SUMA 27
febrero 1998, pp. 91-96

Números insumisos. El ejército en el aula

Miguel Barreras Alconchel

IDEAS Y RECURSOS

La vida es la escuela de la probabilidad

Walter Bagehot

En contra de lo que algunos creen, es posible abordar con éxito muchos problemas cotidianos de probabilidad, sin más instrumento que una mente ordenada. A partir de un sencillo juego, intentaremos desmontar el mito de que el análisis del polémico sorteo de excedentes de cupo está vedado a cualquier persona que no sea «de ciencias». Nos sorprenderemos de cómo pudo hacerse tan mal, analizaremos los resultados expuestos en la prensa y conjeturaremos qué puede ocurrir cuando no se tienen en cuenta las matemáticas.

A PRINCIPIOS de noviembre de 1997 el Ministerio de Defensa, en boca de su máximo representante, el señor Serra, sorprendía a propios y extraños con una «propuesta» muy original: introducir el ejército español en las escuelas.

El pasado 12 de noviembre se celebró un sorteo, anunciado con anterioridad a bombo y platillo por todos los medios de comunicación, a través del cual el azar iba a decidir los 16.442 jóvenes que podrían librarse del servicio militar entre los 165.342 convocados a filas.

La forma de llevar a cabo esta peculiar lotería suscitó, durante los tres días siguientes –sólo los tres días siguientes–, una interesante polémica salpicada de jugosas declaraciones que no desentonarían en una película de los hermanos Marx.

Cuando surgió la polémica, quien más quien menos atisbaba visos de no equidad en el proceso. Los entendidos lo aseguraban. Nunca las matemáticas habían disfrutado de tanto protagonismo en los medios de comunicación. Pero daba la sensación de que analizar con rigor el problema era sólo potestad de mentes especializadas en el asunto. Existe la idea generalizada de que cualquier problema probabilístico requiere, al menos, conocimientos previos de combinatoria y otras destrezas de cálculo. Son muchas las personas que piensan así. Una de ellas es el subsecretario de Defensa, señor Menéndez: «Yo no domino los argumentos probabilísticos, porque soy de Letras». No sabemos si este señor se da realmente cuenta de lo que dice. No sólo asevera que él mismo no domina la probabilidad (de lo cual no tenemos ninguna duda), sino que, en un peligroso alarde de generalización, asegura que cualquier persona que se precie de «ser de Letras» necesariamente no puede dominar los argumentos probabilísticos.

Vamos a intentar mostrar que el asunto no compete específicamente a gente de ciencias ni de letras ni de nada, que simplemente se requiere tener una mente un tanto «ordenada».

Parecía mentira que el Ministerio de Defensa, con sus asesores, hubiera cometido tamaño error. Pero cualquier profesor de matemáticas medianamente avispado entendía la jugada. No. Nuestro ministro de Defensa no había metido la pata. Con este espectacular gambito, el ministro de defensa ataca y consigue su objetivo: introducir el ejército en las aulas.

Un problema más sencillo

En primer ciclo de la ESO

En niveles en los que no están acostumbrados todavía al concepto de probabilidad se puede abordar el problema partiendo del siguiente juego.

Consideremos el tablero representado en el cuadro 1.

Se juega por parejas. Cada jugador dispone de 5 fichas que debe colocar en casillas distintas entre las 16 de su lado. Cada vez que salga un número en el que se encuentre una ficha, ésta se retira (se salva). Gana el que antes salva sus 5 fichas. Cada pareja jugará 5 partidas.

Si se jugara con un dado de 16 caras, la partida no tendría ningún interés. Sería un juego de puro azar. Prescindiremos del dado: los números se obtendrán con ayuda de la tecla RAM de la calculadora: nos fijaremos sólo en la última cifra del número aleatorio que obtengamos en la pantalla. Realizaremos dos «tiradas», una para la cifra de las decenas, otra para las unidades:

- Cifra de las decenas: si es par, el cero; impar, el uno.
- Cifra de las unidades: si sale 7, 8 o 9, se pulsa otra vez la tecla *para obtener otra cifra válida para las unidades*. Éste es el método que se utilizó en el famoso sorteo de los excedentes de cupo. Lo llamaremos Método Serra (MS).

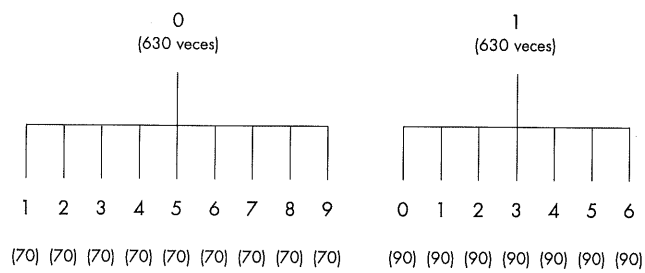
Cada jugador anotará todos los números que va obteniendo, así como la estrategia que utiliza al principio de cada partida (si es que utiliza alguna) y el porqué de la misma. Al finalizar las 5 partidas, cada pareja escribirá, conjuntamente, un pequeño análisis del juego.

Con todos los resultados de todos los alumnos que se han ido obteniendo se elaborará un gráfico que represente la frecuencia de cada número.

Combinada esta estadística global con las conclusiones de las parejas es muy probable que se llegue al siguiente resultado:

Primera conclusión: El MS no es justo.

En todo caso podemos, sin salirnos de este nivel, profundizar más, formalizando el resultado, calculando la probabilidad de cada número. Supongamos que, utilizando el MS, realizamos 1.260 sorteos. El número de veces que cabe esperar obtener cada número se representa en el siguiente diagrama:



Segunda conclusión: cada número de una cifra saldría 70 veces (de 1.260) –un 5,6% –, y cada uno de dos cifras 90 veces –un 7,1%–, ya que:

$$P(03) = \frac{1}{2}\frac{1}{9} = 0,056$$

$$P(13) = \frac{1}{2}\frac{1}{7} = 0,071$$

En segundo ciclo de ESO

Para grupos que, en cursos anteriores, ya se han familiarizado con la idea de probabilidad, podemos idear otro tipo de actividad: después de explicar el MS (lo puede hacer directamente el profesor o, más interesante, que los mismos alumnos lo conozcan a través de recortes de prensa), provocar un debate acerca de la conveniencia o no del procedimiento que se utilizó. En principio

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Cuadro 1

pueden valer opiniones de tipo meramente intuitivo, pero se tenderá a que las tesis que se expongan sean argumentativas. Oiremos así razonamientos de este tipo:

- «El sorteo está mal hecho: varios profesores de estadística lo han escrito en los periódicos».
- «El sorteo es justo: en el segundo bombo *estaban* las bolas 7, 8 y 9 y así la probabilidad del 03 era la misma que la 13».
- «Si cuando salían éstas no se tenían en cuenta y se devolvían, ¿qué más da que estuvieran? Lo mismo hubiera dado meter en su lugar tornillos o ciruelas».
- «Pero, ¿cómo se van a meter más de 165.000 bolas en un bombo?».

Mas la clave radica en la pregunta retórica de María:

- «¿Qué os parecería si, en vez de haber 165.342 números, hubiera 100.000 y se utilizara el MS? En cuanto saliera el 1, ya estaríamos seguros de que era el 100.000 el número agraciado: así, este número tendría el 50% de probabilidad en salir, mientras que los demás una muchísimo más baja (0,0005%)».

¡Contundente!

Después de esto sólo queda calcular, efectivamente, las *distintas* probabilidades. Para no agobiarnos con el cálculo propondremos un problema un poco más sencillo: *Calcular las probabilidades de cada número en un rifa de 165 números, si se aplica el MS.*

Es sencillo utilizando la estrategia del diagrama de árbol y aplicando probabilidades condicionadas. Así, por ejemplo:

$$p(005) = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{9} = 0,006$$

$$p(091) = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{10} = 0,005$$

$$p(159) = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{10} = 0,007$$

$$p(164) = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{6} = 0,012$$

El resultado puede representarse en una tabla:

Número	*Probabilidad*
001-009	$p_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{9} = 0,006$
010-099	$p_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{10} = 0,005$
100-159	$p_3 = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{10} = 0,007$
160-165	$p_4 = \frac{1}{2}\frac{1}{7}\frac{1}{6} = 0,012$

Aún podemos ir más allá. El MS salvaba al número que salía y a los siguientes hasta completar una lista de 16.442 excedentes. ¿Cuál era la probabilidad de cada número de resultar excedente? Evidentemente no era la misma, pero, ¿diferían mucho unas de otras?

Supongamos la lotería anterior (de 165 números solamente) y pongamos, por ejemplo, que se salvan hasta 20. ¿Cómo calcular la probabilidad de cada uno? Es un problema de probabilidades acumuladas.

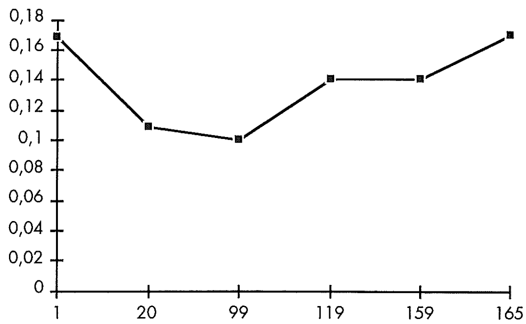
Por ejemplo, el 165 se salvaría si saliera ese número, o el 164, o..., hasta el 146. Es decir P(165) = $6p_4 + 14p_3$ = 0,17. Sin embargo, la del 80, por ejemplo, baja considerablemente: P(80) = $20p_2$ = 0,10. Los desequilibrios se exageran.

Es bueno animar al alumno a que represente sus conclusiones. Puede hacerse mediante una tabla:

	1	**20**	**99**	**119**	**159**	**165**
p_1	1	9				
p_2		11	20			
p_3	13			20	20	14
p_4	6					6
p	**0,169**	**0,109**	**0,100**	**0,140**	**0,140**	**0,170**

Si el sorteo fuera justo, la probabilidad de librarse de cada soldado debería ser de 20/165, esto es, 0,12, aproximadamente. Con el MS unos tienen más, porque otros tienen menos.

Pero la representación más completa es según la siguiente gráfica:



El problema general

Ya estamos en disposición de abordar el problema del sorteo de excedentes de cupo. Quizá a estas alturas, una vez comprobada la ilegalidad del proceso, los chicos estén un poco cansados de echar cuentas. Podemos animarles con el siguiente argumento: todos los periódicos han asegurado, a través de distintos asesores, que el procedimiento no era justo, llegando incluso a calcular las distintas probabilidades de librarse de la mili, pero sin explicar cómo las calculaban. ¿Seremos nosotros capaces de llegar a las mismas conclusiones?

Con un poco de paciencia, generalizando el ejercicio anterior, llegaremos a completar la tabla en la que aparecen las distintas probabilidades de salir un determinado número con el MS:

1-9	$p_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{180.000} \approx 5{,}56\cdot10^{-6}$
10-99.999	$p_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{200.000} \approx 5\cdot10^{-6}$
100.000-159.999	$p_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{140.000} \approx 7{,}14\cdot10^{-6}$
160.000-164.999	$p_3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{84.000} \approx 11{,}91\cdot10^{-6}$
165.000-165.299	$p_4 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{33.600} \approx 29{,}76\cdot10^{-6}$
165.300-165.339	$p_5 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{16.800} \approx 59{,}52\cdot10^{-6}$
165.340-165.342	$p_6 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{5.040} \approx 198{,}41\cdot10^{-6}$

Y, para acabar, hemos de acumular por tramos las 16.442 probabilidades, de distintos pesos específicos, para obtener las probabilidades de ser excedente:

N	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	P_T
165.342			11.099	5.000	300	40	3	0,150707
165339			11.102	5.000	300	40		0,150133
165.299			11.142	5.000	300			0,148038
164.999			11.442	5.000				0,141252
159.999			16,442					0,117443
116.441			16.442					0,117443
99.999		16.442						0,0822108
16.451		16.442						0,0822108
16.442	9	16.433						0,0822110
16.439	9	16.430					3	0,0827911
16.399	9	16.390				40	3	0,084972
16.099	9	16.090			300	40	3	0,0924006
11.099	9	11.090		5.000	300	40	3	0,126924
9	9	11.090		5.000	300	40	3	0,15070
1	1		11.098	5.000	300	40	3	0,150705

Obsérvese que, mientras la mayoría cuenta con una probabilidad de 0,08, inferior a la que sería la justa (16.442/165.342, casi 0,1), existen otros favorecidos a priori cuya probabilidad asciende a 0,15, casi el doble. Está claro que en la tabla anterior se ha calculado la probabilidad de los extremos de los intervalos, sólo dos segmentos mantienen constante la probabilidad, el resto presenta un crecimiento o decrecimiento lineal.

Aprovechamiento didáctico de la prensa

La comparación de nuestro estudio con las conclusiones de la prensa resulta una actividad sumamente interesante.

En la página siguiente se reproducen artículos de tres diarios y se trata de realizar un comentario con los alumnos.

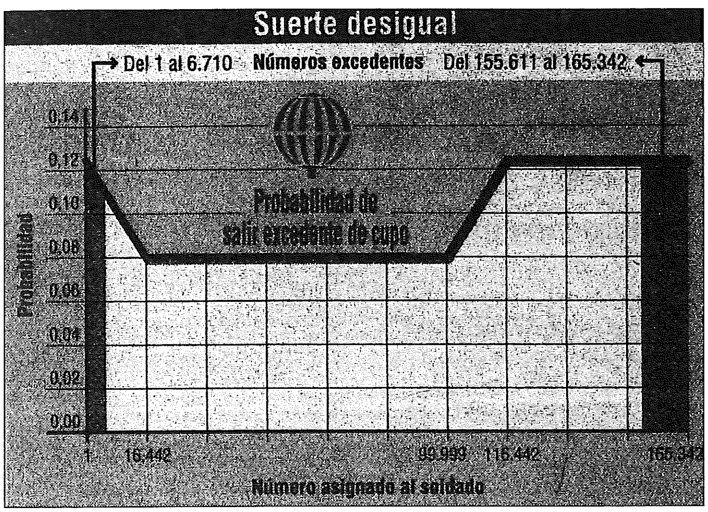
Ejercicio:

Busca los errores del *Heraldo de Aragón* (dos, gordos). Analiza la pobreza del análisis de *El Mundo (ABC)* y busca un error. Analiza el estudio de *El País*, comenta la «simplificación» que hace a partir del 116.442 y compara su 0,12 con nuestro 0,15%.

UN PROBLEMA MATEMÁTICO

«El problema estriba en que para sortear los 16.442 excedentes de cupo en un contingente de 165.342 soldados, Defensa puso en el bombo de la primera cifra (centenas de millar) el mismo número de bolas del cero que del uno. El cero, por tanto abría la puerta a librarse de la mili a 99.000 personas y el uno, a 65.342. Cada uno de los primeros contaba con un 0,08 por ciento de posibilidades de salir; a partir del número 100.000, tenían mayores probabilidades: un 0,13 por ciento».

Heraldo de Aragón (14-XI-97)



El País (15-XI-97)

«Otros dos profesores de la Complutense (...) describieron esta semana en el diario Abc las probabilidades que correspondieron a cada número, de acuerdo al sorteo realizado por Defensa. Los resultados fueron los siguientes:

1: 1/100.000.
2-99.999: 1/200.000.
100.000-159.999: 1/140.000
160.000-164.999: 1/84.000
165.000-165.299: 1/16.800
165.340-165.342: 1/5.040».

El Mundo (15-XI-97)

Cómo debió hacerse

Ya hemos demostrado que el sorteo no sólo se hizo mal, sino muy mal. No podemos dar por acabado el análisis sin intentar dar respuesta a la pregunta: pero, ¿cómo debió hacerse?

Como se ha trabajado con la prensa en clase, todo el mundo tiene una respuesta aparente: cuando, después de haber salido en el primer bombo el 1, del segundo se extrajo un 8 (lo que provocaba un número inexistente), debió repetirse el sorteo pero empezando de nuevo por el principio.

Una objeción: este proceso no es necesariamente finito. Podemos imaginar obtener continuamente unos del primer bombo y luego, del segundo, que no dejaran de salir sietes, ochos o nueves. O que, por fin, sacáramos seis del segundo, pero el tercero se negara todas las veces a expulsar otra cosa que no fueran seises o sietes u ochos o nueves. Los jóvenes extraedores de bolas barbudos y exhaustos, las candidatos a excedentes, cuarentones barrigudos, viendo cómo sus propios hijos se libran de la mili antes que ellos. Ciertamente es muy poco probable que esto ocurriera, pero es posible. Ningún matemático riguroso debería conformarse con esta solución aparente.

¿Cómo hacerlo, pues? Acabamos la actividad abriendo un nuevo debate.

El comentario de la página anterior del *Heraldo de Aragón* parece sugerir una posible solución apuntada por algún otro diario: dado que el MS favorece a los números que empiezan por 1 (los ciento y pico mil), se podría descompensar la composición del primer bombo metiendo 9 ceros y 7 unos. Este arreglo valdría para el caso del problema propuesto al principio de los 16 números pero no soluciona el caso general ya que, por ejemplo:

$$p(099.999) = \frac{9}{16}\frac{1}{99.999} = \frac{1}{177.776}$$

$$p(165.342) = \frac{7}{16}\frac{1}{7}\frac{1}{6}\frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{3} = \frac{1}{5760}$$

la segunda 30 veces mayor que la primera.

Meter más de 165.000 bolas en un bombo resulta poco operativo (¿caben?). Para la lotería de Navidad se meten unas 70.000.

Se podría repartir el número total de individuos en dos grupos, el primero del 00.000 (éste sería el último número, 165.342 –este convenio facilita el cálculo–) al 99.999, el segundo, del 100.000 hasta el 165.341. Para el primer grupo se procedería de forma elemental, con 5 bombos de 10 bolas cada uno, y en el grupo de los 65.342 restantes se utilizarían las bolas de la lotería de Navidad.

¿Cómo repartir el número de excedentes de cada grupo? Proporcionalmente, desde luego.

La probabilidad de excedencia no puede dejar de ser

$$\frac{16442}{165342} = 0,0994423$$

por tanto, el número de excedentes para el primer grupo x y el número para el segundo y deben cumplir:

$$\frac{16442}{165342} = \frac{x}{100000} = \frac{y}{65342}$$

por tanto

$$x = 9.944,2368,\ y = 6.497,7632.$$

Asignando al primer grupo 9.994 excedentes y 6.498 se cometería una injusticia ínfima.

Miguel Barreras
CPR Utrillas (Teruel)
Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»

SUMA 29

noviembre 1997

INFORME

Las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria

Aunque aún no se ha culminado la generalización en todo el Estado de los dos ciclos de la ESO en su totalidad, aunque se haya empezado la casa, si no por el tejado, al menos por el entresuelo al implantar antes 3.° de la ESO que 1.°, aunque muchos centros y muchos profesores estén ahora mismo inmersos en la atrayente aventura de pasar de las palabras escritas a los hechos dentro del aula, de los diseños curriculares a su puesta en la práctica cotidiana...

Pensamos, conscientes de que toda reflexión seria requiere al menos una cierta perspectiva temporal y que, por tanto, las conclusiones que se obtengan pueden necesitar una revisión dentro de muy poco tiempo, que es el momento de hacer un primer análisis del papel y la situación de las Matemáticas en la ESO.

SUMA está preparando un primer estudio en profundidad de algunos de los aspectos que más pueden inquietar al conjunto del profesorado de Matemáticas.

Entre los aspectos que pensamos tratar destacamos los siguientes:

- Matemáticas adecuadas a las necesidades de nuestra sociedad: ¿por qué este currículo?, currículos abiertos, ¿quién y cómo se cierran?
- Matemáticas para todos: tratamiento de la diversidad.
- Un problema abierto: la evaluación en Matemáticas.
- Una metodología activa y participativa: recursos en el aula. Las «nuevas» tecnologías en la clase de Matemáticas.
- Espacios de optatividad: el taller de Matemáticas.
- Otros diseños, otros itinerarios, otras experiencias: diseño curricular de Matemáticas en Cataluña.
- Un reto pendiente: la formación del profesorado.

Se podrán enviar aportaciones, según las normas de publicación habituales en SUMA, que se refieran preferentemente a uno o varios de los aspectos reseñados, para que sea considerada su inclusión dentro del Informe por sus coordinadores.