

## La influencia de la escala en la interpretación gráfica de una función lineal

**Francisco G. González Martínez**  
**Inmaculada Palomero Guiral**  
**Floreal Gracia Alcaine**

**E**N el ámbito laboral y en los medios de comunicación los gráficos son esgrimidos para reforzar una información o para plasmar unos resultados. Pero todo gráfico tiene una información intrínseca que es vital para obtener una valoración objetiva.

Hoy en día, los ordenadores realizan gráficos de cualquier base de datos de forma rápida y sencilla. En la mayoría de los casos, dejamos que sea el propio programa quien elija de forma automática la escala para representar los datos en la pantalla, sin tener en cuenta que está realizando una manipulación en el gráfico resultante, ya que, por la característica de los datos, difícilmente la escala es 1:1. Lo cual puede dar lugar a graves errores, sobre todo si comparamos gráficos con diferentes escalas.

En esta actividad queremos trabajar esta vertiente de los gráficos, aunque sólo sea para funciones lineales, dando a conocer algunas técnicas para que su interpretación sea objetiva y crítica. La calculadora gráfica nos va a ser útil en dos aspectos:

- Para realizar la hoja del enunciado de la actividad para el alumno.
- Para verificar y ayudar en la explicación del profesor.

### Objetivos

- 1) Ver que la inclinación de una recta depende de su pendiente y de la escala tomada para los ejes de coordenadas.
- 2) Ver que la ecuación de una recta es independiente de la escala tomada para su representación, mientras que su gráfica es dependiente de la escala.

Es conocido que una imagen vale más que mil palabras. Cuando representamos sobre una gráfica valores obtenidos en cualquier actividad, es más fácil interpretar los resultados, observar las tendencias e incluso, en algunos casos, predecir unos futuros resultados.

Pero también es cierto que las gráficas se pueden manipular, maquillando resultados negativos o exagerando los positivos, haciendo ver aquello que nos es más interesante.

En esta actividad queremos tratar la influencia de la escala en la interpretación gráfica de una función, dando a conocer algunas técnicas para que su interpretación sea objetiva y crítica.

**IDEAS  
Y  
RECURSOS**

- 3) Que el estudiante sepa calcular la pendiente de una recta conociendo su gráfica.
- 4) Saber interpretar el gráfico de una recta independientemente de la escala tomada para su representación.

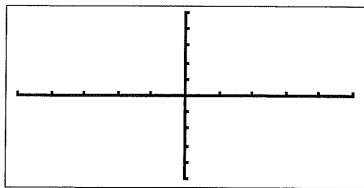
### Actividades sobre interpretación de una gráfica

- 1) Ordena las siguientes rectas según su inclinación:

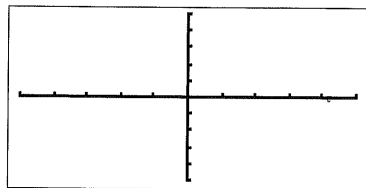
A)  $y = 3x$     B)  $y = \frac{x}{2}$     C)  $y = x$

Respuesta:  <  <

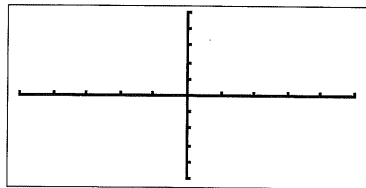
- 2) Dibuja las tres rectas anteriores:



A



B

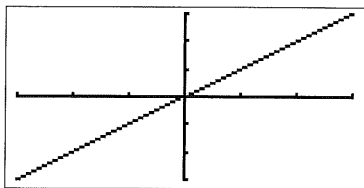


C

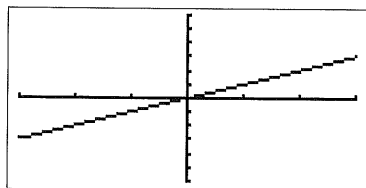
- 3) Según el gráfico, ordena de nuevo las rectas según su inclinación:

Respuesta:  <  <

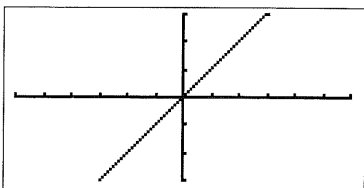
- 4) Ordena estas tres rectas según su inclinación:



A



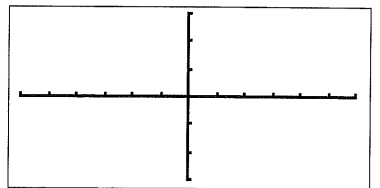
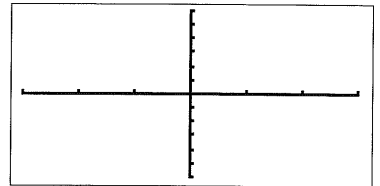
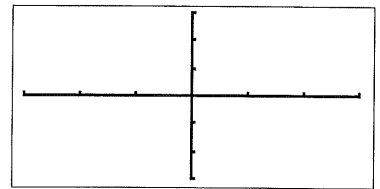
B



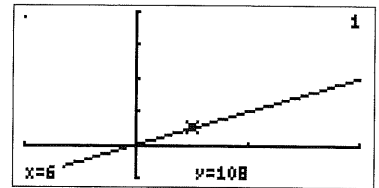
C

Respuesta:  <  <

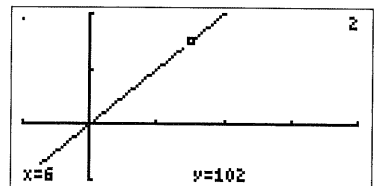
- 5) Dibuja la recta  $y = x$  sobre los siguientes ejes: (cada división de los ejes representa una unidad)



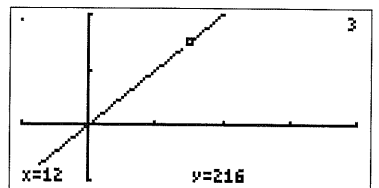
- 6) Ordena estas rectas según su crecimiento:



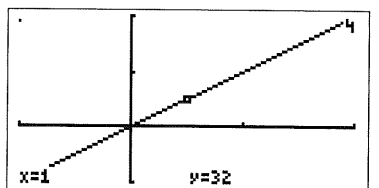
1



2



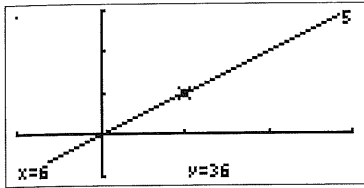
3



4

Respuesta:  <  <  <

- 7) Calcula la pendiente de la siguiente recta:

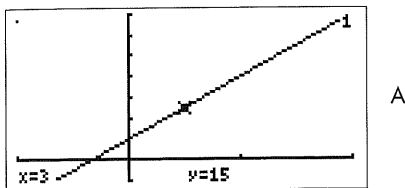


Respuesta: . . . . .

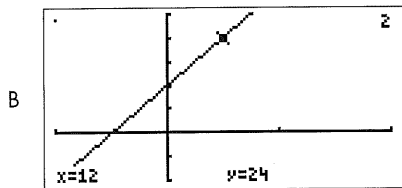
- 8) Calcula las pendientes de las rectas de la pregunta 6 y vuelve a ordenarlas según su inclinación:

Respuesta:  <  <  <

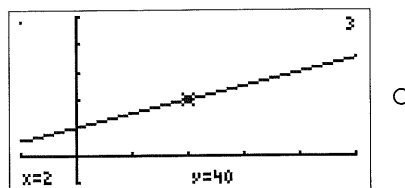
- 9) Ordena las siguientes rectas según su inclinación:



A



B

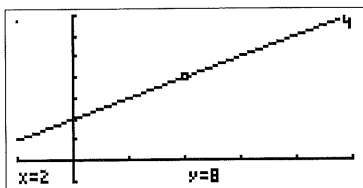


C

Los cortes con el eje de ordenadas son respectivamente: 6, 12 y 20.

Respuesta:  <  <

- 10) Calcula la pendiente de la recta:



Su corte con el eje de ordenadas es 4.

Respuesta: . . . . .

Años	Beneficios
1995	348
1996	396
1997	444

Meses	Beneficios
1	306
2	312
3	318
4	324
5	330
6	336
7	342
8	348
9	354
10	360
11	366
12	372

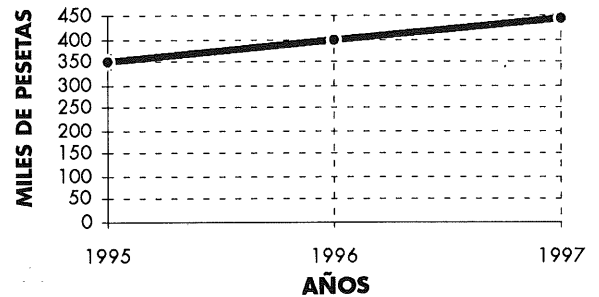
Trimestres	Beneficios
1	315
2	330
3	345
4	360
5	375
6	390
7	405
8	420
9	435
10	450
11	465
12	480

- 11) Vuelve a ordenar las rectas de la pregunta 9:

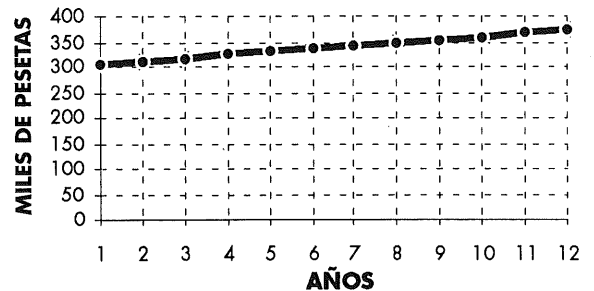
Respuesta:  <  <

- 12) Los resultados de los beneficios de tres empresas están reflejados en los siguientes gráficos ¿En qué empresas crees tu que crecen más rápidamente los beneficios?

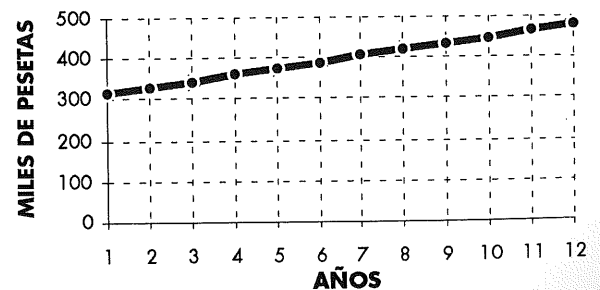
**BENEFICIOS EMPRESA A**



**BENEFICIOS EMPRESA B**



**BENEFICIOS EMPRESA C**



Respuesta:  >  >

## Comentarios sobre la actividad en el aula

Los alumnos ya deben conocer que la inclinación depende de la pendiente y, por tanto, no debe existir dificultad para resolver con éxito la primera pregunta. No obstante, si no fuera así, esto serviría para evaluar el punto de partida de la clase y poder corregir los errores conceptuales que todavía se tengan de la representación de una recta.

Con la siguiente pregunta se pretende que se vea reflejada la respuesta anterior en el ámbito gráfico, como una constatación física del hecho estudiado.

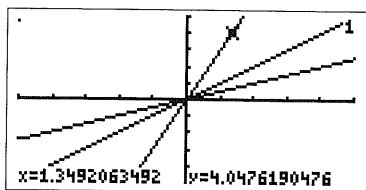
Con la calculadora podemos representar las tres funciones sobre los ejes usando el RANGE que se especifica:

```

Y1=3*x
Y2=x
Y3=x/2
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

```

RANGE
xMin=-5
xMax=5
xScl=1
yMin=-5
yMax=5
yScl=1
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```



pudiendo comparar la inclinación de las tres rectas.

El siguiente paso es dibujar la misma recta  $y = x$  con diferentes escalas y pedir que las ordenen. Es evidente que la respuesta concordará con lo visto anteriormente y se producirá consecuentemente un error, que se intenta demostrar con la resolución de la pregunta 4, dibujando la recta  $y = x$  sobre ejes que no tienen la misma escala.

Para dibujar las gráficas de la recta  $y = x$  de la pregunta 5 se han cambiado los valores de RANGE y se ha dibujado la función cada vez. Los valores utilizados son respectivamente:

```

RANGE
xMin=-3
xMax=3
xScl=1
yMin=-3
yMax=3
yScl=1
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

```

RANGE
xMin=-3
xMax=3
xScl=1
yMin=-6
yMax=6
yScl=1
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

```

RANGE
xMin=-6
xMax=6
xScl=1
yMin=-3
yMax=3
yScl=1
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

y se obtiene las gráficas que se tienen en la pregunta 4. Análogamente, los ejes se han obtenido con esos RANGE y sin seleccionar ninguna función en Y=.

Si se realiza con los alumnos la comprobación de que al cambiar estos valores en RANGE la gráfica de la recta  $y = x$  cambia tal como se ve en los gráficos, será más fácil que sigan la explicación del profesor. Además, ellos podrán comprobarlo al dibujar la recta  $y = x$  sobre los ejes preparados con las diferentes escalas.

Es en este momento cuando han observado que el dibujo no es un dato objetivo para comparar las inclinaciones de las rectas (si estas no están dibujadas sobre ejes adecuados), es cuando se les propone resolver otra actividad partiendo del dibujo de las rectas para comprobar si han captado este hecho.

La actividad 6 está formada por la representación de las siguientes funciones:

```

Y1=18*x
Y2=17*x
Y3=18*x
Y4=32*x
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

representadas bajo los siguientes RANGE:

```

RANGE
xMin=-12
xMax=24
xScl=12
yMin=-216
yMax=864
yScl=216
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

Gráfica A:  $y = 18x$

```

RANGE
xMin=-4
xMax=16
xScl=4
yMin=-68
yMax=136
yScl=68
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

Gráfica B:  $y = 17x$

```

RANGE
xMin=-8
xMax=32
xScl=8
yMin=-144
yMax=288
yScl=144
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

Gráfica C:  $y = 18x$

```

RANGE
xMin=-2
xMax=4
xScl=2
yMin=-64
yMax=128
yScl=64
-----
V(X)= RANGE | ZOOM | TRACE | GRAPH
    
```

Gráfica D:  $y = 32x$

La experiencia de la resolución de las actividades anteriores les debería indicar a los estudiantes que no se pueden fiar sólo de la gráfica de la función. La pregunta que deberían responder sería: ¿Qué pueden usar para ordenar las rectas según su crecimiento?

La actividad 1 debería ser la pista para responder esta pregunta, ya que cuando tenían la expresión de la ecuación de la recta, las ordenaban de forma correcta, sin más que ordenar sus pendientes.

Sin embargo, ahora se les plantea un nuevo problema: ¿cómo encontrar la ecuación de una recta dada su representación gráfica? Que es el inverso al que ellos han estudiado: dada la ecuación de la recta obtener su gráfica.

Este es el motivo de plantear la actividad 7, donde tienen que obtener la pendiente de una recta que pasa por el origen, conociendo un punto.

Existen dos formas de resolverlo:

1. Si definimos la pendiente de una recta como el incremento que sufre la  $y$  por unidad de incremento de  $x$ , debemos dividir el  $\Delta y$  del punto por el  $\Delta x$ , en este caso como la recta pasa por el punto  $(6, 36)$ , para un  $\Delta y$  de 36 le corresponde un  $\Delta x$  de 6, por lo tanto la pendiente sería  $36/6 = 6$ .
2. El hecho que pase por el origen, hace que la ecuación de la recta sea del tipo  $y = ax$ , por lo tanto tenemos una sola incógnita  $a$  y necesitaríamos una ecuación para calcular la pendiente. Como el punto está sobre la recta, verifica la ecuación y sustituyendo el punto en la ecuación tenemos  $36 = 6a$ , de donde despejamos  $a$ .

Para no dar muchas pistas para la resolución de la actividad 9, nos atreveríamos a sugerir la primera forma de calcular la pendiente.

Una vez halladas las ecuaciones de las rectas, es un buen momento para reflexionar y comentar las gráficas resultantes al aplicar diferentes escalas, ya que la comparación visual de las pendientes es errónea incluso, como se demuestra en este caso, para las gráficas con la

misma pendiente y ecuación. Las gráficas de la actividad 9 son rectas que no pasan por el origen:

```

y1=3*x+6
y2=x+12
y3=10*x+20
┌──────────┴──────────┐
│ y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH │
└──────────┬──────────┘

```

Dibujadas con los siguientes RANGE:

```

RANGE
xMin=-6
xMax=12
xScl=6
yMin=-6
yMax=42
yScl=6
┌──────────┴──────────┐
│ y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH │
└──────────┬──────────┘

```

```

RANGE
xMin=-24
xMax=48
xScl=24
yMin=-12
yMax=30
yScl=6
┌──────────┴──────────┐
│ y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH │
└──────────┬──────────┘

```

```

RANGE
xMin=-1
xMax=5
xScl=1
yMin=-20
yMax=100
yScl=20
┌──────────┴──────────┐
│ y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH │
└──────────┬──────────┘

```

Como estas rectas ya no pasan por el origen de coordenadas, sus pendientes ya no pueden calcularse de la misma forma que los ejercicios anteriores y, por lo tanto, puede dar lugar a errores a la hora de ordenar las rectas al estar mal calculadas las pendientes.

En este caso también podemos elegir entre dos formas de cálculo de la pendiente:

1. Restamos a la coordenada  $y$  del punto que se muestra en el gráfico, la ordenada en el origen de la recta, para saber el incremento de la  $y$  cuando se incrementa la  $x$ . En el caso del ejercicio 10 sería:
$$\Delta y = 8 - 4 = 4; \Delta x = 2$$
entonces la pendiente es igual a  $\Delta y/\Delta x = 4/2 = 2$ .
2. Resolvemos el sistema que se obtiene al sustituir los dos puntos conocidos en la ecuación  $y = ax + b$  y encontrar las dos incógnitas  $a$  y  $b$ .

Este último camino es más largo. Y en su razonamiento no existe tanto componente geométrico como en el primero, ya que es básicamente algebraico, por lo que es aconsejable usar el primero.

La recta del ejercicio 10 es  $y = 2x + 4$  y está dibujada con:

```

RANGE
xMin=-1
xMax=5
xScl=1
yMin=-2
yMax=14
yScl=2
┌──────────┴──────────┐
│ y(x)= RANGE ZOOM TRACE GRAPH │
└──────────┬──────────┘

```

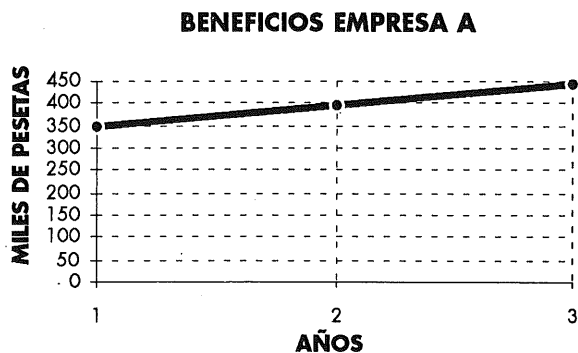
En la actividad 12 ya no hay sólo cambio de escalas, sino también hay diferentes unidades en la variable independiente.

Las escalas en la variable  $y$  son diferentes para no hacer tan obvio el ejercicio, sin embargo las escalas de la variable independiente en el gráfico B y C son iguales, pero en los tres casos las unidades son diferentes: años, meses y trimestres. El análisis debe contemplar ahora los cambios de unidad también, para poder comparar los resultados obtenidos en los beneficios.

Obviamente, tampoco en este caso la representación gráfica da una idea fiable para comparar el crecimiento de los beneficios en las diferentes empresas y es por ello que hay que recurrir al resultado analítico que nos dan las ecuaciones. Pero esta vez no todo se acaba en ese primer paso, sino que, como ya hemos dicho, hay que cambiar a una unidad común las variables independientes, por ejemplo a meses que es la unidad más pequeña.

Antes de calcular la ecuación de la recta representada en la gráfica A sería conveniente hacer un cambio de origen en las abscisas para que pertenecieran al mismo rango que las otras dos. Haciendo  $a' = a - 1994$  los valores de la nueva variable  $a'$  serían: 1, 2 y 3.

Con este cambio de origen, la gráfica sería la misma y sólo cambiaría el rango:



Un hecho a tener en cuenta a la hora de calcular las ecuaciones de las rectas, es que ni los gráficos ni las tablas, nos dan la ordenada en el origen, dato que se podría obtener restando el incremento de la  $y$  al primer valor de esta variable, ya que al ser una recta, este siempre es constante. En los tres casos el beneficio inicial sale 300 miles de pesetas.

Pero para contestar a la pregunta formulada sólo es necesario calcular la pendiente de las rectas y, en este caso, es más fácil ya que los incrementos de la variable  $x$  son de una unidad, por lo tanto hallando el incremento de  $y$  tendríamos ya las pendientes, que son respectivamente:

$$48, 6 \text{ y } 15$$

Aunque hay que tener en cuenta que no corresponden a las mismas unidades.

Las ecuaciones que tenemos de las tres rectas son:

$$y = 48a' + 300$$

$$y = 6m + 300$$

$$y = 15t + 300$$

Donde  $a'$  son años,  $m$  meses y  $t$  son trimestres.

Cambiando las unidades mediante las relaciones:  $a' = m/12$ ;  $t = m/3$ , obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$y = 4m + 300$$

$$y = 6m + 300$$

$$y = 5m + 300$$

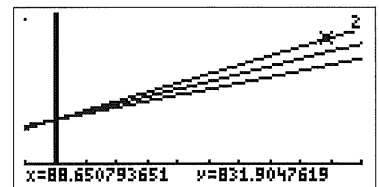
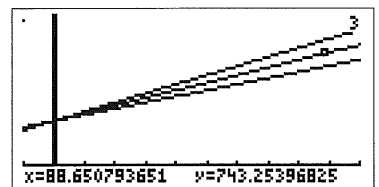
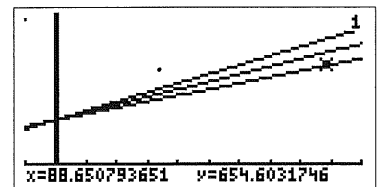
Donde ya podemos comparar el crecimiento de los beneficios y responder al ejercicio:  $A < C < B$ .

Podemos ahora dibujar las tres rectas con la calculadora gráfica y con un mismo RANGE.

```

Y1=300+4*X
Y2=300+6*X
Y3=300+5*X

RANGE
XMin=-10
XMax=100
XSc1=10
YMin=-100
YMax=1000
YSc1=10
  
```



**Francisco G. González**  
**Inmaculada Palomero**  
 IFP de Burriana (Castellón)  
**Floreál Gracia**  
 CEP de Castellón.  
 Societat d'Educació  
 Matemàtica de la  
 Comunitat Valenciana  
 Al Khwarizmi

Observándose ahora también gráficamente la relación anterior.

### Bibliografía

TEXAS INSTRUMENT (1996): *Manual de la Calculadora Gráfica TI-85.*