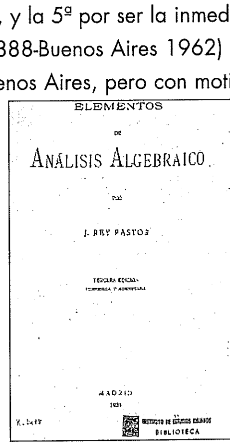
SUMA 27
febrero 1998

Un libro de texto viejo pero con categoría

ELEMENTOS DE ANÁLISIS ALGEBRAICO
Julio Rey Pastor
Fortanet, Madrid, 1917, 1ª edición
Unión Poligráfica, Madrid, 1935, 5ª edición
Industrias Gráficas Martín, Madrid, 1961, 14ª edición

Ediciones

Este libro es un clásico de largo recorrido, con muchas ediciones, de las que hemos indicado tres representativas: la 1ª por razones obvias, la 14ª porque es la última compuesta en vida del autor, que falleció un año después, y la 5ª por ser la inmediata anterior a la guerra civil. Desde 1921, Julio Rey Pastor (Logroño 1888-Buenos Aires 1962) alternaba cada año su trabajo entre las Universidades de Madrid y Buenos Aires, pero con motivo de la contienda permaneció más de diez años alejado de su país. A pesar de todo, el libro se siguió editando en Madrid, lo ha sido al menos hasta 1981, pero más que de nuevas ediciones se trata de reimpresiones, pues los cambios, si los hay, no pasan de ser correcciones. El año 1945, *Elementos...* se publicó en Buenos Aires, con alguna ampliación respecto a la versión española, pero sin cambios fundamentales. Se puede considerar que la obra española alcanzó su forma final en la primera mitad de la década de los treinta y permaneció inalterada después de la guerra, de modo que los comentarios que siguen sobre el contenido sirven para cualquiera de las ediciones de este periodo, que se plasman en un volumen de poco más de quinientas páginas, muy fácil de encontrar en las bibliotecas de los centros de enseñaza.


ELEMENTOS
DE
ANALISIS ALGEBRAICO
J. REY PASTOR
MADRID
BIBLIOTECA

El origen del tratado, su primer diseño escrito, se remonta a tres años antes de la primera edición, cuando Rey Pastor publicó unos apuntes litografiados para sus clases del curso 1914-15 en la Universidad Central: *Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso)*, Madrid, Artes Gráficas Mateu, 1914. Estos apuntes, cuyo contenido está marcado por el plan de estudios vigente (el del ministro García Alix, de1900) ya tienen la estructura en cuatro partes del texto final, dedicada cada una de ellas a los algoritmos que se pueden establecer en los diferentes estadios del sistema de los números: natural, racional, real y complejo. Rey Pastor no

RECENSIONES

considera el número entero porque introduce los negativos a la vez que las fracciones y en toda la primera parte la resta y la división sólo se hacen cuando es posible. En los apuntes del primer curso no aparecieron los algoritmos indefinidos (límites, series y fracciones continuas) pero encabezaron los apuntes litografiados del segundo curso, publicados en 1916. Estos últimos van precedidos de una advertencia que, tras algunos cambios y añadidos, es la introdución que figura en las ediciones impresas posteriores. Allí explica Rey Pastor que un curso no puede entrar en la materia con la extensión propia de un tratado, que es más sistemático y completo, aunque tampoco tiene que ser una enciclopedia ni una obra histórica. El paso que Rey Pastor dio al transformar los apuntes del primer curso en el libro *Elementos...* es precisamente el que separa unas lecciones de un tratado. Para facilitar la primera lectura, hay apartados señalados con un asterisco y algunos párrafos impresos en letra de cuerpo menor, indicando las partes del libro que se pueden dejar para la segunda vuelta. Además, cada capítulo se cierra con unas notas en las que destaca la información erudita y bibliográfica, destinada tanto a suministrar conocimiento histórico cuanto a orientar el estudio posterior más avanzado.

Plan didáctico

La introducción es un texto muy adecuado para conocer los métodos didácticos del autor. Conseguir rigor sin formalismo y lograr profundidad con brevedad son los objetivos principales de su método, a los que Rey Pastor aplica su sólida formación y su capacidad para presentar los temas en forma sintética y original. El autor identifica el rigor con la claridad, cualidad que deja al lector crítico satisfecho del encadenamiento lógico de las demostraciones. Prefiere el método lógico al intuitivo, aunque su tratado se dirige no sólo a estudiantes de matemáticas, sino también de otras ciencias y de las ingenierías, porque prefiere que el texto esté dirigido a la formación matemática y que sea el profesor el que module la explicación de sus contenidos y los complete con las prácticas más adecuadas a otras enseñanzas. Se esfuerza «en elementalizar las cuestiones difíciles sin menoscabo del rigor», pero como no le gusta usar un lenguaje formalizado y reniega también de la abstracción prematura, su rigor es algo subjetivo y necesita de la complicidad de su lector ideal. Por otra parte, quiere hacer un tratado relativamente reducido, para lo cual se propone llegar por el camino mínimo a los resultados principales y a las puertas de los temas avanzados, evitando «perderse en una selva de minucias y casos particulares» con los que nunca se sale de la matemática elemental. Como consecuencia de este enfoque, el lector necesita poner algo de su parte, tiene que ser un lector inteligente que interprete la claridad que Rey Pastor transmite. El autor así lo proclama con una analogía anatómica, advirtiendo que no hay que entretenerse demasiado en los detalles porque «los aparatos de masticación artificial sólo aprovechan a quienes carecen de dentadura».

Conseguir rigor sin formalismo y lograr profundidad con brevedad son los objetivos principales de su método, a los que Rey Pastor aplica su sólida formación y su capacidad para presentar los temas en forma sintética y original.

Números

Un primer repaso general del libro lleva a examinar el proceso seguido para explicar las ampliaciones del concepto de número, desde los naturales a los complejos, observando el *principio de permanencia de las leyes formales* de las operaciones aritméticas. Los naturales se introducen, siguiendo a Dedekind, mediante la coordinación de conjuntos finitos, definiendo primero éstos como conjuntos que admiten una ordenación cumpliendo tres condiciones, ninguna de las cuales es consecuencia de las anteriores: «A) Entre cada dos elementos, hay uno anterior al otro. B) Hay un primero y un último elemento. C) Todo conjunto parcial tiene primero y último elemento».

Con esta definición, la suma se define mediante el *agregado* (unión disjunta) de conjuntos y se prueban sus propiedades básicas, así como el método de inducción. Lo mismo con el producto, que no es sino una suma particular de varios sumandos. Luego se establecen los conceptos de mayor y menor, tras los cuales surge la diferencia cuando es posible. Por último, incorpora las operaciones con polinomios y la división entera, ingredientes con los que puede abordar los sistemas de numeración y la obtención de la raíz cuadrada por defecto. De los naturales pasa a los racionales haciendo fracciones (pares de naturales con el segundo no nulo) afectadas de signo y diciendo que «dos fracciones se dicen *iguales*, si tienen el *mismo signo* e *iguales productos cruzados*». Entonces un número racional es cada ente abstracto representado por fracciones iguales y el número es entero si está representado por una fracción con denominador unidad. Seguidamente, define las cuatro operaciones racionales (suma, diferencia, producto y división, esta última salvo divisor cero) y sus propiedades básicas, teniendo necesidad de distinguir casos a causa de los signos. Introduce además el orden y su relación con las operaciones racionales.

La tercera parte del libro se dedica al número real, que define mediante cortaduras de Dedekind, lo que da de inmediato las propiedades de orden. Pero enseguida introduce sucesiones monótonas convergentes (de números racionales) y demuestra el «teorema fundamental» siguiente: «Todo número real *a* es elemento de separación de infinitos pares de sucesiones monótonas convergentes. Recíprocamente, todo par de sucesiones monótonas convergentes (a_i; a'_i) tiene un elemento de separación que es único». Este teorema le permite definir las operaciones y establecer sus propiedades mediante las sucesiones, lo que es más sencillo que con las cortaduras. De este modo prueba que en el sistema real se mantienen las cuatro operaciones racionales y sus propiedades. Finalmente, en la cuarta y última parte define los complejos como pares de reales con las operaciones dadas en la forma aritmética de Hamilton, viendo una vez más la permanencia de las leyes formales de las cuatro operaciones racionales.

El camino seguido por Rey Pastor para llegar desde nociones previas de conjuntos hasta el número complejo podría seguirse hoy sin más que adaptar el lenguaje y algunos detalles, con la salvedad del número entero, que ahora se introduce como un anillo previo al cuerpo racional. Esto puede explicarse históricamente porque la estructura de anillo no se estudió aislada hasta bien entrado el siglo actual (Fraenkel, 1914), mientras que la de cuerpo viene del siglo anterior (Galois-Kronecker). Con el número real Rey Pastor se muestra pragmático, pues utiliza cortaduras o sucesiones según le conviene para abreviar, gracias a que primero establece en su teorema fundamental la equivalencia entre ambos métodos de definición del número.

Algoritmos

El contenido comentado hasta ahora, formado por los primeros apartados de cada una de sus cuatro partes, es el basamento del libro, que se completa edificando sobre dicha plataforma diversos algoritmos.

En la primera parte, que ocupa poco más de ciento cincuenta páginas, los algoritmos correspondientes al número natural son la divisibilidad (algoritmo de Euclides y congruencias) y la combinatoria, incluyendo en ésta los grupos de sustituciones, temas habituales entonces en el primer curso de análisis matemático. Cabe señalar como característico de Rey Pastor que incluyera en el libro alguna cuestión tratada por él en revistas especializadas. Desde estudiante había destacado en la resolución de problemas propuestos en revistas españolas, francesas y alemanas, muchos de los cuales eran de aritmética. En particular, la divisibilidad de factoriales fue un tema recurrente en las listas de problemas en Europa y USA en los primeros años del siglo, y Rey Pastor se ocupó del asunto en varias ocasiones, primero siendo todavía estudiante y luego en su primer año de profesor, lo que dio lugar a que en su libro aparezca un apartado sobre estas cuestiones que amplía el alcance tradicional de los cursos, que llegaba hasta el teorema de Lagrange que permite calcular el exponente de un número primo en la factorización del factorial de un número. Rey Pastor añade algunos teoremas y un ejercicio, sacados de su anterior actividad en la resolución de problemas, dedicados a encontrar relaciones de divisibilidad entre números dados por operaciones entre factoriales, y lo hace con demostraciones muy breves y elegantes.

...hay que advertir que en este libro el álgebra, entendida como a principios de siglo, es la parte del análisis que se ocupa de los polinomios y las ecuaciones que se forman con ellos; pero subyace una cierta idea de que lo algebraico es finito y el análisis aparece propiamente cuando se introduce el infinito. Por eso el número racional es la base algebraica y el número real la analítica.

La segunda parte, de unas ciento sesenta páginas, se inicia con la exposición del número racional y sus operaciones, como antes se ha indicado. Los primeros algoritmos asociados al número racional, que llama «algoritmos de iteración», son los que completan la aritmética de la primera parte, a saber, las progresiones, los cumulantes y las fracciones continuas finitas. Luego sigue el «algoritmo de los determinantes», con su definición combinatoria, sus propiedades y desarrollos, productos y casos especiales. Expresa el producto de un determinante de orden *n* por otro de orden *m* como un determinante de orden n+m con un menor nxm con números arbitrarios, de donde deduce como caso particular, cuando n=m, la fórmula de Binet-Cauchy que da el producto como determinante de la matriz producto; pero Rey Pastor no da proridad a las matrices, pues deja para después de los determinantes un breve apartado con la noción de matriz, de característica y el producto de matrices. Las últimas cincuenta páginas de esta segunda parte están dedicadas a lo que llama el «algoritmo algebraico», que incluye los dos temas siguientes: (i) polinomios de una y varias variables con coeficientes racionales y cálculo de su máximo común divisor; (ii) sistemas de ecuaciones lineales, regla de Cramer y teorema de Rouché-Frobenius.

La tercera parte, unas ciento treinta páginas, es más bien analítica, aunque hay que advertir que en este libro el álgebra, entendida como a principios de siglo, es la parte del análisis que se ocupa de los polinomios y las ecuaciones que se forman con ellos; pero subyace una cierta idea de que lo algebraico es finito y el análisis aparece propiamente cuando se introduce el infinito. Por eso el número racional es la base algebraica y el número real la analítica. Así, tras la definición del número real y sus operaciones aparecen los límites, los cálculos aproximados con expresiones decimales, los logaritmos decimales y los algoritmos indefinidos (series y fracciones continuas). En esta parte deja también la huella de sus primeros trabajos de investigación, pues incorpora al libro un método de sumación de «series hipergeométicas» que había desarrollado en un artículo publicado en el primer número de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, de 1911.

La mixtura de álgebra y análisis se aprecia plenamente en la cuarta parte, cincuenta páginas dedicadas al número complejo. Por un lado, los límites y las series se pueden extender al caso complejo, pero son más interesantes las observaciones que surgen del lado algebraico. Al darse en los complejos las cuatro operaciones racionales con sus leyes formales, Rey Pastor concluye como «escolio general» que son válidos para estos números (y por tanto también para los reales, aunque en su momento no hizo esta afirmación) los algoritmos establecidos para los números racionales. Esta forma de proceder ejemplifica su doble desiderátum: rigor sin formalismo y brevedad con profundidad. Para llegar lejos en poco tiempo, no repite con los complejos los argumentos ya dados con los racionales, le basta observar que todo depende de un pequeño grupo de operaciones y leyes; esto es riguroso porque es claro y queriendo precisar más se cae en el formalismo que pretendería desarrollar la teoría de los sistemas lineales, por ejemplo, sobre un cuerpo, en principio de característica cero. Como dice en la introducción, usando palabras del italiano E. Pascal (1865-1940), esto sería «didácticamente equivocado, históricamente absurdo, conceptualmente hipertrófico y científicamente inútil», al pretender abstraer sin una base previa que sirva de apoyo a la abstracción. Así que Rey Pastor prefiere explicarse en la base, los racionales, y luego hacer la abstracción de un plumazo, con la simple observación general del escolio citado, aunque sin llegar en este caso a un contexto completamente abstracto, sino tan sólo a la situación más general, pero todavía concreta, de los números complejos.

Otro aspecto algebraico que desarrolla en los complejos, después de estudiar potencias y raíces, es la resolución algebraica de las ecuaciones hasta el cuarto grado, pues pasar de allí era materia del segundo curso, en el que se explicaban la continuidad y la derivación de funciones necesarias para demostrar el teorema fundamental del álgebra, que es un teorema de análisis de variable compleja (ver, por ejemplo, *Lecciones de álgebra* de Rey Pastor).

Elementos... concluye con la demostración del «teorema final de la Aritmética», que enuncia así: «No existe ningún sistema de números complejos de más de dos unidades en el que el producto satisfaga a todas las leyes formales de la Aritmética». La demostración de Rey Pastor no es general, como advierte el autor, sino que se limita a los casos de tres y cuatro unidades. Al manejar números complejos de varias unidades está plasmando un ejemplo de la noción de espacio vectorial de varias dimensiones, algo que en el caso de una dimensión ya había realizado antes en un apartado del número racional, llamado «teoría de las magnitudes». Allí habla, a partir de ejemplos físicos, de magnitudes escalares o de una dimensión sobre los racionales, mientras que ahora los complejos serían magnitudes vectoriales de varias dimensiones o unidades sobre los reales. Pero en el libro no aparece la noción de espacio vectorial, lo que a partir de la década de los cuarenta empieza a indicar que se trata de un libro clásico (lo mismo pasa con la relación entre matrices y determinantes). Pocos años antes de morir Rey Pastor manifestó deseos de actualizar el libro, lo que posiblemente afectaría de modo princial a la parte de álgebra lineal.

En definitiva, es un libro muy anclado en una época que ya no es la nuestra, un libro de texto viejo pero con categoría. Está escrito con el nervio característico del autor, que deja en la obra reflejos de su temperamento. [...] Ya no está en los cuarenta principales, pero ha pasado a ser un clásico de la matemática en lengua española.

El tema anterior le permite introducir los cuaternios de Hamilton, que son números complejos de cuatro dimensiones con un producto que pierde la propiedad conmutativa. Estas cuestiones de los números complejos de varias unidades están desarrolladas de modo más completo en la edición argentina.

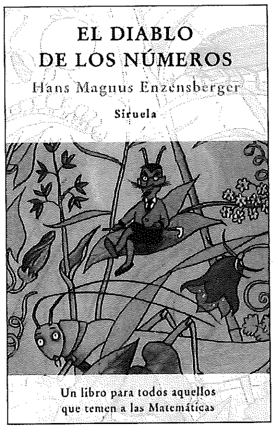
Final

En una de las últimas páginas del libro hay una nota al pie que indica otras representaciones de los cuaternios en el espacio ordinario tridimensional diferentes de la que él propone. La nota termina con esta observación: «la representación... que expone Marzal (*Calculatoria*, pág. 416), es errónea». Esta impertinencia tiene su origen en el ambiente entre 1914 y 1917, cuando Rey Pastor se enfrentaba a los catedráticos más veteranos, entre ellos Octavio de Toledo en Madrid o Marzal en Barcelona, reclamando una renovación de la enseñanza de las matemáticas y de los textos, de modo que el suyo surgía como alternativa militante a los de aquéllos. Pero pasados los años Marzal y su *Calculatoria* (parte de las *Lecciones de análisis matemático* que impartía en Barcelona) serían algo lejano y desconocido para los lectores, a pesar de lo cual la nota no desapareció en ediciones sucesivas. En el libro hay otros detalles de este tipo que reflejan situaciones subjetivas del momento en que fue escrito pero que son difíciles de comprender con el paso del tiempo. De igual modo, algunas citas de personas o libros están hechas coloquialmente, suponiendo cierta familiaridad ambiental del lector, lo que también deja de ser adecuado con el paso del tiempo. A veces el propio libro es víctima de esta familiaridad, así por ejemplo en el índice de autores (Rey Pastor fue de los primeros en España en introducir en sus libros estos utilísimos índices) aparece Pascal con presencia en cuatro páginas, pero se trata indistintamente del clásico francés B. Pascal (1623-1662), citado a propósito del triángulo aritmético, y del italiano contemporáneo E. Pascal antes mencionado, famoso entonces entre otras cosas por su *Repertorio* (1897-1900), recomendado frecuentemente por Rey Pastor como obra enciclopédica de consulta para la matemática del siglo XIX.

En definitiva, es un libro muy anclado en una época que ya no es la nuestra, un libro de texto viejo pero con categoría. Está escrito con el nervio característico del autor, que deja en la obra reflejos de su temperamento. Si bien no es directamente útil para los programas actuales, será atractivo para los profesores interesados en la visión histórica de la enseñanza de la matemática, referida en este caso al primer curso universitario, en este siglo que pronto vamos a clausurar. Ya no está en los cuarenta principales, pero ha pasado a ser un clásico de la matemática en lengua española.

Luis Español González

EL DIABLO DE LOS NÚMEROS
Hans Magnum Enzensberger
Siruela
Madrid, 1997
259 páginas



No es frecuente que un libro cuyo tema son la matemáticas traspase los limitados círculos de los degustadores del tema. Por eso es más destacable la presencia del que comentamos en las listas de libros más leídos de nuestro país, después de haberlo hecho en otros idiomas, además del suyo original, el alemán (y está comprometida su traducción al menos a 15 lenguas). Bien es cierto que ha venido precedido por una intensa campaña en todos los medios de comunicación, del tipo de las que se dan en los lanzamientos de todos los *best-seller* y avalado por la poderosa personalidad de uno de los intelectuales europeos más conocidos, el poeta y ensayista Enzensberger.

Pero bueno es que se hable de las matemáticas a niveles masivos para algo más que para decir lo plomizas que son, lo raros que son sus cultivadores o el horror que supone tener que superarlas en los distintos cursos de la enseñanza obligatoria (en donde, como una consideración colateral, hay matemáticas todos los años, y lo mismo pasa en todos los países, luego alguna razón profunda habrá de la necesidad de esa presencia, además, por supuesto, del ancestral sentimiento masoquista de la humanidad). Aunque algo de todo lo anterior no ha podido evitarlo ni el editor del libro (y quizás también el autor, puesto que en el título original también está) porque en la misma tapa de él ya se dice que se trata de «Un libro para todos aquellos que temen a las Matemáticas», que parecen considerar que son legión.

Pero pasemos ya al libro. Es muy bonito, bien presentado, con muchos dibujos y colores, y agradable de leer, un cuento dirigido a lectores de 8 a 88 años (como corresponde a la prestigiosa colección «Las tres edades» en que está encuadrado, y en la que también se publicó *El mundo de Sofía* con el que podríamos hallarle algunas afinidades). La historia es sencilla. Robert es un niño al que, como a tantos otros, no le gustan las matemáticas, incluso las odia, como consecuencia de una práctica escolar no muy estimulante, con problemas del tipo de «Si dos panaderos hacen 444 trenzas en seis horas, ¿cuánto tiempo necesitarán cinco panaderos para hacer 88 trenzas?» que les propone su profesor señor Bockel (con el que el autor se ensaña con un poco de exceso, aunque todos conocemos a especímenes parecidos). Un buen día, como una nueva aparente pesadilla a competir con otras que le fastidian los sueños, se le aparece un diablillo que pretende ser su guía por el mundo de las matemáticas. Tras algunos encontronazos y algunos desencuentros, poco a poco la relación va avanzando y Robert acaba por ir encontrando placer a su recorrido por ese mundo nuevo, a entender cosas cada vez más profundas, a relacionar partes aparentemente lejanas y a ser conducido en un viaje ideal hasta la secta de los matemáticos e investido como miembro aprendiz de la misma. Y en su recorrido llega hasta a comprender un poco a su torpe profesor de mates, que les pone a veces problemas enrevesados solo por tener un poco de tiempo del que poder disponer a su antojo (y poder comerse en paz las trenzas del problema).

En ese recorrido imaginado e imaginativo con el genio van apareciendo resultados sorprendentes, para los cuales una veces hay razones y otras no, porque resultados sencillos de la teoría de números siguen sin demostrar (como que todo número par es suma de dos primos, la llamada «Conjetura de Goldbach», que por cierto en el libro está mal expresada, ya que se han olvidado lo de par, con lo que ya no es cierto: por ejemplo 17, que no es par pero que cumple las condiciones pedidas en el libro, no se puede expresar como suma de dos primos) y otros, aunque están demostrados no son muy conocidos y son sorprendentes (como que dado un número cualquiera entre él y su doble hay al menos un número primo). Y en su conjunto presenta una pano-