SUMA 27
febrero 1998

VIII Olimpiada de la Federación

VIII OLIMPIADA Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

En el n.° 26 de SUMA de noviembre de 1997 (pp. 133-136) apareció la crónica, firmada por José Luis Álvarez, de la VIII Olimpiada de la Federación, celebrada en Gijón los días 23 a 28 de junio del pasado año.

Por falta de espacio no se incluyeron en dicho número los ejercicios, problemas y actividades concretos de las diferentes pruebas que tuvieron que desarrollar los participantes. A continuación se incluyen las mismas.

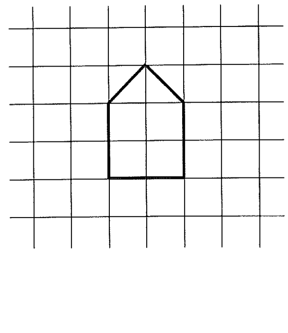
PRUEBA INDIVIDUAL

LA ESCALERA MECÁNICA

Juan y Luis va de compras al Corte Inglés, tienen un poco de prisa y se suben en una escalera mecánica. Juan es el triple de rápido que su amigo subiendo (ambos suben de peldaño en peldaño). Al terminar de subir, Juan contó 75 escalones y Luis 50 escalones. Con estos datos calcular los peldaños «visibles» de la escalera.

LA CASA DE PAPEL

Sobre una cuadrícula Lucía ha dibujado una pequeña casa. Su amiga Marga dice que con dos cortes de tijera rectilíneos se pueden obtener tres trozos con los que se puede formar un cuadrado. ¿Cómo han de hacerse los cortes?



CRÓNICAS

LOS RODRÍGUEZ

Los Srs. Rodríguez tienen cinco niños de lo más activo:

El lunes van al cine CUATRO de ellos cuyas edades suman 38 años.

El martes por la tarde van a pista de hielo CUATRO cuyas edades suman 35 años.

El miércoles van al Parque de Atracciones CUATRO sumando 36 años sus edades.

El jueves salen CUATRO a nadar a la piscina, sus edades suman ahora 36 años.

El viernes van CUATRO a un concierto de Rock, sus edades suman 38.

El sábado se van al fútbol CUATRO y esta vez sus edades suman 39 años.

Sabemos que ningún chico sale las seis ocasiones.

¿Sabrás calcular la edad de cada muchacho?

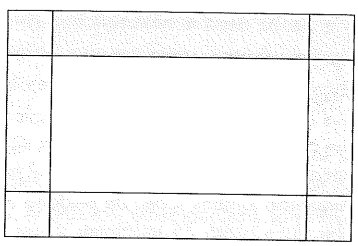
¡VAYA FRASECITA!

Completa la siguiente frase de modo que sea verdad lo que dice. Busca todas las soluciones posibles.

El número de 0 de esta frase es __, el de 1 es __, el de 2 es __, el de 3 es __, el de 4 es __, el de 5 es __, el de 6 es __, el de 7 es __, el de 8 es __ y el de 9 es __.

BALDOSAS

Tenemos un suelo rectangular formado por baldosas cuadradas de color blanco, que está rodeado de baldosas sombreadas, también cuadradas, tal como se indica en la figura:



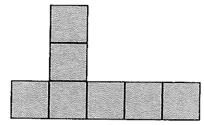
Qué dimensiones debe tener el rectángulo blanco para que el área de la región interior sea igual al área de la franja negra que lo rodea, cuando esta franja negra es de una baldosa de ancha?

¿Y cuando es de 2, de 3, de 4, ...?

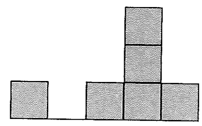
EL TELESILLA

En un telesilla, el momento en que Paco, que está sentado en la silla número 98, se cruza con la silla n.° 105, su amiga Carmen que ocupa la silla n.° 241 se cruza con la n.° 230.

Por supuesto, las sillas están regularmente espaciadas sobre el cable y están numeradas en orden a partir del n.° 1. ¿Cuántas sillas tiene este remonte?



Vista de frente



Vista por la derecha

PRUEBA DE VELOCIDAD

RETRATO ROBOT

Debéis construir sobre la trama cuadrada, utilizando el menor número posible de cubitos, una construcción cuyas vistas frontal y lateral sean las adjuntas.

Nota: lo que llamamos «vista» es algo así como el perfil que tendría la construcción si la miráramos de frente o por su derecha, respectivamente.

CABEZAS QUE ECHAN HUMO

Sin utilizar la calculadora, ni hacer «cuentas» con lápiz y papel, tenéis que hallar el resultado más aproximado que podáis de las siguientes operaciones:

a) 23,5 x 184,6

b) el 16% de 35.750

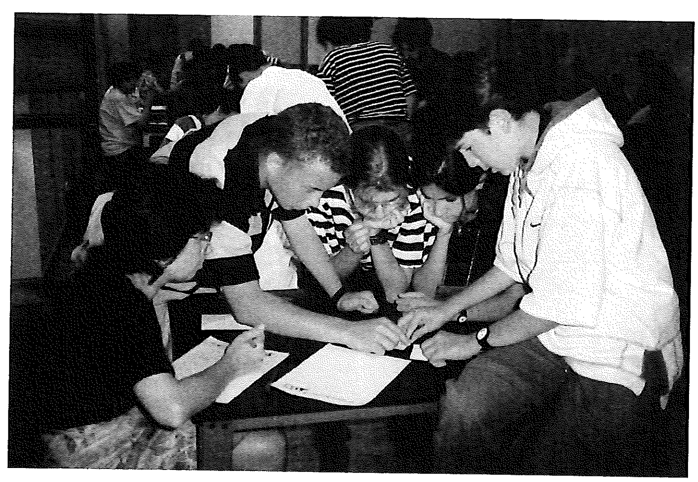
c) las cuatro quintas partes de 825.

CUADRADO MÁGICO

Es posible disponer de muchas maneras en forma de cuadrado las fichas de dominó que están sobre la mesa. Pero no tenéis que construir uno cualquiera, debéis construir un cuadrado mágico, es decir, un cuadrado tal que la suma de cualquiera de sus filas, de sus columnas y sus dos diagonales sean iguales.

FICHAS:

(0-2), (1-2), (1-3), (1-4),
(2-3), (2-4), (3-4), (4-4)



Prueba de velocidad

MAREA BLANCA

Indicad, de manera aproximada, sin utilizar ningún instrumento de medida, la capacidad de la lechera.

Los representantes sindicales de los productores de leche han estado reunidos con los representantes de las empresas embotelladoras y no han llegado a ningún acuerdo. Como medida de presión han vaciado 50 lecheras como la anterior en la sala donde estaban reunidos, cuyas dimensiones eran exactamente las mismas que las del aula donde te encuentras. Sin moveros del lugar donde está situada esta mesa, debéis indicar la altura que alcanzaría la leche derramada sobre el suelo en el supuesto de que no se «escapara» nada por la rendija que queda debajo de las puertas.

ARITMÉTICA EN LA GEOMETRÍA

Utilizad de modo conveniente las piezas del puzle para demostrar la siguiente igualdad:

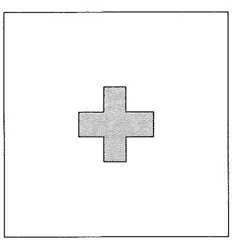
$$7^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2$$

CALCULADORA ADIVINA

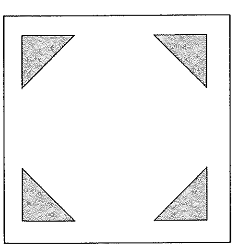
El cociente de dos números enteros es 13,28125. Encontrar dichos números sabiendo que uno de ellos tiene 2 cifras y el otro es menor que 500.

EN BUSCA DEL CORTE PERDIDO

Doblando convenientemente un cuadrado de papel y mediante un sólo corte de tijera, debéis obtener la figura que en cada caso se ha dibujado (la parte sombreada indica el trozo de papel cortado):



Cruz

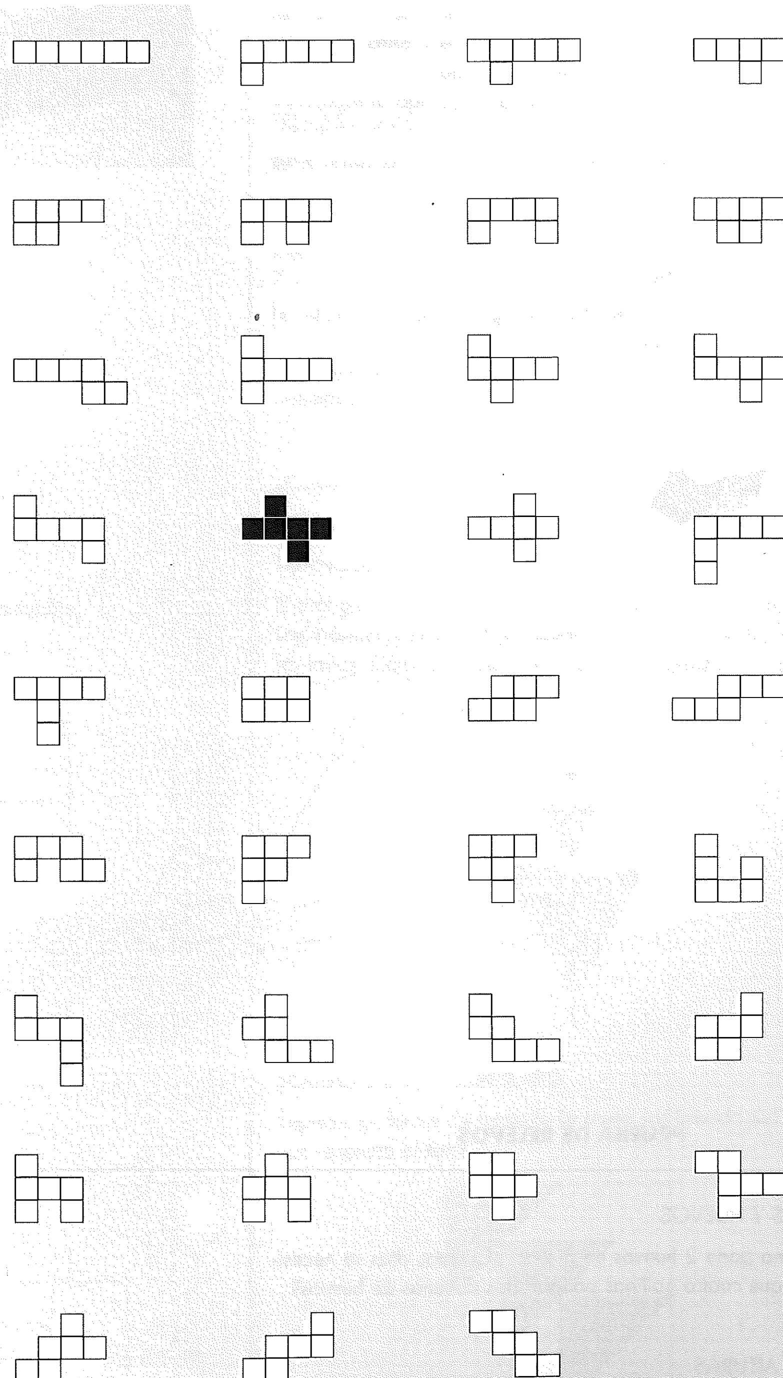


Triángulos

HEXAMINÓS Y CUBOS

A continuación tenéis representados los 35 hexaminós posibles (un hexaminó es una figura formadas por 6 cuadrados unidos entre sí a través de lados). Con algunos de ellos se puede construir por doblado un cubo. Uno de éstos es el que está sombreado, pero faltan bastantes más...

Buscad todos los hexaminós con los que se pueda construir un cubo mediante doblado.



UN JUEGO DE NIM

De un montón de objetos, dos jugadores, por turnos, van retirando objetos conforme a las siguientes reglas:

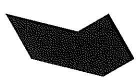
- El primero que retira objetos puede coger todos los que quiera, pero no todos.
- Una vez que un jugador ha retirado sus objetos, el siguiente puede coger del montón como mínimo un objeto y como máximo el doble de los que ha cogido el anterior.
- Gana el juego el que retira las últimos objetos del montón.

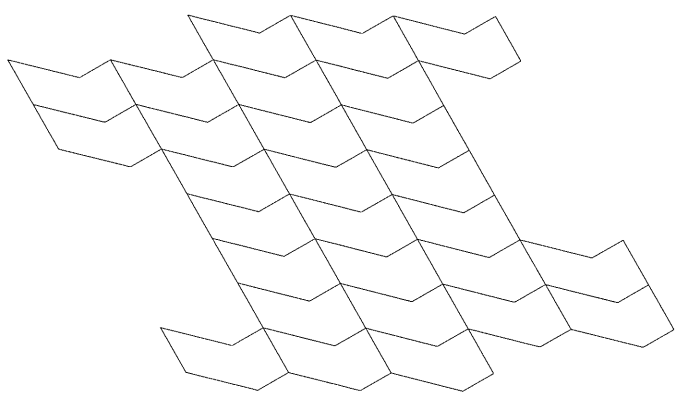
Ante vosotros tenéis un montón de objetos: en este caso hay en total 9 palillos. El turno para retirar palillos es vuestro. Si sabéis jugar acertadamente, podéis ganar la partida.

- Disponéis de dos intentos para ganar la partida al supervisor de la mesa.
- Podéis ensayar entre vosotros previamente, si lo consideráis oportuno.

UNIDADES EXTRAÑAS

Utilizando como unidad de área la figura pequeña, indica el área de la figura grande.





PRUEBA DE RELEVOS

GALLINAS Y HUEVOS

Una gallina pone 2 huevos en 3 días. ¿Cuántos días se necesitan para que cuatro gallinas pongan dos docenas de huevos?

UNO DE ALTURAS

¿Qué altura tiene un poste que es 2 metros más corto que un árbol de altura triple que la del poste?

BUSCANDO NÚMEROS-1

Rodea con un círculo tres números que sumen 100 y que sean mutuamente adyacentes, horizontalmente, verticalmente o diagonalmente o una combinación de ambas:

32	64	14	18	60	66
62	46	28	34	20	58
34	42	16	56	36	18
18	12	22	50	8	54
60	6	38	40	32	10
24	14	4	26	52	2

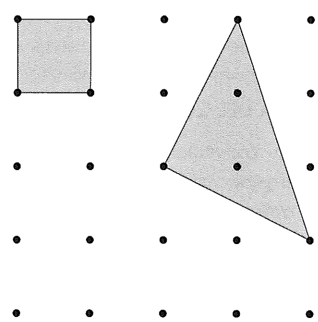
BUSCANDO NÚMEROS-2

Rodea con un círculo tres números que sumen 500 y que sean mutuamente adyacentes, horizontalmente, verticalmente o diagonalmente o una combinación de ambas:

10	260	130	20	70	120
50	160	200	190	30	300
270	40	250	110	60	90
90	180	280	80	210	170
290	100	170	140	230	310
330	300	90	70	320	160

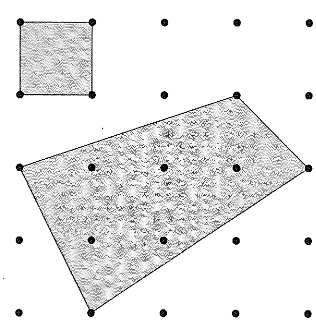
GEOPLANO-1

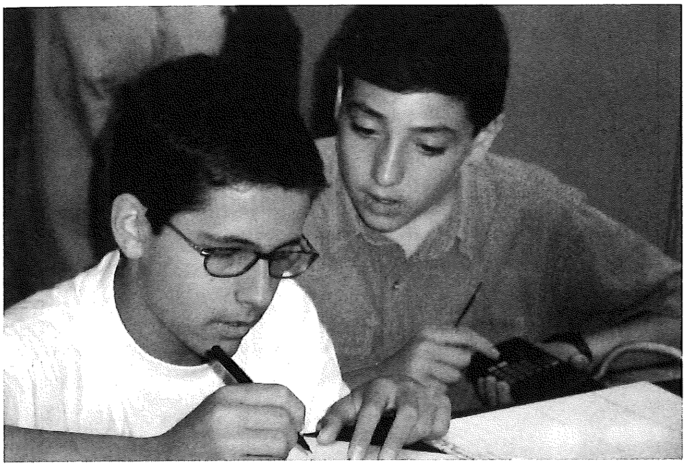
Si el cuadrado tiene de área una unidad, ¿cuál es el área del triángulo?



GEOPLANO-2

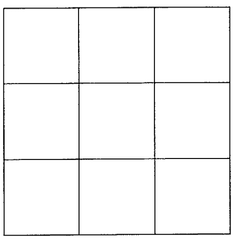
Si el cuadrado tiene de área una unidad, ¿cuál es el área del cuadrilátero?





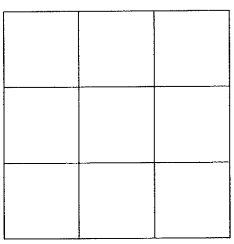
CUADRADOS CON PALILLOS

La construcción adjunta está hecha con palillos: en total se han empleado 24 palillos.

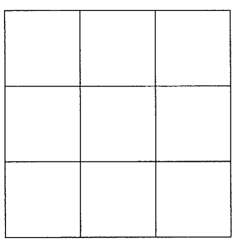


Debes quitar 8 palillos para que te quede:

a) Sólo dos cuadrados

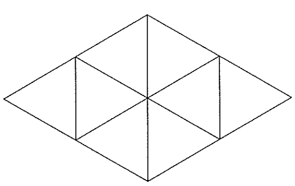


b) Sólo cuatro cuadrados

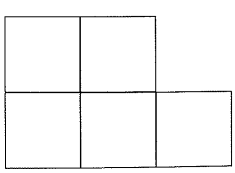


FIGURAS CON PALILLOS

a) La construcción adjunta está hecha con palillos: en total se han empleado 16 palillos. Tienes que suprimir cuatro para conseguir que te queden solamente cuatro triángulos equiláteros iguales.



b) La construcción adjunta está hecha con palillos: se han empleado 15. Tienes que suprimir tres palillos para conseguir que te queden solamente tres cuadrados iguales.



TRENES NUMÉRICOS-1

En esta fila de casillas empiezas por 3 y 4:

3	4			

luego sumas 3 y 4 y obtienes 7; luego 4 y 7 y obtienes 11:

3	4	7	11

Pero, si te dan sólo el 1.° y el último

8			52

¿Cuáles son los números que faltan?

TRENES NUMÉRICOS-2

En esta fila de casillas empiezas por 3 y 4 :

3	4			

luego sumas 3 y 4 y obtienes 7; luego 4 y 7 y obtienes 11; luego 7 y 11 y obtienes 18, y así sucesivamente:

3	4	7	11	18

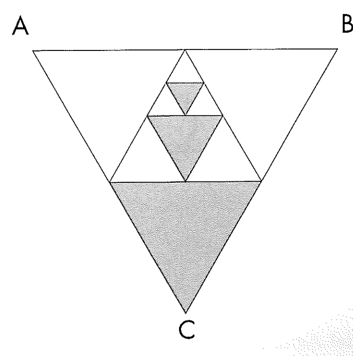
Pero, si te dan sólo el primero y el último de uno de estos trenes numéricos:

4				11

¿Cuáles son los números que faltan?

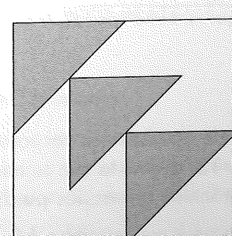
TRIANGULITIS

El triángulo ABC de la figura es equilátero y su área es de 4 m2. Los triángulos interiores se toman uniendo los puntos medios de los lados. Calcula el área de la zona sombreada.



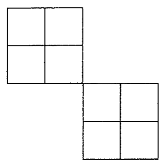
SOMBRAS EN EL CUADRADO

Expresa en forma de fracción la parte sombreada del cuadrado con respecto al total.



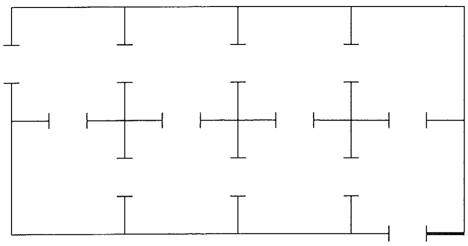
RUTAS POSIBLES

¿De cuántas maneras puedo ir de A a B yendo sólo para abajo o a la derecha?



BUSCANDO LA SALIDA

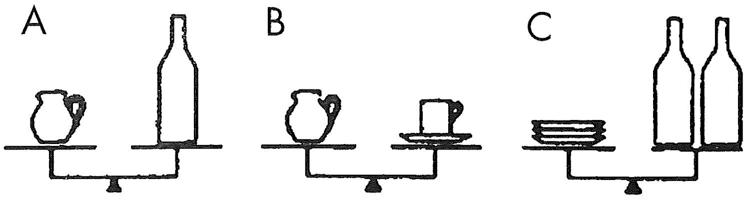
Aquí está representado el plano de un solar. ¿Cuántos caminos diferentes puede seguir un gato desde la entrada hasta la salida? Se supone que no se puede pasar dos veces por el mismo sitio.



LA BALANZA

Una balanza está equilibrada en las tres situaciones representadas a continuación.

¿Cuántas tazas sin plato se necesitan para equilibrar la jarra?



AMAZONAS

En una tribu del Amazonas, donde todavía subsiste el trueque, se tienen las siguientes equivalencias de cambio:

- un collar y un escudo se cambia por una lanza
- una lanza se cambia por 3 cuchillos
- 2 escudos se cambian por tres cuchillos

¿A cuántos collares equivale una lanza?

FALTAN PARÉNTESIS

La siguiente secuencia de operaciones, tal como está escrita, da como resultado 3 y no 12, que es lo que se ha escrito como respuesta. Coloca los paréntesis necesarios para que la respuesta escrita sea correcta.

$$2 \times 1 + 2 \times 3 - 2 \times 2 - 1 = 12$$

LLEGAR AL CIEN

Sin cambiar el orden de los dígitos del primer miembro de la siguiente igualdad situar el menor número posible de símbolos matemáticos (+, –, x, :) entre ellos para hacer cierta la igualdad. Es válido trabajar con números de varias cifras y no se pueden usar paréntesis ni otras operaciones distintas de las indicadas.

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9 = 100$$

Nota: si se colocan los símbolos como se indica:

$$1\ 2\ 3 + 4\ 5 + 6 \times 7\ 8\ 9$$

la operación resultante es: ciento veintitrés más cuarenta y cinco mas seis por setecientos ochenta y nueve.

TORTILLAS

Un grupo de alumnos encargaron 65 tortillas para ir de excursión. La distribución la hicieron así: en el almuerzo comerán una tortilla cada cuatro personas; en la comida una tortilla cada dos y en la merienda una tortilla para cada tres. ¿Cuántos fueron de excursión?

JORNADA GASTRONÓMICA

En el instituto se ha organizado una jornada gastronómica en la cual cada persona come arroz, salsa y carne. Cada dos personas comparten una ración de arroz; cada tres personas una de salsa y cada cuatro una de carne. En total se sirvieron 65 raciones.

¿Cuántas personas asistieron a la comida.

REGLA FALSA

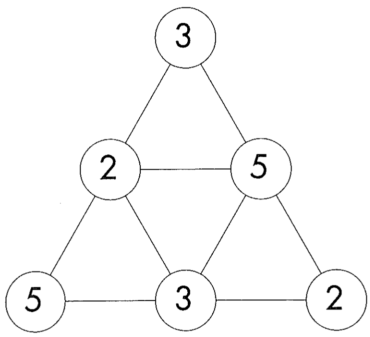
Una regla, que supuestamente debe medir 12 cm de largo, se ha deformado y actualmente mide 11,5 cm. Si mides una cuerda con esta regla y obtienes un resultado de 4 metros, ¿cuál será la medida real de la cuerda?

EL RELOJ DE SILVESTRE

Silvestre ha puesto su reloj a las doce en punto cuando sonaban las campanadas de medianoche de fin de año de 1996. El reloj de Silvestre retrasa un minuto cada día. Si no lo arregla, ¿qué hora marcará su reloj cuando toquen las campanadas de fin de año de 1997?

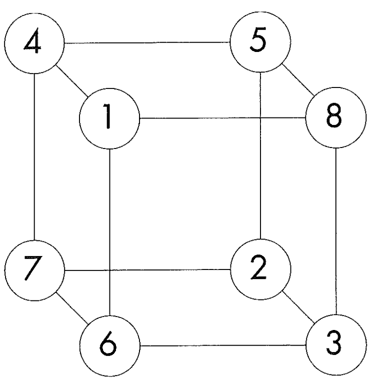
PRIMOS EN CÍRCULO

Coloca números distintos de la unidad, que sean primos (pueden repetirse) en los círculos de modo que la suma de los seis que debes colocar sea 20 y la suma de los que están situados en los cuatro triángulos pequeños sea la misma.



CUBO NUMÉRICO

Sitúa en los vértices de este cubo los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 de modo que la suma de los vértices de cada cara sea la misma.



TORNEO DE TENIS

En una competición individual de tenis hay 4 eliminatorias para llegar a la final. Si en cada una de ellas se eliminan la mitad más uno de los participantes, ¿cuántos jugadores había inscritos en un principio?

LAS ALBÓNDIGAS

En cinco platos se han repartido cien albóndigas. Los platos 1 y 2 tienen en total 52; el 2 y el 3 tienen en total 43, el 3 y el 4 tienen en total 34 y el 4 y el 5 tienen en total 30. ¿Cuántas albóndigas hay en cada plato?

PRIMOS GEMELOS

Algunas parejas de números primos se diferencian en 2 unidades. Decimos entonces que estos números son *primos gemelos*. Nadie sabe si el número de parejas de primos gemelos es infinito, pero no es esta la cuestión que os vamos a plantear.

El número que hay entre los dos números de cada par de primos gemelos tiene una curiosa propiedad: es un múltiplo de 6 (exceptuando la primera pareja de primos gemelos: 3 y 5). Se trata de que des una explicación convincente de esta propiedad.

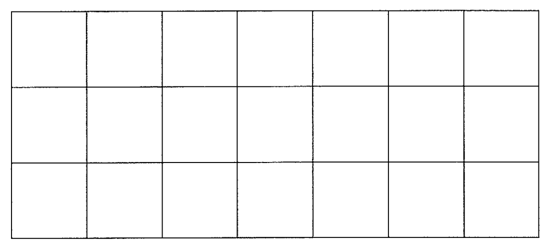
NÚMEROS CON TRES DIVISORES

Un número primo no tiene más que dos divisores: el propio número y el número uno.

¿Cuáles son los números que tienen solamente tres divisores distintos?

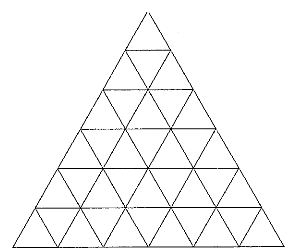
TRAMA CUADRADA

¿Cuántos cuadrados y cuántos rectángulos hay en total en una red como la que aparece dibujada?



TRAMA TRIANGULAR

¿Cuántos triángulos hay en la red inferior? ¿Cuántos tendrán un vértice hacia arriba? ¿Cuántos tendrán un vértice hacia abajo?



CIRCUITO MATEMÁTICO

Santa María del Naranco

Entre las múltiples riquezas artísticas y culturales que atesora el Principado de Asturias hay una capaz de deleitar la curiosidad y el gusto de cualquier viajero: el Arte Prerrománico Asturiano.

Hoy nos quedan 14 edificios que fueron construidos entre los siglos VIII y X de nuestra era y que simbolizan el nacimiento de la Monarquía Asturiana y del que fue el primer reino cristiano de la Península Ibérica.

En la falda del Monte Naranco, que domina la ciudad de Oviedo, se levantan dos edificios emblemáticos de estilo ramirense, Santa María del Naranco y San Miguel de Lillo. Vamos a proponerte alguna actividad relacionada con el primero de ellos.

ACTIVIDAD A

Nos gustaría saber que altura tiene el Palacio de Santa María del Naranco pero sólo tenemos un dibujo de la fachada oeste, por supuesto hecho a escala.

¿Cómo podríamos calcular cuál es la altura? Completa, además, las cotas del dibujo.

Podemos darte una pista: puedes medir la anchura real y con ese dato determinar la escala.

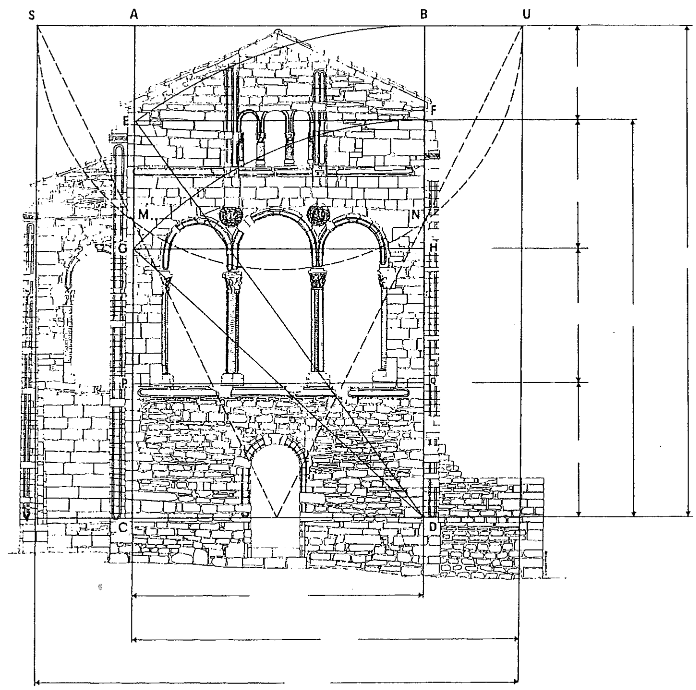
ACTIVIDAD B

Desde la antigüedad clásica, matemáticos, filósofos y artistas han creído en la existencia de una razón (proporción) privilegiada que fue llamada número áureo (número de oro) por los artistas italianos del Renacimiento. Este número se designa por laletra Φ griega, en honor del escultor griego Fiias, y vale

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887...$$

Los constructores del Partenón de Atenas, los de Santa María del Naranco y los de muchos otros templos y edificios tuvieron muy en cuenta la proporción áurea. En el Partenón, por ejemplo, la relación entre la altura y la anchura de su fachada es precisamente Φ. Pero lo mismo sucede con otros muchos objetos cotidianos: tarjetas de crédito, carnés de identidad, las cajas de los casetes,...

También Pitágoras y sus seguidores, que formaban una especie de escuela conocida como la escuela pitagórica, conocían el número áureo. Para ellos el número cinco tenía un atractivo especial: su símbolo era la estrella de *cinco* puntas y les interesaba especialmente la figura del *pentágono.* En él hallaron el número de oro, reflejado en la relación entre el lado de un pentágono y su diagonal.



Los griegos consideraban que un rectángulo cuyos lados a y b están en la relación a/b = Φ es especialmente armonioso y los llamaron *rectángulo áureo.* ¿Serías capaz de construir un rectángulo áureo?

ACTIVIDAD C

Ya hemos dicho antes que los constructores de Santa María del Naranco también tuvieron muy en cuenta el número áureo Φ, y si observas el poster de la VIII Olimpiada Matemática podrás ver que aparece repetidamente.

Para comprobarlo, puedes medir la mitad de la fachada este (la del Altar), que en el dibujo se llama N, y la anchura de uno de los vanos (por ejemplo el arco de la derecha), y comprobar la proporción que se indica en poster, es decir, anchura del arco es

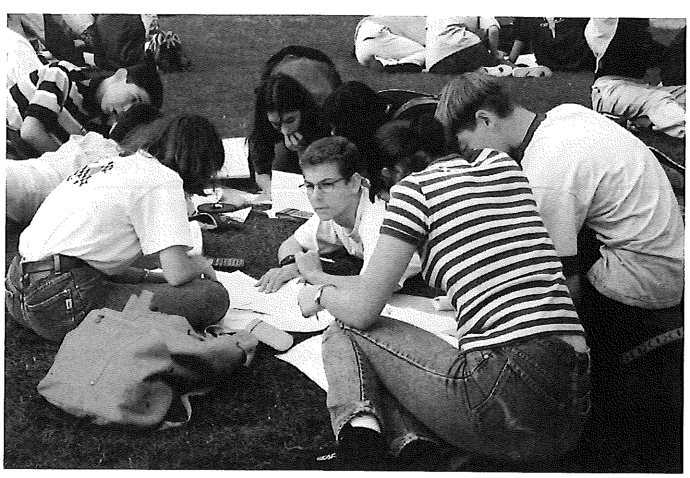
$$\frac{N}{\Phi^3}$$

ACTIVIDAD D

En el dibujo del póster, si observas detenidamente las cotas, puedes encontrar diversas relaciones entre las potencias de los inversos del número áureo. Por ejemplo:

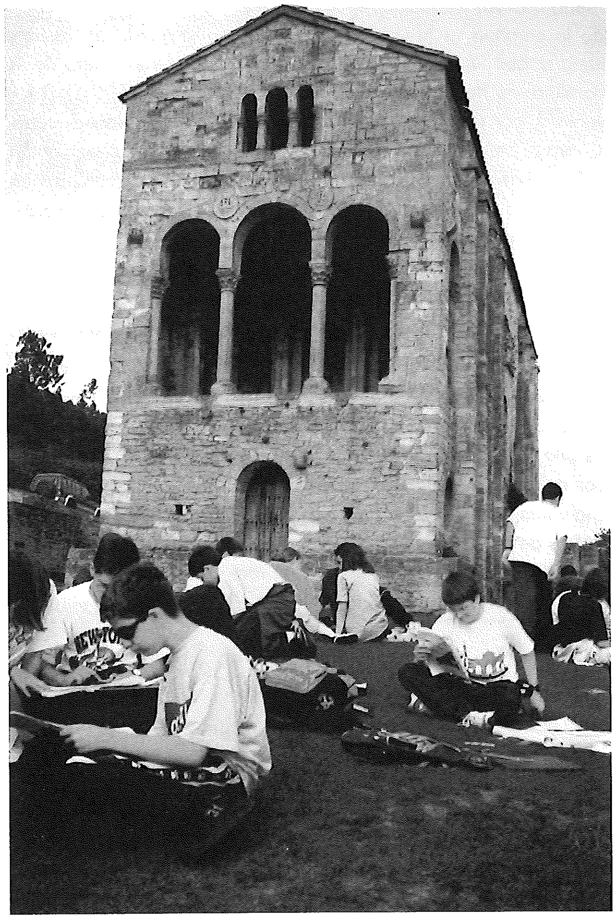
$$\frac{1}{\Phi^2}+\frac{1}{\Phi^3}=\frac{1}{\Phi}$$

¿Cuántas más encuentras?



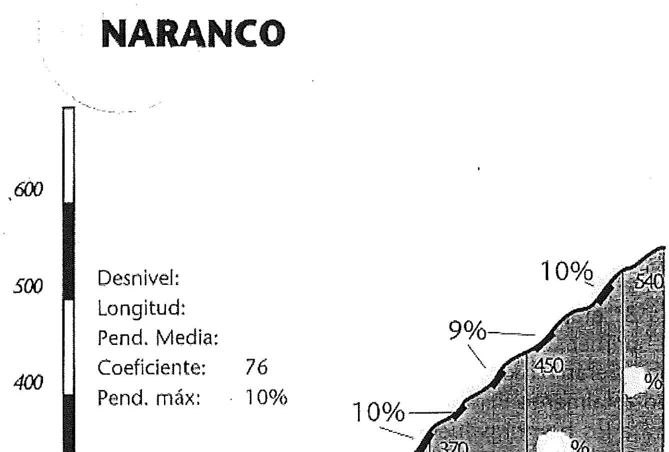
La subida al Naranco

El monte Naranco es muy conocido en los ambientes ciclistas, pues en su inclinada carretera se han vivido apasionantes momentos de buen ciclismo desde hace muchos años. Tanto la Vuelta a Asturias como la Vuelta a España tienen casi siempre un final de etapa en esta mítica cumbre y, desde hace ya bastantes años, coincidiendo con las fiestas ovetenses de San Mateo, patrono de la ciudad, un periódico local organiza una «clásica» ciclista que va adquiriendo un gran prestigio. Los problemas que os planteamos a continuación están relacionados con esta otra faceta del Naranco, la deportiva.



ACTIVIDAD E

El croquis adjunto aparece en el libro de ruta de una de las etapas que han finalizado recientemente en el monte Naranco pero, deliberadamente, algunos de sus datos se han borrado. Sin embargo no os costará mucho trabajo escribirlos de nuevo. A continuación los enumeramos:



- Se nos ha borrado el *desnivel total* que se salva, pero estamos seguros de que sabréis leerlo en la gráfica.
- También se ha borrado la *longitud total* de la subida, pero tenéis datos suficientes para conocerla.
- También se ha borrado la *pendiente media* de cada kilómetro de la subida y la pendiente media total. Para poder calcularlas os damos una pista: podemos hallar la pendiente en un tramo de carretera dividiendo el desnivel que se salva en ese tramo entre la longitud del mismo y multiplicando el resultado por 100, pues la pendiente suele expresarse en forma de porcentaje (desde el punto de vista estrictamente matemático este procedimiento es incorrecto, aunque cuando se trata de pendientes pequeñas, como éstas, el error que se comete es despreciable).
- Por último, debéis *situar en el croquis San Miguel de Lillo y Sta. María del Naranco*. Para ello tenemos una pista: San Miguel de Lillo está situado inmediatamente antes de la primera rampa del 10% y Sta. María del Naranco unos 500 metros antes.

ACTIVIDAD F

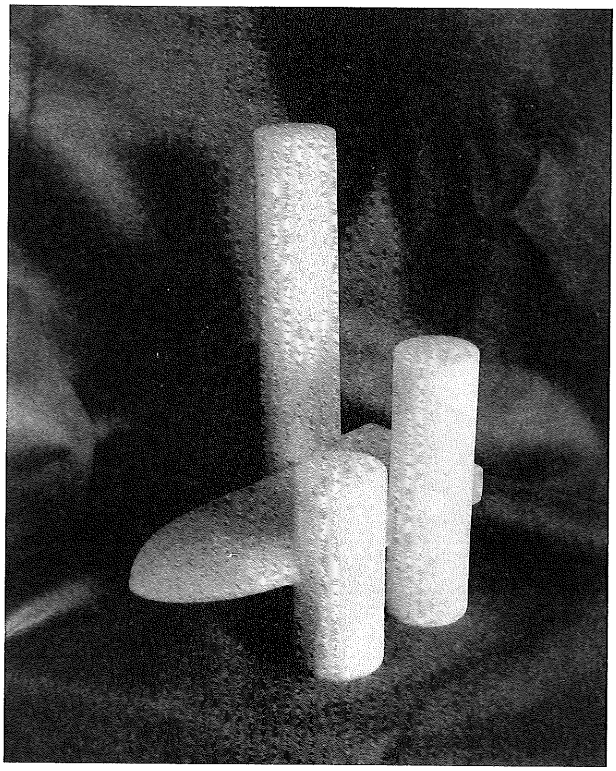
El cambio de marchas de la bicicleta permite que los ciclistas puedan llevar un ritmo de pedaleo apropiado a cada tipo de terreno, eligiendo la combinación adecuada entre piñón (en la rueda trasera) y catalina (en los pedales). Así, por ejemplo, cuando la catalina, a la que también se la suele llamar el "plato", tiene doble número de dientes que el piñón, cada vuelta de la catalina, es decir, cada pedalada, hará que el piñón gire dos veces y, por tanto, la rueda dará dos vueltas. En general, cuanto mayor es el número de dientes de la catalina y menor el del piñón, más duro resulta el pedaleo, pero más se avanzará en cada pedalada. Por esta razón los ciclistas suelen usar una catalina muy grande y un piñón muy pequeño para las bajadas. Por el contrario, cuanto más pequeña sea la catalina (menor número de dientes) y mayor sea el piñón (mayor número de dientes), más fácil será el pedaleo; por ello los ciclistas, en las subidas, suelen elegir catalinas pequeñas y piñones grandes.

Cuando el grupo de destacados de la clásica del Naranco, comandado por Chechu Rubiera, llega a la altura de San Miguel de Lillo, justo antes de abordar la primera rampa del 10%, rueda por delante, en solitario, el ciclista italiano Bruno Escapossi con una ventaja de 37 segundos. Este ciclista, cansado de tantos kilómetros de fuga, va subiendo lentamente, con una catalina de 39 dientes y un piñón de 23 y lleva un ritmo de pedaleo constante de 50 pedaladas por minuto sintiendo con angustia que el grupo perseguidor se le echa encima. Justo en ese instante salta Chechu Rubiera del grupo perseguidor, quien trata de alcanzar al fugado y ganar la carrera, subiendo con una catalina de 42 dientes y un piñón de 21, a un ritmo de 60 pedaladas por minuto.

Entre los aficionados, que siguen entusiasmados la ascensión, se cruzan apuestas sobre quién será el primero en llegar al alto. Si siguen subiendo con este ritmo de pedaleo y suponiendo que no cambian de piñón, ¿quién de los dos ganará la carrera? ¿Cuál será la diferencia de tiempo entre ambos en la cima?

Datos:

- El diámetro de las ruedas de las bicicletas es de 67 cm.
- La distancia de S. Miguel de Lillo a la cumbre puedes obtenerla en el croquis anterior



Bases
Alabastro, 40x40x25
José Miguel Fuertes