonia tiene 3 veces más pesetas que Eugenia. ¿Cuántas pesetas tiene Sonia?
2. Nacho tiene 123 (8) cromos. Tiene 3 (4) veces más cromos que Víctor. ¿Cuántos cromos tiene Víctor?
3. En el patio del colegio caben 240 (6) niños. En la clase de 3.° caben 30 (2) niños. ¿Cuántas veces más niños caben en el patio que en la clase de 3.°?

PROBLEMAS DE ESCALARES PEQUEÑOS (EP)

1. Eugenia tiene 123 (2) pesetas. Tiene 3 (4) veces menos dinero que Sonia. ¿Cuánto dinero tiene Sonia?
2. Un libro cuesta 984 (6) pesetas. Un cuaderno cuesta 12 (3) veces menos. ¿Cuánto cuesta el cuaderno?
3. La entrada del cine cuesta 300 (6) pesetas). Un chupa-chups cuesta 25 (2) pesetas. ¿Cuántas veces menos cuesta el chupa-chups que la entrada del cine?

PROBLEMAS DE PRODUCTO CARTESIANO (PC)

1. Tengo 6 (2) letras consonantes y 5 (3) vocales. ¿Cuántas sílabas distintas que empiecen por consonante puedo formar?
2. Combinando mis pantalones y camisas me puedo vestir de 24 (8) formas diferentes. Tengo 4 (2) pantalones. ¿Cuántas camisas tengo?

Cuadro 1. Problemas aritméticos elementales verbales de una sola operación que se han aplicado. (Entre paréntesis figuran los números pequeños enunciados en los mismos problemas).

números pequeños. Cada categoría se va a diferenciar en función de: el paralelismo o no de ambos resultados; la distancia existente entre ambos porcentajes; la progresión curso a curso, dos cursos a un curso, o la no progresión. Una categoría final va a poner de relieve características de problemas muy difíciles.

Categorías encontradas

Primera categoría: Presenta paralelismo entre los resultados obtenidos en ambas series, escasa distancia entre los mismos y no acentuadas oscilaciones de curso a curso. Puede ser ejemplificado por el problema de Comparación 2. El texto propuesto fue el siguiente (entre paréntesis los datos correspondientes a los problemas formulados con números muy pequeños):

CM2: Inés tiene 162 cromos (8). María tiene 144 (3). ¿Cuántos cromos menos tiene María?

En el caso de CM2, se observa cómo la operación de restar se asocia con gran facilidad a la situación. Hay escasa distancia entre unos resultados y otros, lo que quiere decir que son muy pocos los que comprenden la situación y no identifican con ella la operación adecuada, y ello en cualquiera de los tres cursos. Perfiles similares a CM2 presentan los problemas de Combinación 1, Cambio 1 y 2, Comparación 2 y 4, e Igualación 5 y 6. En todos los casos, se trata de problemas fáciles para los alumnos de cualquiera de los cursos considerados, y que presentan poco margen de mejora (gráfico 1).

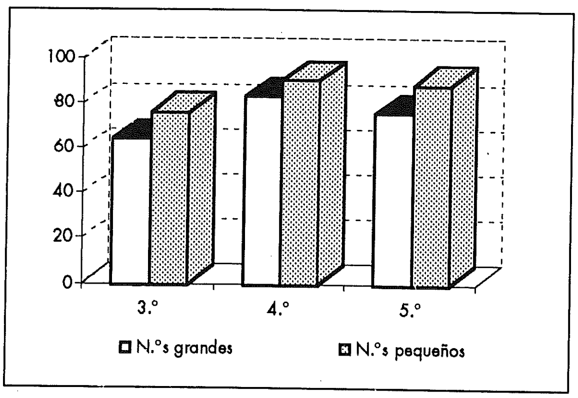


Gráfico 1. Comparación 2

Segunda categoría: Como en la categoría anterior, sigue habiendo paralelismo en los resultados obtenidos en ambos tipo de problemas. Pero hay una mayor distancia en los resultados, además de una muy suave pendiente en los progresos que se hacen curso a curso. Cambio 6 es el tipo de problema que ejemplifica esta categoría. Se le propuso a los niños con el siguiente texto:

CA6: Los niños se llevan a dibujar al patio 124 lápices de colores (un niño, 2). Ahora quedan en la clase 67 lápices (3). ¿Cuántos había en la clase antes de que salieran a dibujar?

Se trata de un problema que, de forma casi constante a lo largo de los tres cursos, se comprende bien. En 3.°, como en 5.°, cuatro de cada cinco niños entienden la situación. Es decir, resultado similar al obtenido en el problema anterior. Sin embargo, casi en la misma proporción a lo largo de los tres cursos un porcentaje de alumnos ignoran qué operación resuelve el problema. Este perfil, común a Comparación 3 y a Igualación 4 (aunque este último con inferiores resultados) invita a que se esperen mejores resultados en la resolución de los problemas con números grandes, dado que hay un fondo de comprensión a partir del cual ligar la operación aritmética. Se trata de problemas poco usuales, de escasa frecuencia de aparición en los libros de texto y en los cuadernos de trabajo de los alumnos. Sin embargo, las situaciones que tipifican son más habituales para los niños que su tratamiento matemático en el aula (gráfico 2).

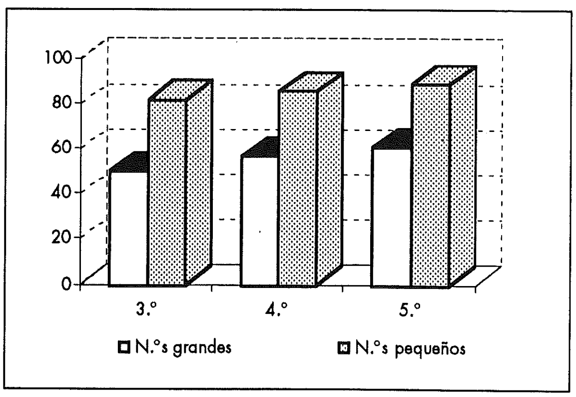


Gráfico 2. Cambio 6

Tercera categoría: Se trae como ejemplo, en esta categoría, a un problema que presenta paralelismo en los resultados, distancia de unos 20 puntos entre uno y otro tipo, pero que ofrece una ganancia neta en rendimientos curso a curso. Cambio 5 ofrece este perfil, y también Isomorfismo de Medidas 2.

El texto propuesto como problema para los alumnos fue el siguiente:

CA5: Salen a jugar al recreo 122 (1) niños. Con los que ya estaban allí se han juntado 231 niños (4). ¿Cuántos niños había antes de que salieran los demás?

A diferencia del problema CA6, se observa una progresión mantenida y proporcional en el dominio de este tipo. Hay diferencias notables de 3.° a 4.°, y menos de 4.° a 5.°. Sin embargo, se observa que en todos los cursos hay expectativas de crecimiento, dado que la comprensión de la situación que plantea el problema es bastante superior a la identificación de la misma con la operación que la resuelve.

A la vista de ello, parece aconsejable tratar el presente problema tanto en 3.° como en 4.° y, al igual que en CA6, parece que se trata de una situación conocida por el alumno pero poco tratada en la vida escolar. El problema de Isomorfismo de Medidas 2 se puede encuadrar también dentro de este perfil, pues si bien no aparece con frecuencia como tal problema hasta 4.°, representa una situación muy común en la vida de los niños: la que responde a un modelo de división como partición (gráfico 3).

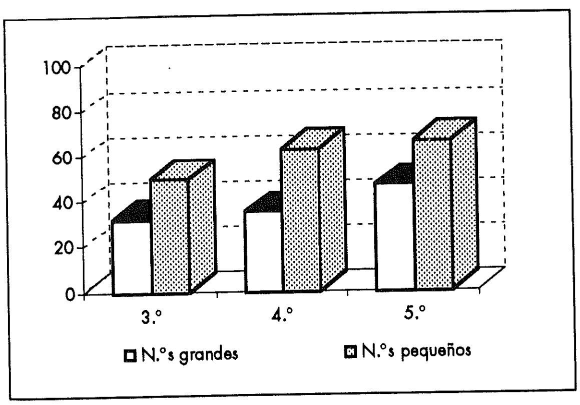


Gráfico 3. Cambio 5

Cuarta categoría: En esta categoría no se da paralelismo en los resultados obtenidos en cada uno de los problemas. La distancia entre unos y otros, como corolario inevitable de lo que se acaba de decir, cambia de curso a curso. Finalmente, también se observan ganancias curso a curso, sobre todo en los problemas planteados con números grandes. Los problemas de Isomorfismo de Medidas 1 y de Igualación 1 ejemplifican con bastante exactitud el perfil correspondiente a esta categoría.

Estos problemas se propusieron a los alumnos con los siguientes textos:

IG1: Daniel tiene 156 (4) pesetas. Alberto tiene 125 (2). ¿Cuántas pesetas más debe tener Alberto para tener las mismas que Daniel?

IM1: El colegio va a comprar 150 (niños, caramelos, 2) cuadernos. Cada cuaderno cuesta 125 pesetas (caramelo, 5). ¿Cuánto costarán todos los caramelos?

Son dos casos en los que se van acortando las distancias entre pequeños y grandes conforme avanzan los cursos. En IG1 es donde mayor camino se recorre. IM1 parte en el caso de los números grandes de los peores resultados, y alcanza en 4.° una proporción que casi mantiene en 5.°. Una pauta similar siguen los problemas de Combinación 2, Cambio 3 y Comparación 1 (gráficos 4 y 5).

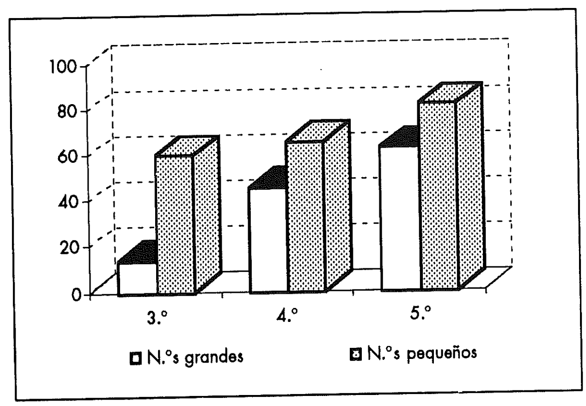


Gráfico 4. Isomorfismo de medidas 1

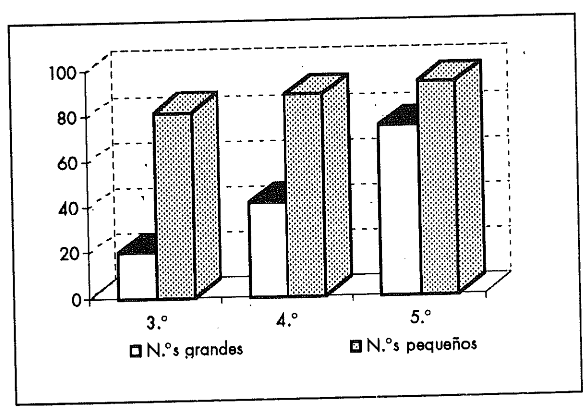


Gráfico 5. Igualación 1

Cabe resaltar la separación notable existente en el caso de IM1 en lo que se refiere a 3.° y a los restantes cursos. Se evidencia, de manera palpable, que aunque es en 3.° donde se aprende a multiplicar, es en 4.° donde los alumnos aprenden a ligar la operación de multiplicar con la situación que corresponde. Otra diferencia apreciable es de perspectiva. Mientras que en IM1 parece que a partir de 4.° la comprensión de la situación crece al mismo tiempo que la capacidad de asociar la operación correcta a la misma, en IG1 ofrece una línea ininterrumpida de acercamiento a la comprensión general del problema.

Se evidencia, de manera palpable, que aunque es en 3.° donde se aprende a multiplicar, es en 4.° donde los alumnos aprenden a ligar la operación de multiplicar con la situación que corresponde.

Otros problemas presentan el mismo perfil. Es el caso de Comparación 1 (que plantea una situación muy evidente para el alumno, pero que la aparición del término «más» le hace elegir erróneamente la operación de sumar), Combinación 2 y Cambio 3.

Si no se considera el problema de Combinación 2, se puede ver que este perfil afecta a tipos de las categorías con lenguaje inconsistente, esto es, con pistas verbales y sentido general, en algún caso, contrario al estereotipo escolar generado por cada operación e, inclusive, construcciones sintácticas contrarias a las esperadas (Lewis y Mayer, 1987; Huttenlocher y Strauss, 1968; Verschaffel y otros, 1992; Verschaffel, 1994; Martínez Montero, 1996).

Quinta categoría: Representa a los problemas que presentan, respecto a la anterior categoría, la única diferencia de que, existiendo crecimiento, éste no se da curso a curso. El gráfico que acompaña a esta exposición es el correpondiente al problema de Comparación 5, cuyo texto, tal y como se ha propuesto a los sujetos, es el que sigue:

CM5: Tengo 126 cromos (5), y tengo 53 (2) cromos más que Luis. ¿Cuántos cromos tiene Luis?

Varios son los problemas que responden a esta característica: inexistencia de diferencias entre dos cursos (que pueden ser 3.° y 4.° o 4.° y 5.°) y diferencias con el restante. Son los casos de Cambio 4, Comparación 6, Igualación 2, Igualación 3 e Isomorfismo de Medidas 3 (gráfico 6).

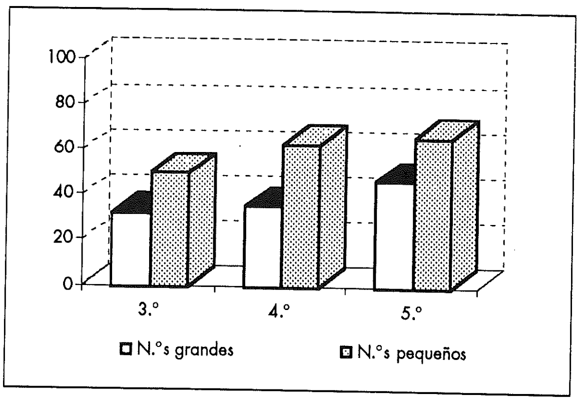


Gráfico 6. Comparación 5

Los perfiles correspondientes a estos tipos de problemas, si bien tienen las mismas características generales, presentan notables diferencias en la distancia existente entre los resultados obtenidos en cada tipo de problemas y el gradiente que ofrecen entre los cursos en que se producen ganancias. Así, IG2 es un problema fácil para 3.°, mientras que IG3 es poco adecuado para este curso. También CM6 es más complicado para los alumnos que CA4 (IG3 y CM6 presentan lenguaje inconsistente respecto a sus comparados). En el caso de IM3, su pertenencia a esta categoría, y no a la anterior –como IM2–, da la pista de que presenta un grado de dificultad diferente: el que va de la división como partición a la división en su versión de cuotición.

Sexta categoría: Se recogen aquí, como en un cajón de sastre, perfiles de problemas correspondientes a tipos muy difíciles, donde los alumnos, tanto en los formulados con números muy pequeños como en los formulados con números muy grandes, obtienen bajos resultados. Aquí se pueden hacer tres subdivisiones, que se podrían ejemplificar, respectivamente, con los problemas de Escalares Grandes 1, Escalares Grandes 2 y Producto Cartesiano 2. Los textos que se propusieron a los sujetos fueron los siguientes:

EG1: Eugenia tiene 123 pesetas (2). Sonia tiene tres (3) veces más pesetas que Eugenia. ¿Cuántas pesetas tiene Sonia?

EG2: Nacho tiene 123 (8) cromos. Tiene 3 (4) veces más cromos que Víctor. ¿Cuántos cromos tiene Víctor?

PC2: Combinando mis pantalones y camisas me puedo vestir de 24 (8) formas diferentes. Tengo 4 (2) pantalones. ¿Cuántas camisas tengo?

El modelo de EG1 es seguido por Escalares Grandes 3, Escalares Pequeños 3 y Producto Cartesiano 1. Hay escasa distancia en los resultados que se obtienen en cada uno de los tipos (la más corta de las contempladas hasta ahora), lo que viene a indicar la dificultad de la situación: son escasos los alumnos que teniendo capacidad de entender la situación planteada no la tengan para asociar la operación que le hace hallar la solución exacta. Casi se da el paralelismo y una clara progresión curso a curso (gráfico 7).

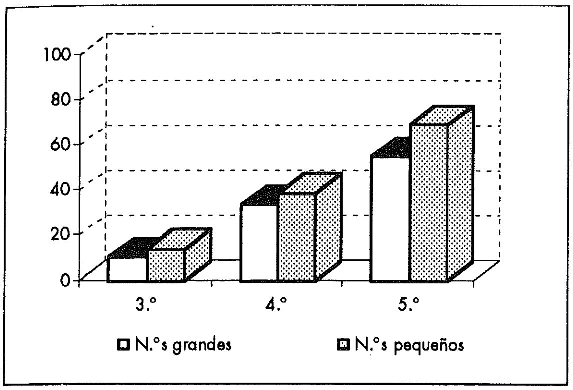


Gráfico 7. Escalares Grandes 1

Sin embargo, en el caso de EG3, EP3 y PC1 se observa una diferencia fundamental: la inexistencia de crecimiento de resultados de 3.° a 4.°. Más concretamente, los resultados en problemas con números grandes correspondientes a estos tipos están cercanos al cero. Pero se diferencian de la subcategoría siguiente en que sí obtienen aciertos, aunque escasos, en 3.° y 4.° y en los problemas formulados con números muy pequeños.

La segunda subcategoría está representada por el problema de Escalares Grandes 2. Como él se comportan los problemas de Escalares Pequeños 1 y 2. Sólo tienen una diferencia respecto a la subcategoría anterior: los alumnos no aciertan en 3.° y 4.° ni los problemas de números grandes ni los problemas de números pequeños. He aquí, por tanto, unos tipos claramente desaconsejados para estos cursos inferiores por plantear situaciones muy alejadas de los conocimientos y experiencias de los alumnos. Sólo a partir de 5.°, y de forma muy leve, comienzan a resolverlos en ambas formulaciones algunos niños y a comprenderlos (a resolverlos con números muy pequeños) otros niños (gráfico 8).

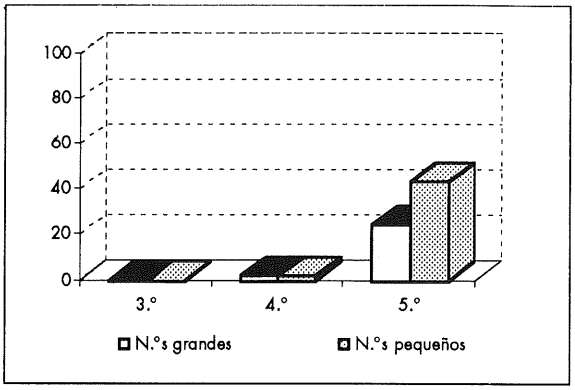


Gráfico 8. Escalares Grandes 2

Por último, el perfil más singular lo presenta el problema de Producto Cartesiano 2. De los 30 tipos analizados hasta ahora, ninguno ofrece un perfil semejante a éste. El rasgo que lo singulariza es el siguiente: todos los alumnos que son capaces de entender la situación (resolverlos con números pequeños) son capaces también de asociar a él la operación adecuada. ¿Qué quiere esto decir? Una interpretación verosímil (verificada en entrevistas posteriores) es la siguiente: el alumno que es capaz de representarse y reconstruir mentalmente la situación tiene un grado de madurez tal que ha superado las dificultades, menores, de saber identificar cada una de las operaciones con las situaciones a las que son susceptibles de ser aplicadas (gráfico 9).

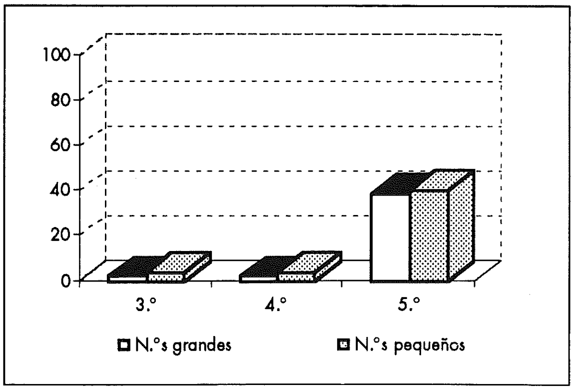


Gráfico 9. Producto Cartesiano 2

El cuadro 2 de la página siguiente presenta un resumen de las categorías expuestas según la clasificación semántica y los diversos tipos de problemas PAEV.

CATEGORÍAS	PROBLEMAS ADITIVOS				PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS			
	CA	CO	CM	IG	IM	EG	EP	PC
Primera	CA1 CA2	CO1	CM2 CM4	IG5 IG6				
Segunda	CA6		CM3	IG4				
Tercera	CA5				IM2			
Cuarta	CA3	CO2	CM1	IG1	IM1			
Quinta	CA4		CM5 CM6	IG2 IG3	IM3			
Sexta						EG1 EG3	EP3	PC1
						EG2	EP1 EP2	
								PC2

Cuadro 2. Categorías y tipos de problemas

Conclusiones

Contrastar los resultados que obtienen los alumnos en los problemas ordinarios que realizan en clase con los mismos o idénticos textos, pero formulados con números muy pequeños, puede ser útil para establecer el recorrido que aún debe efectuar el grupo de alumnos en la aprehensión y el tratamiento aritmético que debe darle a las situaciones que los problemas ejemplifican. En este sentido, la potencia o capacidad de aprendizaje puede establecerse a partir de la distancia que se da entre ambos resultados. Una distancia apreciable entre ambos resultados indica que hay una fisura entre la comprensión de la situación y el sentido que el alumno da a una operación concreta. Establecer estas distancias va a permitir una actuación didáctica más centrada en las necesidades específicas de instrucción de los alumnos.

Contrastar los resultados que obtienen los alumnos en los problemas ordinarios que realizan en clase con los mismos o idénticos textos, pero formulados con números muy pequeños, puede ser útil para....

El paralelismo que se dé en los resultados de los problemas planteados con ambos tipos de números sirve para indicar si los progresos en el dominio del problema guardan o no un cierto equilibrio. La falta de paralelismo en los resultados apunta a rotura de ese equilibrio. En el caso de que lo que se produzca sea un acercamiento entre ambos resultados, esa rotura del equilibrio es positiva, pues implica que un número cada vez mayor de alumnos identifican correctamente la situación con la operación que la soluciona. Si, por el contrario, se produce un aumento en la distancia, se indica claramente cómo no se da un correlato entre el aumento de comprensión de situaciones por los alumnos y el aumento del dominio de las herrameintas matemáticas necesarias para su tratamiento.

El aumento sostenido o interrumpido de resultados curso a curso puede ser también un indicador que ayude a una mejor secuenciación de los problemas. Y, de manera especial, si la observación de esta circunstancia se asocia a las anteriores. En efecto, la progresión curso a curso en los resultados, su paralelismo y la distancia entre ellos se convierten en facilitadores de la secuenciación.

Referencias

AGUILAR, M. (1996): *Diseño y aplicación de un programa instruccional de resolución de problemas aritméticos*, Tesis doctoral.

ASCHRAFT, M. (1982): «The development of mental arithmetic: A chronometric approach», *Developmental Review*, 2, 213

ASCHRAFT, M. (1983): «Procedural knowledge versus fact retrieval in mental arithmetic: A reply to Baroody», *Developmental Review*, 3, 231-235.

BAROODY, A. J. (1988): *El pensamiento matemático de los niños*, MEC-Visor, Madrid.

BELL, W., J. COSTELLO y D. KUCHEMAN (1983): *A review of research in Mathematical Education. Research on Learning and Teaching*, NFER-Nelson, Windsor.

CASTRO MARTÍNEZ, E. (1991): *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa*, Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, Granada.

FISCHBEIN, E. y otros (1985): «The Role of Implicit Models in Solving Verbal Problems in Multiplication and Division», *Journal for Research in Mathematics Education*, 16, 3-17.

GREER, B. (1987): «Understanding of arithmetical operations as model of situations», en J. A. SLOBODA y D. RODGERS (Eds.): *Cognitive processes in Mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 60-80.

GROEN, G. y J. PARKMAN (1972): «A chronometric analysis of simple addition», *Psychological Review*, 79, 329-343.

GROEN, G. y M. POLL (1973): «Subtraction and the solution of open sentence problems», *Journal of Experimental Child Psychology*, 16, 292-302.

HUTTENLOCHER, J. y S. STRAUSS (1968): «Comprehension and a statement's relation to the situation it describes». *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 7, 300-304.

ISUS, S. (1988): «Orientaciones curriculares en la resolución de problemas aritméticos verbales», en VV.AA.: *Temas actuales sobre Psicopedagogía y Didáctica*, Narcea, Madrid, 261-266.

KNIGHT, F. y M. BEHRENS (1928): *The learning of the 100 addition combination and the 100 susbtraction combination*, Longmans, Green and Co, Nueva York.

LEWIS, A. B. y R. E. MAYER (1987): «Students miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems», *Journal of Educational Psychology*, 79, 363-371.

MARTÍNEZ MONTERO, J. (1995): *Los problemas aritméticos elementales verbales de una etapa, desde el punto de vista de las categorías semánticas, en los cursos 3.°, 4.° y 5.° de EGB/Primaria*, Tesis doctoral.

PUIG, L. y F. CERDAN (1988): *Problemas aritméticos escolares*, Síntesis, Madrid.

SIEGLER, R. y M. ROBINSON (1982): «The development of numerical understanding», en H. REESE y L. LIPSITT, (Eds.): *Advances in Child development and behavior*, Academic Press, Nueva York.

STERN, E. (1993): «What Makes Certain Arithmetic Word Problems Involving the Comparison of Sets So difficult for Children?», *Journal of Educational Psychology*, 85, 1, 7-23.

SUPPES, P. y G. GROEN (1967): «Some counting models for first grade performance data on simple addition facts», en J. M. SCANDURA (Ed.): *Research in Mathematics Education*, N.C.T.M, Washington, D.C.

SVENSON, O. (1975): «Analysis of time required by children for simple additions», *Acta Psychologica*, 39, 289-302.

SVENSON, O. y S. BROQUIST (1975): «Strategies for solving simple additions problems», *Scandinavian Journal of Psychology*, 16, 143-151.

VERGNAUD, G. (1983): «Multiplicative structures», en R. LESH y M. LANDAU (Eds.): *Acquisition of Mathematics concepts and processes*, Academic Press, London.

VERGNAUD, G. (1988): «Multiplicative Structures», en J. HIEBERT y M. BEHR (Eds.): *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, L. Erlbaum A., Reston, Virginia, Vol. 2, 141-161.

VERGNAUD, G. (1991): *El niño, las matemáticas y la realidad* Trillas, México D.F.

VERSCHAFFEL, L. (1994): «Using Retelling Data to Study Elementary School Childrens Representations and Solution of Compare Problems», *Journal for Research in Mathematics Education*, 5, 2, 141-161.

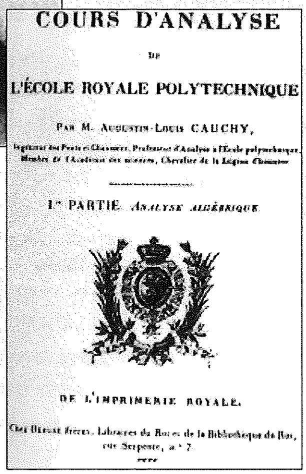
VERSCHAFFEL, L., E. DE CORTE y A. PAUWELS (1992): «Solving Compare Problems: An Eye Movements Test of Lewis and Mayer Consistency Hypothesis», *Journal of Educational Psychology*, 84, 1, 82-94.

Manuel Aguilar
Facultad de Educación
Universidad de Cádiz
Jaime Martínez
Servicio de Inspección
Junta de Andalucía

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY
Cours d'Analise

Primera edición, 1821

La SAEM «Thales», en colaboración con el Real Instituto y Observatorio de la Armada en San Fernando, va a publicar una edición facsimilar de un ejemplar del libro, que se conserva en la Biblioteca. Actualmente se está trabajando ya en su reproducción, por lo que consideramos que en breve podrá ofrecerse a los interesados.



COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.

I.re PARTIE. ANALYSE ALGÉBRIQUE.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

Chez Debure frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.

La edición constará de 1.000 ejemplares numerados, impresos sobre papel verjurado conquerol y encuadernados en cartoné.

Estimamos que el precio de coste unitario estará alrededor de las 5.500 pesetas. Si usted está interesado en adquirir un ejemplar de esta joya bibliográfica, puede reservar un ejemplar cumplimentando el boletín adjunto y remitiéndolo a la mayor brevedad a la dirección que se indica.

Boletín de reserva

D. (Dª): ____________________

con domicilio en ____________________ provincia de ____________________ C.P. __________

calle ____________________ n.° ______ piso ______ letra ______ Teléfono __________

E-mail ____________________ DESEO MEDIANTE EL PRESENTE DOCUMENTO RESERVAR ________ EJEMPLAR(ES) de la edición facsimilar de la edición de 1821 del libro Cours d'Analyse, de A. L. Cauchy, entendiendo que ésta sólo será efectiva una vez se haya publicado y haya efectuado el importe de su precio de coste más gastos de envío.

Las peticiones se atenderán por riguroso orden de entrada.

La SAEM «Thales» me comunicará la fecha de publicación, así como su importe exacto, disponiendo desde ese momento de quince días para hacer definitiva la reserva.

Fdo.:

Enviar a: SAEM «Thales», Facultad de Matemáticas. Apdo.: 1160. 41080 Sevilla

SUMA 27
febrero 1998, pp. 81-90

Análisis probabilístico del sorteo de los excedentes de cupo. ¿Fue justo el proceso en su conjunto?

Roberto Marcellán Bueno

ARTÍCULOS

Este artículo tiene por objeto analizar desde un punto de vista probabilístico el sorteo de los excedentes de cupo celebrado el día 12 de noviembre de 1997. Para ello se utilizan conceptos que figuran entre los contendios del 2.° ciclo de la ESO y del Bachillerato, como son el modelo de asignación de probabilidades de Laplace, el concepto de probabilidad condicionada y el teorema de la probabilidad total. Así mismo se contrastan los resultados obtenidos con algunos análisis que aparecieron en la prensa en los días posteriores al sorteo, haciendo ver las numerosas incorrecciones cometidas en estos análisis.

EL PASADO miércoles 12 de noviembre se celebró el sorteo para determinar quiénes de entre los 165.342 jóvenes llamados a realizar el servicio militar en el año 1998 resultaban excedentes de cupo.

En total 16.442 mozos serían los afortunados que conseguirían dar esquinazo a los preceptivos nueve meses de disciplina castrense.

He de confesar que yo era uno de los que aguardaban, expectante, a que el azar dictaminase su veredicto. Lo que en ese momento desconocía era que el número que me representaba en ese sorteo me otorgaba casi la mitad de posibilidades de resultar excedente de cupo respecto a otros compañeros con números más afortunados.

Es mi propósito con este artículo justificar el porqué de la anterior afirmación. Para ello me voy a servir de conceptos probabilísticos que aparecen entre los contenidos de la ESO como son el modelo de asignación de probabilidades de Laplace y el concepto de probabilidad condicionada, así como del teorema de la probabilidad total que aparece sólo en el Bachillerato.

Asimismo me planteo dar un repaso al tratamiento del que fue objeto este evento por parte de los medios de comunicación. Por ello he seleccionado algunas de las informaciones que aparecieron en la prensa en los días posteriores al sorteo. Espero poder hacer ver al amable lector o lectora que la mayor parte de los contenidos de esos artículos no se ajusta a la verdad, ni en lo referente a los resultados que se aportan ni a los razonamientos empleados. Pretendo con ello, como única intención, fomentar una de las actitudes que vienen prescritas en el DCB de Matemáticas, concretamente en el bloque correspondiente al tratamiento del azar. Tal actitud es la de «valorar de forma crítica las informaciones probabilísticas en los medios de comunicación, rechazando los abusos y usos incorrectos de las mismas».

Previamente a iniciar el análisis, quizás conviniera recordar cuál fue el proceso global que se siguió para elegir a los excedentes de cupo. Días antes de la celebración del sorteo, cada uno de los llamados a filas recibimos un número entre el 1 y el 165.342. Dicho número nos fue asignado de forma equiprobable mediante un programa informático. En el sorteo, se eligió un número entre el 1 y el 165.342 mediante la extracción de seis bolas de seis bombos, la primera correspondiente a las centenas de millar y la última a las unidades. El primero de los bombos, el de las centenas de millar, contenía diez bolas, cinco con el número 0 y cinco con el número 1. El resto de los bombos contenían diez bolas numeradas del 0 al 9. Resultarían excedentes de cupo todos aquellos mozos cuyo número coincidiese o bien con el extraído, o bien con cualquiera de los 16.441 siguientes, de forma que si se rebasaba el 165.342 se empezaba a contar de nuevo por el 1.

Centrémonos ahora en glosar el procedimiento que dirigió el desarrollo del sorteo con los bombos. Éste consistió en extraer las bolas de forma secuencial, empezando por las centenas de millar y. acabando por las unidades, de forma que, si una determinada extracción daba lugar a una cifra que no permitiera que el número resultante estuviese comprendido entre el 1 y el 165.342, se repetía la extracción hasta dar con una cifra permisible.

Así ocurrió en realidad. La primera cifra resultó ser un 1. La segunda fue un 8. Como no tenían sentido números de la forma 18#. ###, esa deficiencia se subsanó volviendo a introducir la bola en el bombo y repitiendo la extracción, resultando elegida en esta segunda tentativa la cifra 5.

El modelo probabilístico

Analicemos en profundidad el modelo probabilístico (al que llamaré *modelo A*) subyacente a este forma de elegir un número entre el 1 y el 165.342. Para ello se consideran las siguientes familias de sucesos asociados a la extracción de un número de seis cifras mediante los seis bombos:

$(A_i)_{i=0}^{1}$ donde A_i: «El bombo de las centenas de millar determina la cifra i», $0 \le i \le 1$

$(B_i)_{i=0}^{9}$ donde B_i: «El bombo de las decenas de millar determina la cifra i», $0 \le i \le 9$

$(C_i)_{i=0}^{9}$ donde C_i: «El bombo de las unidades de millar determina la cifra i», $0 \le i \le 9$

$(D_i)_{i=0}^{9}$ donde D_i: «El bombo de las centenas determina la cifra i», $0 \le i \le 9$

$(E_i)_{i=0}^{9}$ donde E_i: «El bombo de las decenas determina la cifra i», $0 \le i \le 9$

$(F_i)_{i=0}^{9}$ donde F_i: «El bombo de las unidades determina la cifra i», $0 \le i \le 9$

Planteémonos, por ejemplo, cuál es la probabilidad de que el número elegido hubiera sido el 1:

$$P(1) = P(A_0 \cap B_0 \cap C_0 \cap D_0 \cap E_0 \cap F_1) =$$
$$P(A_0)\cdot P(B_0 \mid A_0)\cdot P(C_0 \mid A_0 \cap B_0)\cdot P(D_0 \mid A_0 \cap B_0 \cap C_0)\cdot P(E_0 \mid A_0 \cap B_0 \cap C_0 \cap D_0)$$
$$\cdot P(F_1 \mid A_0 \cap B_0 \cap C_0 \cap D_0 \cap E_0)$$

donde en la segunda igualdad se ha usado, de forma reiterada, el concepto de probabilidad condicionada.

Evidentemente, $P(A_0) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

Para esta asignación de probabilidad, así como para las que siguen, se ha hecho uso de la regla de Laplace.

Si la primera cifra ha sido 0, en el segundo bombo puede salir cualquier cifra entre 0 y 9, y todas tienen sentido, luego:

$$P(B_0 \mid A_0) = \frac{1}{10}$$

Análogamente se deducen:

$$P(C_0 \mid A_0 \cap B_0) = \frac{1}{10}$$
$$P(D_0 \mid A_0 \cap B_0 \cap C_0) = \frac{1}{10}$$
$$P(E_0 \mid A_0 \cap B_0 \cap C_0 \cap D_0) = \frac{1}{10}$$

Ahora, si las cinco primeras cifras han sido 0, tendrán sentido como unidades cualquier cifra entre 1 y 9, pero no el 0, pues el menor número posible es el 1, luego:

$$P(F_1 \mid A_0 \cap B_0 \cap C_0 \cap D_0 \cap E_0) = \frac{1}{9}$$

Así:

$$P(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{180.000}$$

Calculemos ahora la probabilidad de que el número elegido hubiese sido el último posible, es decir, el 165.342.

$$P(165.342) = P(A_1 \cap B_6 \cap C_5 \cap D_3 \cap E_4 \cap F_2) =$$
$$P(A_1)\cdot P(B_6 \mid A_1)\cdot P(C_5 \mid A_1 \cap B_6)\cdot P(D_3 \mid A_1 \cap B_6 \cap C_5)\cdot P(E_4 \mid A_1 \cap B_6 \cap C_5 \cap D_3)$$
$$\cdot P(F_2 \mid A_1 \cap B_6 \cap C_5 \cap D_3 \cap E_4)$$

Evidentemente $P(A_1) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

Ahora, si la primera cifra ha sido 1, la segunda tendrá que ser un número entre 0 y 6, pues el máximo número posible es de la forma 16#. ###. Así:

$$P(B_6 | A_1) = \frac{1}{7}$$

Si la primera cifra ha sido 1 y la segunda 6, entonces la tercera tendrá que ser un número entre 0 y 5, pues el máximo número posible es de la forma 165. ###. Así :

$$P(C_5 | A_1 \cap B_6) = \frac{1}{6}$$

Si la primera cifra ha sido 1, la segunda 6 y la tercera 5, entonces la cuarta tendrá que ser un número entre 0 y 3, pues el máximo número posible es de la forma 165.3##. Así:

$$P(D_3 | A_1 \cap B_6 \cap C_5) = \frac{1}{4}$$

Análogamente:

$$P(E_4 | A_1 \cap B_6 \cap C_5 \cap D_3) = \frac{1}{5}$$

$$P(F_2 | A_1 \cap B_6 \cap C_5 \cap D_3 \cap E_4) = \frac{1}{3}$$

Por tanto:

$$P(165.342) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5.040}$$

Adoptando la misma estrategia que nos ha permitido calcular $P(1)$ y $P(165.342)$ podemos calcular la probabilidad de cualquier otro número. Así, se obtiene:

Si	Probabilidad
$1 \leq n \leq 9$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{180.000} \approx 5{,}56 \cdot 10^{-6}$
$10 \leq n \leq 99.999$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{200.000} \approx 5 \cdot 10^{-6}$
$100.000 \leq n \leq 159.999$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{140.000} \approx 7{,}14 \cdot 10^{-6}$
$160.000 \leq n \leq 164.999$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{84.000} \approx 11{,}91 \cdot 10^{-6}$
$165.000 \leq n \leq 165.299$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{33.600} \approx 29{,}76 \cdot 10^{-6}$
$165.300 \leq n \leq 165.339$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{16.800} \approx 59{,}52 \cdot 10^{-6}$
$165.340 \leq n \leq 165.342$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5.040} \approx 198{,}41 \cdot 10^{-6}$

Tabla 1

El siguiente gráfico nos puede dar una idea de la descompensación existente:

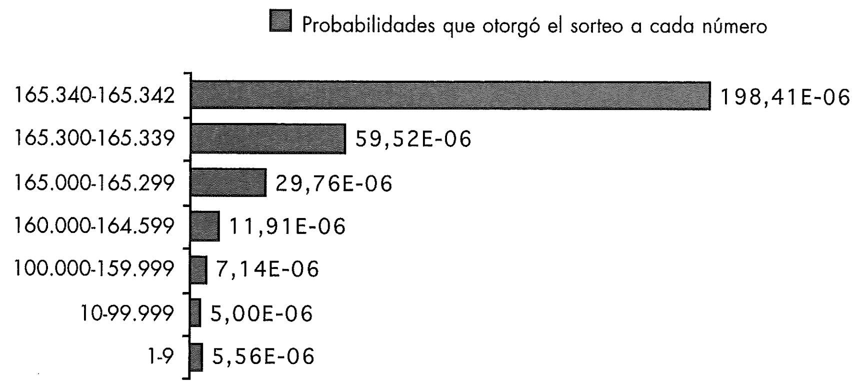


Gráfico 1

Téngase en cuenta que si el sorteo hubiese sido equiprobable, todos los números hubieran tenido como probabilidad:

$$P(n) = \frac{1}{165.342} \approx 6{,}05 \cdot 10^{-6}$$

Podemos observar que un número $n \in \{165.340, 165.341, 165.342\}$ era 40 veces más probable que otro cualquiera entre 10 y 99.999. Asimismo, el número que resultó elegido, 155.611, fue uno de los «privilegiados» por el sorteo, aunque no de los que más.

Contrastemos la distribución de probabilidades recogida en la tabla 1 con la que se puede ver en la información (cuadro 3) según la cual las probabilidades que el sorteo asignó a cada número fueron:

Si	Probabilidad
$1 \leq n \leq 99.999$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{99.999} = \frac{1}{199.998}$
$100.000 \leq n \leq 165.342$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{65.342} = \frac{1}{130.684}$

Tabla 2

Obsérvese como este modelo de asignación de probabilidades no se ajusta al mecanismo del sorteo. De hecho dicha asignación es doblemente incorrecta, pues, aun adoptando el punto de vista (erróneo) del autor, es evidente que:

$$P(n) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{65.343}, \text{si } 100.000 \leq n \leq 165.342$$

Volviendo a nuestro estudio merece la pena resaltar que, *aun cuando el primer bombo hubiera tenido la proporción justa de ceros y unos* —en orden a representar correctamente el distinto número de guarismos de la forma 0##.### respecto de los de la forma 1##.###—, *el* *sorteo hubiera sido sesgado,* pues el único cambio en este nuevo supuesto consistiría en sustituir 1/2, o bien por 99.999/165.342 (si se trata de calcular la probabilidad de un número que comience por 0), o bien por 65.343/165.342 (si se trata de calcular la probabilidad de un número que comience por 1), manteniéndose invariantes el resto de factores (véase la tabla 1). Dicho de otra forma, el motivo por el que el sorteo no fue equitativo no fue la inadecuada proporción de ceros y unos en el primer bombo, sino el hecho de que si en una determinada extracción resultaba elegida una cifra que no diera lugar a un número entre el 1 y el 165.342, se optara por reponer la bola extraída y repetir la extracción. Ésta, y no otra, fue la causa de la no equiprobabilidad del sorteo.

Sin embargo, muchas informaciones parecen reflejar como motivo de la no equiprobabilidad del sorteo la inadecuada proporción de ceros y unos en el primer bombo. Véase si no el texto extraido de *El Periódico de Aragón,* del 14 de noviembre, que aparece bajo estas líneas. Obsérvese como se dan proporciones alternativas para el primer bombo, como si la raíz del problema estuviera ahí. Ninguno de los dos cambios que se proponen hubiera hecho equiprobable el sorteo, como es fácil comprobar razonando de la misma forma que se ha hecho para calcular las probabilidades de la tabla 1.

La probabilidad de cada mozo

Retomemos nuestro análisis para ver cómo repercutió el desequilibrio probabilístico del sorteo con los bombos en la probabilidad de que el mozo representado con el número n, $1 \leq n \leq 165.342$, resultara elegido excedente de cupo.

Considero la siguiente familia de sucesos:

$$\left(EXC\_n\right)_{n=1}^{165342}$$

donde EXC_n es el suceso «El mozo con número n resulta excedente de cupo».

Comencemos calculando $P(EXC\_1)$. Para que el mozo con el número 1 resultara excedente de cupo, tal y como se ha explicado al comienzo, en el sorteo debería salir un número entre el 148.902 y el 165.342 (ambos inclusive), o bien el 1. Por tanto, a partir de las probabilidades calculadas en la tabla 1, deducimos que:

$$P(EXC\_1) = \frac{11.098}{140.000} + \frac{5.000}{84.000} + \frac{300}{33.600} + \frac{40}{16.800} + \frac{3}{5.040} + \frac{1}{180.000} = \frac{27.127}{180.000} \approx 0{,}150706$$

Cuadro 1

El bombo catea las matemáticas

Los expertos descalifican el sistema de Defensa porque provocó desigualdades

EL PERIÓDICO
Madrid

Los matemáticos y expertos en estadística coinciden en descalificar el sorteo de excedentes de cupo. El gran problema es, señalan, el empleo de los bombos, que no garantiza la igualdad de oportunidades. El sistema llegó a ser calificado de **"chapuza"** desde el punto de vista matemático por José Luis Sagredo, profesor de Matemáticas de la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos de Madrid.

Enrique González Arangüena, profesor titular de la Escuela Universitaria de Estadística, agregó que existen motivos para que los mozos acudan a un tribunal para recurrir el sistema de elección empleado. **"Yo les daría la razón"**, afirmó tajantemente.

El método utilizado por el Ministerio de Defensa **"no es el más apropiado"**, apuntó. En opinión de González Arangüena, hay muchos procedimientos que se hubieran ajustado más a la igualdad para todos los jóvenes. **"Cualquiera que tenga una mínima idea de la teoría de la probabilidad podía haber pensado en una generación de números aleatorios"**, dijo.

El **"delicado"** procedimiento de bombos hubiera sido **"menos erróneo"** si en el primer bombo, hubieran puesto cinco 0 y tres 1, **"de tal modo que las cifras superiores a 100.000 no tuvieran un plus de probabilidad"**. Otro método barajado por Arangüena hubiera sido poder marcar en el primer bombo los dos primeros dígitos. En este caso, habría bastado con colocar bolas con los números de 0 a 16 para marcar las decenas de miles de los 16.442 jóvenes eximidos de hacer la mili.

El profesor de matemáticas de la Escuela de Ingenieros Aeronáuticos de Madrid, José Luis Sagredo, consideró que el sistema empleado por Defensa **"es una chapuza"** en términos matemáticos, ya que la franja que va desde el número 116.442 hasta el 165.342 cuenta con un 35% más de posibilidades de quedar exentos que el grupo comprendido entre el 16.000 y el 99.999. Sagredo advirtió que además hay un grupo intermedio –del 1 al 16.4419–, en el que cada mozo tiene una **"probabilidad distinta a otro dentro de su misma franja". "Es curioso que el sorteo se haya decantado en el grupo donde más posibilidades había"**, concluyó.

En el sorteo se utilizaron seis bombos, uno para cada dígito. En la primera esfera, un soldado profesional introdujo 10 bolas: cinco con el número 0 y otras cinco con el número 1. De ahí nació el primer desequilibrio en el cálculo de probabilidades, ya que los mozos con número a partir de 100.000 eran 65.342 y, al ser menos que los 99.999 que les antecedían, tenían más posibilidades de quedar exentos.

Para corregir esta desigualdad se debió introducir en ese primer bombo de las centenas de millar tres bolas con el número 1, en vez de cinco.

Otra posibilidad hubiera sido la utilización de un solo bombo para determinar los dos primeros dígitos –correspondientes a las centenas y a las decenas de millar– con una secuencia de bolas del 0 al 16.

Si	***P(EXC_n)***
$1 \le n \le 9$	$\left(\frac{11.098}{140.000}+\frac{5.000}{84.000}+\frac{300}{33.600}+\frac{40}{16.800}+\frac{3}{5.040}+\frac{1}{180.000}\right)-(n-1)\cdot\left(\frac{1}{140.000}-\frac{1}{180.000}\right)=\frac{27.127}{180.000}-(n-1)\cdot\frac{1}{630.000}$
$10 \le n \le 11.098$	$\left(\frac{11.089}{140.000}+\frac{5.000}{84.000}+\frac{300}{33.600}+\frac{40}{16.800}+\frac{3}{5.040}+\frac{9}{180.000}+\frac{1}{200.000}\right)-(n-10)\cdot\left(\frac{1}{140.000}-\frac{1}{200.000}\right)=$ $=\frac{210.967}{1.400.000}-(n-10)\cdot\frac{3}{1.400.000}$
$11.099 \le n \le 16.098$	$\left(\frac{5.000}{84.000}+\frac{300}{33.600}+\frac{40}{16.800}+\frac{3}{5.040}+\frac{9}{180.000}+\frac{11.089}{200.000}+\frac{1}{200.000}\right)-(n-11.099)\cdot\left(\frac{1}{84.000}-\frac{1}{200.000}\right)=$ $=\frac{1.777}{14.000}-(n-11.099)\cdot\frac{29}{4.200.000}$
$16.099 \le n \le 16.398$	$\left(\frac{300}{33.600}+\frac{40}{16.800}+\frac{3}{5.040}+\frac{9}{180.000}+\frac{16.089}{200.000}+\frac{1}{200.000}\right)-(n-16.099)\cdot\left(\frac{1}{33.600}-\frac{1}{200.000}\right)=$ $=\frac{3.881}{42.000}-(n-16.099)\cdot\frac{13}{525.000}$
$16.399 \le n \le 16.438$	$\left(\frac{40}{16.800}+\frac{3}{5.040}+\frac{9}{180.000}+\frac{16.389}{200.000}+\frac{1}{200.000}\right)-(n-16.399)\cdot\left(\frac{1}{16.800}-\frac{1}{200.000}\right)=\frac{3.569}{42.000}-(n-16.399)\cdot\frac{229}{4.200.000}$
$16.439 \le n \le 16.441$	$\left(\frac{3}{5.040}+\frac{9}{180.000}+\frac{16.429}{200.000}+\frac{1}{200.000}\right)-(n-16.439)\cdot\left(\frac{1}{5.040}-\frac{1}{200.000}\right)=\frac{17.387}{210.000}-(n-16.439)\cdot\frac{2.437}{12.600.000}$
$16.442 \le n \le 16.450$	$\left(\frac{9}{180.000}+\frac{16.432}{200.000}+\frac{1}{200.000}\right)-(n-16.442)\cdot\left(\frac{1}{180.000}-\frac{1}{200.000}\right)=\frac{16.443}{200.000}-(n-16.442)\cdot\frac{1}{1.800.000}$
$16.451 \le n \le 99.999$	$\frac{16.442}{200.000}$
$16.451 \le n \le 99.999$	$\left(\frac{16.441}{200.000}+\frac{1}{140.000}\right)-(n-100.000)\cdot\left(\frac{1}{140.000}-\frac{1}{200.000}\right)=\frac{115.097}{1.400.000}-(n-100.000)\cdot\frac{3}{1.400.000}$
$16.451 \le n \le 99.999$	$\frac{16.442}{140.000}$
$16.451 \le n \le 99.999$	$\left(\frac{16.441}{140.000}+\frac{1}{84.000}\right)-(n-160.000)\cdot\left(\frac{1}{84.000}-\frac{1}{140.000}\right)=\frac{3.083}{26.250}-(n-160.000)\cdot\frac{1}{210.000}$
$16.451 \le n \le 99.999$	$\left(\frac{5.000}{84.000}+\frac{11.441}{140.000}+\frac{1}{33.600}\right)-(n-165.000)\cdot\left(\frac{1}{33.600}-\frac{1}{140.000}\right)=\frac{5.651}{40.000}-(n-165.000)\cdot\frac{19}{840.000}$
$16.451 \le n \le 99.999$	$\left(\frac{300}{33.600}+\frac{5.000}{84.000}+\frac{11.141}{140.000}+\frac{1}{16.800}\right)-(n-165.300)\cdot\left(\frac{1}{16.800}-\frac{1}{140.000}\right)=\frac{31.099}{210.000}-(n-165.300)\cdot\frac{11}{210.000}$
$16.451 \le n \le 99.999$	$\left(\frac{40}{16.800}+\frac{300}{33.600}+\frac{5.000}{84.000}+\frac{11.101}{140.000}+\frac{1}{5.040}\right)-(n-165.340)\cdot\left(\frac{1}{5.040}-\frac{1}{140.000}\right)=\frac{189.409}{1.260.000}-(n-165.340)\cdot\frac{241}{1.260.000}$

Tabla 3

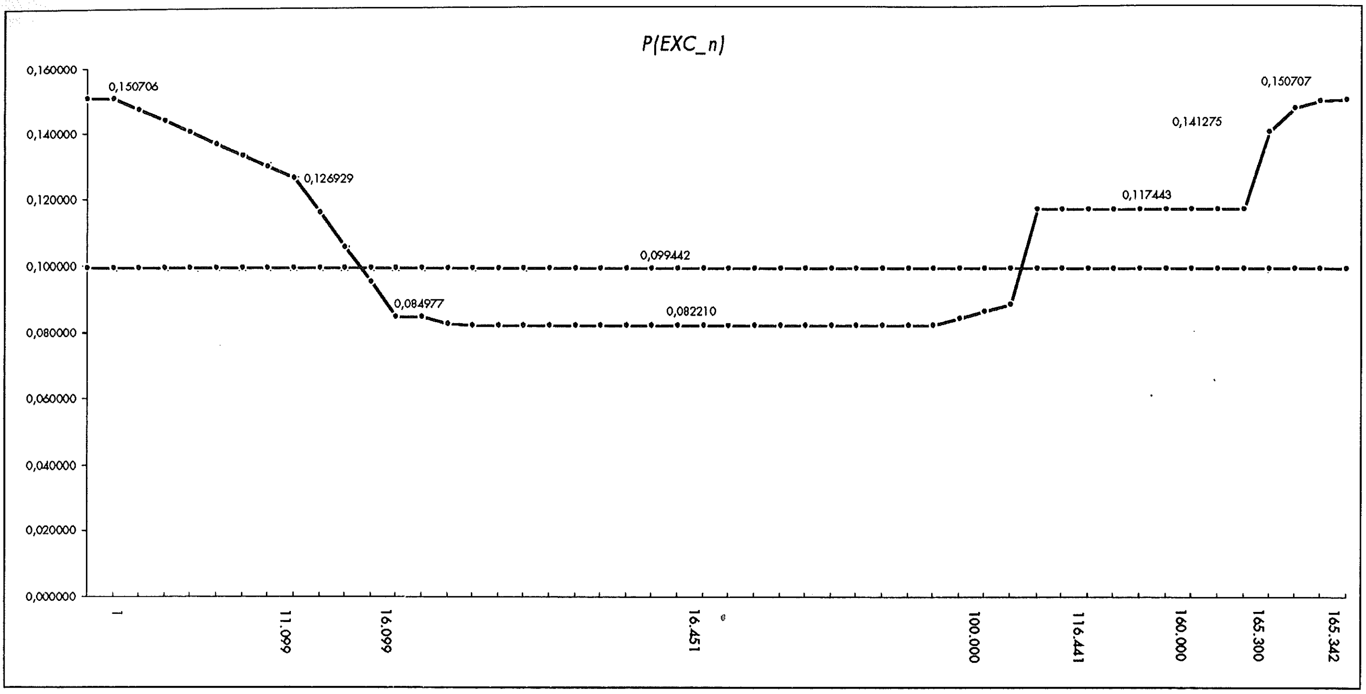


Gráfico 2

Procediendo con un poco de paciencia, es posible determinar las probabilidades de cada uno de los sucesos *EXC_n*. En la tabla 3 podemos seguir el cálculo detallado de dichas probabilidades.

Para hacernos una idea de cómo varía $P(EXC\_n)$ según n podemos obrservar el gráfico 2.

En dicho gráfico, la línea horizontal determina la situación que se hubiera dado si el sorteo de los excedentes de cupo hubiese sido equiprobable, es decir, si todos los números otorgasen a su poseedor la misma probabilidad de salir excedente de cupo:

$$P(EXC\_n) = \frac{16.442}{165.342} \approx 0{,}099442$$

El número que más probabilidades proporcionó a su poseedor para ser elegido excedente de cupo fue el 165.342, con:

$$P(EXC\_165.342) = \frac{21.099}{140.000} \approx 0{,}150707$$

Por el contrario, los números que menos probabilidades otorgaron a sus dueños —entre los que se encontraba, por desgracia, el que me representaba a mí—, fueron los comprendidos entre el 16.451 y el 99.999, con:

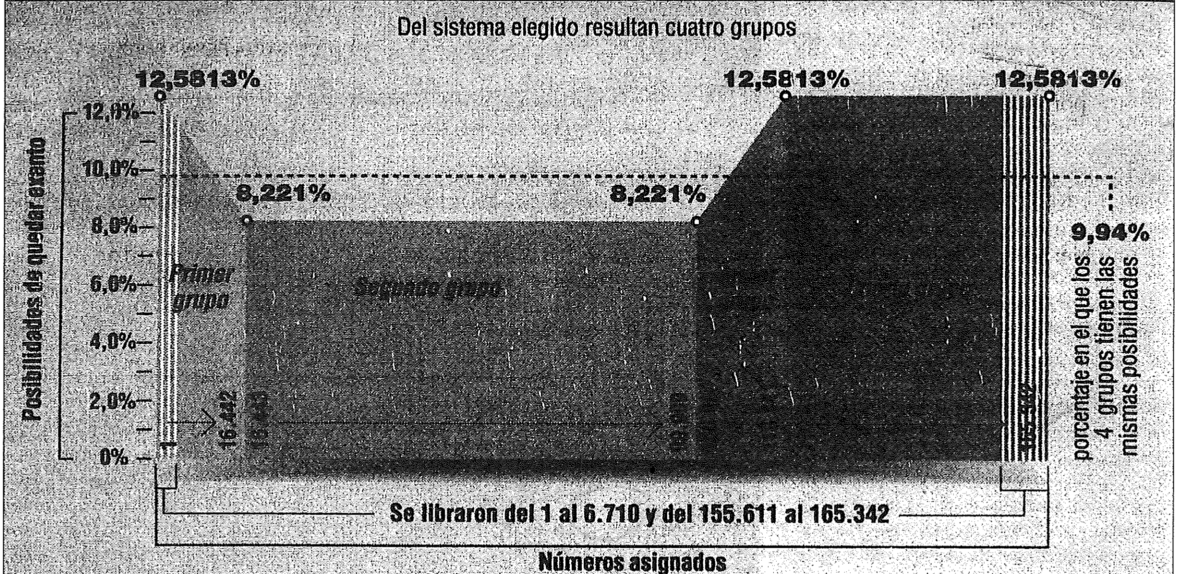
$$P(EXC\_j) = \frac{16.442}{200.000}; \qquad \text{donde } 16.451 \leq j \leq 99.999$$

De hecho, el resultado del sorteo vino a refrendar este desequilibrio probabilístico...

Puede comprobarse que los números comprendidos entre el 15.080 y el 108.040 (ambos inclusive) tuvieron menos probabilidades que las que les hubiera asignado un sorteo justo. De hecho, el resultado del sorteo vino a refrendar este desequilibrio probabilístico pues, a la postre, resultaron elegidos los números comprendidos entre el 155.611 y el 165.342, o bien entre el 1 y el 6.710, todos ellos beneficiados por la no equiprobabilidad del sorteo.

Retornemos de nuevo al análisis de algunas noticias aparecidas en la prensa. Merece resaltarse el contraste entre el gráfico 2 y los que aparecen en las informaciones de *El Mundo* y de *El País* del día 14 de noviembre (ver cuadros 2 y 3). Frente a las 14 variaciones de pendiente que podemos observar en la tabla 3 y que manifiesta la línea que une los puntos representando las probabilidades que cada número otorgó a su poseedor para ser elegido excedente de cupo, ambos gráficos únicamente muestran 4. Evidentemente el error en dichos gráficos proviene de la inadecuada asignación de probabilidades ya comentada (véase la tabla 2).

Ventajas y desventajas en el sorteo



El segundo grupo es el que tiene menos posibilidades.

$$\frac{1}{2} \times \frac{16.442}{99.999} = 0{,}08221 \rightarrow 8{,}221\%$$

El cuarto grupo es el que tiene más posibilidades.

$$\frac{1}{2} \times \frac{16{,}442}{65{,}343} = 0{,}125813 \rightarrow 12{,}5813\%$$

La razón aritmética de estas progresiones decreciente la primera y creciente la tercera es el 0.0002651

Los 48.901 jóvenes del 4º grupo tienen un 53% más de probabilidades de salir excedentes de cupo que los 83.557 jóvenes del 2º grupo.

Documentación: Leandro Alvarez Villalón — EL MUNDO

El sorteo aleatorio previo no elimina la injusticia

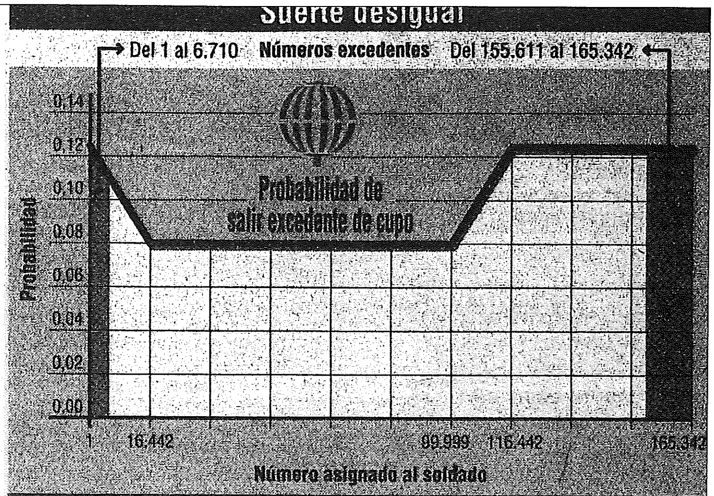
El sorteo para decidir los excedentes de cupo en el servicio militar fue claramente irregular, de manera que unos jóvenes fueron beneficiados frente a otros.

◆ Defensa se acoge al sorteo previo de los mozos para sostener que la lotería posterior dio las mismas oportunidades a todos. Destaca que realizó anteriormente un reparto aleatorio de un *décimo* a cada recluta con el que concursaba después y que este hecho igualaba oportunidades.
Sin embargo, su justificación no es matemáticamente cierta. Pese a que el orden de reparto de números sí que fue puro (un ordenador secuenció todas las combinaciones posibles con los 165.000 reclutas y se escogió una de las mismas al azar) el hecho de que los boletos no tuvieran todos la misma oportunidad sigue siendo insoslayable: en un ejemplo extremo, para que a uno le toque la lotería, su décimo debe entrar en el sorteo; si esto no ocurre, o sus oportunidades de salir son menores, se produce un desequilibrio, aunque el nombre y apellido del damnificado sea escogido al azar.

◆ El gráfico demuestra que los mozos que sortearon podían encontrarse en cuatro grupos distintos de posibilidades. El segmento más perjudicado por las cinco bolas con un 0 y cinco con un 1 es el que se encuentra entre los números 16.443 y 99.999, mientras que el parcial más beneficiado se encuentra entre el 116.442 y el 165.342.

◆ Como resultado, a consecuencia de su colocación aleatoria en la lista, el grupo cuarto tiene un 53% más de probabilidades de salir excedente de cupo que los integrados en el segundo apartado, mientras que el primero y el tercero se hallan en un estadio intermedio, con una desventaja variable en el propio segmento.

Cuadro 2



EL PAÍS

Un problema con fácil solución

JAVIER PORTELA

Para realizar correctamente el sorteo era necesario tomar un número entre el 000001 y el 165.342, asignando idéntica probabilidad a cada uno de ellos. Sin embargo, el sorteo se hizo tomando de un bombo el número 0 o 1, con igual probabilidad, escogiendo **después**, en un segundo bombo, un número del 0 al 9, de forma que el primer número escogido fue un 1 y el segundo un 8, por lo que se volvió a tomar una bola **del segundo bombo,** hasta que salió un número inferior o igual a seis. El error matemático radica en mantener fijo el resultado del primer bombo.

Como consecuencia, no se asignó la misma probabilidad de salir a todos los números entre el 1 y el 165.342. La probabilidad de que tocara el número concreto A, situado entre el 1 y el 99.999, era de un medio por 1 dividido 99.999, mientras que la probabilidad de que tocara el número concreto B, situado entre el 100.000 y el 165.342, era de un medio por 1 dividido 65.342.

Esto trae consecuencias sobre la probabilidad de salir excedente de cupo **en el caso particular de cada recluta**. Esta probabilidad varía según el número asignado al recluta, como se refleja en el gráfico. Es decir, los reclutas con número entre el 16.442 y el 99.999 tenían una probabilidad de salir excedente de cupo aproximadamente de 0,082, mientras que los situados en el tramo que va de 116.442 a 165.342 tenían una probabilidad aproximada de 0,1258, cerca del 50% más.

Para los reclutas situados entre el 1 y el 16.442, la probabilidad dependía linealmente del número asignado, de manera que el número 3 tenía más probabilidades que el 4. Lo mismo ocurría con el tramo de 100.000 a 116.342, pero inversamente: el recluta número 110.000 tenía menos probabilidades que el 110.101.

El sorteo estaría bien hecho si se hubieran tirado los 6 bombos seguidos, repitiendo todo el proceso de sorteo, incluido el primer bombo, si saliera un número superior a 165.342. La probabilidad de tener que repetir una vez el sorteo por esta causa es relativamente baja, de 0,173.

Si la asignación inicial de los números a los reclutas fue realmente aleatoria, no se ve la necesidad de un sorteo adicional: bastaba con declarar excedente de cupo a los 16.442 primeros.

Javier Portela es profesor de la Escuela de Estadística de la Universidad Complutense de Madrid.

Cuadro 3

¿Sorteo equitativo?

Llegados a este punto, estamos en situación de plantearnos la pregunta que a mí, como parte afectada, más me interesa. ¿Fue el proceso en su conjunto equitativo? Es decir. ¿Cualquier mozo tenía al inicio del mismo la misma probabilidad de ser excedente de cupo? Si logramos zafarnos del influjo de los cálculos anteriores, vamos a ver que sí.

¿Cualquier mozo tenía al inicio del mismo la misma probabilidad de ser excedente de cupo?

Recordemos que el proceso había comenzado con la asignación equiprobable a cada mozo de un número entre el 1 y el 165.342, y que, posteriormente, el sorteo determinó 16.442 números cuyos poseedores fueron los excedentes de cupo.

Ya hemos visto que hubo unos números que dotaron a sus dueños de más probabilidad que otros. Pero advirtamos que los procesos de asignación de un número aleatorio a cada mozo y de elección de los 16.442 números determinando los excedentes de cupo fueron procesos independientes, es decir, el resultado del primer proceso no tuvo ninguna influencia en el desarrollo del segundo. Por tanto, aun cuando el sorteo para la elección de los excedentes no otorgó las mismas probabilidades a todos los números, la probabilidad que tenía cada mozo de que le correspondiera uno de los 16.442 números posteriormente determinados por el sorteo era igual para todos:

$$\frac{16.442}{165.342}$$

pues la asignación de números a cada mozo sí fue equiprobable.

Podemos llegar a la misma conclusión razonando desde otro punto de vista, más formal. Para ello consideremos un mozo cualquiera, X, de los 165.342 posibles. Se trata de determinar la probabilidad del siguiente suceso:

X_exc := «X resulta excedente de cupo»

Consideremos ahora la siguiente familia de sucesos:

$$\left(N_i^X\right)_{i=1}^{165.342}$$

donde:

N_i^X : «A X le corresponde el número i en la asignación aleatoria de números»

Aplicando el teorema de la probabilidad total obtenemos que:

$$P[X\_exc] = \sum_{i=1}^{165.342} P[X\_exc \mid N_i^X] \cdot P[N_i^X] =$$

$$= \frac{1}{165.342} \cdot \sum_{i=1}^{165.342} P[X\_exc \mid N_i^X]$$

Ahora nótese que el suceso $X\_exc \mid N_i^X$ coincide con el que antes hemos denotado por EXC_i.

Sustituyendo los valores de $P[EXC\_i]$ dados en la tabla 3, se comprueba que:

$$\sum_{i=1}^{165.342} P[X\_exc \mid N_i^X] = \sum_{i=1}^{165.342} P[EXC\_i] = 16.442$$

De todo este estudio cabe concluir que ninguno de los que fuimos parte interesada en todo este asunto debe sentirse perjudicado por el proceso de elección de los excedentes de cupo.

Así: $$P[X\_exc] = \frac{16.442}{165.342}$$

y esto es válido para cualquier mozo X.

De todo este estudio cabe concluir que ninguno de los que fuimos parte interesada en todo este asunto debe sentirse perjudicado por el proceso de elección de los excedentes de cupo. Puede hablarse de que unos números fueron más afortunados que otros pero no que hubiera, a priori, mozos con más probabilidad que otros de resultar excedentes de cupo.

No parece opinar lo mismo el autor de la información aparecida en *El Mundo* (ver cuadro 2), para quien la argumentación anterior «no es matemáticamente cierta».

Disgresión final

Pese a que, juzgado desde el principio, el proceso de elección de los excedentes de cupo puede considerarse justo, no deja de ser lamentable el modo en que se realizó el sorteo con los bombos, de acuerdo a los fines que se perseguían: la elección de un número entre el 1 y el 165.342 de forma equiprobable. Tal propósito se hubiera conseguido, en la situación del sorteo, con el siguiente procedimiento: si en alguna de las seis extracciones, la cifra determinada diera lugar a un número no comprendido entre el 1 y el 165.342, entonces toda la secuencia de extracciones debe repetirse desde el principio, es decir desde el bombo de las centenas de millar.

¿Por qué este procedimiento garantiza la equiprobabilidad en la elección de un número entre 1 y 165.342? Por el siguiente motivo. Recuérdese que partimos de seis bombos, uno para cada cifra. El primero con diez bolas, cinco con el 0 y cinco con el 1. El resto con diez bolas numeradas del 0 al 9. En tal situación, lo que sí es evidente es que podemos elegir un número entre el 0 y 199.999 de forma equiprobable. En términos más técnicos diríamos que estamos en condiciones de simular una variable aleatoria uniforme discreta con rango {0, 199.999}. Ahora conviene hacer notar que la restricción de una variable aleatoria uniforme a cualquier subdominio de su rango vuelve a ser una variable aleatoria uniforme con rango dicho subdominio.

Así, con el procedimiento consistente en desechar, de todos los números que podían determinarse con los seis bombos ({0, 199.999}), aquéllos no comprendidos entre 1 y 165.342, lo que estamos haciendo es simular una variable uniforme discreta con rango {1, 165.342}, o lo que es lo mismo, estamos garantizando que todos los números entre 1 y 165.342 tienen la misma probabilidad de ser elegidos.

Denotemos al modelo probabilístico subyacente a este modo de proceder como *modelo B*.

A continuación me gustaría plantear la siguiente reflexión. Supóngase que el número elegido, 155.611, lo hubiera sido sin necesidad de repetir ninguna extracción (recuérdese que tuvo que repetirse la extracción de la segunda cifra, pues inicialmente salió un 8). En tal supuesto, hubiese sido imposible discernir si el modelo probabilístico que regía el sorteo era el *modelo A*, que como hemos visto no asignó las mismas probabilidades a todos los números, o bien era el *modelo B* que sí asigna igual probabilidad a todos los números. Es decir, no hubiésemos tenido evidencias para poder afirmar que el sorteo no era equiprobable. Por tanto, ante el aluvión de críticas que igualmente se hubiera producido, un responsable del Ministerio de Defensa habilidoso en cuestiones probabilísticas hubiese podido alegar que el modelo que regía el sorteo era el B (equiprobable) y no el A (no equiprobable), y nadie, a partir de un número elegido sin repetir ninguna extracción, hubiera podido demostrar lo contrario.

Lamentablemente para la reputación del Ministerio de Defensa, se repitió una de las extracciones con lo que quedó de manifiesto que el modelo probabilístico que gobernó el sorteo fue el A (no equiprobable) y no el B (equiprobable).

En este contexto, podemos preguntarnos por la probabilidad de que en el proceso de elección de las seis cifras de los seis bombos (según el *modelo A*), tuviera que repetirse al menos una de las extracciones. Uno de los procedimientos posibles para su cálculo es el siguiente. Debemos hallar la probabilidad del siguiente suceso:

S: «Se repite al menos una de las seis extracciones en la elección de un número de seis cifras con los seis bombos»

Recuérdense las familias de sucesos:

$$(A_i)_{i=0}^{1}, (B_i)_{i=0}^{9}, (C_i)_{i=0}^{9}, (D_i)_{i=0}^{9}, (E_i)_{i=0}^{9}, (F_i)_{i=0}^{9}$$

ya utilizadas en los cálculos iniciales.

A partir de teorema de la probabilidad total, se obtiene:

$$P[S] = P[S|A_0]\cdot P[A_0] + P[S|A_1]\cdot P[A_1] =$$
$$= 0\cdot\frac{1}{2} + P[S|A_1]\cdot\frac{1}{2}$$

De nuevo por el teorema de la probabilidad total:

$$P[S|A_1] = P\left[S\middle|A_1\cap\left(\bigcup_{i=1}^{5}B_i\right)\right]\cdot P\left[\bigcup_{i=1}^{5}B_i\right] + P[S|A_1\cap B_6]\cdot P[B_6]$$
$$+P\left[S\middle|A_1\cap\left(\bigcup_{i=7}^{9}B_i\right)\right]\cdot P\left[\bigcup_{i=7}^{9}B_i\right] = 0 + P[S|A_1\cap B_6]\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{3}{10}$$

Análogamente:

$$P[S|A_1\cap B_6] = 0 + P[S|A_1\cap B_6\cap C_5]\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{4}{10}$$
$$P[S|A_1\cap B_6\cap C_5] = 0 + P[S|A_1\cap B_6\cap C_5\cap D_3]\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{6}{10}$$
$$P[S|A_1\cap B_6\cap C_5\cap D_3] = 0 + P[S|A_1\cap B_6\cap C_5\cap D_3\cap E_4]\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{5}{10}$$
$$= 0 + \frac{7}{10}\cdot\frac{1}{10} + 1\cdot\frac{5}{10} = \frac{57}{100}$$

Luego sustituyendo, se tiene:

$$P[S|A_1\cap B_6\cap C_5] = \frac{57}{100}\cdot\frac{1}{10} + \frac{6}{10} = \frac{657}{1.000}$$
$$P[S|A_1\cap B_6] = \frac{657}{1.000}\cdot\frac{1}{10} + \frac{4}{10} = \frac{4.657}{10.000}$$
$$P[S|A_1] = \frac{4.657}{10.000}\cdot\frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{34.657}{100.000}$$
$$P[S|A_1] = \frac{34.657}{100.000}\cdot\frac{1}{2} = \frac{34.657}{200.000} \approx 0{,}1733$$

Así, puede considerarse que el Ministerio de Defensa tuvo «mala suerte» al producirse la repetición de una extracción.

Vuelvo a insistir en que, de no haberse producido dicha repetición, el proceso seguido se hubiera podido interpretar como la simulación de una variable aleatoria uniforme discreta con rango {1, 165.342} (*modelo B*). O dicho de otra forma más clara: no hubiésemos tenido indicios para pensar que el sorteo era injusto.

Finalizo manifestando mi deseo de que este artículo haya servido para mostrar las múltiples caras de un problema que, a la vista de las opiniones vertidas en los medios de comunicación, no parece haber sido objeto de un examen excesivamente riguroso.

Roberto Marcellán
Alumno de CAP
ICE de Zaragoza.
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»

SUMA 27
febrero 1998, pp. 91-96

Números insumisos. El ejército en el aula

Miguel Barreras Alconchel

La vida es la escuela de la probabilidad

Walter Bagehot

En contra de lo que algunos creen, es posible abordar con éxito muchos problemas cotidianos de probabilidad, sin más instrumento que una mente ordenada. A partir de un sencillo juego, intentaremos desmontar el mito de que el análisis del polémico sorteo de excedentes de cupo está vedado a cualquier persona que no sea «de ciencias». Nos sorprenderemos de cómo pudo hacerse tan mal, analizaremos los resultados expuestos en la prensa y conjeturaremos qué puede ocurrir cuando no se tienen en cuenta las matemáticas.

IDEAS Y RECURSOS

A PRINCIPIOS de noviembre de 1997 el Ministerio de Defensa, en boca de su máximo representante, el señor Serra, sorprendía a propios y extraños con una «propuesta» muy original: introducir el ejército español en las escuelas.

El pasado 12 de noviembre se celebró un sorteo, anunciado con anterioridad a bombo y platillo por todos los medios de comunicación, a través del cual el azar iba a decidir los 16.442 jóvenes que podrían librarse del servicio militar entre los 165.342 convocados a filas.

La forma de llevar a cabo esta peculiar lotería suscitó, durante los tres días siguientes –sólo los tres días siguientes–, una interesante polémica salpicada de jugosas declaraciones que no desentonarían en una película de los hermanos Marx.

Cuando surgió la polémica, quien más quien menos atisbaba visos de no equidad en el proceso. Los entendidos lo aseguraban. Nunca las matemáticas habían disfrutado de tanto protagonismo en los medios de comunicación. Pero daba la sensación de que analizar con rigor el problema era sólo potestad de mentes especializadas en el asunto. Existe la idea generalizada de que cualquier problema probabilístico requiere, al menos, conocimientos previos de combinatoria y otras destrezas de cálculo. Son muchas las personas que piensan así. Una de ellas es el subsecretario de Defensa, señor Menéndez: «Yo no domino los argumentos probabilísticos, porque soy de Letras». No sabemos si este señor se da realmente cuenta de lo que dice. No sólo asevera que él mismo no domina la probabilidad (de lo cual no tenemos ninguna duda), sino que, en un peligroso alarde de generalización, asegura que cualquier persona que se precie de «ser de Letras» necesariamente no puede dominar los argumentos probabilísticos.

Vamos a intentar mostrar que el asunto no compete específicamente a gente de ciencias ni de letras ni de nada, que simplemente se requiere tener una mente un tanto «ordenada».

Parecía mentira que el Ministerio de Defensa, con sus asesores, hubiera cometido tamaño error. Pero cualquier profesor de matemáticas medianamente avispado entendía la jugada. No. Nuestro ministro de Defensa no había metido la pata. Con este espectacular gambito, el ministro de defensa ataca y consigue su objetivo: introducir el ejército en las aulas.

Un problema más sencillo

En primer ciclo de la ESO

En niveles en los que no están acostumbrados todavía al concepto de probabilidad se puede abordar el problema partiendo del siguiente juego.

Consideremos el tablero representado en el cuadro 1.

Se juega por parejas. Cada jugador dispone de 5 fichas que debe colocar en casillas distintas entre las 16 de su lado. Cada vez que salga un número en el que se encuentre una ficha, ésta se retira (se salva). Gana el que antes salva sus 5 fichas. Cada pareja jugará 5 partidas.

Si se jugara con un dado de 16 caras, la partida no tendría ningún interés. Sería un juego de puro azar. Prescindiremos del dado: los números se obtendrán con ayuda de la tecla RAM de la calculadora: nos fijaremos sólo en la última cifra del número aleatorio que obtengamos en la pantalla. Realizaremos dos «tiradas», una para la cifra de las decenas, otra para las unidades:

- Cifra de las decenas: si es par, el cero; impar, el uno.
- Cifra de las unidades: si sale 7, 8 o 9, se pulsa otra vez la tecla *para obtener otra cifra válida para las unidades*. Éste es el método que se utilizó en el famoso sorteo de los excedentes de cupo. Lo llamaremos Método Serra (MS).

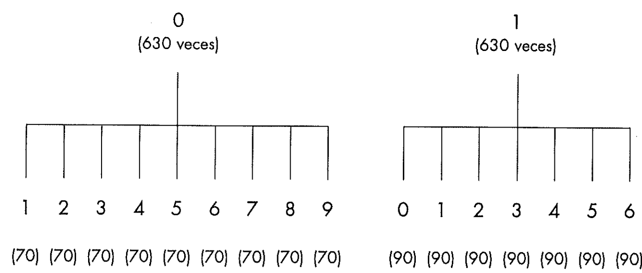
Cada jugador anotará todos los números que va obteniendo, así como la estrategia que utiliza al principio de cada partida (si es que utiliza alguna) y el porqué de la misma. Al finalizar las 5 partidas, cada pareja escribirá, conjuntamente, un pequeño análisis del juego.

Con todos los resultados de todos los alumnos que se han ido obteniendo se elaborará un gráfico que represente la frecuencia de cada número.

Combinada esta estadística global con las conclusiones de las parejas es muy probable que se llegue al siguiente resultado:

Primera conclusión: El MS no es justo.

En todo caso podemos, sin salirnos de este nivel, profundizar más, formalizando el resultado, calculando la probabilidad de cada número. Supongamos que, utilizando el MS, realizamos 1.260 sorteos. El número de veces que cabe esperar obtener cada número se representa en el siguiente diagrama:



Segunda conclusión: cada número de una cifra saldría 70 veces (de 1.260) –un 5,6% –, y cada uno de dos cifras 90 veces –un 7,1%–, ya que:

$$P(03) = \frac{1}{2}\frac{1}{9} = 0,056$$

$$P(13) = \frac{1}{2}\frac{1}{7} = 0,071$$

En segundo ciclo de ESO

Para grupos que, en cursos anteriores, ya se han familiarizado con la idea de probabilidad, podemos idear otro tipo de actividad: después de explicar el MS (lo puede hacer directamente el profesor o, más interesante, que los mismos alumnos lo conozcan a través de recortes de prensa), provocar un debate acerca de la conveniencia o no del procedimiento que se utilizó. En principio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Cuadro 1

pueden valer opiniones de tipo meramente intuitivo, pero se tenderá a que las tesis que se expongan sean argumentativas. Oiremos así razonamientos de este tipo:

- «El sorteo está mal hecho: varios profesores de estadística lo han escrito en los periódicos».
- «El sorteo es justo: en el segundo bombo *estaban* las bolas 7, 8 y 9 y así la probabilidad del 03 era la misma que la 13».
- «Si cuando salían éstas no se tenían en cuenta y se devolvían, ¿qué más da que estuvieran? Lo mismo hubiera dado meter en su lugar tornillos o ciruelas».
- «Pero, ¿cómo se van a meter más de 165.000 bolas en un bombo?».

Mas la clave radica en la pregunta retórica de María:

- «¿Qué os parecería si, en vez de haber 165.342 números, hubiera 100.000 y se utilizara el MS? En cuanto saliera el 1, ya estaríamos seguros de que era el 100.000 el número agraciado: así, este número tendría el 50% de probabilidad en salir, mientras que los demás una muchísimo más baja (0,0005%)».

¡Contundente!

Después de esto sólo queda calcular, efectivamente, las *distintas* probabilidades. Para no agobiarnos con el cálculo propondremos un problema un poco más sencillo: *Calcular las probabilidades de cada número en un rifa de 165 números, si se aplica el MS.*

Es sencillo utilizando la estrategia del diagrama de árbol y aplicando probabilidades condicionadas. Así, por ejemplo:

$$p(005) = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{9} = 0,006$$

$$p(091) = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{10} = 0,005$$

$$p(159) = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{10} = 0,007$$

$$p(164) = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{6} = 0,012$$

El resultado puede representarse en una tabla:

Número	*Probabilidad*
001-009	$p_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{9} = 0,006$
010-099	$p_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{10} = 0,005$
100-159	$p_3 = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{10} = 0,007$
160-165	$p_4 = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{6} = 0,012$

Aún podemos ir más allá. El MS salvaba al número que salía y a los siguientes hasta completar una lista de 16.442 excedentes. ¿Cuál era la probabilidad de cada número de resultar excedente? Evidentemente no era la misma, pero, ¿diferían mucho unas de otras?

Supongamos la lotería anterior (de 165 números solamente) y pongamos, por ejemplo, que se salvan hasta 20. ¿Cómo calcular la probabilidad de cada uno? Es un problema de probabilidades acumuladas.

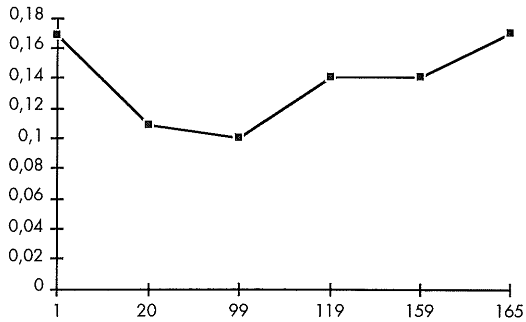
Por ejemplo, el 165 se salvaría si saliera ese número, o el 164, o..., hasta el 146. Es decir P(165) = $6p_4 + 14p_3$ = 0,17. Sin embargo, la del 80, por ejemplo, baja considerablemente: P(80) = $20p_2$ = 0,10. Los desequilibrios se exageran.

Es bueno animar al alumno a que represente sus conclusiones. Puede hacerse mediante una tabla:

	1	**20**	**99**	**119**	**159**	**165**
p_1	1	9				
p_2		11	20			
p_3	13			20	20	14
p_4	6					6
p	**0,169**	**0,109**	**0,100**	**0,140**	**0,140**	**0,170**

Si el sorteo fuera justo, la probabilidad de librarse de cada soldado debería ser de 20/165, esto es, 0,12, aproximadamente. Con el MS unos tienen más, porque otros tienen menos.

Pero la representación más completa es según la siguiente gráfica:



El problema general

Ya estamos en disposición de abordar el problema del sorteo de excedentes de cupo. Quizá a estas alturas, una vez comprobada la ilegalidad del proceso, los chicos estén un poco cansados de echar cuentas. Podemos animarles con el siguiente argumento: todos los periódicos han asegurado, a través de distintos asesores, que el procedimiento no era justo, llegando incluso a calcular las distintas probabilidades de librarse de la mili, pero sin explicar cómo las calculaban. ¿Seremos nosotros capaces de llegar a las mismas conclusiones?

Con un poco de paciencia, generalizando el ejercicio anterior, llegaremos a completar la tabla en la que aparecen las distintas probabilidades de salir un determinado número con el MS:

1-9	$p_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{180.000} \approx 5{,}56\cdot 10^{-6}$
10-99.999	$p_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{200.000} \approx 5\cdot 10^{-6}$
100.000-159.999	$p_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{140.000} \approx 7{,}14\cdot 10^{-6}$
160.000-164.999	$p_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{84.000} \approx 11{,}91\cdot 10^{-6}$
165.000-165.299	$p_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{33.600} \approx 29{,}76\cdot 10^{-6}$
165.300-165.339	$p_5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{16.800} \approx 59{,}52\cdot 10^{-6}$
165.340-165.342	$p_6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5.040} \approx 198{,}41\cdot 10^{-6}$

Y, para acabar, hemos de acumular por tramos las 16.442 probabilidades, de distintos pesos específicos, para obtener las probabilidades de ser excedente:

N	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	P_T
165.342			11.099	5.000	300	40	3	0,150707
165339			11.102	5.000	300	40		0,150133
165.299			11.142	5.000	300			0,148038
164.999			11.442	5.000				0,141252
159.999			16,442					0,117443
116.441			16.442					0,117443
99.999		16.442						0,0822108
16.451		16.442						0,0822108
16.442	9	16.433						0,0822110
16.439	9	16.430					3	0,0827911
16.399	9	16.390				40	3	0,084972
16.099	9	16.090			300	40	3	0,0924006
11.099	9	11.090		5.000	300	40	3	0,126924
9	9	11.090		5.000	300	40	3	0,15070
1	1		11.098	5.000	300	40	3	0,150705

Obsérvese que, mientras la mayoría cuenta con una probabilidad de 0,08, inferior a la que sería la justa (16.442/165.342, casi 0,1), existen otros favorecidos a priori cuya probabilidad asciende a 0,15, casi el doble. Está claro que en la tabla anterior se ha calculado la probabilidad de los extremos de los intervalos, sólo dos segmentos mantienen constante la probabilidad, el resto presenta un crecimiento o decrecimiento lineal.

Aprovechamiento didáctico de la prensa

La comparación de nuestro estudio con las conclusiones de la prensa resulta una actividad sumamente interesante.

En la página siguiente se reproducen artículos de tres diarios y se trata de realizar un comentario con los alumnos.

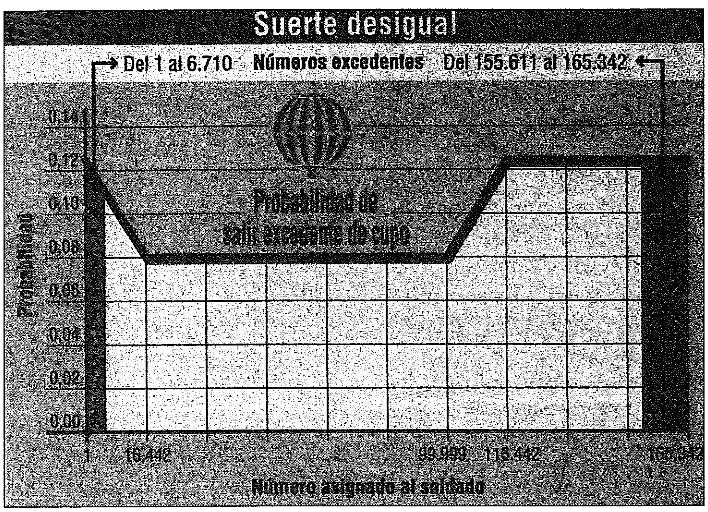
Ejercicio:

Busca los errores del *Heraldo de Aragón* (dos, gordos). Analiza la pobreza del análisis de *El Mundo (ABC)* y busca un error. Analiza el estudio de *El País*, comenta la «simplificación» que hace a partir del 116.442 y compara su 0,12 con nuestro 0,15%.

UN PROBLEMA MATEMÁTICO

«El problema estriba en que para sortear los 16.442 excedentes de cupo en un contingente de 165.342 soldados, Defensa puso en el bombo de la primera cifra (centenas de millar) el mismo número de bolas del cero que del uno. El cero, por tanto abría la puerta a librarse de la mili a 99.000 personas y el uno, a 65.342. Cada uno de los primeros contaba con un 0,08 por ciento de posibilidades de salir; a partir del número 100.000, tenían mayores probabilidades: un 0,13 por ciento».

Heraldo de Aragón (14-XI-97)



El País (15-XI-97)

«Otros dos profesores de la Complutense (...) describieron esta semana en el diario Abc las probabilidades que correspondieron a cada número, de acuerdo al sorteo realizado por Defensa. Los resultados fueron los siguientes:
1: 1/100.000.
2-99.999: 1/200.000.
100.000-159.999: 1/140.000
160.000-164.999: 1/84.000
165.000-165.299: 1/16.800
165.340-165.342: 1/5.040».

El Mundo (15-XI-97)

Cómo debió hacerse

Ya hemos demostrado que el sorteo no sólo se hizo mal, sino muy mal. No podemos dar por acabado el análisis sin intentar dar respuesta a la pregunta: pero, ¿cómo debió hacerse?

Como se ha trabajado con la prensa en clase, todo el mundo tiene una respuesta aparente: cuando, después de haber salido en el primer bombo el 1, del segundo se extrajo un 8 (lo que provocaba un número inexistente), debió repetirse el sorteo pero empezando de nuevo por el principio.

Una objeción: este proceso no es necesariamente finito. Podemos imaginar obtener continuamente unos del primer bombo y luego, del segundo, que no dejaran de salir sietes, ochos o nueves. O que, por fin, sacáramos seis del segundo, pero el tercero se negara todas las veces a expulsar otra cosa que no fueran seises o sietes u ochos o nueves. Los jóvenes extraedores de bolas barbudos y exhaustos, las candidatos a excedentes, cuarentones barrigudos, viendo cómo sus propios hijos se libran de la mili antes que ellos. Ciertamente es muy poco probable que esto ocurriera, pero es posible. Ningún matemático riguroso debería conformarse con esta solución aparente.

¿Cómo hacerlo, pues? Acabamos la actividad abriendo un nuevo debate.

El comentario de la página anterior del *Heraldo de Aragón* parece sugerir una posible solución apuntada por algún otro diario: dado que el MS favorece a los números que empiezan por 1 (los ciento y pico mil), se podría descompensar la composición del primer bombo metiendo 9 ceros y 7 unos. Este arreglo valdría para el caso del problema propuesto al principio de los 16 números pero no soluciona el caso general ya que, por ejemplo:

$$p(099.999)=\frac{9}{16}\,\frac{1}{99.999}=\frac{1}{177.776}$$

$$p(165.342)=\frac{7}{16}\,\frac{1}{7}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{3}=\frac{1}{5760}$$

la segunda 30 veces mayor que la primera.

Meter más de 165.000 bolas en un bombo resulta poco operativo (¿caben?). Para la lotería de Navidad se meten unas 70.000.

Se podría repartir el número total de individuos en dos grupos, el primero del 00.000 (éste sería el último número, 165.342 –este convenio facilita el cálculo–) al 99.999, el segundo, del 100.000 hasta el 165.341. Para el primer grupo se procedería de forma elemental, con 5 bombos de 10 bolas cada uno, y en el grupo de los 65.342 restantes se utilizarían las bolas de la lotería de Navidad.

¿Cómo repartir el número de excedentes de cada grupo? Proporcionalmente, desde luego.

La probabilidad de excedencia no puede dejar de ser

$$\frac{16442}{165342} = 0,0994423$$

por tanto, el número de excedentes para el primer grupo x y el número para el segundo y deben cumplir:

$$\frac{16442}{165342} = \frac{x}{100000} = \frac{y}{65342}$$

por tanto

$$x = 9.944{,}2368,\ y = 6.497{,}7632.$$

Asignando al primer grupo 9.994 excedentes y 6.498 se cometería una injusticia ínfima.

Miguel Barreras
CPR Utrillas (Teruel)
Sociedad Aragonesa de
Profesores de Matemáticas
«Pedro Sánchez Ciruelo»

SUMA 29

noviembre 1997

INFORME

Las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria

Aunque aún no se ha culminado la generalización en todo el Estado de los dos ciclos de la ESO en su totalidad, aunque se haya empezado la casa, si no por el tejado, al menos por el entresuelo al implantar antes 3.° de la ESO que 1.°, aunque muchos centros y muchos profesores estén ahora mismo inmersos en la atrayente aventura de pasar de las palabras escritas a los hechos dentro del aula, de los diseños curriculares a su puesta en la práctica cotidiana...

Pensamos, conscientes de que toda reflexión seria requiere al menos una cierta perspectiva temporal y que, por tanto, las conclusiones que se obtengan pueden necesitar una revisión dentro de muy poco tiempo, que es el momento de hacer un primer análisis del papel y la situación de las Matemáticas en la ESO.

SUMA está preparando un primer estudio en profundidad de algunos de los aspectos que más pueden inquietar al conjunto del profesorado de Matemáticas.

Entre los aspectos que pensamos tratar destacamos los siguientes:

- Matemáticas adecuadas a las necesidades de nuestra sociedad: ¿por qué este currículo?, currículos abiertos, ¿quién y cómo se cierran?
- Matemáticas para todos: tratamiento de la diversidad.
- Un problema abierto: la evaluación en Matemáticas.
- Una metodología activa y participativa: recursos en el aula. Las «nuevas» tecnologías en la clase de Matemáticas.
- Espacios de optatividad: el taller de Matemáticas.
- Otros diseños, otros itinerarios, otras experiencias: diseño curricular de Matemáticas en Cataluña.
- Un reto pendiente: la formación del profesorado.

Se podrán enviar aportaciones, según las normas de publicación habituales en SUMA, que se refieran preferentemente a uno o varios de los aspectos reseñados, para que sea considerada su inclusión dentro del Informe por sus coordinadores.

SUMA 27
febrero 1998, pp. 97-102

Experimentos en álgebra lineal con Mathematica

Juan José González Henríquez

Desde hace años los profesores de física, química o botánica han dispuesto de laboratorios donde los alumnos experimenten los conceptos teóricos, expuestos previamente en clase. En este artículo, se pone de manifiesto la facilidad y potencia de *Mathematica* como laboratorio de matemáticas para experimentar algunos conceptos teóricos y aplicados del álgebra lineal universitaria. Por supuesto, estos experimentos son extensibles a cualquier disciplina de las matemáticas.

IDEAS Y RECURSOS

El impacto de las nuevas tecnologías está, actualmente, cambiando los hábitos, en todos los aspectos, de cualquier profesional. Por tanto, parece razonable pensar que el conocimiento de estas nuevas tecnologías es, y será, un requisito imprescindible para acceder al mundo laboral. Sin duda, una de estas tecnologías revolucionarias ha sido la creación del ordenador digital; un instrumento de lógica veloz, que guiado por el software adecuado es capaz de adaptarse a las necesidades de cualquier situación práctica actual.

En la docencia, la existencia de paquetes de software matemático, y las nuevas orientaciones en el aprendizaje, cuestionan la forma de enseñanza tradicional de las matemáticas y plantean métodos alternativos que permitan unos objetivos docentes más eficaces para la integración de estas tecnologías en otras asignaturas y su repercusión posterior en el futuro. En este aspecto, *Mathematica* es un potente paquete de software muy extendido y bien documentado que, por sus características, posibilita un aprendizaje vivo y tangible de las matemáticas. Además, la colección de paquetes anexos relacionados con la ingeniería, la economía, la física, etc. y protocolos de comunicación con otros paquetes de software, lo convierten en una herramienta flexible en la enseñanza y en el posterior ejercicio profesional.

En este artículo, presentamos mediante tres problemas de álgebra lineal algunas de las posibilidades de *Mathematica* en la enseñanza de nuestra matemática. En el primer problema, contrastamos dos procedimientos matemáticos para resolver diversos problemas; en el segundo, haremos una demostración matemática de un problema utilizando su capacidad simbólica; y, por último, resolveremos un problema de cálculo numérico.

Características generales de *Mathematica*

Mathematica se divide en dos partes: el *Kernel* (Núcleo) y el *Front End* (Fachada). El *Kernel* es el motor computacional de *Mathematica*: procesa y calcula los resultados y los devuelve al *Front End*. Así, El *Front End* es la interfaz entre el usuario y el *Kernel*. En otras palabras, el usuario dispone de una pizarra (*Front End*) donde escribe sus problemas en un lenguaje determinado y, mediante una combinación de teclas, manda el problema a un «cerebro electrónico» (*Kernel*), el cual resuelve el problema y escribe la respuesta en la siguiente línea de la pizarra. Esta característica hace de *Mathematica* un lenguaje interactivo.

Mathematica tiene incorporado un sinfín de operaciones matemáticas de índole diversa. En caso de necesitar una operación matemática, no disponible en *Mathematica*, se puede definir con cierta facilidad, gracias a sus posibilidades de programación de alto nivel. Las operaciones definidas en *Mathematica* y las características de su programación hacen que programas que requieran numerosa páginas en otros lenguajes de programación (*Pascal*, *C*, *Fortran*, *Basic*, etc.), en *Mathematica* se reduzcan ostensiblemente.

Mathematica puede comunicarse con otros paquetes de software usando un protocolo de comunicación denominado *MathLink*. De hecho, el propio *Kernel* se comunica con el *Front End* a través de este protocolo. En la escritura de este artículo se puede decir que hemos cambiado el *Front End* de *Mathematica* por el entorno del procesador de texto *Word 6.0*, usando el *MathLink* para *Word 6.0*. Es decir, en este caso nuestra pizarra ha sido el entorno del procesador de texto *Word 6.0*.

Una de las características más importantes de *Mathematica* es su posibilidad de manipular cálculo simbólico, es decir, de simular al pensamiento humano cuando operamos con expresiones simbólicas exactas; y por supuesto, puede trabajar como una potente calculadora numérica.

Una de las características más importantes de Mathematica es su posibilidad de manipular cálculo simbólico, es decir, de simular al pensamiento humano cuando operamos con expresiones simbólicas exactas; y por supuesto, puede trabajar como una potente calculadora numérica.

¿Eliminación Gaussiana o regla de Cramer?

En cualquier libro o programa de un curso que trate someramente el álgebra lineal, se encuentra una lección dedicada a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Generalmente, se enseña a resolver primero los sistemas de ecuaciones con el método de Gauss y, posteriormente, se enseña la regla de Cramer. Esta exposición, desde luego, no hace honor al orden cronológico de descubrimiento de estas técnicas, pues, la regla de Cramer fue publicada por el matemático suizo Gabriel Cramer en 1750 y el método de Gauss lo descubrió el matemático alemán Karl Friedrich Gauss, a principios del siglo XIX en un problema para determinar la órbita del satélite Ceres. Sin embargo, las conversaciones con otros profesores del área, en torno al tema, coinciden con las mías: ¿cómo es posible que después de dejar patente en los ejercicios de clase la sencillez del método de Gauss frente a los numerosos cálculos que requiere la regla de Cramer, los alumnos opten por esta última?

También se enseña que las operaciones elementales por filas (intercambio de filas, multiplicar una fila por un escalar distinto de cero, sustituir una fila por la suma de ésta con otra multiplicada previamente por un escalar) dejan invariante el rango de una matriz. Sin embargo, entre obtener el rango de una matriz aplicando operaciones elementales y emplear el método de los menores, prefieren hallarlo a través de menores. Al indagar sobre el tema con profesores de álgebra lineal, tanto en reuniones de carácter estatal (VII JAEM) e internacional (ICME 8), se llega a diferentes conclusiones:

1. Algunos opinan que la culpa es nuestra pues tanto en clases prácticas como en exámenes nos limitamos a matrices cuadradas de tamaño 3 y proponen, como remedio, aumentar a 5, por ejemplo, el orden de las matrices cuadradas.
2. Algunos profesores universitarios opinan que en enseñanzas preuniversitarias todavía hay profesores que sólo enseñan la regla de Cramer junto al teorema de Rouché-Frobenius para resolver sistemas de ecuaciones y no el sencillo método de Gauss.

En cualquier caso, el problema que subyace es: ¿operaciones elementales o determinantes? En mis clases para exponer la simplicidad y potencia de las operaciones elementales, frente a los procedimientos que involucra a determinantes, realizo con mis alumnos una práctica de ordenador con *Mathematica* donde comparamos el tiempo computacional que tarda el ordenador en evaluar un determinante a través de la definición y utilizando operaciones elementales.

Definición de determinante:

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de tamaño $n \times n$. Definimos el determinante de A, denotado por, *Det(A)* ó $|A|$, como:

$$Det(A) = |A| = \sum(\pm) a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{njn}$$

donde el rango del sumatorio recorre todas las permutaciones del conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. El signo es positivo si la permutación es par y es negativo en caso contrario. Como el conjunto de las permutaciones de n elementos tiene $n!$ elementos entonces el determinante tendrá $n!$ sumandos. Obsérvese que el número de sumas y multiplicaciones necesarias para calcular el determinante cuando se desarrolla éste por los elementos de una fila o columna hasta llegar a determinantes de matrices de 2×2 es igual que en la definición anterior.

Dado que *Mathematica* es un potente software que permite al usuario programar, definimos una función, que llamaremos `Determinante` de acuerdo con la definición anterior:

```
In[1]:=
    Determinante[A_] :=
        Module[
            {k=Length[A], suma=0, pro=0, p, per, permut},
            p = Range[k];
            permut = Permutations[p];
            For[j=1, j<=k!, ++j, {per = permut[[j]];
                pro = Signature[per]*
                 Product[A[[i]][[per[[i]]]], {i, k}];
                suma = suma + pro}];
        suma]
```

Mathematica incorpora la función `Det[A]`, que da automáticamente el determinante de la matriz A cuadrada de tamaño n. Nuestro objetivo será constrastar el tiempo que tarda el ordenador en calcular el determinante de una matriz dada, utilizando la función `Determinante` (basada en la definición anterior) y la función `Det` de *Mathematica* (obviamente el algoritmo que emplea *Mathematica* será más rápido ¿por qué?).

La respuesta a esta diferencia de tiempo computacional, estriba en que el algoritmo que tiene implementado *Mathematica* se fundamenta en los dos siguientes propiedades de álgebra lineal:

1. Si una matriz B resulta de aplicar en A la operación elemental $F_{ij} \leftrightarrow \alpha F_i + F_j$ (ó $C_j \leftrightarrow \beta C_i + C_j$) entonces *Det(B)=Det(A)*.
2. Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz triangular superior (inferior) de tamaño n entonces $Det(A) = a_{11}a_{22}\,a_{33}\ldots\ldots a_{nn}$

En resumen, la función `Det` aplica operaciones elementales a sus filas y columnas para transformar la matriz en una matriz triangular superior y, porteriormente, multiplica los elementos de la diagonal principal de esta matriz.

Veamos las diferencias computacionales de tiempo empleando operaciones elementales y la definición en la siguiente matriz A, cuyo determinante es −2349. En *Mathematica*, una matriz A se define como un conjunto de conjuntos donde el i-ésimo elemento del conjunto son las entradas de la i-ésima fila de A. Así, almacenamos en la variable A la matriz que queremos utilizar:

```
In[2]:=
    A = {{1, 2, 3, 4, 5, 3, 6}, {2, 4, 5, 6, 7, 5, 2},
    {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {2, 4, 5, 6, 6, 5, 4}, {2,
    6, 1, 5, 3, 4, 2}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {5, 7,
    9, 0, 1, -1, 9}}

Out[2]=
    {{1, 2, 3, 4, 5, 3, 6}, {2, 4, 5, 6, 7, 5, 2},
    {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {2, 4, 5, 6, 6, 5, 4},
    {2, 6, 1, 5, 3, 4, 2}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
    {5, 7, 9, 0, 1, -1, 9}}
```

Si queremos visualizar la matriz en su forma matricial, utilizamos la función `MatrixForm` de *Mathematica* obteniendo:

```
In[3]:=
    MatrixForm[A]

Out[3]//MatrixForm=
    1   2   3   4   5   3   6
    2   4   5   6   7   5   2
    1   1   1   1   1   1   1
    2   4   5   6   6   5   4
    2   6   1   5   3   4   2
    1   2   3   4   5   6   7
    5   7   9   0   1  -1   9
```

Mediante la función `Timing` de *Mathematica* calculamos el tiempo que tarda el ordenador en calcular el determinante con la función `Det` y `Determinante` respectivamente.

```
In[4]:=
    Timing[Det[A]]

Out[4]=
    {0.293 Second, -2349}

In[5]:=
    Timing[Determinante[A]]

Out[5]=
    {16.221 Second, -2349}
```

En las salidas 4 y 5 anterior, (Out[4] y Out[5]) se observan las diferencias computacionales de tiempo que lleva realizar el cálculo realizando operaciones elementales y la definición. Mediante la definición ha tardado aproximadamente 50 veces más. Al finalizar la práctica, la mayoría de los alumnos se asombran de la rapidez computacional de las operaciones elementales frente a los determinantes.

El número áureo y una ecuación en diferencias

El problema que pretendemos resolver ahora es el siguiente:

Elegidos dos números al azar, a_1 y a_2, ambos reales y mayores que cero, se construye la sucesión cuyo término siguiente es la suma de los dos anteriores, es decir, $a_{n-2} + a_{n-1} = a_n$ Probar que, independientemente de los valores iniciales de a_1 y a_2, el cociente converge a la razón áurea, es decir:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

En un sistema dinámico discreto (una función f de un espacio métrico M en si mismo) dado un punto $x \in M$, es de interés estudiar la sucesión cuyo término general es $a_n = f^n(x)$. Esta sucesión recibe el nombre de trayectoria de x por f. *Mathematica*, dispone de la función NestList[f, x, n] la cual da los n primeros términos de la trayectoria de f por x.

Inicialmente, y de forma experimental, veamos si efectivamente el cociente del término siguiente entre el término anterior converge a la razón áurea. Para ello, tomamos la función:

$$S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida como

$$S(x, y, z) = (y, x+y, (y+x)/y)$$

y calcularemos los 15 primeros términos de la trayectoria de S por $p = (3, 4, 0)$ y q = (1, 1, 0) respectivamente. Obsérvese que, dados los dos primeros términos de la sucesión $(a_0, a_1, 0)$, la imagen de ellos a través de S es $(a_1, a_2, a_2/a_1)$. De esta forma:

$$(S\circ S\circ S\circ\ldots {}^{\text{n veces}}\circ S)(a_0, a_1, 0) = (a_n, a_{n+1}, a_{n+1}/a_n)$$

Definimos ahora con *Mathematica* la función S anterior :

```
In[6]:=
    S[a_]:= {a[[2]],  a[[1]]+a[[2]],
            N[(a[[1]]+a[[2]])/a[[2]]]}

In[7]:=
    NestList[S, {3, 4, 0}, 15]
```

```
Out[7]=
    {{3, 4, 0}, {4, 7, 1.75}, {7, 11, 1.57143},
     {11, 18, 1.63636}, {18, 29, 1.61111},
     {29, 47, 1.62069}, {47, 76, 1.61702},
     {76, 123, 1.61842}, {123, 199, 1.61789},
     {199, 322, 1.61809}, {322, 521, 1.61801},
     {521, 843, 1.61804}, {843, 1364, 1.61803},
     {1364, 2207, 1.61804}, {2207, 3571, 1.61803},
     {3571, 5778, 1.61803}}

In[8]:=
    NestList[S, {1, 1, 0}, 15]

Out[8]=
    {{1, 1, 0}, {1, 2, 2.}, {2, 3, 1.5},
     {3, 5, 1.66667}, {5, 8, 1.6}, {8, 13, 1.625},
     {13, 21, 1.61538}, {21, 34, 1.61905},
     {34, 55, 1.61765}, {55, 89, 1.61818},
     {89, 144, 1.61798}, {144, 233, 1.61806},
     {233, 377, 1.61803}, {377, 610, 1.61804},
     {610, 987, 1.61803}, {987, 1597, 1.61803}}
```

El último elemento de las salidas 7 y 8 son los términos $(a_{15}, a_{16}, a_{16}/a_{15})$ de las sucesiones cuyos términos iniciales son (3, 4, 0) y (1, 1, 0) respectivamente. Obsérvese en la tercera componente de las sucesiones anteriores la convergencia a la razón áurea.

Daremos ahora una demostración general de estos casos particulares. Para ello, hallamos la solución general de la ecuación en diferencias

$$a_{n-2} + a_{n-1} = a_n.$$

Dado que esta ecuación en diferencias, es homogénea de orden dos, su solución general es de la forma:

$$Sg_n = a(r_1)^n + b(r_2)^n$$

donde r_1 y r_2 son soluciones de la ecuación polinómica asociada

$$x^2 - x - 1 = 0$$

con a y b números reales cualesquiera. Obtengamos con *Mathematica* las raíces de la ecuación polinómica anterior mediante la función Solve.

```
In[9]:=
    Solve[x^2 - x - 1 == 0, x]

Out[9]=
           1-Sqrt[5]          1+Sqrt[5]
    {{x -> ---------}, {x -> ---------}}
               2                  2
```

Definimos ahora con *Mathematica* la función *Sg*, (solución general) la cual da las sucesiones que satisfacen la ecuación en diferencias anterior.

```
In[10]:=
    Sg[n_]:=  a(1/2-Sqrt[5]/2)^n  +
    b(1/2+Sqrt[5]/2)^n
```

Comprobamos que, efectivamente, es la solución general de la ecuación anterior.

```
In[11]:=
    Sg[n+2]-Sg[n+1]-Sg[n] // Expand
Out[11]=
    0
```

Por último vamos a demostrar que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

```
In[12]:=
    Limit[Sg[n+1]/Sg[n],n->
    Infinity]
Out[12]=
    1+Sqrt[5]
    --------
       2
```

Matrices en bandas

Una matriz en banda o matriz tridiagonal es una matriz cuadrada de tamaño n donde las entradas

$$a_{ij} = 0 \text{ si } |i-j| > 1$$

Estas matrices suelen aparecer como matrices del sistema, en sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos derivado de problemas continuos discretizados.

En casi todas las ramas de las ciencias, los modelos matemáticos que rigen ciertos fenómenos se expresan de forma exacta y continua, es decir, mediante una ecuación en derivadas parciales, mediante una ecuación de funciones continuas, etc. Sin embargo, cuando deseamos resolver una ecuación en derivadas parciales, y no conocemos métodos matemáticos para ello, recurrimos a discretizar el problema. Es decir, si deseamos hallar una función $u(x)$, en el problema continuo tendríamos infinitud de incógnitas, pero no en el problema discreto pues seleccionaríamos n puntos del dominio de $u(x)$.

Concretando el problema, supongamos que tenemos un fenómeno físico donde deseamos conocer una función $u(x)$ de la cual sabemos:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad y \quad x \in [0,1]$$

...cuando deseamos resolver una ecuación en derivadas parciales y no conocemos métodos matemáticos para ello, recurrimos a discretizar el problema.

La función que queremos calcular satisface las condiciones siguientes:

$$u(0) = u(1) = 0$$

Con estas últimas condiciones, eliminamos la arbitrariedad de soluciones que las ecuaciones diferenciales suelen generar.

Dado que nuestro objetivo es generar un problema discreto, es decir un problema de álgebra lineal, elegimos en el intervalo anterior una sucesión de puntos equiespaciados; por ejemplo la sucesión: $x_n = nh$ con $n \in \mathbb{N}$ y h una cantidad pequeña. Posteriormente, resolveremos un problema lineal donde calcularemos los valores aproximados de la imagen de estos puntos a la solución verdadera $u(x_n)$. El problema lineal que hay que resolver es un sistema de ecuaciones $Ax= b$ donde A es una matriz tridiagonal.

Dado que

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$

tenemos que el problema continuo se transforma en la siguiente ecuaciones en diferencias:

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = h^2 f(nh)$$

Para concretar el problema supongamos que

$$f(x) = Sen(x),\ h=1/100 \text{ y } n=99$$

Obsérvese que en este caso no es necesario discretizar el problema dado que el problema continuo es muy sencillo. Es trivial comprobar que

$$u(x) = Sen(x) + Cx + D$$

Si añadimos a esta familia de funciones nuestras condiciones de contorno, tenemos la función:

$$u(x) = Sen(x) - x \cdot Sen(1)$$

Sin embargo lo resolveremos discretamente y veamos la coincidencia de las soluciones.

En primer lugar obtenemos la sucesión finita de puntos $x_n = nh$.

```
In[13]:=
    sucesión = Range[0.01, 0.99, 0.01]
```

En la variable sucesión tenemos una discretización del intervalo [0, 1], esto es, el conjunto {0.01, 0.02, 0.03, ..., 0.99}.

```
In[14] :=
    Imagensucesión = Sin[sucesión];
```

En la variable `Imagensucesión` tenemos el conjunto imagen del conjunto {0.01, 0.02, 0.03, ..., 0.99} por la función $Sen(x)$.

Cargamos el *Package* `LinearAlgebra`Tridiagonal`` para acceder a una función que resuelve los sistemas de ecuaciones $Ax = b$ directamente, donde A es una matriz en banda.

```
In[15]:=
    <<LinearAlgebra`Tridiagonal`
```

Hallamos las bandas respectivas que acompañan a la diagonal principal de la matriz tridiagonal.

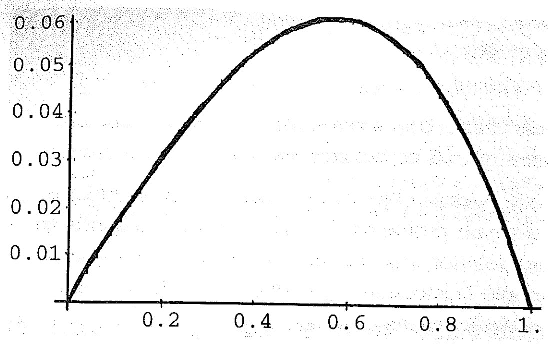


Figura 1

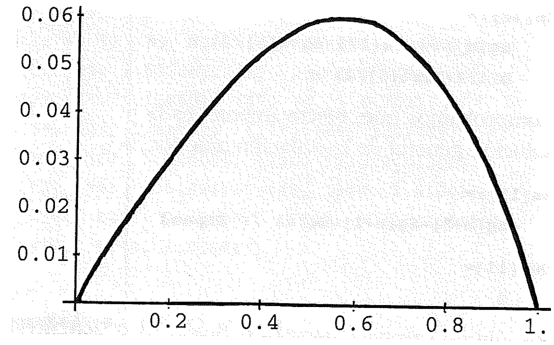


Figura 2

```
In[16]:=
    a = Table[-1, {98}]; b = Table[2, {99}];
```

En la variable `Solu` guardamos las soluciones del sistema tridiagonal. Es conveniente tener en cuenta que cuanto menor es h más exactitud obtenemos en las soluciones que buscamos. En este caso la solución discreta será bastante buena.

```
In[17]:=
    Solu = TridiagonalSolve[a, b, a, (1/10000) ima-
    gensucesión];
```

La figura 1 muestra una gráfica de nuestra solución discreta.

La figura 2 es el gráfico de la solución continua y exacta que obtuvimos anteriormente.

Es evidente, que la solución del problema discreto, al ser h = 1/100, es excelente.

Juan José González
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»

Bibliografía

BOYER, C.B.(1987): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos.

DAVIS, J. D. Y R. HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. (1996): *El rincón de la pizarra*, Pirámide, Madrid.

KOLMAN, B. (1988): *Álgebra lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana.

MARTIN, J. C. (1984): «Método de Gauss: su aplicación al álgebra», *Números*, n.° 10, 67-72.

WOLMFRAM, S. (1992): *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley.

SUMA 27
febrero 1998, pp. 103-110

La conexión matemática

Josefina Galán Olloqui
Marian Bermeosolo Urrea
Josu González Capetillo
Andrés Castrillejo Hernantes

IDEAS Y RECURSOS

Este trabajo presenta un resumen del proyecto de innovación curricular realizado en el curso 1995/96 el el IES de Fadura (Getxo) y dirigido al alumnado de 2.° REM, también aplicable en un futuro en 4.° de ESO.
Se ha pretendido conectar con los talleres del instituto y comprobar la conexión tan estrecha entre las Matemáticas y el mundo tecnológico y dar respuesta a muchas de las preguntas que insistentemente realiza nuestro alumnado; ¿Y esto para qué sirve?

EXISTE una gran cantidad de personas, que si bien están de acuerdo en que las Matemáticas son muy importantes y necesarias en el normal desarrollo de la actividad cotidiana, no sabrían expresar ejemplos de su utilidad, salvo los que hacen referencia a sencillos cálculos tales como pesar, medir o contar.

A partir de encuestas realizadas entre nuestro alumnado de REM, hemos obtenido un perfil de asignatura alejada de la realidad, sin utilidad en otros campos de la vida, que no resuelve problemas prácticos y, en todo caso, un perfil bastante diferente del necesario según los objetivos planteados para la asignatura.

Sin embargo, las Matemáticas están conectadas con muchos, variados e importantes aspectos de nuestra vida cotidiana y cultural tales como: la música, el arte, la tecnología, nuestra forma de razonar... habiendo contribuido en buena medida a su desarrollo aunque para mucha gente permanezca oculta.

Lo que hemos pretendido, precisamente, es mostrar algunos ejemplos que saquen a la luz la conexión de las Matemáticas con el mundo tecnológico. Para lo cual hemos aprovechado algunos talleres que tenemos en nuestro Instituto y hemos visto, al hilo de algunas prácticas que allí realizamos, las ideas matemáticas subyacentes.

Las matemáticas, una herramienta más en el taller

Aunque las Matemáticas no sólo son cálculos, uno de los argumentos que el profesorado de Matemáticas utiliza, curso tras curso, para que el alumnado respete y aprecie esta asignatura es la dimensión instrumental de las Matemáticas. Ante la pregunta: ¿para qué sirve esto? generalmente se responde que hay muchas disciplinas científicas: Física, Tecnología... que necesitan una mínima herramienta matemática para su desarrollo y tratamiento, teniendo el alumnado que hacer un acto de fe y creer que efectivamente es así.

Con el objeto de que el alumnado vea la conexión tan estrecha que existe entre las Matemáticas y el mundo tecnológico, y dado que nos encontramos en una situación privilegiada, ya que tenemos a nuestra disposición un gran laboratorio matemático: *los talleres*, en junio de 1995 presentamos un proyecto de innovación curricular, dirigido a los alumnos y alumnas de 2.° de REM, que pusiese en evidencia la relación existente entre esas disciplinas. Este proyecto fue aprobado y lo llevamos a cabo durante el curso 1995/96, habiendo tenido una gran aceptación por parte del alumnado.

Nuestro objetivo prioritario ha consistido en mostrar el carácter instrumental de las Matemáticas y poner en evidencia que para construir una pieza mediante el sistema de mecanizado por control numérico, o en la realización de un circuito electrónico, o para la lectura e interpretación en el Banco de Potencia FLA 203 utilizada en los talleres mecánicos de automóviles,... una de las herramientas que el operario tiene que utilizar para realizar esas actividades son las Matemáticas.

El ciclo más adecuado para llevar a cabo este proyecto es, en un futuro, el 2.° ciclo de la ESO, más concretamente en el 4.° curso. Actualmente, lo estamos aplicando en 2.° curso de REM. La razón por la que hemos elegido esta etapa educativa es porque será final para algunos alumnos y tendrá continuidad en la ESPO para otros. Es una etapa en la que la orientación adquiere una especial trascendencia, siendo uno de los objetivos de este proyecto «el conocimiento y apreciación de algunas actividades del mundo tecnológico».

Además, hemos querido poner nuestro granito de arena en la lucha a favor de la igualdad de sexos, permitiendo que mediante las prácticas que realizamos en este proyecto, nuestras alumnas vean que el mundo tecnológico es un campo al que ellas también pueden acceder, haciéndoles ver que no existen limitaciones, ni físicas, ni intelectuales, por su condición de mujeres.

El taller, un espacio interesante

Al alumnado, en general, no le resulta difícil encontrar Matemáticas en la vida cotidiana. Eso sí, unas Matemáticas elementales, como pueden ser los números enteros o fraccionarios y las operaciones con ellos, así como la presencia de una geometría elemental para medir distancias, calcular áreas, o situaciones en las que necesitan resolver algunas ecuaciones. Pero sí les resulta más difícil dar una interpretación real a ecuaciones del tipo $x^2 + 1 = 0$, cuya solución les resulta imposible de conectar en el mundo

...nuestras alumnas vean que el mundo tecnológico es un campo al que ellas también pueden acceder, haciéndoles ver que no existen limitaciones, ni físicas, ni intelectuales, por su condición de mujeres.

real. Sin embargo la unidad imaginaria y los números complejos son herramientas muy valiosas e imprescindibles para ciertos cálculos sobre aplicaciones físicas y tecnológicas tan concretas como la propagación de vibraciones o el análisis de la corriente alterna. La visita a un taller de Electrónica o Instrumentación, realizando una práctica referida a la corriente alterna, permitiría a nuestros alumnos y alumnas ver el porqué de la existencia de los números complejos y comprenderían el empeño de su profesor en que aprendan cómo se opera con ellos.

Que la trigonometría sirve para medir distancias, es algo que la mayoría de nuestro alumnado sabe, ya que somos muchos los profesores de Secundaria que realizamos actividades fuera del aula midiendo alturas de árboles, anchura de un río,... utilizando teodolitos construidos en clase. Pero la formación sería mas completa si nos acercáramos a un taller de Control Numérico que pertenece a la Rama Metal-Automatismos y vieran que con la trigonometría, no sólo se miden distancias, sino que se pueden construir piezas planas, en revolución o en relieve, piezas que pueden ser destinadas para la fabricación de un motor de un barco, un vaso de cristal, o cualquier objeto que tenemos a nuestro alrededor, y todo esto, una vez más, utilizando la «herramienta» matemática.

Además, verían algo muy interesante, que es la importancia del cálculo exacto; en clase se trata la aproximación y estimación, aspectos no válidos en estos talleres, ya que cálculos erróneos provocan que las piezas construidas, que posteriormente se van a utilizar, por ejemplo, en la construcción de un motor de coche, sean defectuosas, suponiendo un perjuicio económico grave a la empresa.

¿Y las funciones...? Este es un tema que se le está dando mucha importancia en los diseños curriculares, tanto en la ESO como en la ESPO. También, por ejemplo, en el taller de Automoción están presentes y nuestro alumnado podrá deducir, según el comportamiento de algunas funciones, dónde puede estar la avería en un motor, si el consumo de gasolina es excesivo, etc.

En resumen, la presencia de las Matemáticas en diversos talleres es lo que se pretende mostrar, visitando algunos de los existentes en nuestro instituto.

El proyecto ha consistido en la realización de cuatro prácticas a lo largo del curso, siempre conectando con los contenidos Matemáticos que se han impartido en esta asignatura. Estas prácticas fueron las siguientes:

- Primer trimestre: «La trigonometría en la fabricación mecánica».
- Segundo trimestre: «Análisis de las funciones en Automoción» y «Algunas funciones en Electrónica».
- Tercer trimestre: «La Combinatoria y la Electrónica».

Esta última práctica se desarrolló de forma experimental.

Ejemplo de práctica

Cada una de las prácticas se realizó con un esquema semejante, que constaba de tres partes fundamentales: desarrollo, evaluación y análisis. para fijar ideas, ejemplificamos este esquema en la práctica llevada a cabo en el primer trimestre: «La trigonometría en la fabricación mecánica».

Desarrollo de la práctica

Se dividió en tres sesiones.

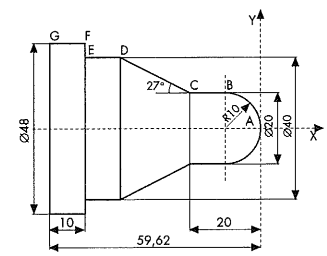
Sesión teórica en el aula

Se realizó en el aula, donde se trataron:

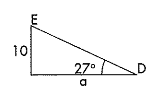
- Evolución histórica de la máquina-herramienta.
- Información de la especialidad Metal-Automatismos.
- Realización de cálculos matemáticos de la pieza que en la próxima sesión se iba a fabricar en el taller. Los cálculos realizados se muestran en la ficha de la figura 1.

El control numérico, controla una máquina-herramienta mediante un ordenador para realizar unas piezas determinadas. Se va a realizar la pieza dibujada más abajo, para lo cual es necesario que el operario que dirige la máquina conozca las coordenadas de los puntos de contorno de la pieza que se quiere fabricar.

Para ello, en esta sesión se realizarán los cálculos trigonométricos necesarios para el desarrollo de la práctica.



Puntos	A	B	C	D	E	F	G
X	0	-10	-20	-39,62	-49,62	-49,62	-59,62
Y	0	10	10	20	20	24	24



$$\operatorname{tg} 27° = \frac{10}{a} \longrightarrow a = 19{,}62$$

Figura 1

...la presencia de las Matemáticas en diversos talleres es lo que se pretende mostrar, visitando algunos de los existentes en nuestro instituto.

Esta sesión, de una hora de duración, la impartió el profesor de Matemáticas correspondiente.

En el desarrollo de esta sesión se utilizaron transparencias, diapositivas, así como una muestra de piezas, en metacrilato, que en la sesión siguiente se iba a construir en el taller.

Sesión práctica en el taller

La práctica se desarrolló en dos aulas del taller de Metal-Automatismos, con la mitad del grupo de alumnos en cada una.

En el aula de diseño y programación se llevaron a cabo las siguientes acciones:

- Se diseñó el plano de la pieza.
- Se presentaron los cálculos geométricos.
- Se elaboró la hoja de operaciones.
- Se preparó el programa del ordenador.

En el aula o laboratorio de prácticas tuvo lugar la fabricación de las piezas.

En primer lugar, se visitó el aula de diseño y programación, donde 15 alumnos y alumnas de 4.° y 5.° de FP de esta especialidad habían introducido en el ordenador el correspondiente programa y tenían la hoja de operaciones elaborada. Cada uno de los alumnos de 2.° de REM, en colaboración con los de los últimos cursos de FP, introdujeron en el programa los cálculos geométricos realizados en la sesión anterior, y simularon en pantalla la pieza diseñada.

Con el disquete que habían utilizado en el aula de diseño pasaron al aula de prácticas, donde introdujeron el disquete en el Centro de control de las tres máquinas-herramientas: torno, fresadora y centro de mecanizado, realizando las piezas correspondientes (fotografías 1 y 2).

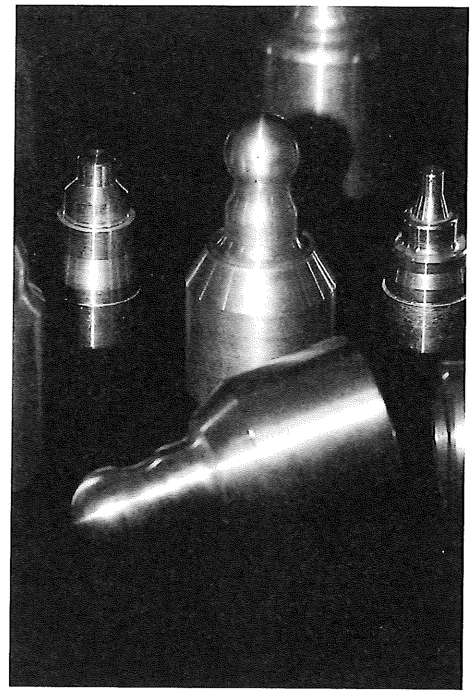
La duración de la sesión fue de una hora. La dirigió el profesor de Metal, con colaboración de alumnos y alumnas de 4.° y 5.° de FP de esa especialidad

Una vez terminada la visita, se completo la práctica, viendo el taller convencional de máquina-herramienta y así pudieron observar la evolución que ha experimentado en poco tiempo la especialidad de Metal-Automatismos.

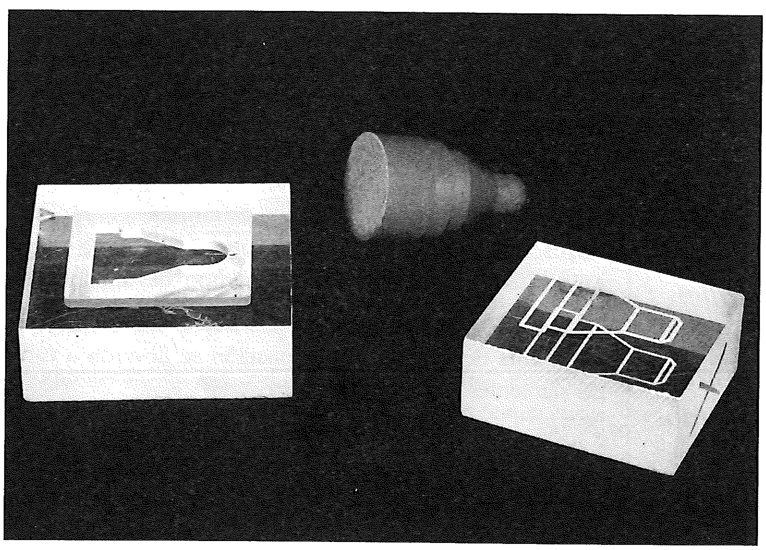
Sesión de reflexión de nuevo en el aula

Una vez terminada la visita al taller, los alumnos presentaron un pequeño informe sobre el desarrollo de la práctica. Con las conclusiones que se obtuvieron de la lectura de estos, se analizó en gran grupo:

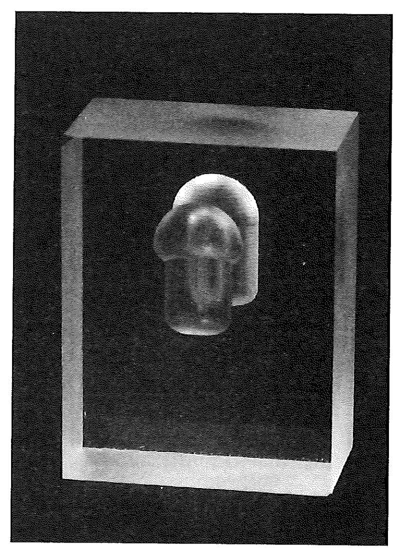
1.°) La presencia de las Matemáticas en ese taller. El profesor explicó qué otros conocimientos de esta asignatura se podían aplicar en Metal (fotografía 3).



Fotografía 2. En la construcción de estas piezas se han utilizado conocimientos de trigonometría. En las centrales, se han resuelto triángulos oblicuángulos y en el resto rectángulos



Fotografía 1. Piezas realizadas (de izquierda a derecha) en el centro de mecanizado, torno y fresadora



Fotografía 3. En la construcción de estas piezas se han utilizado conocimientos de derivadas

2.°) La actividad real que se realiza en el taller de Metal-Automatismos.

Así los alumnos y alumnas obtuvieron más datos para poder elegir el camino profesional que podían seguir una vez finalizado 2.° REM.

Como tarea, se propuso al alumnado que buscara en la sección de ofertas de empleo de los periódicos, anuncios que demandaran operarios de esta especialidad: torneros, fresadores, especialistas en C.N.C... Una muestra de los recortes presentados fue la siguiente:

3.°) La no existencia de limitaciones física para realizar esta actividad.

En el desarrollo de la sesión en el taller se tuvo especial cuidado en que hubiera alumnas de 4.° o 5.° de FP realizando el diseño y programación de la pieza.

4.°) Se trataron aspectos concretos que en cada grupo habían despertado un interés especial.

Evaluación de la práctica

Para evaluar la práctica se utilizaron dos métodos:

Ficha para evaluar la actitud del alumnado en la visita al taller

El profesor de matemáticas del grupo, evaluó la actitud del alumnado en la visita al taller, utilizando el siguiente modelo.

Cada apartado se puntuó de 0 a 10, con el objeto de calcular medias aritméticas, y así extraer conclusiones de la actitud del grupo frente a la práctica. La media de los resultados por grupo viene expresada en la siguiente tabla.

Curso	*Presta atención*	*Muestra interés*	*Formula preguntas*	*Toma anotaciones*	*Solicita más información*
2.°A	8,3	7,7	6,8	4,9	6,0
2.°B	8,9	7.9	6,8	6,7	6,2
2.°C	8,8	9,1	7,0	6,6	6,6
2.°D	6,1	6,2	5,2	4,9	5,1
2.°E	7,8	7,6	6,1	7,7	5,0
Total	8,0	7,7	6,4	6,2	5,8

En general describieron perfectamente el desarrollo de la actividad, incluso apuntando datos que el profesor de prácticas había comentado de forma somera.

Informes presentados por el alumnado

El alumnado presentó una serie de informes una vez finalizada la práctica. Las conclusiones extraídas fueron:

- En general describieron perfectamente el desarrollo de la actividad, incluso apuntando datos que el profesor de prácticas había comentado de forma somera.
- La mayoría se sorprendió ante la presencia de las Matemáticas en este taller. Esta práctica les dio ideas para el Concurso de Fotografía Matemática que se celebra anualmente en el instituto.
- En algunos, el taller de metal ha despertado interés como posible opción para cuando acabe 2.° R.E.M.
- Todos opinaron que la visita había sido interesante y entretenida.

De estos informes extrajimos frases interesantes, que expresan las opiniones de algunos alumnos sobre la práctica:

* «Yo creía que todo lo que estudiábamos en Matemáticas no servía para nada».
* «Hemos visto una salida para el futuro».
* «Me parece un oficio interesante».
* «Me he dado cuenta de que esta especialidad no es para mi, ya que soy bastante mala en Matemáticas».
* «No sabía que había un taller así en nuestro instituto».
* «En el taller sólo vimos a una chica, pero comentamos que no hace falta ser chico o chica para hacer lo que se hace en un taller».
* «La visita fue muy educativa, hubiera sido muy interesante escuchar alguna opinión de algún alumno, cómo llegó hasta ahí, por qué, y si ha merecido la pena».

* «Me gustaría volver, una experiencia interesante».
* «Muy buena la visita, si no nos hubieran avisado nos hubiéramos quedado con la boca abierta, al ver que sí sirven las Matemáticas».

Análisis del desarrollo de la práctica

Una vez terminada la práctica reunidos los profesores llegamos a las siguientes conclusiones:

Respecto a la sesión teórica en el aula

Debido a que en una hora no hubo tiempo suficiente para tratar todos los aspectos previstos: históricos, información especialidad, cálculos matemáticos. Se propuso al departamento de Tecnología General que se incorporara el próximo curso al proyecto. La parte teórica de la práctica se impartiría en dos horas: una la impartirían los profesores de Tecnología tratando la historia e información de la especialidad de metal y la otra sesión los profesores de Matemáticas y tratarían la historia de la trigonometría y se realizarían los cálculos matemáticos previo a la visita al taller.

Respecto a la sesión en el taller

Se decidió que, para dar más agilidad y participación del alumnado, el profesor de Matemáticas iría formulando cuestiones básicas y sencillas al profesor de taller que pudieran interesar al alumnado tales como:

* «Al estar todo mecanizado, ¿es una ventaja que no se necesiten para este trabajo cualidades como la fuerza?».
* «Para trabajar en esta especialidad, ¿sólo hacen falta conocimientos matemáticos de trigonometría?».
* «Las fresadoras y los tornos de una fábrica, ¿son de tamaños similar a éstos?».
* «¿Cuál es el precio de estas máquinas?».
* «¡Prestar atención a las pegatinas de las máquinas herramientas del taller C.N.C.!».
* «Un tornero que lleva 20 años trabajando, ¿cómo se pone al día sobre C.N.C..».

También se vio lo importante que es «controlar» el vocabulario que en los talleres se utiliza, para que el alumnado entienda con más facilidad lo que allí sucede.

Además, para próximos cursos, decidimos diseñar una nueva pieza, que tuviese cálculos geométricos algo más complejos que el presente curso.

El alumnado ha asistido al taller encantado y esperando con gran impaciencia la próxima visita.

Respecto a la sesión de reflexión en el aula

Esta es la que menos se ha desarrollado, no por considerarla menos importante, sino por falta de tiempo que el profesorado participante ha tenido. Sin embargo, para próximos años se ha elaborado ya un esquema para fomentar el debate y la verbalización de lo visto, presentando material complementario por transparencias, videos... así como otro tipo de conexiones matemáticas que se pueden realizar en cada taller.

Además, en esta sesión, el próximo curso se elaborarán posters que les fuerce a sintetizar lo visto en el desarrollo de todas las sesiones. Con todos los posters se realizará, al final del curso, un concurso.

El alumnado, en cada práctica, ha presentado un informe con el objeto de comprobar: el grado de asimilación de la práctica; la capacidad de conectar las Matemáticas y la Tecnología; y la opinión sobre la práctica realizada.

Respecto a la evaluación de la práctica

Al evaluar la actitud del alumnado ante la práctica, se ha visto que los aspectos quese han valorado recogidos en el modelo de ficha eran correctos, no siendo así la escala utilizada (0 a 10), resultando esta excesiva y muy difícil de matizar. Por lo que para el próximo curso la escala será:

1: Actitud negativa.

2: Actitud normal.

3: Actitud positiva.

El alumnado, en cada práctica, ha presentado un informe con el objeto de comprobar:

a) El grado de asimilación de la práctica.

b) La capacidad de conectar las Matemáticas y la Tecnología.

c) La opinión sobre la práctica realizada.

En algunos grupos no se ha recogido toda la información que se deseaba, por lo que para el próximo curso se elaborará un modelo, que deberá rellenar el alumnado, con un guión que contenga:

- Descripción de la práctica.
- Evaluación del desarrollo de la práctica.
- Aspectos que se deben modificar en la visita al taller.
- Comentarios «libres» que se deseen exponer.

Evaluación del proyecto

Una vez finalizadas todas las prácticas, se realizaron reuniones donde todos los profesores integrantes del proyecto evaluaron globalmente el mismo.

Un aspecto que se evaluó en cada una de las prácticas, fue la actitud del alumnado ante cada una de ellas. Los datos se fueron recogiendo, en cada práctica y por grupo se evaluaron tres prácticas de cuatro que se habían realizado, ya que la correspondiente a Combinatoria y la Electrónica se desarrolló de forma experimental.

Un aspecto que se evaluó en cada una de las prácticas, fue la actitud del alumnado ante cada una de ellas.

Cada apartado de este modelo se evaluó de 0 a 10 puntos, calculándose medias aritméticas por grupo y práctica. En la siguiente tabla se resumen los resultados globales obtenidos.

	Práctica n.°1	Práctica n.°2	Práctica n.°3
Presta atención	8,0	6,4	8,0
Muestra interés	7,7	6,7	7,5
Formula preguntas	6,4	6,0	6,4
Toma anotaciones	6,2	5,6	6,3
Solicita más información	5,8	7,1	6,2

Se observa que la actitud, en una escala de 0 a 10, ha sido, en todas ellas, muy satisfactoria, destacándose la atención e interés que ha prestado el alumnado en todas ellas.

Además de la actitud se valoró la capacidad de asimilación del alumnado, sobre las prácticas que se fueron realizando, tanto en el aula como en el taller y así observar la capacidad de enlazar ambas.

También se quiso conocer la opinión que el alumnado tenía sobre el proyecto que estábamos llevando adelante y en el cual participaron activamente.

Para valorar estos dos últimos aspectos se les pidió que una vez finalizada cada práctica elaborasen unos informes con dos apartados obligatorios:

- Descripción de la práctica
- Opinión sobre ella.

De estos informes, queremos destacar las siguientes conclusiones comunes a todas las prácticas realizadas:

- En general el alumnado ha visto la conexión inevitable entre las Matemáticas y el mundo Tecnológico.
- El grado de asimilación ha sido en la mayoría bastante aceptable a pesar de que en alguna práctica, la información fue excesiva y con un vocabulario muy técnico, del que por otra parte opinamos que no hay que prescindir.
- Todo el alumnado opinó que son prácticas muy interesantes, de las cuales han aprendido mucho.

Los objetivos del proyecto eran:

a) Relacionar las Matemáticas con el taller y la vida real.

b) Ayudar al alumnado en el proceso de orientación académica profesional.

c) Eliminar conductas sexistas y discriminatorias.

Para evaluarlos se utilizaron tres variables, que sirvieran para comprobar si el proyecto había contribuido a modificar la opinión del alumnado. Éstas fueron:

- Utilidad de las Matemáticas.
- Conductas sexistas y discriminatorias.
- Conocimiento y apreciación de algunas profesiones.

Para recoger esta información se pasó una encuesta al comienzo del proyecto, en octubre y otra al final, en junio.

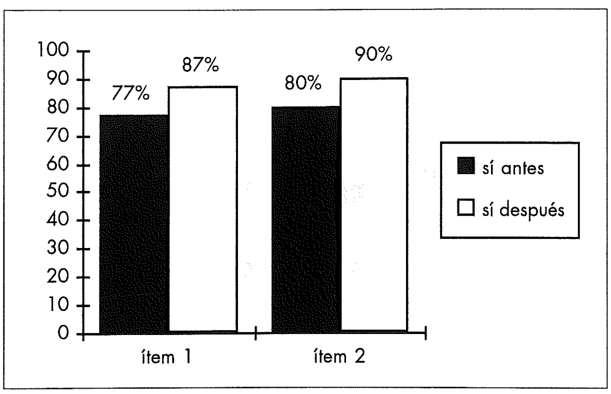
Los resultado obtenidos por variables fueron los siguientes:

Utilidad de las Matemáticas

Para medir esta variable se utilizaron:

Ítem 1: Constantemente te han dicho que las Matemáticas son muy útiles en la vida cotidiana. Aparte de para medir, pesar y contar, ¿crees que sirven para algo más?

Ítem 2: ¿Crees que cuando una persona realiza un circuito electrónico o una pieza para un coche, para la realización de estos trabajos necesita saber Matemáticas?



Observando el diagrama de barras anterior, se puede comprobar las variaciones antes y después del proyecto respecto a la variable «Utilidad de las Matemáticas».

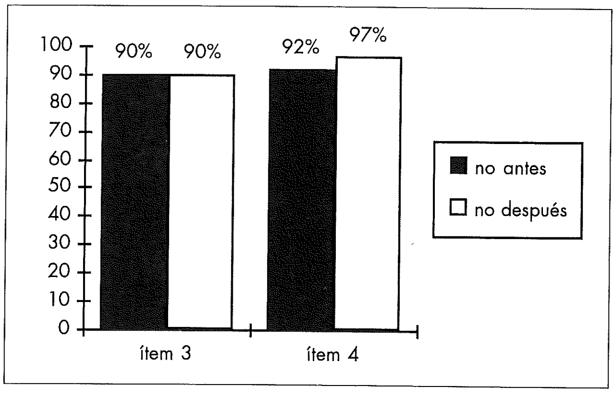
Conductas sexistas y discriminatorias

Para medir esta variable se utilizaron:

Ítem 3: Te parecería normal que una chica trabajase en un taller haciendo piezas para un frigorífico

Ítem 4: Si fueras dueño de una empresa de fabricación de TV contratarías a una chica para trabajar en el taller.

Observando el diagrama de barras de la figura siguiente, se puede comprobar que tenemos un alumnado (50% son chicos) que dice que no tienen conductas sexistas, por lo que el desarrollo de las actividades no ha variado sustancialmente su opinión.



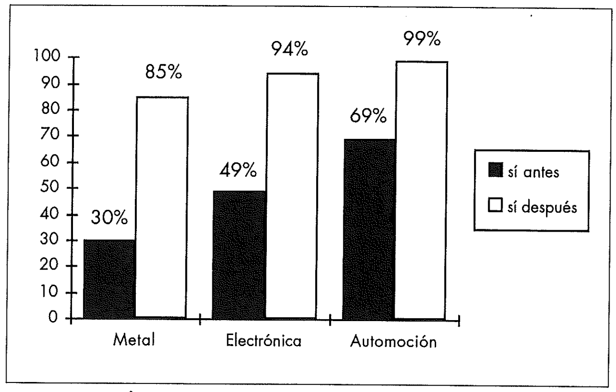
Conocimiento y apreciación de algunas profesiones

Para medir esta variable se utilizaron:

Ítem 5: ¿Conoces lo que se hace en un taller de Metal-Automatismos?

Ítem 6: ¿Conoces lo que se hace en un taller de Electrónica?

Ítem 7: ¿Conoces lo que se hace en un taller de Automoción?



Observando el diagrama de barras de la anterior figura, se puede comprobar las variaciones antes y después del proyecto respecto a la variable «Conocimiento de algunas profesiones».

Profesorado participante en el proyecto

- Alfonso Olaskoaga Fullaondo
- José Antonio Ibáñez Ramos
- Iñaki Gandarias Leiva
- Jesús Mª Basaguren Del Campo
- Agustín Martínez Montoya
- Isaac Aurre Bilbao
- Xabier Ostolaza Marín
- Anastasio Gómez Espinosa
- José Carlos Blanco Rodríguez
- Fermín González Estebanez

Josefina Galán
Marian Bermeosolo
Josu González
Andrés Castrillejo
IFP Fadura
Getxo (Vizcaya)

SUMA 27
febrero 1998, pp. 111-116

La influencia de la escala en la interpretación gráfica de una función lineal

Francisco G. González Martínez
Inmaculada Palomero Guiral
Floreal Gracia Alcaine

IDEAS Y RECURSOS

Es conocido que una imagen vale más que mil palabras. Cuando representamos sobre una gráfica valores obtenidos en cualquier actividad, es más fácil interpretar los resultados, observar las tendencias e incluso, en algunos casos, predecir unos futuros resultados. Pero también es cierto que las gráficas se pueden manipular, maquillando resultados negativos o exagerando los positivos, haciendo ver aquello que nos es más interesante. En esta actividad queremos tratar la influencia de la escala en la interpretación gráfica de una función, dando a conocer algunas técnicas para que su interpretación sea objetiva y crítica.

EN el ámbito laboral y en los medios de comunicación los gráficos son esgrimidos para reforzar una información o para plasmar unos resultados. Pero todo gráfico tiene una información intrínseca que es vital para obtener una valoración objetiva.

Hoy en día, los ordenadores realizan gráficos de cualquier base de datos de forma rápida y sencilla. En la mayoría de los casos, dejamos que sea el propio programa quien elija de forma automática la escala para representar los datos en la pantalla, sin tener en cuenta que está realizando una manipulación en el gráfico resultante, ya que, por la característica de los datos, difícilmente la escala es 1:1. Lo cual puede dar lugar a graves errores, sobre todo si comparamos gráficos con diferentes escalas.

En esta actividad queremos trabajar esta vertiente de los gráficos, aunque sólo sea para funciones lineales, dando a conocer algunas técnicas para que su interpretación sea objetiva y crítica. La calculadora gráfica nos va a ser útil en dos aspectos:

- Para realizar la hoja del enunciado de la actividad para el alumno.
- Para verificar y ayudar en la explicación del profesor.

Objetivos

1) Ver que la inclinación de una recta depende de su pendiente y de la escala tomada para los ejes de coordenadas.
2) Ver que la ecuación de una recta es independiente de la escala tomada para su representación, mientras que su gráfica es dependiente de la escala.

3) Que el estudiante sepa calcular la pendiente de una recta conociendo su gráfica.

4) Saber interpretar el gráfico de una recta independientemente de la escala tomada para su representación.

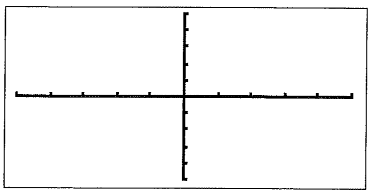
Actividades sobre interpretación de una gráfica

1) Ordena las siguientes rectas según su inclinación:

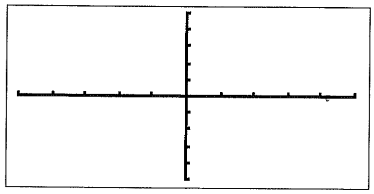
A) $y = 3x$ B) $y = \frac{x}{2}$ C) $y = x$

Respuesta: ☐ < ☐ < ☐

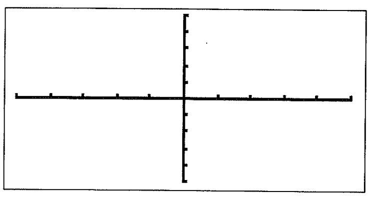
2) Dibuja las tres rectas anteriores:



A



B

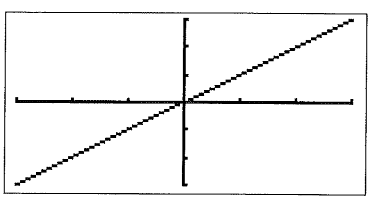


C

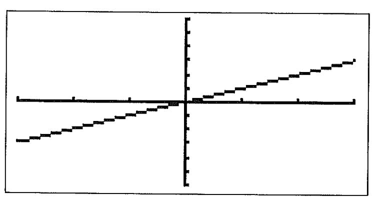
3) Según el gráfico, ordena de nuevo las rectas según su inclinación:

Respuesta: ☐ < ☐ < ☐

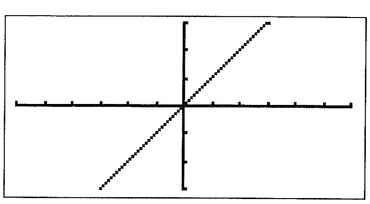
4) Ordena estas tres rectas según su inclinación:



A



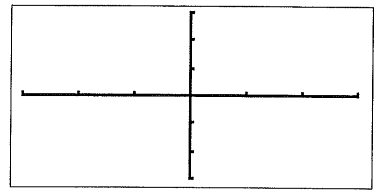
B

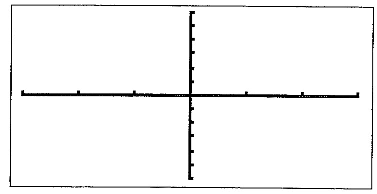


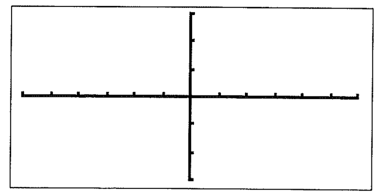
C

Respuesta: ☐ < ☐ < ☐

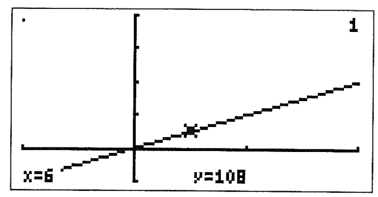
5) Dibuja la recta $y = x$ sobre los siguientes ejes: (cada división de los ejes representa una unidad)

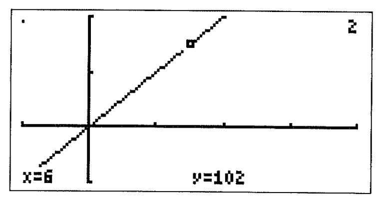


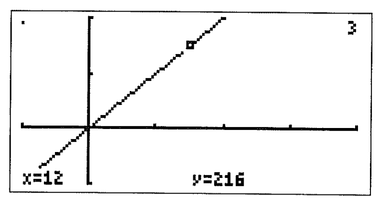


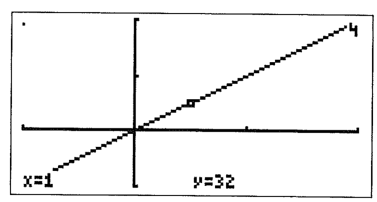


6) Ordena estas rectas según su crecimiento:



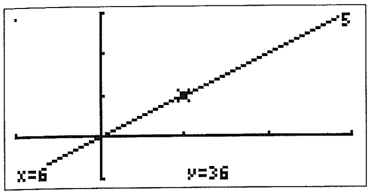






Respuesta: ☐ < ☐ < ☐ < ☐

7) Calcula la pendiente de la siguiente recta:

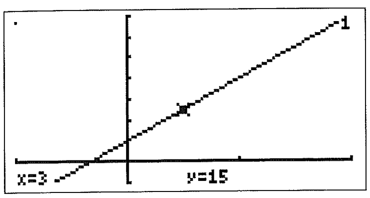


Respuesta: . . . . .

8) Calcula las pendientes de las rectas de la pregunta 6 y vuelve a ordenarlas según su inclinación:

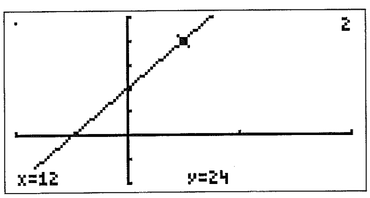
Respuesta: ☐ < ☐ < ☐ < ☐

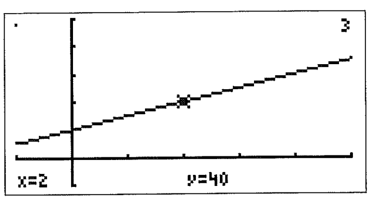
9) Ordena las siguientes rectas según su inclinación:



A

B



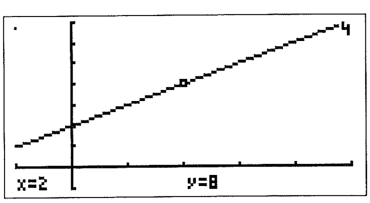


C

Los cortes con el eje de ordenadas son respectivamente: 6, 12 y 20.

Respuesta: ☐ < ☐ < ☐

10) Calcula la pendiente de la recta:



Su corte con el eje de ordenadas es 4.

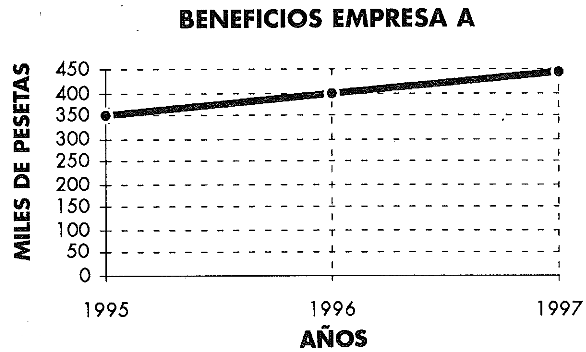
Respuesta: . . . . .

11) Vuelve a ordenar las rectas de la pregunta 9:

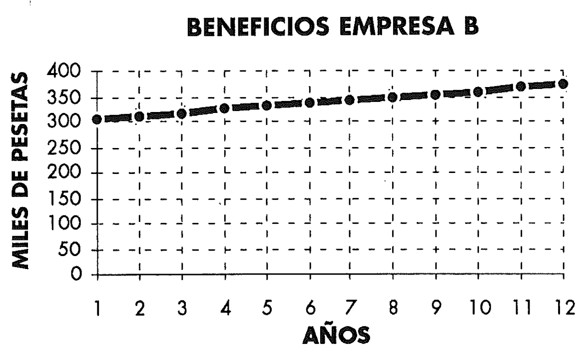
Respuesta: ☐ < ☐ < ☐

12) Los resultados de los beneficios de tres empresas están reflejados en los siguientes gráficos ¿En qué empresas crees tu que crecen más rápidamente los beneficios?

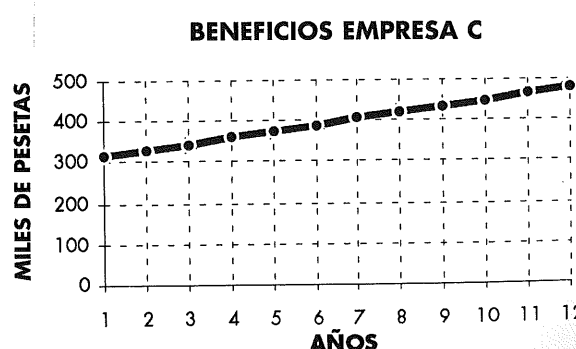
Años	*Beneficios*
1995	348
1996	396
1997	444



Meses	*Beneficios*
1	306
2	312
3	318
4	324
5	330
6	336
7	342
8	348
9	354
10	360
11	366
12	372



Trimestres	*Beneficios*
1	315
2	330
3	345
4	360
5	375
6	390
7	405
8	420
9	435
10	450
11	465
12	480



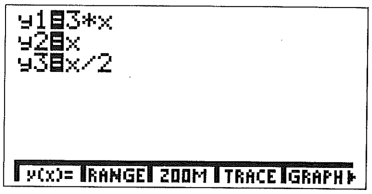
Respuesta: ☐ > ☐ > ☐

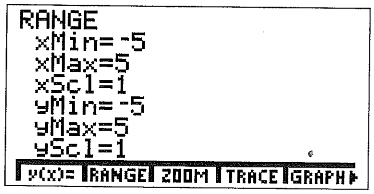
Comentarios sobre la actividad en el aula

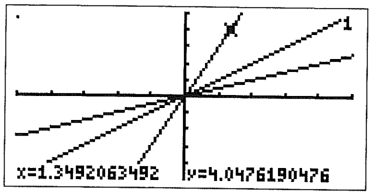
Los alumnos ya deben conocer que la inclinación depende de la pendiente y, por tanto, no debe existir dificultad para resolver con éxito la primera pregunta. No obstante, si no fuera así, esto serviría para evaluar el punto de partida de la clase y poder corregir los errores conceptuales que todavía se tengan de la representación de una recta.

Con la siguiente pregunta se pretende que se vea reflejada la respuesta anterior en el ámbito gráfico, como una constatación física del hecho estudiado.

Con la calculadora podemos representar las tres funciones sobre los ejes usando el RANGE que se especifica:



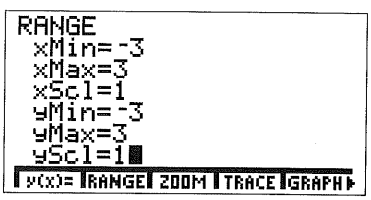


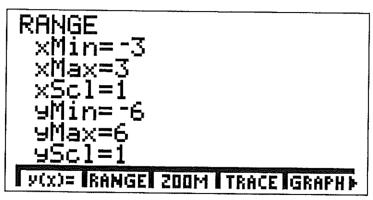


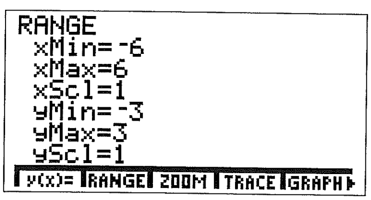
pudiendo comparar la inclinación de las tres rectas.

El siguiente paso es dibujar la misma recta y = x con diferentes escalas y pedir que las ordenen. Es evidente que la respuesta concordará con lo visto anteriormente y se producirá consecuentemente un error, que se intenta demostrar con la resolución de la pregunta 4, dibujando la recta y = x sobre ejes que no tienen la misma escala.

Para dibujar las gráficas de la recta y = x de la pregunta 5 se han cambiado los valores de RANGE y se ha dibujado la función cada vez. Los valores utilizados son respectivamente:





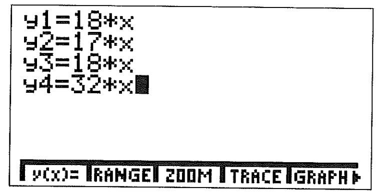


y se obtiene las gráficas que se tienen en la pregunta 4. Análogamente, los ejes se han obtenido con esos RANGE y sin seleccionar ninguna función en Y=.

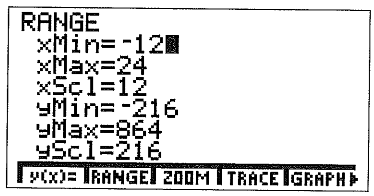
Si se realiza con los alumnos la comprobación de que al cambiar estos valores en RANGE la gráfica de la recta y = x cambia tal como se ve en los gráficos, será más fácil que sigan la explicación del profesor. Además, ellos podrán comprobarlo al dibujar la recta y = x sobre los ejes preparados con las diferentes escalas.

Es en este momento cuando han observado que el dibujo no es un dato objetivo para comparar las inclinaciones de las rectas (si estas no están dibujadas sobre ejes adecuados), es cuando se les propone resolver otra actividad partiendo del dibujo de las rectas para comprobar si han captado este hecho.

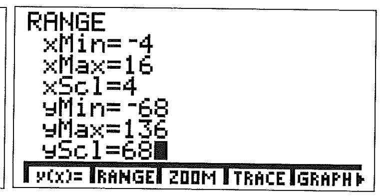
La actividad 6 esta formado por la representación de las siguientes funciones:



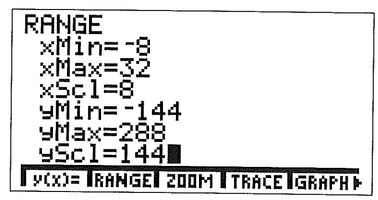
representadas bajo los siguientes RANGE:



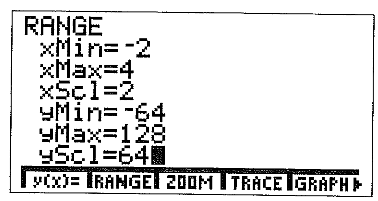
Gráfica A: y = 18 x



Gráfica B: y = 17 x



Gráfica C: y = 18 x



Gráfica D: y = 32 x

La experiencia de la resolución de las actividades anteriores les debería indicar a los estudiantes que no se pueden fiar sólo de la gráfica de la función. La pregunta que deberían responder sería: ¿Qué pueden usar para ordenar las rectas según su crecimiento?

La actividad 1 debería ser la pista para responder esta pregunta, ya que cuando tenían la expresión de la ecuación de la recta, las ordenaban de forma correcta, sin más que ordenar sus pendientes.

Sin embargo, ahora se les plantea un nuevo problema: ¿cómo encontrar la ecuación de una recta dada su representación gráfica? Que es el inverso al que ellos han estudiado: dada la ecuación de la recta obtener su gráfica.

Este es el motivo de plantear la actividad 7, donde tienen que obtener la pendiente de una recta que pasa por el origen, conociendo un punto.

Existen dos formas de resolverlo:

1. Si definimos la pendiente de una recta como el incremento que sufre la y por unidad de incremento de x, debemos dividir el Δy del punto por el Δx, en este caso como la recta pasa por el punto (6, 36), para un Δy de 36 le corresponde un Δx de 6, por lo tanto la pendiente sería $36/6 = 6$.
2. El hecho que pase por el origen, hace que la ecuación de la recta sea del tipo $y = ax$, por lo tanto tenemos una sola incógnita a y necesitaríamos una ecuación para calcular la pendiente. Como el punto está sobre la recta, verifica la ecuación y sustituyendo el punto en la ecuación tenemos $36 = 6a$, de donde despejamos a.

Para no dar muchas pistas para la resolución de la actividad 9, nos atreveríamos a sugerir la primera forma de calcular la pendiente.

Una vez halladas las ecuaciones de las rectas, es un buen momento para reflexionar y comentar las gráficas resultantes al aplicar diferentes escalas, ya que la comparación visual de las pendientes es errónea incluso, como se demuestra en este caso, para las gráficas con la misma pendiente y ecuación. Las gráficas de la actividad 9 son rectas que no pasan por el origen:

```
y1=3*x+6
y2=x+12
y3=10*x+20
y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH
```

Dibujadas con los siguientes RANGE:

```
RANGE
 xMin=-6
 xMax=12
 xScl=6
 yMin=-6
 yMax=42
 yScl=6
y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH
```

```
RANGE
 xMin=-24
 xMax=48
 xScl=24
 yMin=-12
 yMax=30
 yScl=6
y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH
```

```
RANGE
 xMin=-1
 xMax=5
 xScl=1
 yMin=-20
 yMax=100
 yScl=20
y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH
```

Como estas rectas ya no pasan por el origen de coordenadas, sus pendientes ya no pueden calcularse de la misma forma que los ejercicios anteriores y, por lo tanto, puede dar lugar a errores a la hora de ordenar las rectas al estar mal calculadas las pendientes.

En este caso también podemos elegir entre dos formas de cálculo de la pendiente:

1. Restamos a la coordenada y del punto que se muestra en el gráfico, la ordenada en el origen de la recta, para saber el incremento de la y cuando se incrementa la x. En el caso del ejercicio 10 sería:

   $$\Delta y = 8 - 4 = 4 \ ; \ \Delta x = 2$$

   entonces la pendiente es igual a $\Delta y/\Delta x = 4/2 = 2$.
2. Resolvemos el sistema que se obtiene al sustituir los dos puntos conocidos en la ecuación $y = ax + b$ y encontrar las dos incógnitas a y b.

Este último camino es más largo. Y en su razonamiento no existe tanto componente geométrico como en el primero, ya que es básicamente algebraico, por lo que es aconsejable usar el primero.

La recta del ejercicio 10 es $y = 2x + 4$ y está dibujada con:

```
RANGE
 xMin=-1
 xMax=5
 xScl=1
 yMin=-2
 yMax=14
 yScl=2
y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH
```

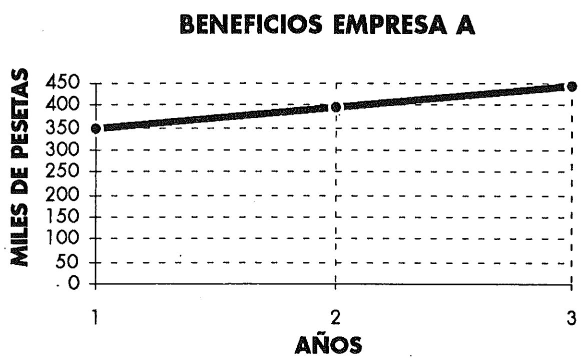
En la actividad 12 ya no hay sólo cambio de escalas, sino también hay diferentes unidades en la variable independiente.

Las escalas en la variable y son diferentes para no hacer tan obvio el ejercicio, sin embargo las escalas de la variable independiente en el gráfico B y C son iguales, pero en los tres casos las unidades son diferentes: años, meses y trimestres. El análisis debe contemplar ahora los cambios de unidad también, para poder comparar los resultados obtenidos en los beneficios.

Obviamente, tampoco en este caso la representación gráfica da una idea fiable para comparar el crecimiento de los beneficios en las diferentes empresas y es por ello que hay que recurrir al resultado analítico que nos dan las ecuaciones. Pero esta vez no todo se acaba en ese primer paso, sino que, como ya hemos dicho, hay que cambiar a una unidad común las variables independientes, por ejemplo a meses que es la unidad más pequeña.

Antes de calcular la ecuación de la recta representada en la gráfica A sería conveniente hacer un cambio de origen en las abcisas para que pertenecieran al mismo rango que las otras dos. Haciendo $a' = a - 1994$ los valores de la nueva variable a' serían: 1, 2 y 3.

Con este cambio de origen, la gráfica sería la misma y sólo cambiaría el rango:



Un hecho a tener en cuenta a la hora de calcular las ecuaciones de las rectas, es que ni los gráficos ni las tablas, nos dan la ordenada en el origen, dato que se podría obtener restando el incremento de la y al primer valor de esta variable, ya que al ser una recta, este siempre es constante. En los tres casos el beneficio inicial sale 300 miles de pesetas.

Pero para contestar a la pregunta formulada sólo es necesario calcular la pendiente de las rectas y, en este caso, es mas fácil ya que los incrementos de la variable x son de una unidad, por lo tanto hallando el incremento de y tendríamos ya las pendientes, que son respectivamente:

48, 6 y 15

Aunque hay que tener en cuenta que no corresponden a las mismas unidades.

Las ecuaciones que tenemos de las tres rectas son:

$$y = 48a' + 300$$
$$y = 6m + 300$$
$$y = 15t + 300$$

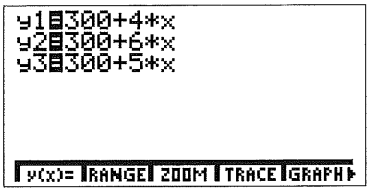
Donde a' son años, m meses y t son trimestres.

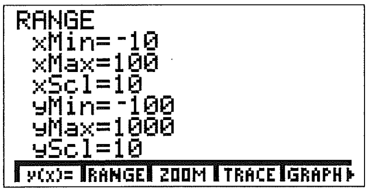
Cambiando las unidades mediante las relaciones: $a' = m/12$; $t = m/3$, obtenemos las siguientes ecuaciones:

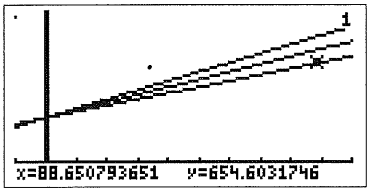
$$y = 4m + 300$$
$$y = 6m + 300$$
$$y = 5m + 300$$

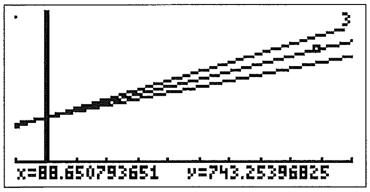
Donde ya podemos comparar el crecimiento de los beneficios y responder al ejercicio: A < C < B.

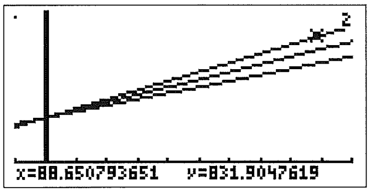
Podemos ahora dibujar las tres rectas con la calculadora gráfica y con un mismo RANGE.











Observándose ahora también gráficamente la relación anterior.

Francisco G. González
Inmaculada Palomero
IFP de Burriana (Castellón)
Floreal Gracia
CEP de Castellón.
Societat d'Educació
Matemàtica de la
Comunitat Valenciana
Al Khwarizmi

Bibliografía

TEXAS INSTRUMENT (1996): *Manual de la Calculadora Gráfica TI-85.*

SUMA 27
febrero 1998, pp. 117-119

El arte de razonar inductivamente

Fernando Díez Fernández

¿Qué se entiende por razonamiento inductivo (en contraposición al deductivo) y para qué sirve? es el tema de este artículo. Se incluye el método matemático de reducción al absurdo como la base para razonar inductivamente y se dan ejemplos muy familiares para ilustrar la utilización del razonamiento inductivo a todos los niveles.

MISCELÁNEA

ESTAMOS ACOSTUMBRADOS a pensar deductivamente. ¿Qué significa eso? Significa que como hoy llueve, tendré que sacar el paraguas. Significa que como el autobús pasa por la parada a las 9:15 h, tengo que salir de casa a las 8:30. En ambos ejemplos se responde a las preguntas: *¿qué se hace ahora?, ¿por qué?* Ahora quiero proponer otro tipo de razonamiento, el inductivo, al que también podemos llamar «el razonamiento de las causas». Aquí se responde a las preguntas: *¿cómo se ha llegado hasta aquí?, ¿por qué?*

Por ejemplo, hace poco leo en el periódico que acaba de morir el hombre más viejo de Arabia Saudí con casi 130 años. Y me surgen las preguntas: ¿qué clase de vida ha llevado para vivir tanto tiempo?, ¿qué factores deben ser los más influyentes?, ¿de qué forma podría seleccionarlos?

Razonar inductivamente supone «ir hacia atrás», analizar las causas asociadas a un hecho, mientras que el razonamiento deductivo consiste en «ir hacia adelante», determinar las consecuencias de un fenómeno. Estamos acostumbrados a pensar deductivamente porque es más fácil; además, es aparentemente más innovador, más fresco, es más optimista mirar hacia adelante que hacia atrás; y también más trivial y más banal.

Estoy convencido de que es, como mínimo, tan interesante analizar las causas que condujeron al desecadenamiento de la guerra civil española, por ejemplo, como estudiar sus consecuencias. Creo que el verdadero aprendizaje está ahí, en las cuestiones de fondo; ahí es donde está el significado; las consecuencias pueden verse sin más que observar con cierta objetividad. Sin embargo, para analizar las causas hace falta pensar, sopesar alternativas, seguir pistas, etc., lo cual requiere mucho mayor esfuerzo. Creo que ésta es la verdadera razón de poco auge del razonamiento inductivo.

El denominador común de los razonamientos inductivos es el método de reducción al absurdo.

El método de reducción al absurdo

Forma parte de la Lógica como ciencia. Consiste en lo siguiente: para demostrar que algo es verdadero, se supone primero que es falso y se razona deductivamente hasta llegar a una contradicción, a algo que no concuerda con los hechos. La contradicción proviene de suponer que lo que queríamos probar era falso; por tanto, debe ser verdadero.

Ejemplo: El viejo hombre árabe del ejemplo anterior ha llevado una vida sana.

Demostración: supongamos que no la ha llevado. Entonces no puede llegar a casi 130 años, ya que no se baten récords Guiness de longevidad viviendo de cualquier manera.

El método de reducción al absurdo es muy útil al razonar inductivamente porque «poda» posibles explicaciones de los hechos que no cuadran con la realidad observada.

El método de reducción al absurdo es muy útil al razonar inductivamente porque «poda» posibles explicaciones de los hechos que no cuadran con la realidad observada.

Ejemplos y utilidades de razonamientos inductivos

Sherlock Holmes

Analizaba las circunstancias de la vida de una persona o las de un crimen que tenían que darse para que cuadraran con los detalles que él observaba de forma magistral en las personas o escenarios del crimen. Aunque quizás sus razonamientos fueran exageradamente acertados, detrás de sus aparentes dotes adivinatorias residía una muy potente capacidad de razonar hacia atrás, de razonar inductivamente.

Sócrates

En uno de los diálogos de Platón se plantea a Sócrates la siguiente cuestión: ¿A quién encargar la educación de los hijos de sus amigos? Sócrates razona de la siguiente manera: ¿Por qué no dirigimos la atención a jóvenes que –según nuestros criterios de la buena educación– sean ejemplos del buen vivir? Y ahora, ¿por qué no nos interesamos por sus educadores? Razonando por reducción al absurdo, es obvio que sus educadores tienen que ser buenos, ya que de otro modo los jóvenes no estarían bien educados, puesto que nadie que se comporta dignamente lo hace por casualidad. Por tanto, ¡encarguemos la educación de nuestros hijos a educadores que hayan demostrado fehacientemente *–con hechos–* que son diestros!

(¿De quién te harías socio para montar un negocio? ¿De alguien sin experiencia en ese tema o de alguien que tenga un negocio parecido y le vaya bien? El segundo *ya ha demostrado mucho*).

Arturo Pérez Reverte

El célebre periodista y, sobre todo, novelista español nos propone en su libro La Tabla de Flandes el «ajedrez inductivo». Consiste en partir de una posición ajedrecística para, yendo hacia atrás, conocer las jugadas anteriores, es decir, las que han dado lugar a dicha posición. En este ejemplo se aprecian claramente todas las características del razonamiento inductivo: se parte de un «hecho» (la posición dada) para después ir analizando las «causas» (jugadas precedentes) que han conducido a ese hecho. Para «podar» causas (es decir, desechar posibles posiciones anteriores) se utiliza el método de reducción al absurdo, demostrando la imposibilidad de llegar a nuestra posición desde determinadas jugadas.

Profesiones

Se me ocurren dos profesiones en las cuales se trabaja inductivamente: médico y policía/criminólogo. En ambos casos se tienen que esclarecer las causas que conducen a los hechos. En la profesión de médico a los hechos se les llama síntomas: a partir de aquí hay que determinar la dolencia (por eso es tan importante saber preguntar al paciente). En la de policía los hechos son delitos; Agatha Christie y Arthur Conan Doyle eran, sin lugar a dudas, dos maestros del razonamiento inductivo.

El «problema de Einstein»

El siguiente problema se lo propusieron, supuestamente, a Einstein sus alumnos. Hay que decir, también supuestamente, que tardó tiempo en resolverlo pero que al final lo logró. Dice así: Dos amigos se encuentran en la calle y uno le pregunta al otro por las edades de sus tres hijas. El interpelado responde: «El producto de sus edades es 36, y la suma de sus edades es igual al número del portal que ves ahí enfrente». El otro dice: «Me falta un dato»; y apostilla el primero: «Ah, sí, la mayor toca el piano». La pregunta que se plantea es: ¿Cuáles son las edades de las tres hijas?

Para resolver este problema lo primero que hacemos es formar todas las posibles combinaciones de tres números cuyo producto sea 36. Puesto que el que pregunta *conoce cuánto vale la suma de las edades*, incluyo también a continuación la suma de cada combinación:

1	+	1	+	36	=	38
1	+	2	+	18	=	21
1	+	3	+	12	=	16
1	+	4	+	9	=	14
1	+	6	+	6	=	13
2	+	2	+	9	=	13
2	+	3	+	6	=	11
3	+	3	+	4	=	10

La pregunta clave del problema es: ¿por qué dice el interlocutor que le falta un dato? Ésta es una «cuestión inductiva». Y, curiosamente, es la pregunta que menos se plantea el que intenta resolver el problema. *No intentan siquiera resolver este interrogante.* Quizás piensen que es demasiado difícil de adivinar, que son muchas las posibilidades a evaluar. El caso es que, después de obtener las combinaciones de la forma como lo he hecho, es fácil dar con la razón: *hay dos combinaciones que suman lo mismo.* Y ahora razonamos por reducción al absurdo: la combinación «ganadora» está entre las dos que suman 13, porque de otro modo, ¿tiene alguna razón el que pregunta para decir que le falta un dato? No, puesto que las otras combinaciones suman números distintos en cada caso. Ahora, solventando el truco del «piano» y teniendo en cuenta que *hay una que es mayor que las demás,* nos queda la combinación 2, 2 y 9. Pero insisto, la clave de este problema está en el «escollo inductivo».

Conclusión

Razonar inductivamente no es fácil. Requiere buenas dotes de observación objetiva, tener imaginación, saber razonar por reducción al absurdo y... bastante esfuerzo intelectual.

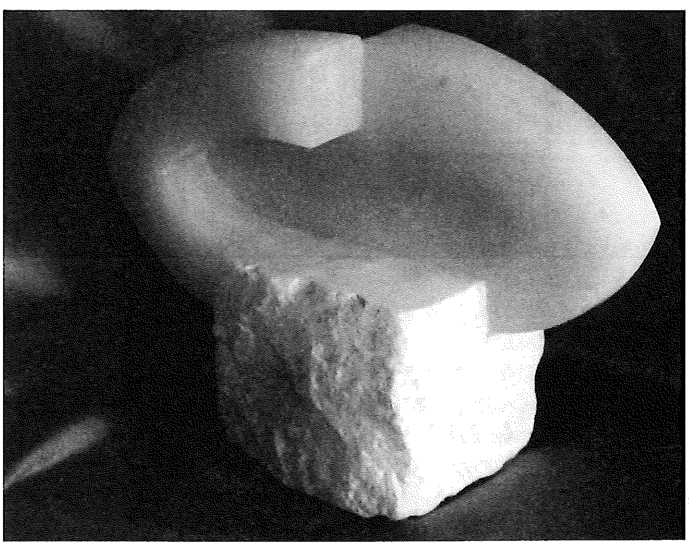
Las ventajas que tiene utilizar a menudo este tipo de razonamiento compensa con creces el trabajo invertido:

- Fomenta de forma muy notoria el pensar por sí mismo (tan en desuso actualmente).
- Propicia el pensamiento independiente y autónomo, poco sensible a malas influencias externas: los hechos hablan por sí solos para el inductivista, con lo que no nos pueden engañar fácilmente (obsérvese la aplicación de esta idea a situaciones relacionadas con la demagogia política, promesas electorales y a muchas otras situaciones de la vida cotidiana).

El razonamiento inductivo, por tanto, ayuda de forma inestimable al desarrollo personal. ¡Úselo!

Razonar inductivamente no es fácil. Requiere buenas dotes de observación objetiva, tener imaginación, saber razonar por reducción al absurdo y... bastante esfuerzo intelectual.

Fernando Díez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»



Transparencia
Alabastro, 27x15x37
José Miguel Fuertes

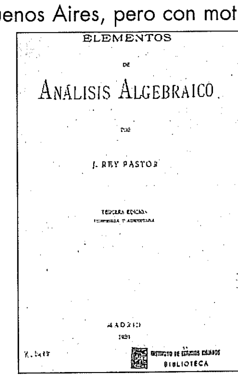
SUMA 27
febrero 1998

Un libro de texto viejo pero con categoría

ELEMENTOS DE ANÁLISIS ALGEBRAICO
Julio Rey Pastor
Fortanet, Madrid, 1917, 1ª edición
Unión Poligráfica, Madrid, 1935, 5ª edición
Industrias Gráficas Martín, Madrid, 1961, 14ª edición

Ediciones

Este libro es un clásico de largo recorrido, con muchas ediciones, de las que hemos indicado tres representativas: la 1ª por razones obvias, la 14ª porque es la última compuesta en vida del autor, que falleció un año después, y la 5ª por ser la inmediata anterior a la guerra civil. Desde 1921, Julio Rey Pastor (Logroño 1888-Buenos Aires 1962) alternaba cada año su trabajo entre las Universidades de Madrid y Buenos Aires, pero con motivo de la contienda permaneció más de diez años alejado de su país. A pesar de todo, el libro se siguió editando en Madrid, lo ha sido al menos hasta 1981, pero más que de nuevas ediciones se trata de reimpresiones, pues los cambios, si los hay, no pasan de ser correcciones. El año 1945, *Elementos...* se publicó en Buenos Aires, con alguna ampliación respecto a la versión española, pero sin cambios fundamentales. Se puede considerar que la obra española alcanzó su forma final en la primera mitad de la década de los treinta y permaneció inalterada después de la guerra, de modo que los comentarios que siguen sobre el contenido sirven para cualquiera de las ediciones de este periodo, que se plasman en un volumen de poco más de quinientas páginas, muy fácil de encontrar en las bibliotecas de los centros de enseñaza.


ELEMENTOS
DE
ANÁLISIS ALGEBRAICO
POR
J. REY PASTOR
MADRID

El origen del tratado, su primer diseño escrito, se remonta a tres años antes de la primera edición, cuando Rey Pastor publicó unos apuntes litografiados para sus clases del curso 1914-15 en la Universidad Central: *Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso)*, Madrid, Artes Gráficas Mateu, 1914. Estos apuntes, cuyo contenido está marcado por el plan de estudios vigente (el del ministro García Alix, de1900) ya tienen la estructura en cuatro partes del texto final, dedicada cada una de ellas a los algoritmos que se pueden establecer en los diferentes estadios del sistema de los números: natural, racional, real y complejo. Rey Pastor no

RECENSIONES

considera el número entero porque introduce los negativos a la vez que las fracciones y en toda la primera parte la resta y la división sólo se hacen cuando es posible. En los apuntes del primer curso no aparecieron los algoritmos indefinidos (límites, series y fracciones continuas) pero encabezaron los apuntes litografiados del segundo curso, publicados en 1916. Estos últimos van precedidos de una advertencia que, tras algunos cambios y añadidos, es la introdución que figura en las ediciones impresas posteriores. Allí explica Rey Pastor que un curso no puede entrar en la materia con la extensión propia de un tratado, que es más sistemático y completo, aunque tampoco tiene que ser una enciclopedia ni una obra histórica. El paso que Rey Pastor dio al transformar los apuntes del primer curso en el libro *Elementos...* es precisamente el que separa unas lecciones de un tratado. Para facilitar la primera lectura, hay apartados señalados con un asterisco y algunos párrafos impresos en letra de cuerpo menor, indicando las partes del libro que se pueden dejar para la segunda vuelta. Además, cada capítulo se cierra con unas notas en las que destaca la información erudita y bibliográfica, destinada tanto a suministrar conocimiento histórico cuanto a orientar el estudio posterior más avanzado.

Plan didáctico

La introducción es un texto muy adecuado para conocer los métodos didácticos del autor. Conseguir rigor sin formalismo y lograr profundidad con brevedad son los objetivos principales de su método, a los que Rey Pastor aplica su sólida formación y su capacidad para presentar los temas en forma sintética y original. El autor identifica el rigor con la claridad, cualidad que deja al lector crítico satisfecho del encadenamiento lógico de las demostraciones. Prefiere el método lógico al intuitivo, aunque su tratado se dirige no sólo a estudiantes de matemáticas, sino también de otras ciencias y de las ingenierías, porque prefiere que el texto esté dirigido a la formación matemática y que sea el profesor el que module la explicación de sus contenidos y los complete con las prácticas más adecuadas a otras enseñanzas. Se esfuerza «en elementalizar las cuestiones difíciles sin menoscabo del rigor», pero como no le gusta usar un lenguaje formalizado y reniega también de la abstracción prematura, su rigor es algo subjetivo y necesita de la complicidad de su lector ideal. Por otra parte, quiere hacer un tratado relativamente reducido, para lo cual se propone llegar por el camino mínimo a los resultados principales y a las puertas de los temas avanzados, evitando «perderse en una selva de minucias y casos particulares» con los que nunca se sale de la matemática elemental. Como consecuencia de este enfoque, el lector necesita poner algo de su parte, tiene que ser un lector inteligente que interprete la claridad que Rey Pastor transmite. El autor así lo proclama con una analogía anatómica, advirtiendo que no hay que entretenerse demasiado en los detalles porque «los aparatos de masticación artificial sólo aprovechan a quienes carecen de dentadura».

Conseguir rigor sin formalismo y lograr profundidad con brevedad son los objetivos principales de su método, a los que Rey Pastor aplica su sólida formación y su capacidad para presentar los temas en forma sintética y original.

Números

Un primer repaso general del libro lleva a examinar el proceso seguido para explicar las ampliaciones del concepto de número, desde los naturales a los complejos, observando el *principio de permanencia de las leyes formales* de las operaciones aritméticas. Los naturales se introducen, siguiendo a Dedekind, mediante la coordinación de conjuntos finitos, definiendo primero éstos como conjuntos que admiten una ordenación cumpliendo tres condiciones, ninguna de las cuales es consecuencia de las anteriores: «A) Entre cada dos elementos, hay uno anterior al otro. B) Hay un primero y un último elemento. C) Todo conjunto parcial tiene primero y último elemento».

Con esta definición, la suma se define mediante el *agregado* (unión disjunta) de conjuntos y se prueban sus propiedades básicas, así como el método de inducción. Lo mismo con el producto, que no es sino una suma particular de varios sumandos. Luego se establecen los conceptos de mayor y menor, tras los cuales surge la diferencia cuando es posible. Por último, incorpora las operaciones con polinomios y la división entera, ingredientes con los que puede abordar los sistemas de numeración y la obtención de la raíz cuadrada por defecto. De los naturales pasa a los racionales haciendo fracciones (pares de naturales con el segundo no nulo) afectadas de signo y diciendo que «dos fracciones se dicen *iguales*, si tienen el *mismo signo* e *iguales productos cruzados*». Entonces un número racional es cada ente abstracto representado por fracciones iguales y el número es entero si está representado por una fracción con denominador unidad. Seguidamente, define las cuatro operaciones racionales (suma, diferencia, producto y división, esta última salvo divisor cero) y sus propiedades básicas, teniendo necesidad de distinguir casos a causa de los signos. Introduce además el orden y su relación con las operaciones racionales.

La tercera parte del libro se dedica al número real, que define mediante cortaduras de Dedekind, lo que da de inmediato las propiedades de orden. Pero enseguida introduce sucesiones monótonas convergentes (de números racionales) y demuestra el «teorema fundamental» siguiente: «Todo número real *a* es elemento de separación de infinitos pares de sucesiones monótonas convergentes. Recíprocamente, todo par de sucesiones monótonas convergentes (a_i; a'_i) tiene un elemento de separación que es único». Este teorema le permite definir las operaciones y establecer sus propiedades mediante las sucesiones, lo que es más sencillo que con las cortaduras. De este modo prueba que en el sistema real se mantienen las cuatro operaciones racionales y sus propiedades. Finalmente, en la cuarta y última parte define los complejos como pares de reales con las operaciones dadas en la forma aritmética de Hamilton, viendo una vez más la permanencia de las leyes formales de las cuatro operaciones racionales.

El camino seguido por Rey Pastor para llegar desde nociones previas de conjuntos hasta el número complejo podría seguirse hoy sin más que adaptar el lenguaje y algunos detalles, con la salvedad del número entero, que ahora se introduce como un anillo previo al cuerpo racional. Esto puede explicarse históricamente porque la estructura de anillo no se estudió aislada hasta bien entrado el siglo actual (Fraenkel, 1914), mientras que la de cuerpo viene del siglo anterior (Galois-Kronecker). Con el número real Rey Pastor se muestra pragmático, pues utiliza cortaduras o sucesiones según le conviene para abreviar, gracias a que primero establece en su teorema fundamental la equivalencia entre ambos métodos de definición del número.

Algoritmos

El contenido comentado hasta ahora, formado por los primeros apartados de cada una de sus cuatro partes, es el basamento del libro, que se completa edificando sobre dicha plataforma diversos algoritmos.

En la primera parte, que ocupa poco más de ciento cincuenta páginas, los algoritmos correspondientes al número natural son la divisibilidad (algoritmo de Euclides y congruencias) y la combinatoria, incluyendo en ésta los grupos de sustituciones, temas habituales entonces en el primer curso de análisis matemático. Cabe señalar como característico de Rey Pastor que incluyera en el libro alguna cuestión tratada por él en revistas especializadas. Desde estudiante había destacado en la resolución de problemas propuestos en revistas españolas, francesas y alemanas, muchos de los cuales eran de aritmética. En particular, la divisibilidad de factoriales fue un tema recurrente en las listas de problemas en Europa y USA en los primeros años del siglo, y Rey Pastor se ocupó del asunto en varias ocasiones, primero siendo todavía estudiante y luego en su primer año de profesor, lo que dio lugar a que en su libro aparezca un apartado sobre estas cuestiones que amplía el alcance tradicional de los cursos, que llegaba hasta el teorema de Lagrange que permite calcular el exponente de un número primo en la factorización del factorial de un número. Rey Pastor añade algunos teoremas y un ejercicio, sacados de su anterior actividad en la resolución de problemas, dedicados a encontrar relaciones de divisibilidad entre números dados por operaciones entre factoriales, y lo hace con demostraciones muy breves y elegantes.

...hay que advertir que en este libro el álgebra, entendida como a principios de siglo, es la parte del análisis que se ocupa de los polinomios y las ecuaciones que se forman con ellos; pero subyace una cierta idea de que lo algebraico es finito y el análisis aparece propiamente cuando se introduce el infinito. Por eso el número racional es la base algebraica y el número real la analítica.

La segunda parte, de unas ciento sesenta páginas, se inicia con la exposición del número racional y sus operaciones, como antes se ha indicado. Los primeros algoritmos asociados al número racional, que llama «algoritmos de iteración», son los que completan la aritmética de la primera parte, a saber, las progresiones, los cumulantes y las fracciones continuas finitas. Luego sigue el «algoritmo de los determinantes», con su definición combinatoria, sus propiedades y desarrollos, productos y casos especiales. Expresa el producto de un determinante de orden *n* por otro de orden *m* como un determinante de orden n+m con un menor nxm con números arbitrarios, de donde deduce como caso particular, cuando n=m, la fórmula de Binet-Cauchy que da el producto como determinante de la matriz producto; pero Rey Pastor no da proridad a las matrices, pues deja para después de los determinantes un breve apartado con la noción de matriz, de característica y el producto de matrices. Las últimas cincuenta páginas de esta segunda parte están dedicadas a lo que llama el «algoritmo algebraico», que incluye los dos temas siguientes: (i) polinomios de una y varias variables con coeficientes racionales y cálculo de su máximo común divisor; (ii) sistemas de ecuaciones lineales, regla de Cramer y teorema de Rouché-Frobenius.

La tercera parte, unas ciento treinta páginas, es más bien analítica, aunque hay que advertir que en este libro el álgebra, entendida como a principios de siglo, es la parte del análisis que se ocupa de los polinomios y las ecuaciones que se forman con ellos; pero subyace una cierta idea de que lo algebraico es finito y el análisis aparece propiamente cuando se introduce el infinito. Por eso el número racional es la base algebraica y el número real la analítica. Así, tras la definición del número real y sus operaciones aparecen los límites, los cálculos aproximados con expresiones decimales, los logaritmos decimales y los algoritmos indefinidos (series y fracciones continuas). En esta parte deja también la huella de sus primeros trabajos de investigación, pues incorpora al libro un método de sumación de «series hipergeométicas» que había desarrollado en un artículo publicado en el primer número de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, de 1911.

La mixtura de álgebra y análisis se aprecia plenamente en la cuarta parte, cincuenta páginas dedicadas al número complejo. Por un lado, los límites y las series se pueden extender al caso complejo, pero son más interesantes las observaciones que surgen del lado algebraico. Al darse en los complejos las cuatro operaciones racionales con sus leyes formales, Rey Pastor concluye como «escolio general» que son válidos para estos números (y por tanto también para los reales, aunque en su momento no hizo esta afirmación) los algoritmos establecidos para los números racionales. Esta forma de proceder ejemplifica su doble desiderátum: rigor sin formalismo y brevedad con profundidad. Para llegar lejos en poco tiempo, no repite con los complejos los argumentos ya dados con los racionales, le basta observar que todo depende de un pequeño grupo de operaciones y leyes; esto es riguroso porque es claro y queriendo precisar más se cae en el formalismo que pretendería desarrollar la teoría de los sistemas lineales, por ejemplo, sobre un cuerpo, en principio de característica cero. Como dice en la introducción, usando palabras del italiano E. Pascal (1865-1940), esto sería «didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil», al pretender abstraer sin una base previa que sirva de apoyo a la abstracción. Así que Rey Pastor prefiere explicarse en la base, los racionales, y luego hacer la abstracción de un plumazo, con la simple observación general del escolio citado, aunque sin llegar en este caso a un contexto completamente abstracto, sino tan sólo a la situación más general, pero todavía concreta, de los números complejos.

Otro aspecto algebraico que desarrolla en los complejos, después de estudiar potencias y raíces, es la resolución algebraica de las ecuaciones hasta el cuarto grado, pues pasar de allí era materia del segundo curso, en el que se explicaban la continuidad y la derivación de funciones necesarias para demostrar el teorema fundamental del álgebra, que es un teorema de análisis de variable compleja (ver, por ejemplo, *Lecciones de álgebra* de Rey Pastor).

Elementos... concluye con la demostración del «teorema final de la Aritmética», que enuncia así: «No existe ningún sistema de números complejos de más de dos unidades en el que el producto satisfaga a todas las leyes formales de la Aritmética». La demostración de Rey Pastor no es general, como advierte el autor, sino que se limita a los casos de tres y cuatro unidades. Al manejar números complejos de varias unidades está plasmando un ejemplo de la noción de espacio vectorial de varias dimensiones, algo que en el caso de una dimensión ya había realizado antes en un apartado del número racional, llamado «teoría de las magnitudes». Allí habla, a partir de ejemplos físicos, de magnitudes escalares o de una dimensión sobre los racionales, mientras que ahora los complejos serían magnitudes vectoriales de varias dimensiones o unidades sobre los reales. Pero en el libro no aparece la noción de espacio vectorial, lo que a partir de la década de los cuarenta empieza a indicar que se trata de un libro clásico (lo mismo pasa con la relación entre matrices y determinantes). Pocos años antes de morir Rey Pastor manifestó deseos de actualizar el libro, lo que posiblemente afectaría de modo princial a la parte de álgebra lineal.

En definitiva, es un libro muy anclado en una época que ya no es la nuestra, un libro de texto viejo pero con categoría. Está escrito con el nervio característico del autor, que deja en la obra reflejos de su temperamento. [...] Ya no está en los cuarenta principales, pero ha pasado a ser un clásico de la matemática en lengua española.

El tema anterior le permite introducir los cuaternios de Hamilton, que son números complejos de cuatro dimensiones con un producto que pierde la propiedad conmutativa. Estas cuestiones de los números complejos de varias unidades están desarrolladas de modo más completo en la edición argentina.

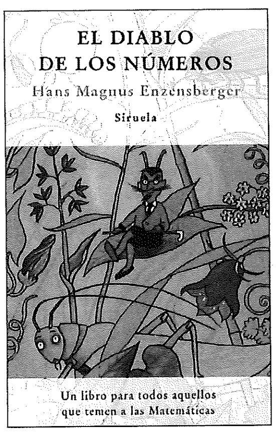
Final

En una de las últimas páginas del libro hay una nota al pie que indica otras representaciones de los cuaternios en el espacio ordinario tridimensional diferentes de la que él propone. La nota termina con esta observación: «la representación... que expone Marzal (*Calculatoria*, pág. 416), es errónea». Esta impertinencia tiene su origen en el ambiente entre 1914 y 1917, cuando Rey Pastor se enfrentaba a los catedráticos más veteranos, entre ellos Octavio de Toledo en Madrid o Marzal en Barcelona, reclamando una renovación de la enseñanza de las matemáticas y de los textos, de modo que el suyo surgía como alternativa militante a los de aquéllos. Pero pasados los años Marzal y su *Calculatoria* (parte de las *Lecciones de análisis matemático* que impartía en Barcelona) serían algo lejano y desconocido para los lectores, a pesar de lo cual la nota no desapareció en ediciones sucesivas. En el libro hay otros detalles de este tipo que reflejan situaciones subjetivas del momento en que fue escrito pero que son difíciles de comprender con el paso del tiempo. De igual modo, algunas citas de personas o libros están hechas coloquialmente, suponiendo cierta familiaridad ambiental del lector, lo que también deja de ser adecuado con el paso del tiempo. A veces el propio libro es víctima de esta familiaridad, así por ejemplo en el índice de autores (Rey Pastor fue de los primeros en España en introducir en sus libros estos utilísimos índices) aparece Pascal con presencia en cuatro páginas, pero se trata indistintamente del clásico francés B. Pascal (1623-1662), citado a propósito del triángulo aritmético, y del italiano contemporáneo E. Pascal antes mencionado, famoso entonces entre otras cosas por su *Repertorio* (1897-1900), recomendado frecuentemente por Rey Pastor como obra enciclopédica de consulta para la matemática del siglo XIX.

En definitiva, es un libro muy anclado en una época que ya no es la nuestra, un libro de texto viejo pero con categoría. Está escrito con el nervio característico del autor, que deja en la obra reflejos de su temperamento. Si bien no es directamente útil para los programas actuales, será atractivo para los profesores interesados en la visión histórica de la enseñanza de la matemática, referida en este caso al primer curso universitario, en este siglo que pronto vamos a clausurar. Ya no está en los cuarenta principales, pero ha pasado a ser un clásico de la matemática en lengua española.

Luis Español González

EL DIABLO DE LOS NÚMEROS
Hans Magnum Enzensberger
Siruela
Madrid, 1997
259 páginas



No es frecuente que un libro cuyo tema son la matemáticas traspase los limitados círculos de los degustadores del tema. Por eso es más destacable la presencia del que comentamos en las listas de libros más leídos de nuestro país, después de haberlo hecho en otros idiomas, además del suyo original, el alemán (y está comprometida su traducción al menos a 15 lenguas). Bien es cierto que ha venido precedido por una intensa campaña en todos los medios de comunicación, del tipo de las que se dan en los lanzamientos de todos los *best-seller* y avalado por la poderosa personalidad de uno de los intelectuales europeos más conocidos, el poeta y ensayista Enzensberger.

Pero bueno es que se hable de las matemáticas a niveles masivos para algo más que para decir lo plomizas que son, lo raros que son sus cultivadores o el horror que supone tener que superarlas en los distintos cursos de la enseñanza obligatoria (en donde, como una consideración colateral, hay matemáticas todos los años, y lo mismo pasa en todos los países, luego alguna razón profunda habrá de la necesidad de esa presencia, además, por supuesto, del ancestral sentimiento masoquista de la humanidad). Aunque algo de todo lo anterior no ha podido evitarlo ni el editor del libro (y quizás también el autor, puesto que en el título original también está) porque en la misma tapa de él ya se dice que se trata de «Un libro para todos aquellos que temen a las Matemáticas», que parecen considerar que son legión.

Pero pasemos ya al libro. Es muy bonito, bien presentado, con muchos dibujos y colores, y agradable de leer, un cuento dirigido a lectores de 8 a 88 años (como corresponde a la prestigiosa colección «Las tres edades» en que está encuadrado, y en la que también se publicó *El mundo de Sofía* con el que podríamos hallarle algunas afinidades). La historia es sencilla. Robert es un niño al que, como a tantos otros, no le gustan las matemáticas, incluso las odia, como consecuencia de una práctica escolar no muy estimulante, con problemas del tipo de «Si dos panaderos hacen 444 trenzas en seis horas, ¿cuánto tiempo necesitarán cinco panaderos para hacer 88 trenzas?» que les propone su profesor señor Bockel (con el que el autor se ensaña con un poco de exceso, aunque todos conocemos a especímenes parecidos). Un buen día, como una nueva aparente pesadilla a competir con otras que le fastidian los sueños, se le aparece un diablillo que pretende ser su guía por el mundo de las matemáticas. Tras algunos encontronazos y algunos desencuentros, poco a poco la relación va avanzando y Robert acaba por ir encontrando placer a su recorrido por ese mundo nuevo, a entender cosas cada vez más profundas, a relacionar partes aparentemente lejanas y a ser conducido en un viaje ideal hasta la secta de los matemáticos e investido como miembro aprendiz de la misma. Y en su recorrido llega hasta a comprender un poco a su torpe profesor de mates, que les pone a veces problemas enrevesados solo por tener un poco de tiempo del que poder disponer a su antojo (y poder comerse en paz las trenzas del problema).

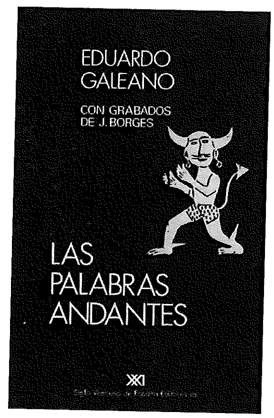
En ese recorrido imaginado e imaginativo con el genio van apareciendo resultados sorprendentes, para los cuales una veces hay razones y otras no, porque resultados sencillos de la teoría de números siguen sin demostrar (como que todo número par es suma de dos primos, la llamada «Conjetura de Goldbach», que por cierto en el libro está mal expresada, ya que se han olvidado lo de par, con lo que ya no es cierto: por ejemplo 17, que no es par pero que cumple las condiciones pedidas en el libro, no se puede expresar como suma de dos primos) y otros, aunque están demostrados no son muy conocidos y son sorprendentes (como que dado un número cualquiera entre él y su doble hay al menos un número primo). Y en su conjunto presenta una panorámica atractiva de la actividad matemática, en la que destacaríamos algunos bellos fragmentos (tanto desde el punto de vista literario como del de la presentación matemática, por ejemplo en la página 173 sobre los conjuntos infinitos o en las páginas 216 y 217 sobre lo que es una demostración), un ambiente distendido de la matemática como búsqueda placentera y que permite analizar con los mismos medios problemas muy alejados aparentemente, la aparición de las matemáticas en diferentes facetas de la vida, y no sólo en la (con frecuencia pesada) clase. Además, ofrece una serie de rasgos no muy habituales, como que las matemáticas son una ciencia en continuo cambio y aún sin acabar, algo que los profesionales sabemos pero que debemos transmitir muy mal porque no es lo que la sociedad percibe («Así que a veces también los diablos de los números fallan. Eso me tranquiliza. Yo creía que podíais hacer tanta magia como quisierais»), en cuya creación han participado (y lo siguen haciendo) hombres ¡y mujeres! de todas las partes del mundo (no sólo europeos) y cada uno apoyándose en resultados anteriores (es muy bonita la expresión de esto en la página 216). Se ve desde luego que el autor tuvo la suerte de tener un profesor que le transmitió más placer por las matemáticas de lo normal, y que ha llegado, aun sin ser profesional, a percibir los efluvios placenteros de las mismas (a lo largo de su carrera como escritor se puede rastrear muchos contactos con las matemáticas, con poemas titulados «Punto trigonométrico» o «Homenaje a Gödel», por ejemplo).

También hay fallos, del original y de la traducción. Entre los del original está el hecho de que casi todo lo que presenta sean números, cayendo en un error habitual de identificar números y matemáticas, «olvidando» partes tan importantes como las probabilidades o la estadística y también la mayoría de los problemas «actuales» de las matemáticas (sólo aparece el problema del viajante de comercio), sin aprovechar algunos que podrían haber dado mucho juego como los fractales, por ejemplo. Asimismo parece un poco exagerado que el destinatario de las elucubraciones del diablillo sea un niño de 10 años, aun con ayuda de la magia. Y también se abusa de poner nombres diferentes a conceptos acuñados hace años en las matemáticas (tales como números de primera, irrazonables o imaginados por primos, irracionales o imaginarios), sin añadir nada significativo. Tampoco está muy clara la correspondencia entre el «saltar» o «sacar rábanos» del texto con la elevación a potencias (junto con la afirmación de que «los romanos no sabían saltar», pág. 41) o la extracción de raíces (desde luego la raíz cuadrada de 16 no es 8 ni la de 8 es 4, págs. 75-76).

En cuanto a la traducción, muy cuidada desde el punto de vista literario y de la presentación, salta a la vista que nadie relacionado con las matemáticas la ha revisado (o lo ha hecho de forma muy somera). Hay una confusión general entre probar, mostrar y demostrar (mucho más compleja al parecer en alemán que castellano, y que se da, por ejemplo, en las páginas 95 y 214); se olvida decir que los números han de ser pares en la conjetura de Golbach (página 62), lo que además vuelve trivial la cuestión que se propone en la página 64; sólo en los agradecimientos finales traduce el nombre del nefasto profesor del protagonista: profesor Torpón; habla de Bonatschi en vez de Fibonacci en todo el texto y, por acabar, se refiere a un ¿conocido? matemático Johan van de Lune (que no puede ser otro que Vandermonde).

Una pena esos errores (que nos gustaría, aunque conociendo el mundo editorial no lo esperamos, que sean corregidos en sucesivas ediciones, que no faltarán) que empañan sólo en parte los múltiples aciertos. Ya que estamos seguros de que bastantes de los miles de lectores de este libro encontrarán en él el empuje suficiente para iniciar el tránsito por el excitante territorio de las matemáticas.

Fernando Corbalán



LAS PALABRAS ANDANTES
Eduardo Galeano
Ed. Siglo Veintiuno
Madrid, 1993
ISBN: 84-323-0814-5
316 páginas

No sé vosotros, pero yo siempre he echado en falta un buen libro para leer durante los exámenes. Un libro de relatos breves que permitiera un cierto entretenimiento mientras representabas el papel de vigía de las buenas formas, intentando controlar las naturales y heroicas tentaciones del alumnado de copiar lo que fuera. Y eso vengo a recomendaros aquí, ahora que ya no hacemos exámenes... un libro que se adscribe a ese modelo pero que además suscita una poética cita entre la fantasía y el pensamiento.

Las razones que invitan a la reflexión a una persona son diversas, seguramente es necesario que la pregunta viva dentro de nosotros, parásita en nuestra mente, aunque no se haga explícita, o que andemos contaminados por la duda, o instalados en ella permanentemente o que al menos la suframos de forma crónica. Es posible por tanto que el mérito no sea de Galeano, ni de los dibujos de Borges, ni siquiera de la ambientación entre onírica y metafísica que inunda la obra.

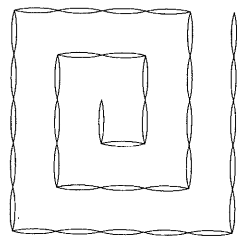
Sin embargo este libro, que para nada habla de matemáticas, abre una ventana a la duda. Sus textos cortos invitan a la degustación de cada frase; seducen al pensamiento y las preguntas sobre didáctica, sobre matemáticas, sobre cualquier cosa, sobre uno mismo... acuden sugerentes al hilo de las diferentes ventanas que el autor va abriendo a la palabra, al error, a la memoria y al tiempo; a las prohibiciones o al miedo; a la muerte, al arte, a la música, a la mujer, a la suerte,...

Carlos Usón

quitando o desplazando palillos formar palabras distintas o determinadas expresiones con los números.

Este libro es una verdadera «monografía» de interesantes y entretenidos problemas de este tipo, en los que se añaden las aceitunas como «material fungible» para ampliar el espectro de situaciones que se plantean.

Como ejemplo, y para «abrir boca», mostramos uno de escueto enunciado: «En la figura adjunta conseguir tres cuadrados desplazando cuatro palillos».

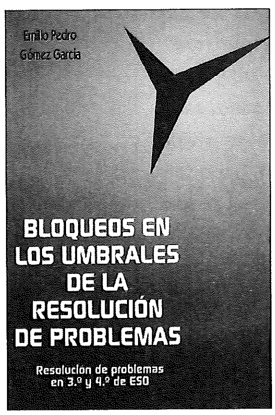


Los autores, que unen a su experiencia en la elaboración de materiales didácticos su interés en la popularización y divulgación de las matemáticas, consiguen que el lector de cuaquier edad, y casi con cualquier formación, pase ratos entretenidos haciendo algo que, aunque él no lo sospeche, es actividad matemática.

Emilio Palacián

PALILLOS, ACEITUNAS Y REFRESCOS MATEMÁTICOS
Luis Balbuena
Luis Cutillas
Dolores de la Coba
Rubes
Barcelona, 1997
ISBN: 84-497-0012-4
110 páginas

Existen muchos libros interesantes de matemática recreativa, de pasatiempos de tipo matemático, de juegos, etc., y en casi todos aparecen algunos «problemas de palillos». En unos casos, se presenta una determinada figura hecha con palillos y suprimiendo o cambiando de lugar algunos de ellos hay que formar otra figura distinta; en otros casos se juega con la formación de letras, números con trazos rectos (como aparecen, por ejemplo, en las calculadoras) o números romanos y se trata, también, de



BLOQUEOS EN LOS UMBRALES DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Resolución de problemas en 3º y 4º de ESO
Emilio Pedro Gómez
Ed. CPR de Graus
Huesca, 1997
ISBN: 84-8498-623-3
320 páginas

El último libro de Emilio Gómez no ha sido, como los cuatro anteriores, un poemario. Alguna vez este poeta metido a profesor de matemáticas tenía que caer en la tentación de volver a sus comienzos y reflexionar en voz alta sobre la labor docente. Integrado en el «Colectivo del martes» 1 ya se había ocupado de ofrecer sugerencias para una gestión democrática de la clase. Ahora, como no podía ser de otra forma, ha elegido como tema la Resolución de Problemas (RP).

Escribo RP, con mayúsculas, para diferenciarla de la «rp», o mejor «re» que se hace habitualmente en las aulas: resolución (minúscula) de ejercicios. No creo que merezca la pena seguir insistiendo en estas matizaciones. La RP es el contexto más adecuado para la enseñanza de las matemáticas, y publicaciones, difusión de información y de metodología, oportunidades para practicar, ha habido de sobra en los últimos años. Ahora, perdida de nuevo la ocasión de modificar sustancialmente las cosas, corremos el riesgo de que se concluya, como casi siempre, que las ideas nunca aplicadas están ya superadas. Una elegante manera de decir que vimos pasar el tren y no quisimos o no pudimos cogerlo. Precisamente por la evidencia de los malos tiempos para la poesía que se avecinan, es de agradecer que alguien siga en la brecha y, además de su práctica personal, recuerde lo que no se debe olvidar. Y es que la única opción para que una clase de matemáticas pueda transcurrir poéticamente la ofrece la RP.

Más preocupado por las dificultades para la aplicación de una metodología desconocida por la gran mayoría de alumnos y alumnas que por una investigación exclusivamente teórica, decide Emilio centrarse en el principio, en los «umbrales», allí donde nuestras propuestas van a chocar con la comodidad, con el escepticismo, con las carencias procedimentales arrastradas,... con la P.M.I (Pereza Mental Institucionalizada), atinadas siglas que nos propone para resumir una situación que me atrevo a calificar como descorazonadora.

Dudo que profesoras y profesores seamos conscientes, como colectivo, de que el sistema educativo produce P.M.I. Es fácilmente detectable, pero la consideramos intrínseca a los adolescentes o una consecuencia de las maldades del medio ambiente social (que, por cierto, no lo olvidemos, también nos afecta a nosotros). Emilio no pierde de vista estos condicionantes externos pero opta, en lugar de lamentarse, por actuar allí donde puede hacerlo (¡lo único posible si se quiere realmente actuar!). De ahí la RP y la preocupación por las dificultades en el umbral del trabajo.

El libro se estructura en dos partes. La primera consta de tres capítulos. Los dos primeros, relativos a generalidades sobre la RP y un amplio listado de sugerencias motivadoras. Hay aquí abundantes comentarios que muestran el buen hacer, el natural sentido común adquirido con el tiempo por alguien que ha vivido desde el principio la enseñanza como algo delicado, importante no sólo para alumnas y alumnos sino también para el propio profesor. El tercer capítulo ofrece una exhaustiva catalogación de los posibles bloqueos iniciales en la resolución de un problema: ambientales, cognitivos, emocionales y formativos. Clasifica los del segundo grupo, lógicamente el más amplio, en siete apartados y para cada uno de ellos ofrece materiales y sugerencias metodológicas. En los comentarios sobre los dos últimos grupos aparece de nuevo ese saber hacer del que ya hemos hablado. Me parece adivinar la preferencia de Emilio por el texto de Burton, Mason y Stacey de entre toda la bibliografía que ha manejado.

La segunda parte ofrece una secuenciación de contenidos de RP para el segundo ciclo de la ESO y una unidad didáctica, ampliamente comentada, para cada uno de los dos cursos.

Un libro que resultará útil a muchos colegas por la abundancia e interés de los consejos y sugerencias así como del material recopilado.

Ángel Ramírez

¡APÍN CAPÓN ZAPÚN AMANICANO! (1134)
Pere Roig
Jordi Font
Eumo - Octaedro
Barcelona, 1997
75 páginas

Extraño título para un libro reseñado en una revista dirigida a profesores de matemáticas. La verdad es que cuando lo descubrí en la librería, dentro de la sección de matemáticas, pense que se había colado por error y no me habría detenido en él si no hubiera sido por el subtítulo, que reza así, PARA ENTENDER: *el número y sus representaciones.* El nombre de la colección en el que está incluido aclaró un poco más el alcance de lo que tenía entre las manos: *Narraciones Solaris. Novelas científico-tecnológicas para una enseñanza interdisciplinar.* ¡Me lo llevé!

Se trata de un relato de aventuras, escrito para los alumnos del primer ciclo de la Secundaria, en el que Andrés, el protagonista del relato, es transportado a la baronía de la Mano, lugar en el que el sistema de numeración no es el nuestro. Para volver a nuestra época debe pronunciar un conjuro, en el que figura el número 1134, con la condición de que debe ser dicho en la lengua del lugar en el que se encuentra. Para salvarse debe ampliar su conocimiento de los números y de su forma de representación, distinguiendo entre las cantidades y sus representaciones, es decir los símbolos y palabras con las que nos referimos a ellas.

Así, de forma amena, se da una breve introducción en un lenguaje accesible a los escolares de esas edades, a los sistemas de numeración. Eso sin olvidar su voluntad interdisciplinar, ya que toca aspectos relacionadas con las Ciencias Sociales, el área de Lengua, o los valores en general. El texto se complementa con una breve guía didáctica, que a mi entender podría ser mas extensa.

Hay que dar la bienvenida a una publicación de un tipo al que no estamos muy acostumbrados y que viene a cubrir un hueco que necesitaría de muchos más títulos: los textos de introducción matemática adaptados a los más jóvenes.

Julio Sancho

SUMA 27
febrero 1998

VIII Olimpiada de la Federación

VIII OLIMPIADA Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

En el n.° 26 de SUMA de noviembre de 1997 (pp. 133-136) apareció la crónica, firmada por José Luis Álvarez, de la VIII Olimpiada de la Federación, celebrada en Gijón los días 23 a 28 de junio del pasado año.

Por falta de espacio no se incluyeron en dicho número los ejercicios, problemas y actividades concretos de las diferentes pruebas que tuvieron que desarrollar los participantes. A continuación se incluyen las mismas.

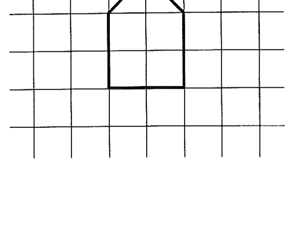
PRUEBA INDIVIDUAL

LA ESCALERA MECÁNICA

Juan y Luis va de compras al Corte Inglés, tienen un poco de prisa y se suben en una escalera mecánica. Juan es el triple de rápido que su amigo subiendo (ambos suben de peldaño en peldaño). Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis 50 escalones. Con estos datos calcular los peldaños «visibles» de la escalera.

LA CASA DE PAPEL

Sobre una cuadrícula Lucía ha dibujado una pequeña casa. Su amiga Marga dice que con dos cortes de tijera rectilíneos se pueden obtener tres trozos con los que se puede formar un cuadrado. ¿Cómo han de hacerse los cortes?



CRÓNICAS

LOS RODRÍGUEZ

Los Srs. Rodríguez tienen cinco niños de lo más activo:

El lunes van al cine CUATRO de ellos cuyas edades suman 38 años.

El martes por la tarde van a pista de hielo CUATRO cuyas edades suman 35 años.

El miércoles van al Parque de Atracciones CUATRO sumando 36 años sus edades.

El jueves salen CUATRO a nadar a la piscina, sus edades suman ahora 36 años.

El viernes van CUATRO a un concierto de Rock, sus edades suman 38.

El sábado se van al fútbol CUATRO y esta vez sus edades suman 39 años.

Sabemos que ningún chico sale las seis ocasiones.

¿Sabrás calcular la edad de cada muchacho?

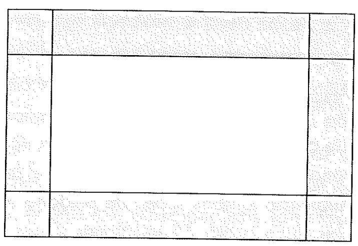
¡VAYA FRASECITA!

Completa la siguiente frase de modo que sea verdad lo que dice. Busca todas las soluciones posibles.

El número de 0 de esta frase es __, el de 1 es __, el de 2 es __, el de 3 es __, el de 4 es __, el de 5 es __, el de 6 es __, el de 7 es __, el de 8 es __ y el de 9 es __.

BALDOSAS

Tenemos un suelo rectangular formado por baldosas cuadradas de color blanco, que está rodeado de baldosas sombreadas, también cuadradas, tal como se indica en la figura:



Qué dimensiones debe tener el rectángulo blanco para que el área de la región interior sea igual al área de la franja negra que lo rodea, cuando esta franja negra es de una baldosa de ancha?

¿Y cuando es de 2, de 3, de 4, ...?

EL TELESILLA

En un telesilla, el momento en que Paco, que está sentado en la silla número 98, se cruza con la silla n.° 105, su amiga Carmen que ocupa la silla n.° 241 se cruza con la n.° 230.

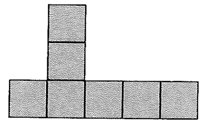
Por supuesto, las sillas están regularmente espaciadas sobre el cable y están numeradas en orden a partir del n.° 1. ¿Cuántas sillas tiene este remonte?

PRUEBA DE VELOCIDAD

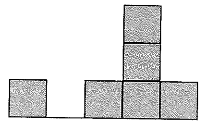
RETRATO ROBOT

Debéis construir sobre la trama cuadrada, utilizando el menor número posible de cubitos, una construcción cuyas vistas frontal y lateral sean las adjuntas.

Nota: lo que llamamos «vista» es algo así como el perfil que tendría la construcción si la miráramos de frente o por su derecha, respectivamente.



Vista de frente



Vista por la derecha

CABEZAS QUE ECHAN HUMO

Sin utilizar la calculadora, ni hacer «cuentas» con lápiz y papel, tenéis que hallar el resultado más aproximado que podáis de las siguientes operaciones:

a) 23,5 x 184,6

b) el 16% de 35.750

c) las cuatro quintas partes de 825.

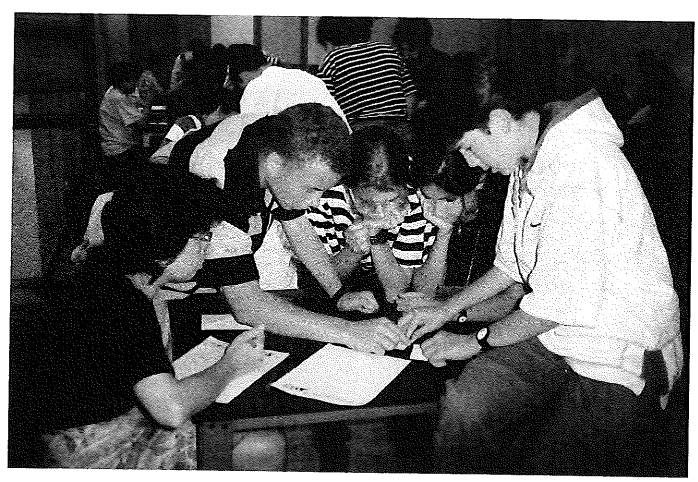
CUADRADO MÁGICO

Es posible disponer de muchas maneras en forma de cuadrado las fichas de dominó que están sobre la mesa. Pero no tenéis que construir uno cualquiera, debéis construir un cuadrado mágico, es decir, un cuadrado tal que la suma de cualquiera de sus filas, de sus columnas y sus dos diagonales sean iguales.

FICHAS:

(0-2), (1-2), (1-3), (1-4),

(2-3), (2-4), (3-4), (4-4)



Prueba de velocidad

MAREA BLANCA

Indicad, de manera aproximada, sin utilizar ningún instrumento de medida, la capacidad de la lechera.

Los representantes sindicales de los productores de leche han estado reunidos con los representantes de las empresas embotelladoras y no han llegado a ningún acuerdo. Como medida de presión han vaciado 50 lecheras como la anterior en la sala donde estaban reunidos, cuyas dimensiones eran exactamente las mismas que las del aula donde te encuentras. Sin moveros del lugar donde está situada esta mesa, debéis indicar la altura que alcanzaría la leche derramada sobre el suelo en el supuesto de que no se «escapara» nada por la rendija que queda debajo de las puertas.

ARITMÉTICA EN LA GEOMETRÍA

Utilizad de modo conveniente las piezas del puzle para demostrar la siguiente igualdad:

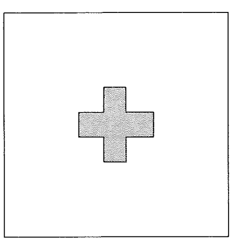
$$7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2$$

CALCULADORA ADIVINA

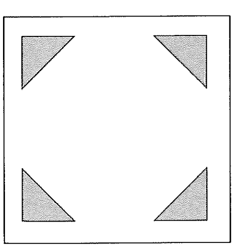
El cociente de dos números enteros es 13,28125. Encontrar dichos números sabiendo que uno de ellos tiene 2 cifras y el otro es menor que 500.

EN BUSCA DEL CORTE PERDIDO

Doblando convenientemente un cuadrado de papel y mediante un sólo corte de tijera, debéis obtener la figura que en cada caso se ha dibujado (la parte sombreada indica el trozo de papel cortado):



Cruz

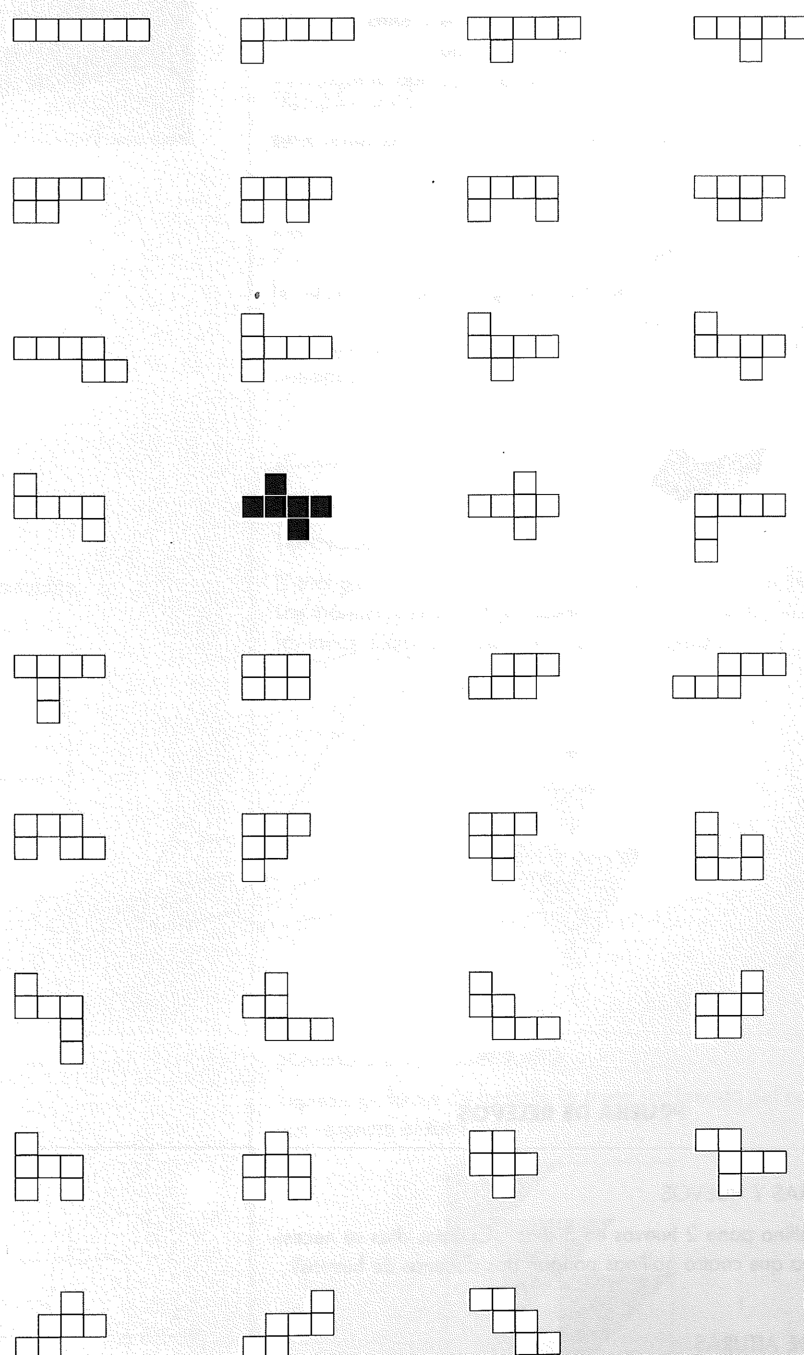


Triángulos

HEXAMINÓS Y CUBOS

A continuación tenéis representados los 35 hexaminós posibles (un hexaminó es una figura formadas por 6 cuadrados unidos entre sí a través de lados). Con algunos de ellos se puede construir por doblado un cubo. Uno de éstos es el que está sombreado, pero faltan bastantes más...

Buscad todos los hexaminós con los que se pueda construir un cubo mediante doblado.



UN JUEGO DE NIM

De un montón de objetos, dos jugadores, por turnos, van retirando objetos conforme a las siguientes reglas:

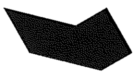
- El primero que retira objetos puede coger todos los que quiera, pero no todos.
- Una vez que un jugador ha retirado sus objetos, el siguiente puede coger del montón como mínimo un objeto y como máximo el doble de los que ha cogido el anterior.
- Gana el juego el que retira las últimos objetos del montón.

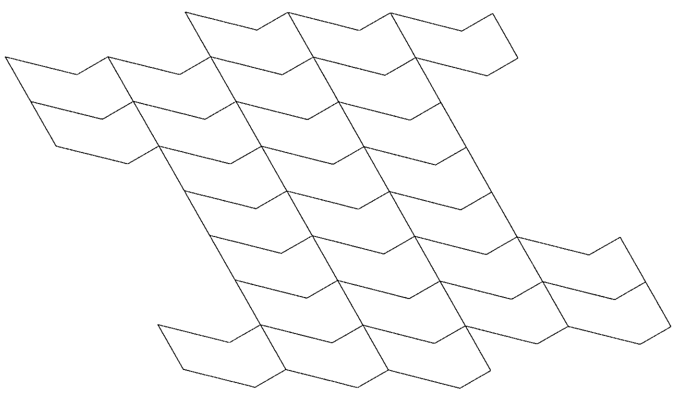
Ante vosotros tenéis un montón de objetos: en este caso hay en total 9 palillos. El turno para retirar palillos es vuestro. Si sabéis jugar acertadamente, podéis ganar la partida.

- Disponéis de dos intentos para ganar la partida al supervisor de la mesa.
- Podéis ensayar entre vosotros previamente, si lo consideráis oportuno.

UNIDADES EXTRAÑAS

Utilizando como unidad de área la figura pequeña, indica el área de la figura grande.





PRUEBA DE RELEVOS

GALLINAS Y HUEVOS

Una gallina pone 2 huevos en 3 días. ¿Cuántos días se necesitan para que cuatro gallinas pongan dos docenas de huevos?

UNO DE ALTURAS

¿Qué altura tiene un poste que es 2 metros más corto que un árbol de altura triple que la del poste?

BUSCANDO NÚMEROS-1

Rodea con un círculo tres números que sumen 100 y que sean mutuamente adyacentes, horizontalmente, verticalmente o diagonalmente o una combinación de ambas:

32	64	14	18	60	66
62	46	28	34	20	58
34	42	16	56	36	18
18	12	22	50	8	54
60	6	38	40	32	10
24	14	4	26	52	2

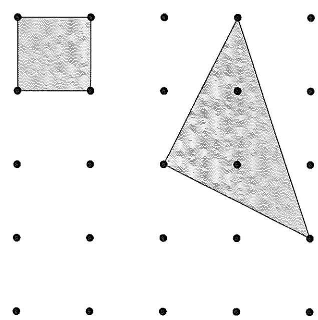
BUSCANDO NÚMEROS-2

Rodea con un círculo tres números que sumen 500 y que sean mutuamente adyacentes, horizontalmente, verticalmente o diagonalmente o una combinación de ambas:

10	260	130	20	70	120
50	160	200	190	30	300
270	40	250	110	60	90
90	180	280	80	210	170
290	100	170	140	230	310
330	300	90	70	320	160

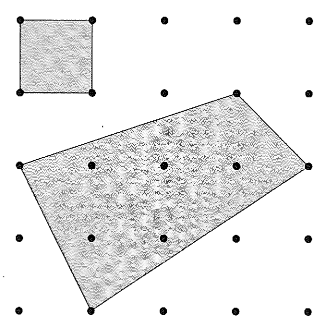
GEOPLANO-1

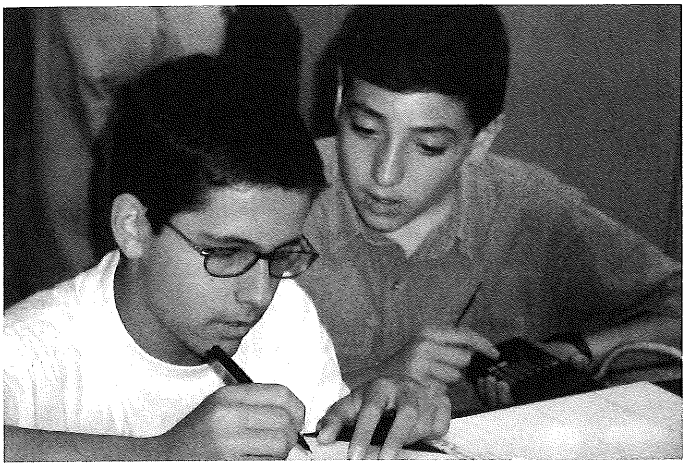
Si el cuadrado tiene de área una unidad, ¿cuál es el área del triángulo?



GEOPLANO-2

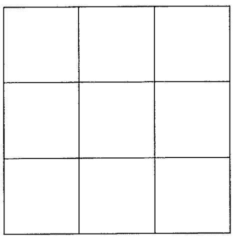
Si el cuadrado tiene de área una unidad, ¿cuál es el área del cuadrilátero?





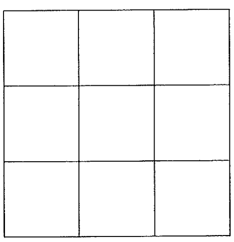
CUADRADOS CON PALILLOS

La construcción adjunta está hecha con palillos: en total se han empleado 24 palillos.

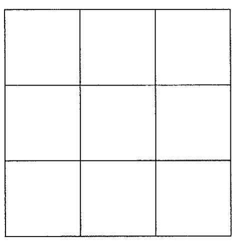


Debes quitar 8 palillos para que te quede:

a) Sólo dos cuadrados

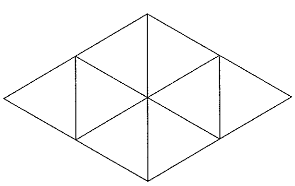


b) Sólo cuatro cuadrados

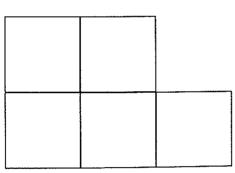


FIGURAS CON PALILLOS

a) La construcción adjunta está hecha con palillos: en total se han empleado 16 palillos. Tienes que suprimir cuatro para conseguir que te queden solamente cuatro triángulos equiláteros iguales.



b) La construcción adjunta está hecha con palillos: se han empleado 15. Tienes que suprimir tres palillos para conseguir que te queden solamente tres cuadrados iguales.



TRENES NUMÉRICOS-1

En esta fila de casillas empiezas por 3 y 4:

3	4			

luego sumas 3 y 4 y obtienes 7; luego 4 y 7 y obtienes 11:

3	4	7	11

Pero, si te dan sólo el 1.° y el último

8			52

¿Cuáles son los números que faltan?

TRENES NUMÉRICOS-2

En esta fila de casillas empiezas por 3 y 4 :

3	4			

luego sumas 3 y 4 y obtienes 7; luego 4 y 7 y obtienes 11; luego 7 y 11 y obtienes 18, y así sucesivamente:

3	4	7	11	18

Pero, si te dan sólo el primero y el último de uno de estos trenes numéricos:

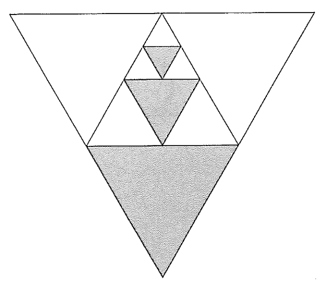
4				11

¿Cuáles son los números que faltan?

TRIANGULITIS

El triángulo ABC de la figura es equilátero y su área es de 4 m2. Los triángulos interiores se toman uniendo los puntos medios de los lados. Calcula el área de la zona sombreada.

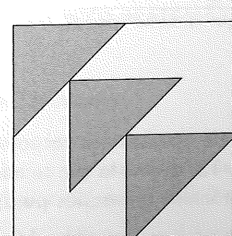
A B



C

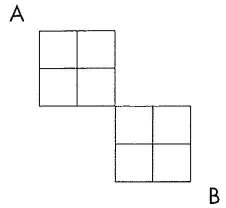
SOMBRAS EN EL CUADRADO

Expresa en forma de fracción la parte sombreada del cuadrado con respecto al total.



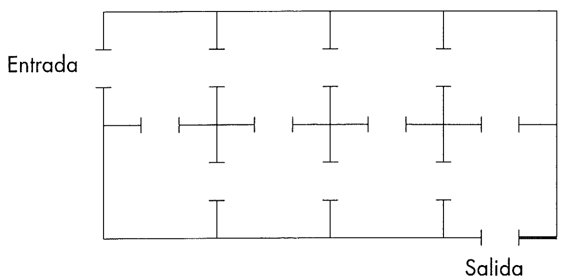
RUTAS POSIBLES

¿De cuántas maneras puedo ir de A a B yendo sólo para abajo o a la derecha?



BUSCANDO LA SALIDA

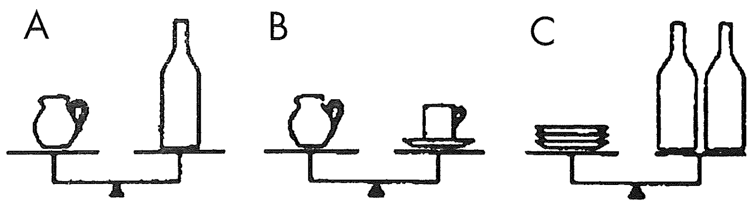
Aquí está representado el plano de un solar. ¿Cuántos caminos diferentes puede seguir un gato desde la entrada hasta la salida? Se supone que no se puede pasar dos veces por el mismo sitio.



LA BALANZA

Una balanza está equilibrada en las tres situaciones representadas a continuación.

¿Cuántas tazas sin plato se necesitan para equilibrar la jarra?



AMAZONAS

En una tribu del Amazonas, donde todavía subsiste el trueque, se tienen las siguientes equivalencias de cambio:

- un collar y un escudo se cambia por una lanza
- una lanza se cambia por 3 cuchillos
- 2 escudos se cambian por tres cuchillos

¿A cuántos collares equivale una lanza?

FALTAN PARÉNTESIS

La siguiente secuencia de operaciones, tal como está escrita, da como resultado 3 y no 12, que es lo que se ha escrito como respuesta. Coloca los paréntesis necesarios para que la respuesta escrita sea correcta.

$$2 \times 1 + 2 \times 3 - 2 \times 2 - 1 = 12$$

LLEGAR AL CIEN

Sin cambiar el orden de los dígitos del primer miembro de la siguiente igualdad situar el menor número posible de símbolos matemáticos (+, –, x, :) entre ellos para hacer cierta la igualdad. Es válido trabajar con números de varias cifras y no se pueden usar paréntesis ni otras operaciones distintas de las indicadas.

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

Nota: si se colocan los símbolos como se indica:

$$1\ 2\ 3 + 4\ 5 + 6 \times 7\ 8\ 9$$

la operación resultante es: ciento veintitrés más cuarenta y cinco mas seis por setecientos ochenta y nueve.

TORTILLAS

Un grupo de alumnos encargaron 65 tortillas para ir de excursión. La distribución la hicieron así: en el almuerzo comerán una tortilla cada cuatro personas; en la comida una tortilla cada dos y en la merienda una tortilla para cada tres. ¿Cuántos fueron de excursión?

JORNADA GASTRONÓMICA

En el instituto se ha organizado una jornada gastronómica en la cual cada persona come arroz, salsa y carne. Cada dos personas comparten una ración de arroz; cada tres personas una de salsa y cada cuatro una de carne. En total se sirvieron 65 raciones.

¿Cuántas personas asistieron a la comida.

REGLA FALSA

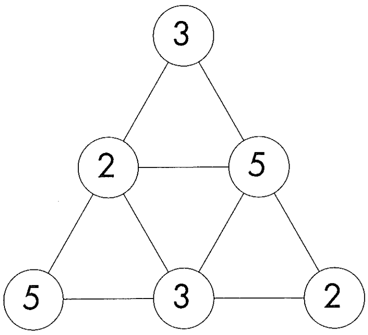
Una regla, que supuestamente debe medir 12 cm de largo, se ha deformado y actualmente mide 11,5 cm. Si mides una cuerda con esta regla y obtienes un resultado de 4 metros, ¿cuál será la medida real de la cuerda?

EL RELOJ DE SILVESTRE

Silvestre ha puesto su reloj a las doce en punto cuando sonaban las campanadas de medianoche de fin de año de 1996. El reloj de Silvestre retrasa un minuto cada día. Si no lo arregla, ¿qué hora marcará su reloj cuando toquen las campanadas de fin de año de 1997?

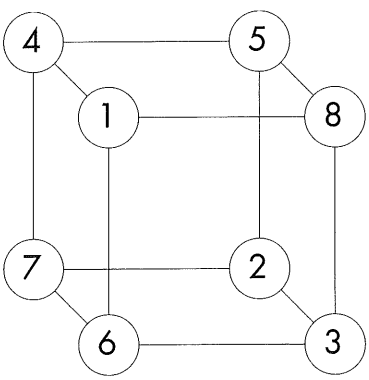
PRIMOS EN CÍRCULO

Coloca números distintos de la unidad, que sean primos (pueden repetirse) en los círculos de modo que la suma de los seis que debes colocar sea 20 y la suma de los que están situados en los cuatro triángulos pequeños sea la misma.



CUBO NUMÉRICO

Sitúa en los vértices de este cubo los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 de modo que la suma de los vértices de cada cara sea la misma.



TORNEO DE TENIS

En una competición individual de tenis hay 4 eliminatorias para llegar a la final. Si en cada una de ellas se eliminan la mitad más uno de los participantes, ¿cuántos jugadores había inscritos en un principio?

LAS ALBÓNDIGAS

En cinco platos se han repartido cien albóndigas. Los platos 1 y 2 tienen en total 52; el 2 y el 3 tienen en total 43, el 3 y el 4 tienen en total 34 y el 4 y el 5 tienen en total 30. ¿Cuántas albóndigas hay en cada plato?

PRIMOS GEMELOS

Algunas parejas de números primos se diferencian en 2 unidades. Decimos entonces que estos números son *primos gemelos*. Nadie sabe si el número de parejas de primos gemelos es infinito, pero no es esta la cuestión que os vamos a plantear.

El número que hay entre los dos números de cada par de primos gemelos tiene una curiosa propiedad: es un múltiplo de 6 (exceptuando la primera pareja de primos gemelos: 3 y 5). Se trata de que des una explicación convincente de esta propiedad.

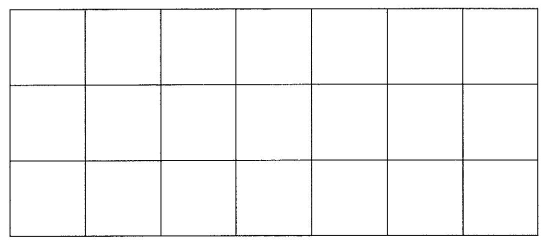
NÚMEROS CON TRES DIVISORES

Un número primo no tiene más que dos divisores: el propio número y el número uno.

¿Cuáles son los números que tienen solamente tres divisores distintos?

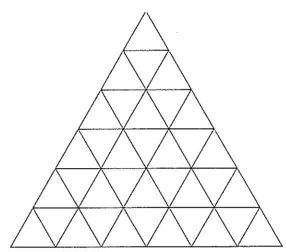
TRAMA CUADRADA

¿Cuántos cuadrados y cuántos rectángulos hay en total en una red como la que aparece dibujada?



TRAMA TRIANGULAR

¿Cuántos triángulos hay en la red inferior? ¿Cuántos tendrán un vértice hacia arriba? ¿Cuántos tendrán un vértice hacia abajo?



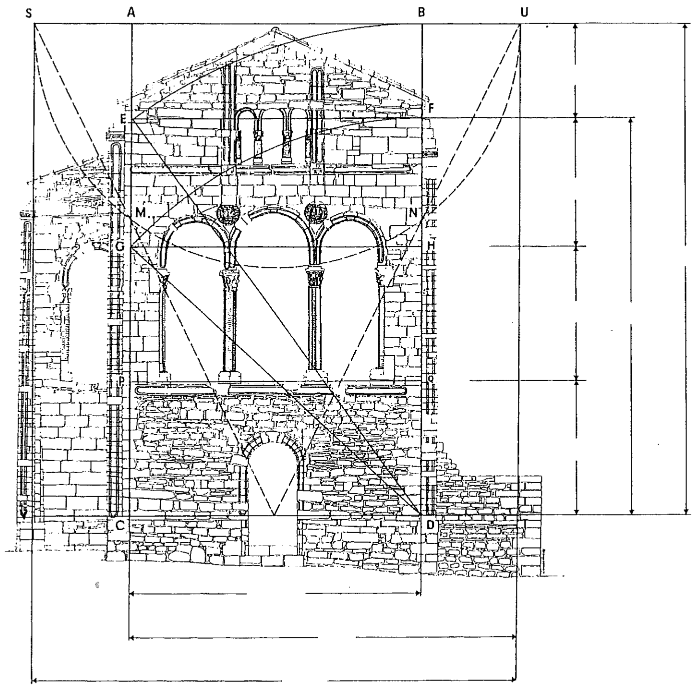
CIRCUITO MATEMÁTICO

Santa María del Naranco

Entre las múltiples riquezas artísticas y culturales que atesora el Principado de Asturias hay una capaz de deleitar la curiosidad y el gusto de cualquier viajero: el Arte Prerrománico Asturiano.

Hoy nos quedan 14 edificios que fueron construidos entre los siglos VIII y X de nuestra era y que simbolizan el nacimiento de la Monarquía Asturiana y del que fue el primer reino cristiano de la Península Ibérica.

En la falda del Monte Naranco, que domina la ciudad de Oviedo, se levantan dos edificios emblemáticos de estilo ramirense, Santa María del Naranco y San Miguel de Lillo. Vamos a proponerte alguna actividad relacionada con el primero de ellos.



ACTIVIDAD A

Nos gustaría saber que altura tiene el Palacio de Santa María del Naranco pero sólo tenemos un dibujo de la fachada oeste, por supuesto hecho a escala.

¿Cómo podríamos calcular cuál es la altura? Completa, además, las cotas del dibujo.

Podemos darte una pista: puedes medir la anchura real y con ese dato determinar la escala.

ACTIVIDAD B

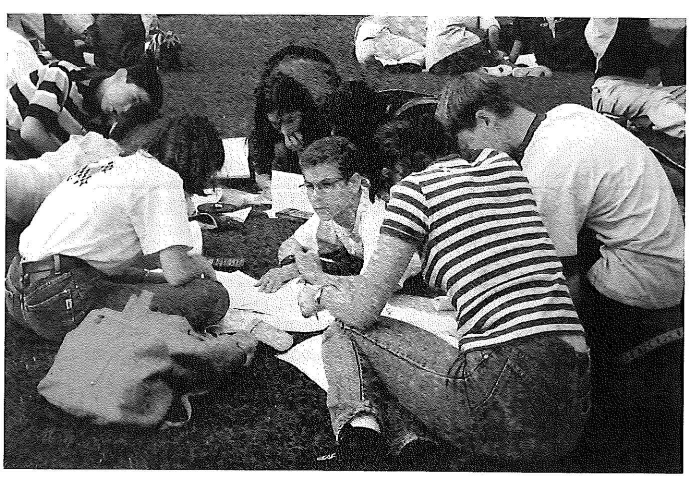
Desde la antigüedad clásica, matemáticos, filósofos y artistas han creído en la existencia de una razón (proporción) privilegiada que fue llamada número áureo (número de oro) por los artistas italianos del Renacimiento. Este número se designa por laletra Φ griega, en honor del escultor griego Fiias, y vale

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887\ldots$$

Los constructores del Partenón de Atenas, los de Santa María del Naranco y los de muchos otros templos y edificios tuvieron muy en cuenta la proporción áurea. En el Partenón, por ejemplo, la relación entre la altura y la anchura de su fachada es precisamente Φ. Pero lo mismo sucede con otros muchos objetos cotidianos: tarjetas de crédito, carnés de identidad, las cajas de los casetes,...

También Pitágoras y sus seguidores, que formaban una especie de escuela conocida como la escuela pitagórica, conocían el número áureo. Para ellos el número cinco tenía un atractivo especial: su símbolo era la estrella de *cinco* puntas y les interesaba especialmente la figura del *pentágono.* En él hallaron el número de oro, reflejado en la relación entre el lado de un pentágono y su diagonal.

Los griegos consideraban que un rectángulo cuyos lados a y b están en la relación $a/b = \Phi$ es especialmente armonioso y los llamaron *rectángulo áureo.* ¿Serías capaz de construir un rectángulo áureo?



ACTIVIDAD C

Ya hemos dicho antes que los constructores de Santa María del Naranco también tuvieron muy en cuenta el número áureo Φ, y si observas el poster de la VIII Olimpiada Matemática podrás ver que aparece repetidamente.

Para comprobarlo, puedes medir la mitad de la fachada este (la del Altar), que en el dibujo se llama N, y la anchura de uno de los vanos (por ejemplo el arco de la derecha), y comprobar la proporción que se indica en poster, es decir, anchura del arco es

$$\frac{N}{\Phi^3}$$

ACTIVIDAD D

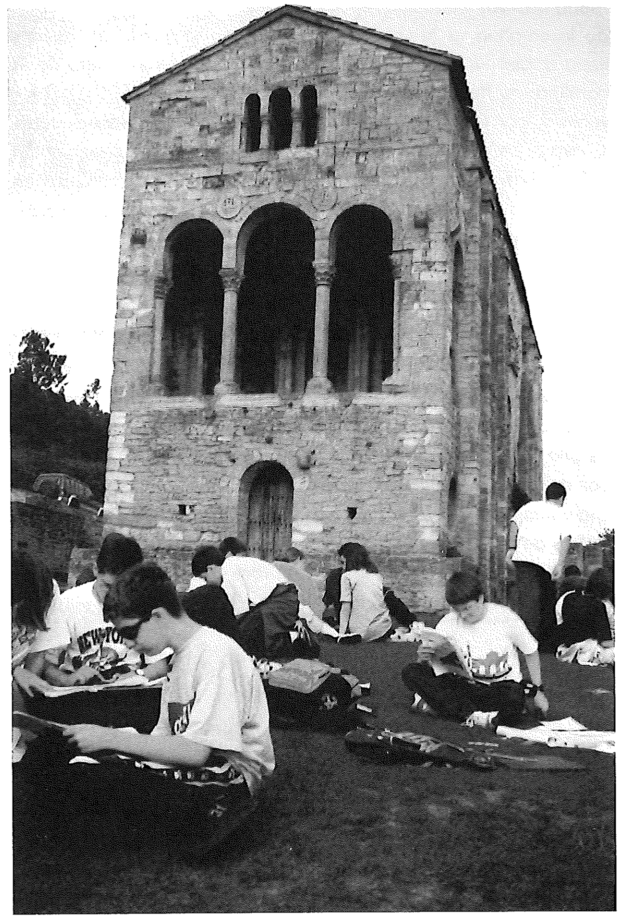
En el dibujo del póster, si observas detenidamente las cotas, puedes encontrar diversas relaciones entre las potencias de los inversos del número áureo. Por ejemplo:

$$\frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi^3} = \frac{1}{\Phi}$$

¿Cuántas más encuentras?

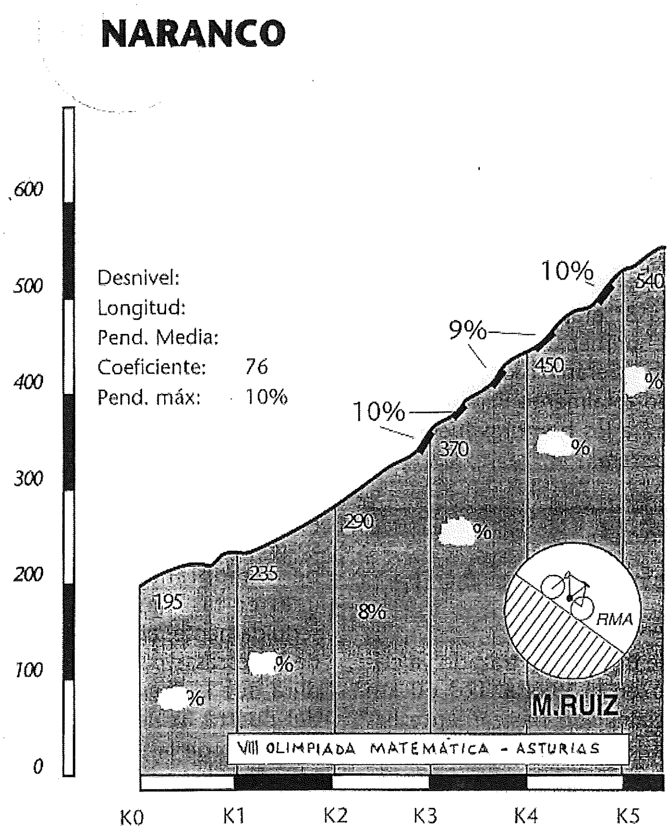
La subida al Naranco

El monte Naranco es muy conocido en los ambientes ciclistas, pues en su inclinada carretera se han vivido apasionantes momentos de buen ciclismo desde hace muchos años. Tanto la Vuelta a Asturias como la Vuelta a España tienen casi siempre un final de etapa en esta mítica cumbre y, desde hace ya bastantes años, coincidiendo con las fiestas ovetenses de San Mateo, patrono de la ciudad, un periódico local organiza una «clásica» ciclista que va adquiriendo un gran prestigio. Los problemas que os planteamos a continuación están relacionados con esta otra faceta del Naranco, la deportiva.



ACTIVIDAD E

El croquis adjunto aparece en el libro de ruta de una de las etapas que han finalizado recientemente en el monte Naranco pero, deliberadamente, algunos de sus datos se han borrado. Sin embargo no os costará mucho trabajo escribirlos de nuevo. A continuación los enumeramos:



- Se nos ha borrado el *desnivel total* que se salva, pero estamos seguros de que sabréis leerlo en la gráfica.
- También se ha borrado la *longitud total* de la subida, pero tenéis datos suficientes para conocerla.
- También se ha borrado la *pendiente media* de cada kilómetro de la subida y la pendiente media total. Para poder calcularlas os damos una pista: podemos hallar la pendiente en un tramo de carretera dividiendo el desnivel que se salva en ese tramo entre la longitud del mismo y multiplicando el resultado por 100, pues la pendiente suele expresarse en forma de porcentaje (desde el punto de vista estrictamente matemático este procedimiento es incorrecto, aunque cuando se trata de pendientes pequeñas, como éstas, el error que se comete es despreciable).
- Por último, debéis *situar en el croquis San Miguel de Lillo y Sta. María del Naranco.* Para ello tenemos una pista: San Miguel de Lillo está situado inmediatamente antes de la primera rampa del 10% y Sta. María del Naranco unos 500 metros antes.

ACTIVIDAD F

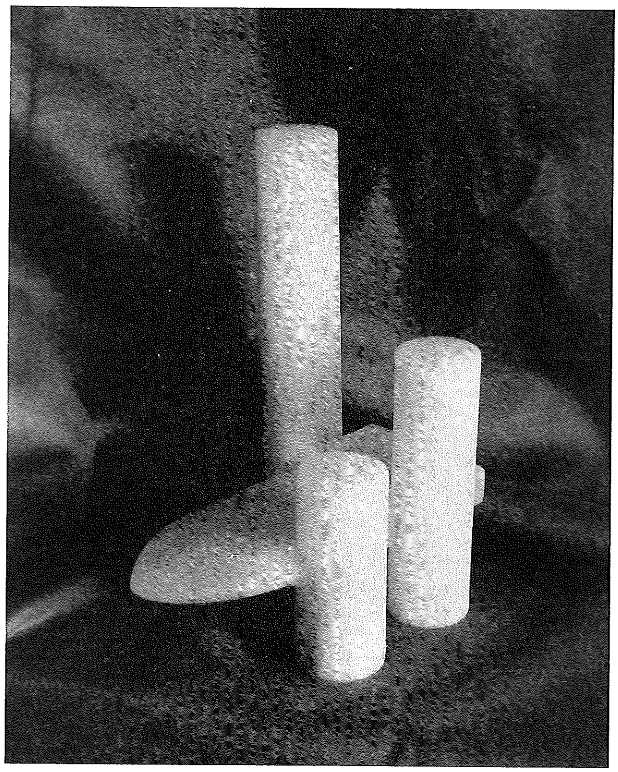
El cambio de marchas de la bicicleta permite que los ciclistas puedan llevar un ritmo de pedaleo apropiado a cada tipo de terreno, eligiendo la combinación adecuada entre piñón (en la rueda trasera) y catalina (en los pedales). Así, por ejemplo, cuando la catalina, a la que también se la suele llamar el "plato", tiene doble número de dientes que el piñón, cada vuelta de la catalina, es decir, cada pedalada, hará que el piñón gire dos veces y, por tanto, la rueda dará dos vueltas. En general, cuanto mayor es el número de dientes de la catalina y menor el del piñón, más duro resulta el pedaleo, pero más se avanzará en cada pedalada. Por esta razón los ciclistas suelen usar una catalina muy grande y un piñón muy pequeño para las bajadas. Por el contrario, cuanto más pequeña sea la catalina (menor número de dientes) y mayor sea el piñón (mayor número de dientes), más fácil será el pedaleo; por ello los ciclistas, en las subidas, suelen elegir catalinas pequeñas y piñones grandes.

Cuando el grupo de destacados de la clásica del Naranco, comandado por Chechu Rubiera, llega a la altura de San Miguel de Lillo, justo antes de abordar la primera rampa del 10%, rueda por delante, en solitario, el ciclista italiano Bruno Escapossi con una ventaja de 37 segundos. Este ciclista, cansado de tantos kilómetros de fuga, va subiendo lentamente, con una catalina de 39 dientes y un piñón de 23 y lleva un ritmo de pedaleo constante de 50 pedaladas por minuto sintiendo con angustia que el grupo perseguidor se le echa encima. Justo en ese instante salta Chechu Rubiera del grupo perseguidor, quien trata de alcanzar al fugado y ganar la carrera, subiendo con una catalina de 42 dientes y un piñón de 21, a un ritmo de 60 pedaladas por minuto.

Entre los aficionados, que siguen entusiasmados la ascensión, se cruzan apuestas sobre quién será el primero en llegar al alto. Si siguen subiendo con este ritmo de pedaleo y suponiendo que no cambian de piñón, ¿quién de los dos ganará la carrera? ¿Cuál será la diferencia de tiempo entre ambos en la cima?

Datos:

- El diámetro de las ruedas de las bicicletas es de 67 cm.
- La distancia de S. Miguel de Lillo a la cumbre puedes obtenerla en el croquis anterior



Bases
Alabastro, 40x40x25
José Miguel Fuertes

SUMA 27
febrero 1998

IX Olimpiada Matemática, Jornadas Andaluzas, Castellano-Leonesas...

IX Olimpiada Matemática de la FESPM

La fase final de la IX Olimpiada Matemática Nacional, convocada por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Organizada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales» se celebrará en Carboneras (Almería) entre los días 22 y 27 de junio de 1998.

Esta edición se dedica en homenaje a D. Gonzalo Sánchez Vázquez y tiene como lema «Mar y Matemáticas».

Está dirigida a alumnas y alumnos de 2.° de ESO. Los participantes son elegidos en las fases autonómicas que organizan las distintas sociedades federadas, así como algunas otras organizaciones invitadas. Se prevé la participación de alumnos de Albacete, Andalucía, Andorra, Aragón, Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla-León, Cataluña, Ceuta, Comunidad Valenciana, Extremadura, Galicia, Madrid, Melilla, Murcia, y Navarra.

Habrá actividades de tres tipos:

- Pruebas en las que se han de resolver problemas o situaciones problemáticas de ingenio lógico-matemático: Prueba individual. Prueba por equipos (3-4 personas). Circuito matemático (en grupos). Prueba de fotografía matemática. Pruebas sorpresa.
- Visitas y excursiones de interés por la provincia de Almería: Recorrido turístico-cultural. Visita al parque Natural de Cabo de Gata-Níjar. Visita al Observatorio Astronómico de Calar Alto. Visita a la Central Solar de Tabernas. Visita a la Central Térmica de Carboneras. Visita a la Fábrica de cemento HISALBA de Carboneras. Observación astronómica.
- Actividades de tipo lúdico-recreativo-culturales: Actividades de animación. Poblado del Oeste. Visita a las

CONVOCATORIAS

playas de Genoveses y Mónsul. Fiestas. Exposición de fotografía matemática. Exposición de medidas. La mujer y las matemáticas. Conferencias...

El equipo organizador está formado por Pedro José Martínez Fernández (Coordinador Nacional), Francisco Morales Haro, Ricardo Contreras Calvache y José Villegas Alcántara, contando con la colaboración de José Ruiz, Diego Alonso, Juan Enrique González, Catalina Serrano y José María Arcas, así como el grupo de coordinadores de la Olimpiada Matemática Thales de Andalucía.

VIII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática «Thales»

Profesores de Matemáticas para el siglo XXI

Homenaje a Gonzalo Sánchez Vázquez

Una nueva edición de las Jornadas de la Sociedad Thales tendrá lugar los días 10, 11, 12 y 13 del próximo mes de septiembre en Jaén. Como en anteriores ediciones, proporcionará a los profesores de Matemáticas de todos los niveles, un punto de encuentro, un intercambio de experiencias y un conocimiento de los nuevos avances en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.

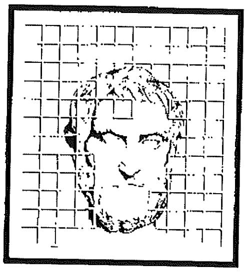
Con el lema escogido para las VIII Jornadas, «Profesores de matemáticas para el siglo XXI», se intentará responder a las inquietudes de los profesores de Matemáticas en un momento de grandes reformas en el sistema educativo en todos los niveles.

Se intentará analizar la evolución de las Matemáticas como ciencia con las consecuencias que traerá a su enseñanza, el crecimiento de algunas ramas de las Matemáticas como la Estadística o el Análisis Numérico, el proceso de reforma introducido por la legislación actual, el papel que pueden desempeñar las sociedades de profesores de Matemáticas. Además, intentaremos analizar la problemática existente en la Educación Infantil y Primaria, Secundaria y Universitaria.

Para afrontar el reto planteado, y junto a la cuidada selección de las conferencias, es necesaria la participación de un gran número de profesores que enriquezcan las Jornadas con sus conocimientos y experiencias. Le invitamos a participar y contamos con su presencia en Jaén el próximo mes de septiembre.

Estructura general: Conferencias. Comunicaciones. Mesa redonda. Exposiciones. Talleres. Asamblea General de la Sociedad «Thales».

Grupos temáticos: Software en el aula. Calculadoras en el aula. Recursos didácticos en el aula. Nuevas tecnologías y enseñanza de las Matemáticas. Experiencias en el aula. Historia de las Matemáticas y Educación. Evaluación en Matemáticas. Matemáticas en la Educación Universitaria. Matemáticas en la Educación Secundaria. Matemáticas en la Educación Infantil y Primaria. Investigación en Educación Matemática. Educación a Distancia. Formación inicial y permanente de profesores. Coeducación. Otros temas de interés.



Lugar de celebración: Campus Universitario «Las Lagunillas», Jaén.

Presentación de comunicaciones: Podrán presentarse trabajos relacionados con alguno de los temas de las Jornadas.

Tipos: comunicación oral, paneles y talleres.

Fecha límite de presentación: 15 de mayo de 1998.

Reuniones: Previa petición se facilitará la posibilidad de encuentros de carácter menos formal entre los interesados en cada uno de los grupos temáticos u otros temas de interés.

Comité científico: Francisco Javier Muñoz Delgado, Francisco Tomás Sánchez Cobo, Antonio Estepa Castro, Luis Parras Guijosa, Concepción García Severón, Salvador Guerrero y Luis Berenguer

Homologación: Se solicitará la homologación de la actividad por la Junta de Andalucía.

Actividades sociales: Recepciones. Visitas de carácter cultural. Programa de acompañantes.

Cuotas de inscripción:

Hasta el 15 de mayo:

Socios: 8.000 ptas. No socios: 16.000 ptas. Acompañantes: 6.000 ptas.

Después del 15 de mayo:

Socios: 12.000 ptas. No socios: 20.000 ptas. Acompañantes: 10.000 ptas.

Socios estudiantes: 5.000 ptas.

Límite máximo: 500 participantes

Más información: Si está interesado en recibir más información sobre inscripción, presentación de trabajos, etc. diríjase por escrito a

VIII Jornadas Andaluzas
de Educación Matemática «Thales»

Departamento de Matemáticas

Escuela Politécnica Superior

Avda. de Madrid, 35

23071 Jaén

V Congreso Regional Castellano-Leonés de Educación Matemática

La Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas convoca el «V Congreso Regional Castellano-Leonés de Educación Matemática», que se celebrará en Toro (Zamora) del 10 al 12 de septiembre de 1998.

El trabajo dentro del Congreso se desarrollará en cuatro niveles:

- Conferencias plenarias.
- Talleres.
- Comunicaciones y experiencias a cargo de los asistentes.
- Mesas redondas.

En este Congreso se pondrá especial énfasis en los talleres y en la presentación de experiencias didácticas.

Se tratarán temas de interés para la comunidad de educadores matemáticos de Castilla y León.

Más información:

CPR de Zamora

Avda. de Requejo, s/n.

49002 Zamora

Tno.: 980 51 43 98.

III Xornadas de Matemática Recreativa

En los años 1994 y 1995 se celebraron las dos ediciones anteriores de las «Xornadas de Matemática Recreativa». Los días 2, 3, 4 y 5 del próximo mes de junio tendrá lugar la III edición en Coruña, en la que habrá conferencias plenarias, talleres, comunicaciones, exposiciones, etc., tanto de Educación Infantil como de Primaria y Secundaria. No se tratan solamente juegos matemáticos de distinta índole, sino que se contemplan todas aquellas actividades matemáticas dinámicas que contribuyan a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje a traves de la recreación matemática.

En esta ocasión se desea poner de relieve, en la medida de lo posible, la relación de las Matemáticas con otras áreas (Música, Ciencias Sociales, Ciencias de la Naturaleza, Informática, Educación Física, Tecnología, etc). Es por ello que se pretende abrir la participación a todos aquellos compañeros y compañeras que deseen comunicar sus experiencias, ya sean de carácter interdisciplinar o no.

Más información:

Manuel Pazos Crespo (Coque).
CEFOCOP CORUÑA
Asesoría de Matemáticas.
r/ Someso, 6-1.°
15008 - A Coruña
Tno.: 981-290688
Fax: 981-290157
E-mail: cefocopc@arrakis.es

VI Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias

Ciencia y Técnica en el 98: entre la liberación y el desastre

La Sociedad Española de Historia de las Ciencias y las Técnicas (SEHCYT), con la colaboración del Seminario de Historia de la Ciencia y de la Técnica de Aragón (SEHCTAR), de la Sociedad Vasca de Historia de la Medicina y de la Sección de Guipúzcoa de la Real Sociedad Bascongada de Amigos del País, convoca el «VI Simposio de Enseñanza e Historia de las Ciencias» que, en razón de la conmemoración de 1898, celebrará una sesión especial dedicada al estudio de la ciencia y la técnica en el momento de la independencia de los últimos territorios coloniales españoles en Asia y América. El simposio tendrá lugar en Jaca (Huesca) los días 24 a 28 de junio de 1998.

La reunión está abierta a las personas que deseen asistir, presentar comunicaciones y participar en los debates. Al objeto de facilitar la organización del evento se constituyen las siguientes áreas temáticas:

- *Área especial.* La ciencia y la técnica en el 98. Influencia en la reflexión sobre la cultura española.

Incidencia en las culturas y desarrollo de las naciones iberoamericanas.

- *Área I.* La definición disciplinar de la asignatura *Ciencia, Tecnología y Sociedad.*
- *Área II.* Las ciencias en la enseñanza primaria: repaso histórico.
- *Área III.* Las ciencias en la enseñanza secundaria: repaso histórico.
- *Área IV.* La responsabilidad histórica de las ciencias en el fracaso escolar.
- *Área V.* El papel de la historia de las ciencias y de las técnicas en las filosofías de la educación.
- *Área VI.* Ciencia y enseñanza en Aragón.
- *Área VII.* Temas libres.

Más información:

Seminario de Historia de la Ciencia
Facultad de Ciencias (Matemáticas)
Universidad de Zaragoza
Ciudad Universitaria
50009 Zaragoza

XXXIV Olimpiada Matemática Nacional

La fase final de la XXXIV olimpiada, dirigida a alumnos de COU se celebrará en Tarazona (Zaragoza) los días 12, 13, 14 y 15 de marzo de 1998. La recepción de asistentes será el día 12 a partir de las 16 horas.

Las pruebas tendrán lugar en dos sesiones que se celebrarán en la tarde del día 13 la primera y en la mañana del 14 la segunda.

Un Jurado de la Real Sociedad Matemática Española preparará las pruebas y realizará la valoración; este Jurado hará la propuesta de los seleccionados para las seis medallas de oro, las seis de plata y las seis de bronce. Estos premios serán entregados el sábado por la noche en la cena oficial de clausura.

La comisión de organización tiene previsto realizar una comunicación directa a cada uno de los alumnos seleccionados en la fase primera con detalles completos sobre el plan general para estos días de convivencia.

Más información:

E-mail: cgaudo@zaragoza.dp.mec.es

XVI Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

De carácter nacional, está convocado por la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras. Se regirá de acuerdo a las siguientes bases:

Primera: Podrán participar en el Concurso los alumnos de BUP, ESO y FP en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 1.° BUP, 3.° ESO y FPI.

b) Segundo nivel: alumnos de 2.° BUP, 4.° ESO y 1.° FPII.

c) Tercer nivel: alumnos de 3.° BUP, 1.° Bachillerato y 2.° y 3.° FPII.

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de problemas y se realizarán en Madrid en un solo día, el sábado 20 de junio de 1998, a partir de las 10 horas.

Tercera: Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

Cuarta: Los centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del 21 de mayo de 1998, dirigiéndose por carta al presidente de la Sociedad Puig Adam:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Ciudad Universitaria
28040-Madrid

En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 1997-98.

Nota: Los dos primeros clasificados de cada nivel están invitados a participar en la VII Olimpiada Rioplatense, en diciembre de 1998 en Argentina. Ello en el supuesto de que se consigan becas para los billetes hasta Buenos Aires.

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP: . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

Importe

☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)

☐ N.os sueltos: ____________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM