SUMA 27
febrero 1998, pp. 49-56

Aproximaciones históricas al área del círculo

Carlos Maza Gómez

ARTÍCULOS

La estrategia de aproximación aparece ligada, en la actual reforma educativa, al procedimiento de estimación y se fundamenta en el preconizado objetivo de que el estudiante construya su propio conocimiento matemático. El aprendizaje del cálculo del área del círculo se basa más en «intuiciones» guiadas del estudiante que en dichos procesos de construcción. A este respecto, los diversos intentos de cuadrar el círculo mediante valores aproximados que se han registrado en la historia de la Matemática y que aquí se exponen y fundamentan, permiten disponer de unas herramientas adecuadas en el aula para conseguir los objetivos citados.

LA APROXIMACIÓN en la Educación Matemática

La actual reforma educativa relaciona de manera estrecha el aprendizaje matemático con la resolución de problemas. Ahora bien, el modelo de esta actividad ha sufrido continuos refinamientos desde que la atención de la comunidad matemática se centró en los problemas a comienzos de los años ochenta. Factores metacognitivos o afectivos, por citar dos ejemplos relevantes, han mostrado una considerable importancia dentro de los dos procesos básicos de la resolución de un problema: la construcción de una representación mental de los elementos y relaciones del problema y el conocimiento y aplicación de heurísticos (English y Halford, 1995).

Esto último tiene relación con uno de los objetivos esenciales de la reforma educativa actual: la consideración del aprendizaje de procedimientos generales por sí mismos. Así, se encuentra en una de sus formulaciones iniciales (MEC, 1989, 491):

> *En una tercera categoría pueden agruparse aquellas estrategias más generales, que comúnmente se conocen como estrategias heurísticas o simplemente heurísticos... Por ejemplo, estimar, avanzar un resultado numérico aproximado antes de embarcarse en su obtención sistemática... A su vez, estimar puede considerarse un caso particular de otro heurístico más general aún: plantear conjeturas e hipótesis, en que se adelantan explicaciones o respuestas, no necesariamente numéricas, a distintas situaciones.*

La aproximación, que puede definirse como «La búsqueda de un dato numérico suficientemente preciso para un determinado propósito» (Segovia y otros, 1989, 22) es un procedimiento estrechamente relacionado con la estimación, que resulta ser un heurístico de mayor generalidad.

No pretendemos en este artículo más que ofrecer una breve introducción, que enmarque y justifique otros contenidos de naturaleza histórica, pero antes de abordarlos hay que mencionar otro aspecto de interés. En efecto, es bastante conocida la reluctancia de los estudiantes a trabajar con aproximaciones e incluso a admitirlas como expresiones matemáticas, de donde se desprende el fenómeno conocido como «intolerancia al error» (Carter, 1986). Ello puede ser debido a la creencia, transmitida en general por el profesorado pero inmersa en la propia sociedad, de que las Matemáticas son una ciencia exacta y, aún más, el paradigma de la exactitud en las Ciencias.

De todo lo dicho se desprende la importancia de disponer de ejemplos concretos para el aula de aproximaciones con las que realizar estimaciones de valores afectados por un determinado error, sea por desconocimiento del valor exacto o (como será el caso en este artículo) por imposibilidad de llegar a él. Estos ejemplos pueden provenir de la vida cotidiana pero también de la historia de la Matemática con lo que, además, se ayudará a desterrar la idea de una naturaleza exacta de la Matemática donde sea inadmisible el error.

Primeras aproximaciones al área del círculo

El caso escogido para ilustrar la acción de aproximar es el problema de transformar el círculo en un cuadrado que, eventualmente, se presentaba con el problema inverso: la circularidad del cuadrado. Estos problemas, relacionados en muchos casos con las medidas de la extensión de un campo, fueron abordados con mayor o menor complejidad matemática lo que responde, paralelamente, a una mejor o peor aproximación.

El problema 50 del papiro Rhind (datado alrededor del 1800 a.C.) plantea y resuelve el siguiente enunciado:

> *Ejemplo de un campo redondo de diámetro 9 khet. ¿Cuál es el área? [Solución:] Tomar 1/9 del diámetro, el resto es 8. Multiplicar 8 veces 8; son 64. Por tanto, contiene 64 setat de tierra.*

Seidenberg (1972) considera este procedimiento formado por los siguientes pasos, para lo que se apoya en un dibujo que aparece en el papiro:

1. Se considera un cuadrado de lado igual al diámetro del campo, 9.
2. Se divide cada lado del cuadrado en tres partes iguales (figura 1), de forma que cada cuadradito sería de 9 setat (siguiendo la denominación egipcia).
3. Se quitan las esquinas, es decir, la mitad de los cuadraditos de los extremos (de extensión 4 1/2 setat). El área de este octógono resulta ser entonces de 63 setat.

Estos ejemplos pueden provenir de la vida cotidiana pero también de la historia de la Matemática con lo que, además, se ayudará a desterrar la idea de una naturaleza exacta de la Matemática donde sea inadmisible el error.

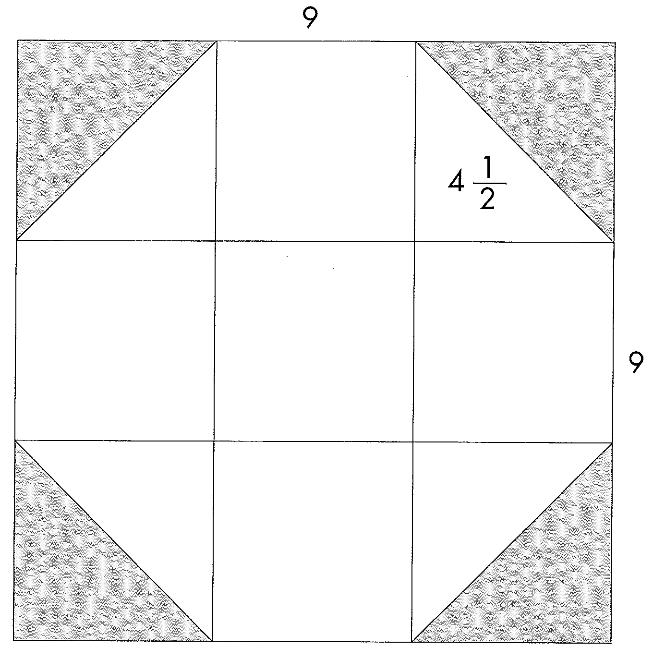


Figura 1

Esta es, en sí, una aproximación al valor desconocido del área del círculo. Pero como se desea dar una regla sencilla de recordar y de fácil aplicación (una de las características propias de la estimación) se hace una nueva aproximación, esta vez al área del octógono, de manera que

$$\frac{\text{Area (Círculo)}}{\text{Diámetro}^2} = \frac{63}{81} \approx \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

De ahí que la solución de la cuadratura del círculo venga dada en el enunciado del problema 50 por:

$$\text{Area} = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2$$

Comparemos esta aproximación, realizada aplicando la construcción de un polígono inscrito de manera implícita en el círculo que se trataba de medir, con otra realizada entre los siglos IX y X. Cita Smeur (1969) el caso planteado en el manuscrito de esta época, *De iugeribus metiundis*:

> *y así en el siguiente problema, para encontrar el área de un campo redondo con una circunferencia de 80 varas, seguir el método de multiplicar la cuarta parte de 80 por sí misma (pág. 250).*

es decir, que el círculo sería igual al área de un cuadrado que tuviera por lado la cuarta parte de la circunferencia. Dado que se toma:

$$\text{Area (Círculo)} = \frac{\text{Circunferencia}^2}{16}$$

ello significaría que se toma un valor de π igual a 4. Obsérvese, no obstante, que esta aproximación no es arbitraria: este círculo equivaldría al cuadrado de lado C/4, es decir, el cuadrado cuyo perímetro coincide con la longitud de la circunferencia. En otras palabras, lo que se busca es un cuadrado isoperimétrico con el círculo dado, en la falsa creencia de que si los contornos tienen la misma longitud las áreas serán iguales.

Cuadrados inscritos y circunscritos

Hacia el siglo IV a.C. desarrolló su labor en Atenas un discípulo de Sócrates (o de Euclides de Megara) llamado Bryson al que se adjudica el intento de cuadratura siguiente (Heath, 1981):

1. Se construyen los cuadrados inscrito y circunscrito al círculo, de manera que éste se encuentre comprendido entre ellos.
2. Se considera el cuadrado intermedio a los dos anteriores.
3. Basándose en que tanto el círculo como este cuadrado intermedio son menores que el cuadrado circunscrito y mayores que el inscrito, entonces ambos deben ser iguales (figura 2).

Hacia el siglo IV a.C. desarrolló su labor en Atenas un discípulo de Sócrates (o de Euclides de Megara) llamado Bryson al que se adjudica el intento de cuadratura siguiente...

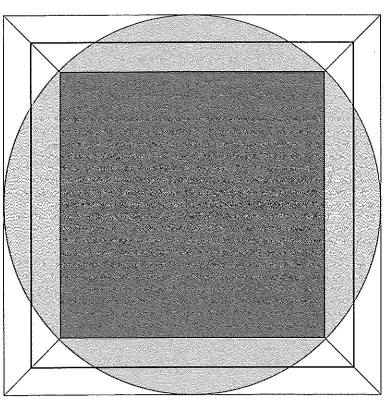


Figura 2

La aproximación podría considerarse «grosera» si no corriéramos el riesgo de ser anacrónicos. No obstante, desde el punto de vista escolar, nos da motivo para calcular el área de los cuadrados mencionados:

El cuadrado circunscrito se caracteriza (Libro IV, prop. 7 de los *Elementos*) porque sus lados son tangentes a la circunferencia, por lo que el lado coincidirá con un diámetro. De ahí que el área sea

$$(2r)^2 = 4r^2$$

mientras que el cuadrado inscrito necesita la aplicación del teorema de Pitágoras para llegar a la conclusión de que su área es

$$\left(\sqrt{2}r\right)^2 = 2r^2$$

Y ahora es necesario interpretar qué quería decir Bryson con lo de «cuadrado intermedio». Su propuesta parece más bien de naturaleza lógica que matemática, en el sentido del erróneo razonamiento que constituye el tercer paso. No obstante, lo podemos interpretar desde el punto de vista matemático.

Si se interpretase que el «cuadrado intermedio» es el de «área intermedia», dicha área sería $3r^2$ (o 3/4 d^2). Pero si la interpretación consistiese en considerar el cuadrado «de lado intermedio», dicho lado medio sería:

$$l = \frac{2r + \sqrt{2}r}{2} = r\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

de forma que el área final resultaría ser:

$$A = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)r^2 = 2{,}914\ldots r^2$$

Varios siglos antes, en Babilonia (aproximadamente el actual Iraq), se utilizaba un cálculo del área del círculo en función de su circunferencia que tiene relación con el cuadrado intermedio de Bryson. En efecto, se ha documentado (Seidenberg, 1972) que los sacerdotes de la época utilizaban las relaciones:

$$C = 3d \qquad A = C^2/12$$

donde *C* es la longitud de la circunferencia del campo redondo, *d* el diámetro y *A* su área. Como vemos, la expresión de esta última se aproxima mejor al área real del círculo que la análoga medieval de

$$A = C^2/16$$

ya que, entre los babilonios, se manejaría un valor de π de 3.

Pues bien, para Seidenberg (1972), a la expresión del área se llegaría del siguiente modo:

1. Existen datos que indican que era conocida por los babilonios la inscripción de un hexágono regular en

un círculo. Por ejemplo, la utilización de seis radios en las ruedas de los carros asirios así lo atestigua.

2. El perímetro de este hexágono es de 3d, expresión que se habría extendido a la circunferencia dando paso a $C = 3d$.
3. Si, como en el caso de Bryson, se considera el área del círculo como la del cuadrado intermedio respecto al inscrito y al circunscrito, se tendría, como ya hemos indicado:

$$A = 3/4\ d^2$$

4. De las dos expresiones encontradas, se deduce que:

$$A = \frac{3}{4}d^2 = \frac{Cd}{4} = \frac{C}{2}\frac{d}{2}$$

expresión que también se encuentra como regla 7 en el *Aryabhatiya* (siglo VI) del indio Aryabhata (Smeur, 1969):

> *Regla 7. La mitad de la circunferencia multiplicada por la mitad del diámetro es el área de un círculo* (pág. 258).

lo que da lugar, teniendo en cuenta el valor dado para C, a que

$$A = C^2/12$$

Los Sulba Sutras indios

Una de las tradiciones geométricas más antiguas se remonta a los Sulba Sutras indios, tratados de cuerdas que continúan una tradición de construcción de altares y resolución de otros problemas del ritual planteados en aquella cultura. El *Baudhyana Sulba Sutra* es el más antiguo, datándose entre los 800 y los 500 a.C. (Gupta, 1988).

Una de las tradiciones geométricas más antiguas se remonta a los Sulba Sutras indios, tratados de cuerdas que continúan una tradición de construcción de altares y resolución de otros problemas del ritual planteados en aquella cultura.

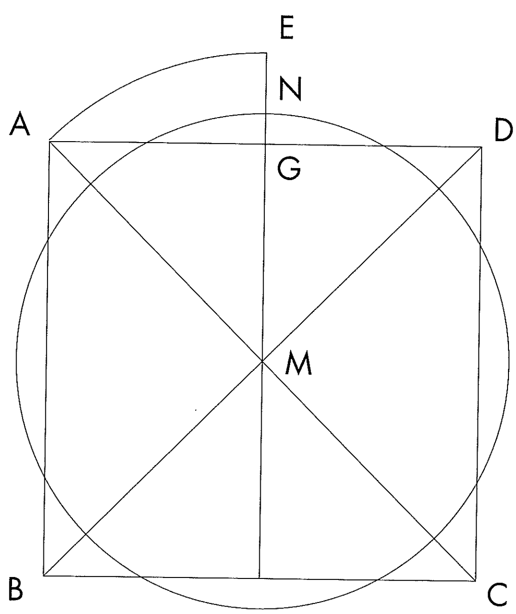


Figura 3

El problema fundamental que se plantea en esta obra es la construcción de un altar (como figura plana) de forma y área dadas. Queriendo construir un altar circular el primer problema propuesto fue, curiosamente, el de la «circularidad del cuadrado», que se resuelve del siguiente modo:

En el cuadrado ABCD (figura 3) sea M la intersección de las diagonales. Se dibuja el círculo de centro M y radio MA. Sea ME el radio del círculo perpendicular al lado AD y cortando a AD en G. Sea GN = 1/3 GE. Entonces MN es el radio del círculo que tiene un área igual al cuadrado ABCD.

El problema inverso, el clásico de la cuadratura del círculo, es resuelto a través de la regla siguiente (Seidenberg, 1972):

> *Si quieres cambiar un círculo en un cuadrado, dividir el diámetro en 8 partes, y nuevamente una de estas 8 partes en 29 partes; de estas 29 partes quitar 28, y además la sexta parte [de una de las partes quitadas] menos la octava parte [de la sexta parte]* (pág. 173).

En otras palabras, el lado del cuadrado buscado es

$$\frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8}$$

del diámetro del círculo dado. ¿Cómo pudieron llegar a este valor? La búsqueda de una explicación razonable resulta un proceso apasionante.

En efecto, el problema de la circularidad del cuadrado resulta ser un proceso resuelto a través de un recurso meramente geométrico de aproximación. Ahora bien, la cuadratura del círculo se aborda como el problema «algebraicamente» inverso. Así, si se considera que el lado del cuadrado original es *s*, entonces MG = s/2 (figura 4).

Como AG = s/2 resultará que

$$AM = \frac{s\sqrt{2}}{2}$$

Ello da lugar a:

$$EG = s\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{s}{2} = s\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

$$GN = \frac{1}{3}EG = s\frac{\sqrt{2}-1}{6}$$

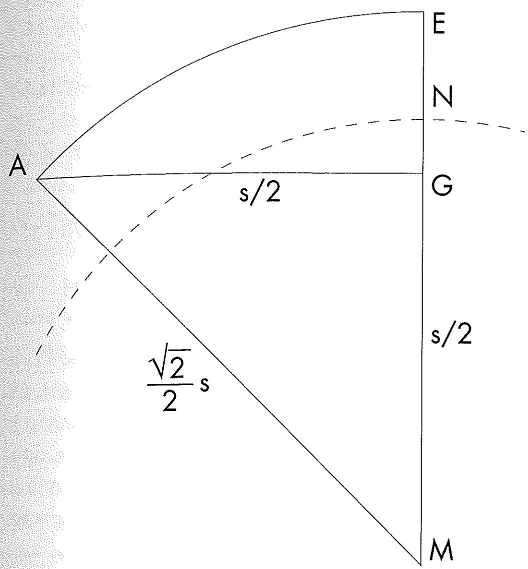


Figura 4

de donde el radio y el diámetro del círculo vendrán dados por:

$$\text{radio} = MN = \frac{s}{2} + s\frac{\sqrt{2}-1}{6} = s\frac{2+\sqrt{2}}{6}$$

$$\text{diámetro} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$$

por lo que resulta la relación entre el diámetro y el lado del cuadrado:

$$\frac{d}{s} = \frac{2+\sqrt{2}}{3}$$

El valor de la raíz cuadrada de 2 se encuentra, como es sobradamente conocido, en el cálculo de la diagonal de un cuadrado. Este problema, que fue rechazado por la geometría griega por su consideración exclusiva de los números naturales y que fundamenta el interés por un álgebra geométrica en Grecia, es abordado en la India con métodos aproximativos y de manera aritmética.

Aunque existen distintas aproximaciones indias al valor de la raíz cuadrada de 2 uno de los caminos para alcanzar una de ellas podría ser el siguiente (Seidenberg, 1972):

La forma habitual de introducir la fórmula del área del círculo a partir de 6.° de Primaria tiene poco de constructiva. Consiste básicamente en calcular áreas de polígonos a partir del cuadrado y el rectángulo hasta llegar al hexágono o el octógono.

1. Se considera un altar cuadrado de lado 12. Su área será

   $$12^2 = 144$$

2. Ahora se plantea el problema de construir un altar cuadrado cuya área sea el doble que la anterior, es decir,

   $$2 \cdot 12^2 = 288$$

3. La mejor aproximación parece ser la del cuadrado de lado 17, ya que

   $$17^2 = 289$$

4. Esto supone que

   $$2 \times 12^2 \approx 17^2 \quad \text{luego} \quad \sqrt{2} \approx \frac{17}{12}$$

   que expresado a través de fracciones unitarias daría:

   $$\sqrt{2} \approx \frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$$

5. La consideración de esa unidad de diferencia entre 288 y 289 precisaría considerar la sustracción de una fracción cuya construcción vamos a eludir por su complejidad (se puede consultar en el texto citado) y que daría finalmente el valor:

   $$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

Pues bien, si esta expresión se sustituye en la relación inversa de la antes planteada se alcanza finalmente el valor del lado del cuadrado en función del diámetro del círculo:

$$\frac{s}{d} = \frac{7}{8} + \frac{1}{8 \cdot 29} - \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6} + \frac{1}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8} - \frac{41}{8 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 1393}$$

despreciándose el último término.

El procedimiento de exhaustividad

La forma habitual de introducir la fórmula del área del círculo a partir de 6.° de Primaria tiene poco de constructiva. Consiste básicamente en calcular áreas de polígonos a partir del cuadrado y el rectángulo hasta llegar al hexágono o el octógono. A partir de la inscripción de este último, por ejemplo, en un círculo (figura 5) se afirma que, cuando el polígono inscrito (eventualmente puede añadirse el circunscrito) aumente el número de lados, el perímetro tiende a «confundirse» con la circunferencia y la apotema con el radio. Tomando como base la fórmula del área del polígono regular se consigue «transformarla» con los nuevos elementos en el área del círculo.

Recordado esto, quizá sea oportuno defender de nuevo que

> *...el conocimiento matemático implica la construcción de relaciones elaboradas en y a partir de la actividad sobre los objetos... Desligado de la actividad constructiva que está en su origen, el conocimiento matemático corre el peligro de caer en puro formalismo y de perder toda su potencialidad como instrumento de representación, explicación y predicción* (MEC, 1989, 482).

Pues bien, esta inducción de la fórmula del área del círculo supone apelar a la «intuición» del alumno, que debe saltar de un polígono de un número finito de lados a otro de número infinito y que debe suponer que en este proceso de lo finito a lo infinito no se alteran las relaciones entre los elementos (de perímetro y apotema a circunferencia y radio). Esta «intuición» puede no existir. Desde el punto de vista didáctico es más aconsejable llevar a cabo algún proceso constructivo en esta dirección. Este proceso será siempre una aproximación.

El procedimiento actual de enseñanza muestra su primer ejemplo en la aportación de Antifón, contemporáneo de Sócrates en Atenas (siglo IV a.C.). En efecto, propone inscribir un polígono en un círculo (por ejemplo, un cuadrado como en la figura 5) para, a continuación, trazar la mediatriz de cada lado, marcar el punto de corte con la circunferencia y unir este punto con los extremos de dicho lado, erigiendo así triángulos isósceles sobre cada lado (Knorr, 1986). En el caso planteado la figura resultante será un octógono.

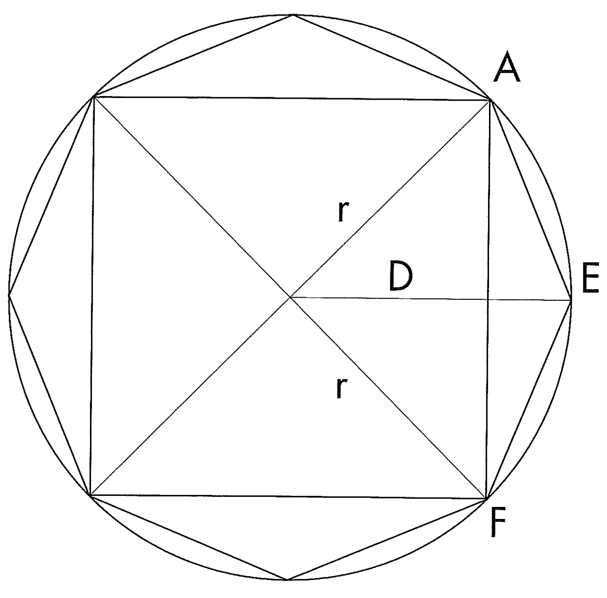


Figura 5

Naturalmente, este proceso se puede repetir tanto como se quiera alcanzando aproximaciones cada vez mayores al área del círculo. Siendo r el radio del círculo, el área del triángulo isósceles puede calcularse:

$$\text{Area (Triángulo)} = \frac{1}{2}r^2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

de manera que el área del octógono resultaría ser:

$$\text{Area (Octógono)} = 2r^2 + 4\frac{1}{2}r^2\left(\sqrt{2}-1\right) =$$

$$= 2\sqrt{2}r^2 = 2{,}828\ldots r^2$$

El procedimiento actual de enseñanza muestra su primer ejemplo en la aportación de Antifón, contemporáneo de Sócrates en Atenas (siglo IV a.C.).

Este tipo de aproximación es algo compleja desde el punto de vista algebraico, pero hay maneras de introducir la misma idea sin cálculo algebraico alguno por lo que puede realizarse con facilidad desde Primaria. El procedimiento es conocido y se basa en hallar un área «por defecto» y «por exceso» cuando el círculo se coloca dibujado en papel transparente sobre tramas de distinto grosor (figura 6).

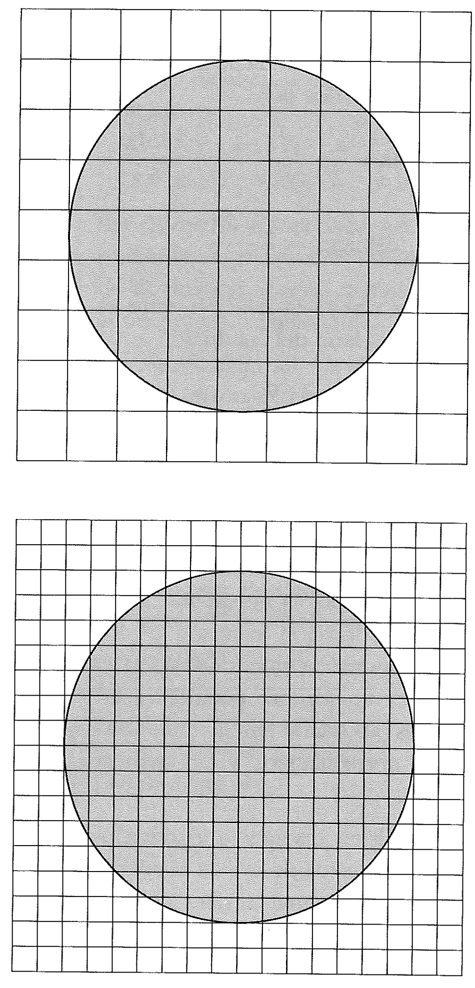


Figura 6

Se puede apreciar, a través de esta construcción y cálculo introductorios, que el área del círculo se puede aproximar con un error menor al hacer más fina la trama que nos sirve de medida. Por otro lado, permite también plantearse la necesidad de contar con dos medidas: una «por defecto» (papel que luego se asignará al polígono inscrito) y otra «por exceso» (al polígono circunscrito), que permitan acotar con un margen cada vez menor ese valor desconocido al que nos vamos aproximando.

Antifón no pasó de proponer un acercamiento al área a partir del desdoblamiento de los lados de un polígono inscrito. Corresponde a Arquímedes (siglo IV), en su obra *Medida del círculo*, aplicar con rigor el método de exhaución (o exhaustividad) de Eudoxio para demostrar por reducción al absurdo que «Un círculo es equivalente a un triángulo rectángulo cuyos catetos sean iguales al radio y a la circunferencia del círculo» (Cit. en Vera, 1970, 94).

Entendemos que esta demostración queda fuera del alcance del estudiante de Secundaria por lo que remitimos al lector interesado a la obra citada.

Cuadraturas medievales

Anteriormente se ha mencionado una cuadratura del círculo realizada entre los siglos IX y X, con cierta analogía con los procedimientos babilónicos o egipcios. Sin embargo, existen intentos diversos de los que vamos a dar dos ejemplos finales, siguiendo ambos la tradición griega pero con distintos propósitos: el primero es una nueva aproximación de tipo geométrico construida con evidente ingenio y la segunda resulta una complicada demostración de la existencia de una cuadratura del círculo basada en las propiedades de la proporcionalidad.

Hacia el año 1050, Franco de Lieja escribe un tratado sobre cuadraturas en el que considera un círculo de 14 unidades de diámetro (Smeur, 1988).

Corresponde a Arquímedes (siglo IV), en su obra Medida del círculo, *aplicar con rigor el método de exhaución (o exhaustividad) de Eudoxio para demostrar por reducción al absurdo...*

Siguiendo a Arquímedes, supone que

$$\pi = 3\ 1/7$$

lo que le permite afirmar que su circunferencia es de 44 unidades. A continuación, divide el círculo en 44 sectores iguales, cada uno de ellos correspondiendo a un arco de una unidad de longitud.

Si cada sector se aproxima a un triángulo rectángulo de catetos 1 (el arco) y 7 (el radio) se pueden disponer los 44 triángulos así considerados en forma de rectángulo de 14 por 11 y cuya área (11 x 14 = 154) constituye una buena aproximación al área del círculo (figura 7).

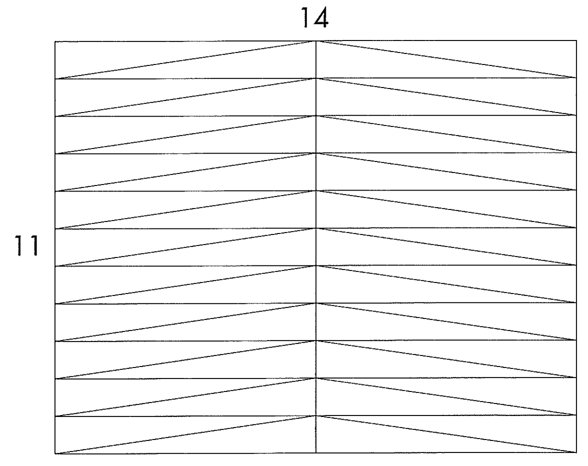


Figura 7

Knorr (1991) realiza un estudio de la autoría de la demostración que, finalmente, vamos a exponer, atribuyéndosela a Johannes de Tinemue (siglo XIII). En ella se parte de un círculo O inscrito en un cuadrado A, para el que se cumple que existe una figura rectilínea o curvilínea M que verifica (figura 8):

$$A:O = O:M$$

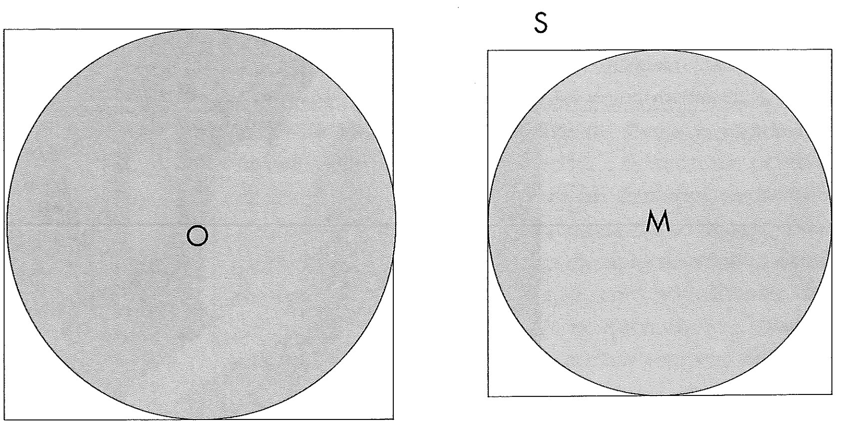


Figura 8

* Si M es un círculo se llamará S al cuadrado circunscrito: Por la proposición 2 del libro XII de los *Elementos*, resultará:

$$A:S = O:M$$

Por la definición 13 del libro V de los *Elementos*:

$$A:O = S:M$$

a lo que si se une la hipótesis de partida resultará:

$$O:M = S:M$$

de donde se deduce que $O = S$, el círculo es igual al cuadrado en área.

* Si M es una figura rectilínea puede transformarse en un cuadrado que denominaremos S: la hipótesis de partida se escribirá entonces

$$A:O = O:S$$

es decir, que O es la tercera proporcional respecto de los cuadrados A y S. El autor considera entonces un rectángulo cuyos lados fueran L_a y L_s, los correspondientes a estos dos cuadrados. Este rectángulo puede transformarse en cuadrado por lo que habríamos encontrado un cuadrado de igual área al círculo O.

Como es posible apreciar, el procedimiento, aunque limitado por falta de generalización, resulta de interés para apreciar los muy distintos intentos medievales para realizar una medida lo más aproximada posible del área del círculo.

Carlos Maza
Departamento de Didáctica de Matemáticas.
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Sevilla.
Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»

Referencias bibliográficas

CARTER, H. L. (1986): «Linking estimation to psychological variables in the early years», en *Estimation and mental computation*, NCTM, Virginia.

ENGLISH, L. D. y G. S. HALFORD (1995): *Mathematics Education. Models and Processes*, Lawrence Erlbaum, New Jersey.

GUPTA, R. C. (1988): «New indian values of Pi from the Manava Sulba Sutra», *Centaurus*, vol. 31, 114-126.

HEATH, T. (1981): *A history of greek mathematics (vol. 2)*, Dover Publications, New York.

KNORR, W. R. (1986): *The ancient tradition of geometric problems*, Dover Publications, New York.

KNORR, W. R. (1991): «On a medieval circle quadrature: De circulo quadrando», *Historia Mathematica*, vol. 19, 356-370.

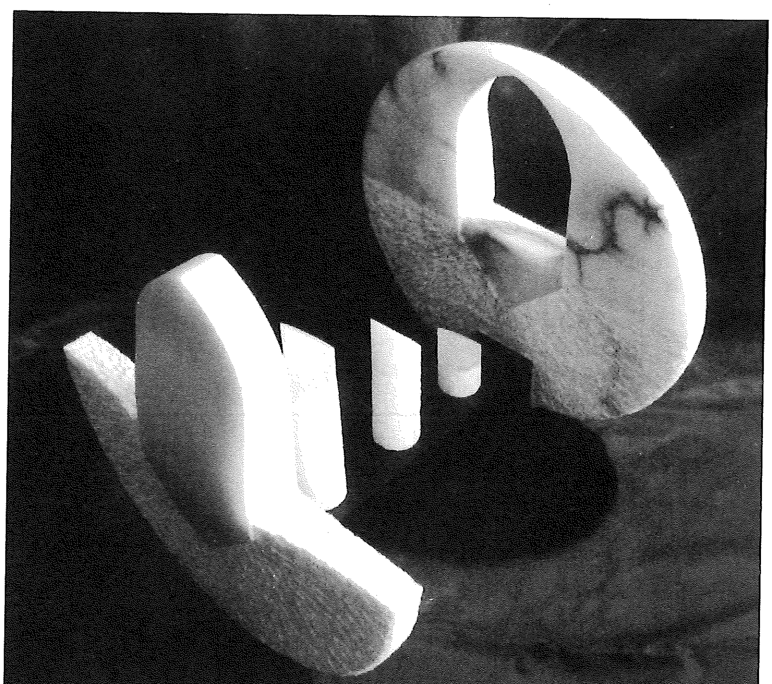
MEC (1989): *Diseño Curricular Base (ESO II)*, MEC, Madrid.

SEIDENBERG, A. (1972): «On the area of a semi-circle», *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 9, 173-211.

SEGOVIA, I. y otros (1989): *Estimación en cálculo y medida*, Síntesis, Madrid.

SMEUR, A. J. (1969): «On the value equivalent to Pi in ancient mathematical texts. A new interpretation», *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 6, 249-270.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos (vol. II)*, Aguilar, Madrid.



Estadio de apertura y cierre
Alabastro-madera, 60x52x52
José Miguel Fuertes