SUMA 27
febrero 1998, pp. 25-37

Equilibrando las necesidades matemáticas de la educación general con las de la instrucción matemática de los especialistas*

Alan J. Bishop

ARTÍCULOS

HE ELEGIDO este título para mi charla porque creo que representa el núcleo del problema del desarrollo del currículum de matemáticas para alumnos de la etapa 12-16. Es un problema al que se ha hecho frente en muchos países, no sólo en Cataluña o en España.

Lo que trataré de hacer en esta charla es:

- Situar este problema en un contexto internacional.
- Presentar un marco curricular que puede ayudar a estructurar algunas soluciones.
- Ofrecer algunos ejemplos de actividades, proyectos e investigaciones, que pueden facilitar el equilibrio al que se refiere el título.

Comprendo que los documentos curriculares en el Primer Nivel de Concreción especifican los contenidos, procedimientos, y actitudes que los profesores deben desarrollar en el Tercer Nivel, usando los ejemplos ofrecidos en el Segundo Nivel. He estudiado los documentos (*Disseny Curricular,* 1993) y he tratado de entender todo lo que he podido de ellos. Por lo tanto, espero que mis ideas les ayuden en la difícil tarea de hacer la «transposición didáctica» desde documentos a la realidad del aula. Deben hacerse cargo también de que no están solos en este trabajo. Muchos profesores a lo largo del mundo también están haciendo frente a este desafío, y espero que los ejemplos que mostraré probarán cómo puede aprenderse de sus esfuerzos.

* Conferencia pronunciada en febrero de 1997 en el Centre de Recerca Matemàtica de l'Institut d'Estudis Catalans con el soporte del Departaent de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona.

Traducción: Julio Sancho

Revisión: Núria Gorgorió

El contexto internacional

En primer lugar, situemos el problema en un contexto internacional. Coombs (1985), al tratar de interpretar las tendencias educativas mundiale,s nos ha permitido observar una distinción importante entre tres tipos de educación matemática. La educación *formal* en matemáticas que es la que nos preocupa aquí, y para la que todos los países tienen sus requerimientos. La educación matemática *no formal* que consiste en cursos optativos y en clases que no son parte de los requerimientos educativos formales y que, a menudo, son después de las horas de escuela. Además, constituye la mayor parte de la oferta de educación matemática para los adultos. La educación matemática *informal* tiene lugar mediante diferentes medios tales como la televisión y los periódicos y es, en cierto sentido, una educación accidental (en Bishop, 1993, se desarrolla más esta distinción).

Coombs indica que la sociedad demanda tantas cosas del currículo de la educación formal que es posible ver dos tendencias. La primera es que, en la educación formal, no puede esperarse tener mucho tiempo para dedicarlo a ningún tema. La segunda consiste en que, tanto la educación no-formal como la educación informal, se están extendiendo con rapidez. La expansión de Internet es, simplemente, un ejemplo del papel creciente de la educación informal.

Por tanto, esto significa que debe pensarse con mucho cuidado lo que debe constituir el currículo formal de matemáticas en la etapa 12-16. De hecho, ésta es una decisión cada vez más complicada a causa de las intensas presiones sociales y políticas que la circundan como se puede ver en muchos países. El diagrama (ver cuadro 1) basado en el de Abraham y Bibby (1988) representa a los grupos sociales involucrados en lo que ellos han llamado «el debate curricular», y en el artículo se muestra cómo el «grupo de preparadores industriales» quiere una instrucción para especialistas en matemáticas como la que a menudo se encuentra en los programas tradicionales, mientras que el «grupo de educadores públicos» está más preocupado por el papel de la educación matemática en la educación general dentro de una sociedad democrática.

Por tanto, ¿qué criterios debería satisfacer la educación matemática formal en la etapa 12-16? Desde mi punto de vista debería ofrecer:

- Algo diferente de la educación matemática informal y no-formal,
- Algo más básico, fundamental y generalizable,
- Algo completo y bien estructurado,
- Algo enriquecedor y estimulante,
- Algo relevante y significativo.

Si han de cumplirse estos criterios, ¿cómo podemos construir un currículo apropiado de matemáticas para que los profesores lo usen en sus clases?

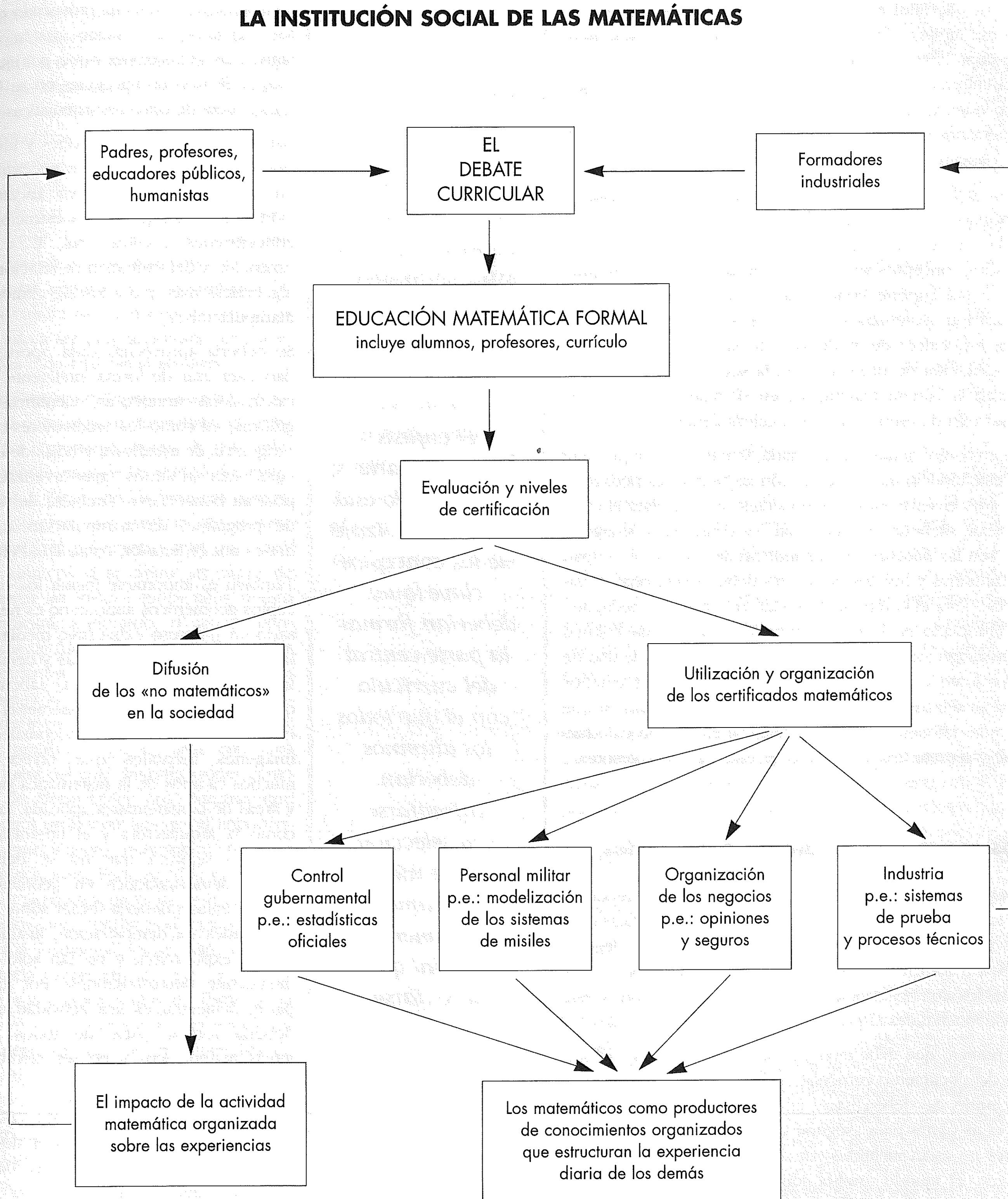
Durante los últimos quince años hemos observado un interés creciente en los aspectos culturales y sociales de educación matemática.

Influencias culturales y sociales

Durante los últimos quince años hemos observado un interés creciente en los aspectos culturales y sociales de educación matemática. La dimensión social se ha revelado importante (Bishop, 1987) para configurar nuestras opiniones sobre el currículum, la enseñanza y el aprendizaje. La dimensión social dirige nuestra atención hacia la gente y las instituciones sociales implicadas, y sobre las influencias políticas y sociales que ejercen los unos sobre las otras y sobre la educación matemática.

En la actualidad, el documento curricular catalán (*Disseny Curricular*, 1993) sobre todo tiene una estructura matemática, con algunas recomendaciones metodológicas. En esencia es una colección de contenidos organizada en listas. El problema es que uno no puede enseñar listas, al menos de manera significativa. No es mucho mejor que intentar de enseñar con la guía de teléfonos, ya que lo normal es que ello conduzca a aprendizaje sin sentido. ¡Seguramente, uno puede tratar de enseñarles a los alumnos a aprender los nombres y números de la guía telefónica, pero la enseñanza de listas difícilmente satisface los criterios que, para una educación formal matemática, hemos dado antes!

Desafortunadamente, desde mi experiencia, los comités encargados de elaborar el currículum, que forman parte de una estructura burocrática, parece que, a menudo, producen listas. Esto es así debido a que los miembros del comité compiten y argumentan en defensa de sus prioridades, necesitan entonces que la lista tenga consistencia lógica y por, último, comprueban si está completa, y todo ello les fuerza a pensar en listas detalladas. Sin embargo, el pensamiento político y burocrático no es lo mismo que el pensamiento pedagógico y educativo. Lo que se necesita es un modelo estructurado que ayude a la «transposición didactica» desde una *lista* de contenidos hasta un *esquema* pedagógico.



Cuadro 1. Tomado de Abraham y Bibby (1988)

Por fortuna, el movimiento que considera los aspectos culturales y sociales en la educación matemática ha estimulado ese modelo. En mi libro *Mathematical Enculturation* (Bishop, 1988), he tomado la idea de «matemáticas como una cultura» y desarrollo un modelo de currículo pedagógico que da respuesta a la necesidad de una educación matemática general, así como a la necesidad de desarrollar el conocimiento especializado de los alumnos.

El modelo consta de tres componentes: el componente simbólico y conceptual, el componente aplicable y social, y el componente estructural y cultural. El primero se refiere a los conceptos y a los procedimientos que se requieren como soporte conceptual mínimo para una buena educación matemática básica. El segundo enfatiza los usos específicos de modelos matemáticos, como ayuda a la resolución de problemas en la sociedad. El tercero se fija en la cultura matemática en sí misma y procura el desarrollo de estrategias matemáticas generalizables.

Sin embargo, dentro de mi charla, la parte más importante de este modelo tiene que ver con las estrategias pedagógicas para enseñar estos componentes en clase. Para el componente simbólico y conceptual, los constructos pedagógicos son las *actividades matemáticas* de las que se ocupan los alumnos y que los profesores deben seleccionar y planificar. Para el componente social, el constructo pedagógico apropiado es el *proyecto*, y para el componente cultural la *investigación*. A continuación, describiré cada de uno de estos junto con algunos ejemplos, así como los criterios para su selección. Por último, discutiré las maneras en que estos componentes pueden integrarse en un currículo factible y sensato desde el punto de vista de los profesores.

Los conceptos mediante actividades

El énfasis en esta parte del currículo está en el aprendizaje de los conceptos clave mediante actividades especificas dentro de determinados contextos. Los conceptos elegidos deberían formar la parte central del currículo, con el que todos los alumnos deberían enfrentarse y la selección de este núcleo mínimo es el primer paso crucial que debe darse.

Lo primero que debe reconocerse es que el «listín telefónico» del documento curricular no está tan al día como sería necesario. Se deben hacer comparaciones con currículos de otras partes para asegurar que los contenidos tradicionales no están incluidos tan sólo porque siempre lo han estado. El mundo cambia con rápidez, en particular por influencia de la tecnología, y cada nueva propuesta de currículo es una oportunidad para volver a evaluar las prioridades curriculares.

Por ejemplo, en un currículo moderno de matemáticas no es necesario que se enseñen las cuatro operaciones con fracciones. La presencia de las calculadoras y los ordenadores ha provocado que los decimales sean mucho más importantes que las fracciones y que, por ejemplo, la división de fracciones no se use nunca fuera de clase de matemáticas.

El énfasis en esta parte del currículo está en el aprendizaje de los conceptos clave [que] deberían formar la parte central del currículo con el que todos los alumnos deberían enfrentarse y la selección de este núcleo mínimo es el primer paso crucial que debe darse.

Así mismo, las manipulaciones y algoritmos complejos ya no son necesarios en la enseñanza del álgebra. La atención debería dirigirse a las estructuras conceptuales involucradas, y a la obtención y demostración de relaciones algebraicas más que a los algoritmos y manipulaciones.

Se debería aprovechar cada oportunidad para usar de forma inteligente las calculadoras aritméticas, científicas y gráficas, así como los ordenadores con programas de estadística y hojas de cálculo. Los alumnos más avanzados podrían beneficiarse, también, del uso de programas de manipulación algebraica por ordenador, como DERIVE.

También es importante incluir los conceptos geométricos aunque no es necesario un progreso exhaustivo mediante la memorización de teoremas y demostraciones. En la actualidad, sabemos que la importancia de la geometría se extiende a los modelos conceptuales e imágenes mentales que ofrece a muchos campos de la matemática pura y áreas de la matemática aplicada, tales como la arquitectura y el urbanismo. Esto no significa que no se deban incluir demostraciones en geometría, pero el énfasis debería recaer sobre las actividades de demostración, justificación y explicación, y no tan sólo en memorizar demostraciones. Por otra parte, demostrar es una actividad que debería formar parte de todos los temas matemáticos y no ser privativa de la geometría.

Para no mostrarme demasiado crítico con el currículo descrito en el documento oficial, también debería decir que me parece bien que incluya los conceptos estadísticos y probabilísticos, ya que a los ojos de mucha gente estas son dos de las áreas conceptuales claves que serán necesarias en el futuro, tanto en las matemáticas de la industria como en el desarrollo de las mismas matemáticas. También es importante la forma de concebir el campo de la combinatoria como una manera de contar inteligentemente. Además, es muy interesante ver la referencia a la historia de matemáticas. Esto se suele ignorar en los currículos escolares, lo que conduce a que muchos alumnos ignoren que las ideas matemáticas tienen una historia, que han sido inventadas por muchas personas diferentes de muy diversas culturas, y que también hay una cultura de las matemáticas que ha llegado a ser muy importante en sociedades industrializadas actuales.

Si pasamos desde los conceptos clave en sí mismos a su enseñanza, el constructo importante, como se dijo anteriormente, es el de las actividades matemáticas. Estas actividades y sus contextos deberían ser elegidas de manera que sean significativas y relevantes para los alumnos si se desea ser capaz de enseñar las ideas a todos ellos, y esto significará, a menudo, el uso de contextos de fuera del aula. Muchas de las dificultades al enseñar matemáticas, en la etapa 12-16, están causadas por contextos irrelevantes y poco significativos y por profesores que no usan contextos de fuera del aula. Investigaciones como las de Abreu (1993) nos muestran que muchos profesores ignoran el importante conocimiento matemático que los alumnos traen desde su educación informal matemática fuera de la escuela, lo que les causa conflictos culturales y cognitivos. Realmente, los alumnos, con frecuencia, aprenden de sus profesores que sus conocimientos de fuera de la escuela son irrelevantes y sin sentido. El siguiente extracto de una entrevista de Abreu con la hija de un granjero del N.E. de Brasil ilustra parte del problema:

Entrevistador: Me contaste que tu padre no sabe escribir, pero que no hay nadie como él para hacer las sumas oralmente. ¿Como te ayuda en tus tareas de matemáticas?

Severina: Yo le pregunto, por ejemplo, cuánto es 3 por 7 o 8 y él contesta. Cuánto es 3 más 12. Él lo contesta todo.

Estas actividades y sus contextos deberían ser elegidas de manera que sean significativas y relevantes para los alumnos si se desea ser capaz de enseñar las ideas a todos ellos, y esto significará, a menudo, el uso de contextos de fuera del aula.

Entrevistador: ¿Podrías decirme qué piensas de la manera en que tu padre hace las sumas?, ¿es la misma manera o es diferente de la que aprendes en la escuela?

Severina: Es diferente, él lo hace en su cabeza, yo lo hago con el lápiz.

Entrevistador: ¿Qué forma crees tu que es la apropiada?

Severina: La escuela.

Entrevistador: ¿Cuál piensas tu que da el resultado correcto?

Severina: Mi padre.

La confusión en la mente de Severina es evidente. Valora el conocimiento de su padre y reconoce su importancia, a la vez que sabe que la escuela no lo aprecia. Sabe lo que debe hacer el que aprende en la escuela, pero todavía confía en el conocimiento y razonamiento de su padre. Uno se pregunta cuánto tiempo pasará antes de que deje de confiar en él.

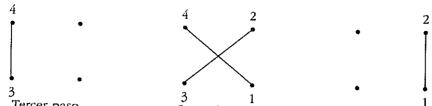
Al trabajar con actividades matemáticas, el papel del profesor consiste en hacer de puente entre las estructuras conceptuales esenciales de las matemáticas y el conocimiento de los alumnos sobre el mundo. En cierto sentido, el profesor es el legitimador del conocimiento al decidir que conocimiento matemático es aceptable e importante en clase. Gran parte del conocimiento del alumno se basa en el mundo exterior que, con frecuencia, no está formulado de forma matemática pero que, no obstante, es accesible al aprendizaje matemático.

De esta manera, la profesora debe actuar como una especie de «antropólogo social», aprendiendo más sobre las vidas de sus alumnos fuera de la escuela. Esto es importante para seleccionar o crear las actividades relevantes y significativas que permitan a los alumnos mostrar y usar el conocimiento que ya tienen. Por supuesto, son los alumnos por sí mismos los que deberán asimilar los nuevos conocimientos en sus esquemas, o acomodar sus esquemas previos, pero la profesora tiene un papel muy importante que jugar en el proceso.

La gama de actividades matemáticas potencialmente útiles en clase en la actualidad es enorme, y el cuadro 2 contiene varios ejemplos para la etapa 12-16 que ilustran su posible variedad. Sabemos que existen muchas situaciones geométricas y numéricas, en el mundo de los alumnos, que pueden proporcionar contextos óptimos para tareas matemáticas. Actividades aritméticas, estadísticas y probabilisticas pueden situarse fácilmente en contextos reales y, como todo el mundo cuenta, la tabla de las representaciones numéricas proporciona una fuente interesante de ejemplos de contraste con los que plantear preguntas acerca de números, sus origenes y representación. Las ilustraciones geométricas, ciertamente, estimulan la creatividad de los profesores para generar actividades y las áreas de orientación espacial y diseño permiten un contacto fácil con el mundo de los alumnos.

Multiplicación Védica

Podemos multiplicar 42 × 21 de la siguiente manera



Tercer paso $4 \times 3 = 12$ | Segundo paso $(4 \times 1) + (2 \times 3) = 10$ | Primer paso $2 \times 1 = 2$

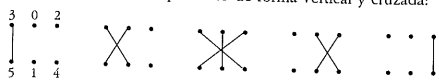
Comprueba que es correcto.
Trata de multiplicar 33 × 72 de esta manera.

Ahora prueba estos números de 3 cifras: 302 × 514

Son 5 pasos:

	1) $2 \times 4 = 8$,
302	2) $(0 \times 4) + (2 \times 1) = 2$,
514	3) $(3 \times 4) + (0 \times 1) + (2 \times 5) = 22$, (llevamos 2)
155228	4) $(3 \times 1) + (0 \times 5) = 3$, $3 + 2 = 5$,
2	5) $3 \times 5 = 15$.

Veamos un patrón del producto de forma vertical y cruzada:



5.° paso | 4.° paso | 3.° paso | 2.° paso | 1.° paso

¡Compruébalo!

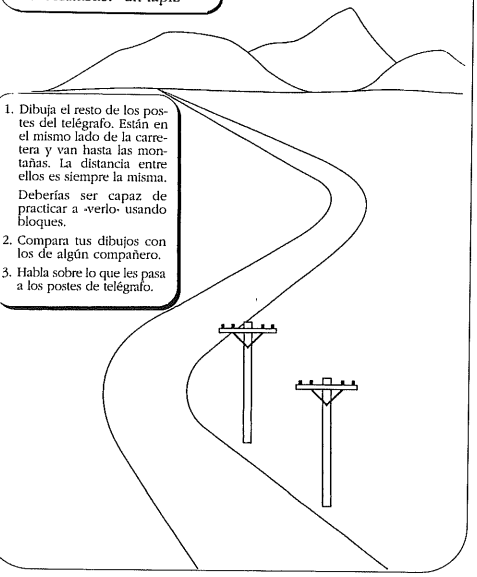
Intenta hallar 217 × 385 de la misma forma
¿Puedes hacerlo sin dibujar el patrón?
Prueba con 283 × 175
Para los adictos a las matemáticas, ¡halla 8123 × 4204!

Hoja de actividades sobre figuras 3-D

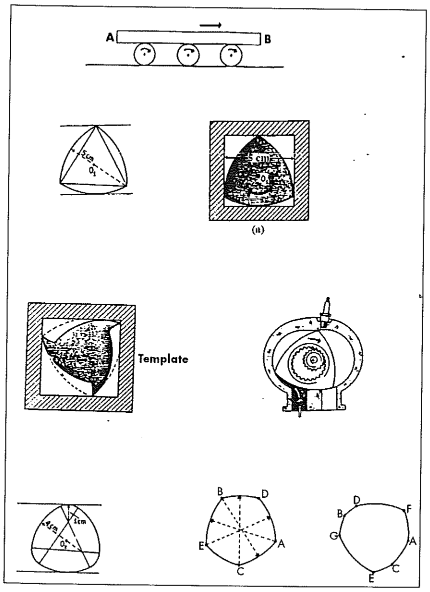
Postes paralelos

Necesitarás: un lápiz

1. Dibuja el resto de los postes del telégrafo. Están en el mismo lado de la carretera y van hasta las montañas. La distancia entre ellos es siempre la misma.
   Deberías ser capaz de practicar a «verlo» usando bloques.
2. Compara tus dibujos con los de algún compañero.
3. Habla sobre lo que les pasa a los postes de telégrafo.



Curvas de anchura constante



Cuadro 2

No aparecen con tanta frecuencia otras actividades que involucren situaciones algebraicas en el mundo de los alumnos fuera de la escuela, pero la «búsqueda de patrones» es la actividad más importante en este caso. En una sección posterior, veremos que las «investigaciones» proporcionan un contexto mejor para aprender sobre las estructuras conceptuales algebraicas, sobre la demostración y sobre la naturaleza estructural del conocimiento matemático.

Todas estas actividades deberían cumplir los siguientes criterios:

- Ser relevantes para la mayoría de los alumnos.
- Ser significativas y razonables para ellos.
- Estar situadas en un contexto familiar o desarrolladas a partir de uno de ellos.
- Tener posibilidades de ser extendida matemáticamente para desafiar a los alumnos más rápidos.
- Estar conectadas con otros conceptos matemáticos.

El profesor debería considerar también cuál es la mejor manera de enseñar con estas actividades. Así como enseñar a toda la clase o individualmente, será importante que los profesores desarrollen sus métodos para enseñar a pequeños grupos. Mientras que educadores de todo el mundo intentan crear situaciones de aprendizaje satisfactorias para todos los alumnos, están encontrando útil el uso de métodos de pequeño grupo. Esto es debido a que permiten que los alumnos colaboren y trabajen juntos sobre los problemas, facilitando así que compartan sus habilidades y conocimientos previos. Los grupos pequeños también crean un contexto de aprendizaje que proporciona apoyo y no es amenazador para los alumnos que no son buenos en matemáticas y que se sienten desafiados al estar en la misma clase que los que tienen más conocimientos que ellos.

En mi experiencia, los profesores de matemáticas no están tan familiarizados como debieran con los métodos de pequeño grupo. Parecen tener miedo de permitir que los alumnos discutan, colaboren, comparen ideas y hagan trabajos conjuntos. Sin embargo, así es como les guista trabajar a los profesores cuando asisten a cursos de formación permanente.

...las «investigaciones» proporcionan un contexto mejor para aprender sobre las estructuras conceptuales algebraicas, sobre la demostración y sobre la naturaleza estructural del conocimiento matemático.

En particular, en matemáticas es posible y deseable trabajar en grupos ya que por su naturaleza es autocorrectiva. Si un alumno pregunta, «¿mi respuesta es correcta?» de forma fácil y legítima, se le puede responder «¿cómo puedes verificar y averiguar por ti mismo si tienes razón? Discútelo en tu grupo». No se trata de una excusa para no darle la respuesta, sino que es una estrategia para hacer que los alumnos se den cuenta de la naturaleza autocorrectiva del conocimiento matemático. Ahora bien, es mucho más fácil para el profesor contestar «Sí» o «No, está mal». ¡La parte dura de enseñar matemáticas, y podría afirmar que la más importante, es cómo enseñar a los alumnos el conocimiento que permite al profesor saber si la respuesta es correcta o errónea!

Otra importante estrategia curricular consiste en aumentar el tiempo dedicado al estudio de un determinado tema. Si los temas se planifican por separado y se secuencian estrictamente, entonces es muy difícil para el profesor atender las diferentes habilidades y ritmos de aprendizaje de los alumnos. Por lo tanto, mejor que pensar en enseñar una lección de una vez, que es lo que se ha hecho usualmente, es más importante que los profesores se animen a enseñar unidades de trabajo que puedan durar unas tres semanas. Este período de tiempo permite cubrir una cantidad considerable de material conceptual mediante actividades variadas. También permite a los alumnos más lentos cubrir los aspectos básicos permitiendo mientras a los más rápidos considerar puntos más complejos. Para ello es necesario pensar cuidadosamente en qué conceptos deben contener estas unidades, y cuáles deben ser los aspectos más básicos que deben aprenderse. Este trabajo no puede ser hecho por profesores aislados, y hace falta que el Ministerio considere la mejor forma de proporcionar apoyo y guía sobre esta idea.

Los proyectos y aplicaciones de las matemáticas

El aspecto conceptual, que hemos planteado antes, normalmente no permite que los alumnos observen los procesos involucrados en el uso de las matemáticas en gran parte de la sociedad. Para ello, es necesario usar proyectos específicos que puedan servir de ejemplo de estos procesos, y en este aspecto del currículo ante todo se buscan proyectos significativos para los alumnos y que sean buenos ejemplos de aplicaciones. Aquí no tenemos el objetivo de cubrir un programa detallado, sino que desearíamos presentar un muestrario de contextos de proyectos.

En la actualidad, la enseñanza con proyectos se usa en todos los niveles de la educación, pero en el pasado su principal uso fue en el trabajo de alto nivel en las universidades y en la industria. Sin embargo, su uso en la enseñanza secundaria no está extendido en todo el mundo, en apariencia porque los profesores piensan que no es una manera fácil de enseñar. De hecho realmente se trata de un método muy fácil de usar, ya que son los alumnos los que deben hacer todo el trabajo, con tal de que el profesor tenga presente que se propone lograr metas diferentes de las que se pretenden en el enfoque habitual de la enseñanza.

Hay tres aspectos diferentes que son particularmente importantes:

- Un buen proyecto da la oportunidad a los alumnos de seguir un tema al nivel que puedan, de maneras diferentes, ofreciendo así una enseñanza individualizada y personalizada, lo que es una forma de tratar de equilibrar la educación general y la preparación especializada.
- Un buen proyecto fomenta el uso de diferentes recursos materiales, que ahora incluye material al que puede accederse con ordenadores. Estos recursos no los proporciona necesariamente la escuela y podrían encontrarse en bibliotecas o en otras fuentes como las industrias, dependiendo del proyecto. Los alumnos de los países donde se usan proyectos son conscientes del provecho obtenido de averiguar información en diferentes fuentes, incluyendo Internet.
- Un buen proyecto fomenta la actividad en un nivel reflexivo, lo que supone que los valores y las opiniones sean, deberían serlo, discutidos.

El ejemplo de proyecto medioambiental que muestra el cuadro 3 satisface estos criterios. Es un proyecto que, básicamente, pide a los alumnos que estudien la cantidad de basura que genera su escuela cada día para hacer estimaciones a partir de ellas a escala nacional, usando estadísticas que deberán reunir, y calcular las consecuencias de réciclar y reducir los desperdicios. Existe la posibilidad de extenderlo de diversas maneras que abarquen discusiones estadísticas sobre muestreos, situaciones típicas, y generalizaciones.

Un buen proyecto, como éste, no es tan sólo un producto, por ejemplo, un ensayo con algunos cálculos e ilustraciones. Es una actividad, a menudo cooperativa, en un contexto particular en el que aparecen muchos problemas, resultados y preguntas, y en la que los alumnos es preciso que sean animados a aclarar el sentido de su implicación personal con las ideas del proyecto. Una profesora describe su proceso de enseñanza en estos términos:

> *Entregué a la clase una colección de problemas para escoger. Eligieron sus problemas y trabajaron con sus amigos en grupos de 2 o 3, teniendo tareas y lecciones de matemáticas durante dos semanas. Tenía cierta idea de lo que quería que sucediese. Quería que trabajasen de forma activa e independiente, entusiasmándose ocasionalmente y generando ideas con las que sorprenderme yendo más allá de sus planes originales, y no los quería aburridos, hartos y diciendo continuamente, ¿ahora que hago, señorita? (ATM, 1987).*

En la actualidad, la enseñanza con proyectos se usa en todos los niveles de la educación, pero en el pasado su principal uso fue en el trabajo de alto nivel en las universidades y en la industria.

Para ello les ayuda a planificar, escucha sus ideas, les ofrece recursos y sugerencias, discute los resultados con ellos, y les ayuda a planificar los informes de su trabajo. Porque un proyecto produce algo que es más importante que el propio trabajo de los alumnos, ya que existe la oportunidad de dar forma a lo que hacen, y de enseñarles indirectamente sobre valores y consecuencias.

Por último, un trabajo de proyecto puede permitir que todos los alumnos se beneficien de la enseñanza, algo mejor que sólo los pocos que lo hacen en la actualidad. En una investigación en Brasil en la que Pompeu comprometió a profesores en el desarrollo de proyectos basados en los conocimientos de sus alumnos fuera de la escuela, los resultados fueron muy alentadores:

> *Hasta ahora los resultados del cuestionario han sido impresionantes. Todos los profesores hicieron cambios importantes en sus puntos de vista sobre la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles, y los alumnos se comprometieron con entusiasmo en las actividades. En vez de la pasividad, memorización y repetición que se asocia a la educación tradicional, hubo una mayor evidencia de actividad comprometida, de alumnos que contribuían con confianza con conocimientos particulares y específicos, de discusión y debate sobre ideas matemáticas significativas* (Bishop y Pompeu, 1991, p. 181).

Este proyecto fue diseñado para hacer conscientes a los niños de la cantidad de basura que producen personalmente en un día y un curso escolar, y después extrapolar este estudio para calcular cuánta basura producen todos los niños de las escuelas primarias de Victoria en un año. Se imaginó que el Campo de Cricket de Melbourne (MCG) era un basurero gigante, y pensamos que ilustrarlo con el «césped sacrosanto» de este famoso terreno de juego cubierto con la basura presentaría una imagen impactante. Los niños podían referirse a la cantidad de basura de dos maneras. Una era averiguar cuánto tiempo se tardaría en llenarlo hasta la altura de la Grada Sur, y la otra hallar qué profundidad alcanzaría la basura cada año, y ajustar las cantidades después de que se hiciese el reciclaje.

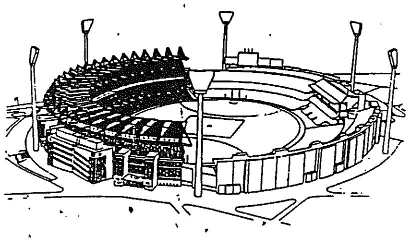


Figura 1:
Representación artística del Campo de Cricket de Melbourne

Tu grupo es un equipo de basureros ecologistas que está decidido a tener influencia sobre la recogida de basuras. Debeis escribir un informe basado en vuestros hallazgos y presentarlo al consejo local.

¿Cuánta basura puede caber en el MCG?

El área del campo de juego del MCG es 22.000 m^2. La Grada Sur tiene 45 m de altura desde el campo. Si imaginamos un cilindro gigante que sube desde el campo de juego hasta lo alto de la Grada Sur, ¿cuál sería su volumen?

¿Cuánta basura se produce en las escuelas de Victoria?

Recientemente, se han tomado muestras de basura en cuatro escuelas primarias de Victoria, una de ellas esta escuela. Se recogió toda la basura producida por los niños y profesores de cada de las escuelas un día cualquiera y se clasificó en varias categorías: papel, plástico, aluminio y restos de alimentos. El vidrio no se consideró un componente significativo dentro de la basura de las escuelas ya que está prohibido en la mayoría de las escuelas de Victoria. Se recogieron los siguientes datos:

N.° de alumnos de las escuelas que participaron en el muestro	1504
N.° total de bolsas de basura producidas en un día	35,1
N.° total de bolsas de papel recogidas	15,75
N.° total de bolsas de plástico recogidas	12,6
N.° total de bolsas de restos de alimentos recogidas	62
N.° total de bolsas de alumnio (latas y papel) recogidas	0,6
N.° de niños en las escuelas primarias de Victoria	430.175
N.° de días escolares en un año	200

1. ¿Cuántos litros de basura producen los alumnos de estas cuatro escuelas cada día? Las bolsas contienen 54 litros.
2. Un litro equivale a 1.000 centímetros cúbicos (abreviadamente cm^3), ¿cuántos centímetros cúbicos de basura producen las cuatro escuelas cada día?
3. Hay 100 cm en 1 m, y por tanto en un metro cuadrado hay $100 \times 100 = 10.000$ cm^2. Imaginar una pila de centímetros cuadrados. ¿Cuántos se necesitarían para construir una pila de un metro de altura?

   Esta es la cantidad de centímetros cúbicos (cm^3) que hay en un metro cúbico (m^3).

   ¿Qué tipo de cosas hay cerca de tu casa que se midan en metros cúbicos?
4. Ahora que sabes cuántos centímetros cúbicos (cm^3) hay en una metro cúbico (m^3), estima la cantidad de metros cúbicos de basura producidos en las escuelas primarias de Victoria cada día? ¿Cada semana? ¿En un año escolar?
5. ¿Cuánto tiempo haría falta para llenar el MCG con la basura de todas las escuelas primarias de Victoria?
6. Atendiendo a los tipos de basura enumerados en la tabla, ¿cuál sería la más conveniente para tratarla y reciclarla si realmente se quiere que se produzca algún cambio en el problema de la basura? Calcular cuánto tiempo haría falta para llenar el MCG si la basura se clasificara en las escuela y se hiciesen reciclar todos los materiales reciclables.

Preparar un informe de grupo sobre las basuras para presentarlo al School Council. Presentar los cálculos pertinentes y explicar lo qué significan.

Extensión del proyecto

Una extensión de este proyecto implica comunicarse con una escuela de otro país que pueda hacer una recogida similar de basura por las escuelas implicadas y presentar a nuestros alumnos los datos de diferente forma a como se presentaron los propios. Con ello, se podrían proponer, para su discusión, una serie de preguntas adicionale y se pueden establecer contactos con las escuelas implicadas en los diferentes países para explicar las diferencias culturales. Por ejemplo: ¿Por qué esos niños recogieron hojas y palos en su escuela como parte de su recogida de basura?

Basura en otros países

Se hizo una recogida de basuras similar en cuatro Escuelas Comunitarias en Papua Nuevo Guinea. Los resultados se resumen en la siguiente tabla:

Escuela	N.° de alumnos	Papel/ plástico	hojas/ palos	latas/ vidrio
Wardstrip	966	1,2 m^3	0,97 m^3	0,09 m^3
Rakunai	500	1,17 m^3	3,17 m^3	0,17 m^3
Vanimo	400	1,8 m^3	1,97 m^3	1,7 m^3
Kumin	529	0,09 m^3	0,07 m^3	0,01 m^3
Totales				

1. Cuántos m^3 de basura producen los alumnos de estas cuatro escuelas en un día? ¿En una semana? ¿A lo largo de un curso?
2. Hay aproximadamente 450.000 alumnos que asisten a las escuelas comunitarias de PNG. ¿Cuánta basura producen todos los alumnos de las escuelas comunitarias de PNG en una semana y en un año escolar?
3. ¿Cuánto tiempo les llevaría llenar el MCG de basura a los niños de las escuelas del PNG ?
4. ¿Qué diferencias se observan entre las basuras producidas en las escuelas del PNG y en las escuelas de Victoria?
5. Si hacemos abono (compost) con las hojas y los palos, ¿cuánto tiempo costará llenar el MCG?
6. Si todo el vidrio y las latas fuesen recicladas, ¿cuánto tiempo costará llenar el MCG?
7. Esto tan sólo deja el papel y el plástico. Averiguar, para una de las escuelas, las cantidades de papel y el plástico recogidas. Usa esa proporción para estimar cuánto papel hay que reciclar en las escuelas de PNG y si prescindiese de ella cuánta basura no reciclable quedaría? ¿Cuánto tiempo costaría llenar el MCG con lo que queda?

Cuadro 3

Tallas de la ropa

Los alumnos trabajarán en grupo para obtener datos sobre distintas variables involucradas en las tallas de la ropa.

Analizarán los datos para decidir en qué casos se producen relaciones lineales aproximadas, encontrando cuando sea apropiado, las ecuaciones. Por ejemplo, tratarán de relacionar la talla del cuello, el pecho, la cadera con la talla de la cintura.

Cuadro 3 (cont.)

Así, queda claro que el trabajo con proyectos tiene una gran potencialidad en situaciones de enseñanza donde hay grupos heterogéneos de alumnos, y que todos los alumnos pueden beneficiarse de proyectos bien escogidos y apropiados para sus niveles.

Investigaciones y estructuras matemáticas

Las investigaciones tienen cierta similitud con los proyectos en tanto que también deberían usarse a modo de ejemplo, más que para tratar de cubrir un detallado programa. Sin embargo, en este caso el objetivo no es mostrar la aplicabilidad y la utilidad de las ideas matemáticas, sino más bien mostrar la forma en que se derivan y están estructuradas esas ideas. Las investigaciones involucran tanto el razonamiento deductivo como el inductivo, y fomentan la reflexión en un nivel más profundo del que es habitualmente posible en las actividades conceptuales normales.

Son particularmente útiles en situaciones geométricas y algebraicas y quizá la mejor manera de apreciar cómo usarlas sea considerar un ejemplo sencillo de geometría. Imaginemos el siguiente episodio en clase:

Pedimos a los alumnos que dibujen dos puntos sobre un papel en blanco, en la misma línea «horizontal» y separados 10 cm entre sí. Etiquetamos los puntos A y B. Ahora solicitamos buscar un punto C «sobre» la línea AB y tal que el ángulo ACB sea recto.

Una vez que hayan encontrado uno se les anima a encontrar otro, C1, y otro, C2, y otro...

«¿Qué se observa?» «Parece que están sobre un semicírculo»
«¿Realmente, estáis todos de acuerdo?»

(Ahora viene una pregunta crucial para la investigación) «Supongamos que el ángulo no es de 90 grados, supongamos que es de 45 grados. Tratad de encontrar algunos nuevos puntos, D1...»

Y varias preguntas nuevas

«¿A qué forma se parece ahora?»

«¿Qué sucede por debajo de la línea AB?»

«¿Siempre será parte de un círculo?»

«Prueba algunos ejemplos más»

«¿Sucede siempre esto?»

«¿Puedes probarlo?»

[Las investigaciones] son particularmente útiles en situaciones geométricas y algebraicas...

Esto muestra la sucesión típica de una investigación:

a) Comenzar con una situación y petición simple.
b) Generar ejemplos.
c) Buscar pautas y sucesiones.
d) ¿Continúan las pautas de esta manera?
e) ¿Por qué?
f) ¿Hay alguna regla general?
g) Intenta demostrarlo.

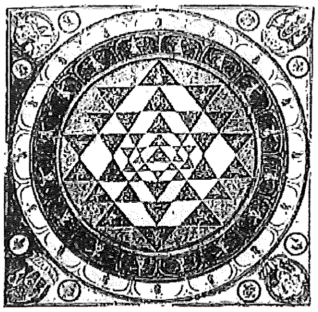
La sucesión desde a) hasta c) fomenta y requiere razonamiento inductivo, mientras que desde d) hasta g) se necesitan habilidades del razonamiento deductivo. En el cuadro 4 hay algún otro «punto de partida» de investigación. Sin embargo, los profesores que se han familiarizado con la idea de enseñar con investigaciones descubren que llega a ser fácil crearlas uno mismo a partir del programa de la etapa 12-16. Por ejemplo, puede darse una nueva vida a cualquier teorema geométrico como resultado de una investigación similar a la del ejemplo anterior y muchas de las actividades de «contar de forma inteligente» se prestan a dar lugar a una investigación algebraica. Como un ejemplo sencillo de un problema de «contar de forma inteligente» consideremos el siguiente:

Un bloque rectangular (un paralelepípedo rectángulo) de 3 cm por 4 cm por 5 cm, está hecho de pequeños cubos de 1 cm de arista. Se pinta por fuera. ¿Cuántos de los pequeños cubos tendrán una sola cara pintada? ¿Cuántos tienen dos, o tres o cuatro, o ninguna cara pintada?

Supongamos que el paralelepípedo tiene otras dimensiones. Investigar la situación.

¿Qué sucederá en el caso general de un paralelepípedo de dimensiones m x n x p?

¿Qué sucede en el caso especial de un cubo?



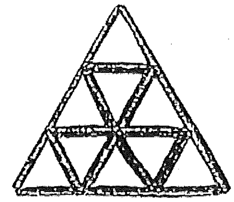
¿CUÁNTOS PEQUEÑOS TRIÁNGULOS HAY EN EL CENTRO DE ESTE DIAGRAMA?

¿CUÁNTOS APUNTAN HACIA ARRIBA?

¿CUÁNTOS APUNTAN HACIA ABAJO?

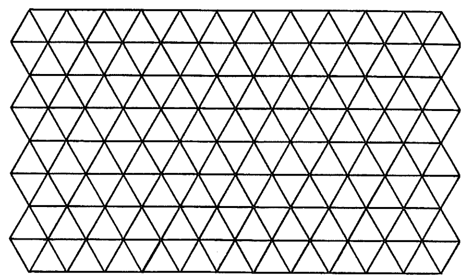
SI SE SIGUEN LAS LÍNEAS SE PUEDEN VER ALGUNOS TRIÁNGULOS GRANDES. ¿CUÁNTOS PUEDES VER TU?

DISEÑA TU PROPIO DIAGRAMA DE CONTEMPLACIÓN EN UNA TRAMA TRIANGULAR. USA PARA ELLO TRIÁNGULOS GRANDES Y PEQUEÑOS.



¿CUÁNTOS TRIÁNGULOS HAY EN ESTE DIAGRAMA? ¿9?, ¿12? ¿13?

INVESTIGA EL MODELO EN OTROS TRIÁNGULOS. (USA LA TRAMA TRIANGULAR)



Cuadrando cincos

Un *truco* para calcular los cuadrados de los números cuya cifra de las unidades es un cinco funciona como sigue:

$15^2 = 10 \times 20 + 25 = 225$

$25^2 = 20 \times 30 + 25 = 625$

$35^2 = 30 \times 40 + 25 = 1.225$

Los estudiantes deben explorar la pauta numérica y explicar con sus propias palabras como funciona generalizandola, para lo que harán uso de la expresión del cuadrado de una suma:

$(10a + 5)^2 = (10a)^2 + 2 \times 5 \times 10a + 52 = 100a(a + 1) + 25$

Se pretende que sepan extender correctamente la pauta, generalizar y comunicar un argumento razonando de forma clara.

Extensiones posibles

- ¿Se puede adaptar el *truco* para números mayores que 100, como 125^2?
- ¿Se aplica el *truco* a los decimales como $2,5^2$?

Cuadro 4

Como con un proyecto, con una investigación la buena profesora estará dispuesta a que los alumnos descubran ideas que ella misma puede no haber percibido antes. Este no debería ser un problema y, desde luego, es un indicador de una buena enseñanza. La buena profesora fomentará siempre que los alumnos vayan más allá de lo que ha hecho ella, y quizás de lo que sabe.

La experiencia deja claro que, con esta forma de enseñar, la buena elección de las investigaciones permite estimular a los alumnos a trabajar , sea el que sea su nivel de habilidad matemática. Como ocurría con el método de proyectos, incluso los alumnos más lentos, pueden animarse a iniciar la investigación y ser capaces de generar algunos ejemplos, comenzando a buscar pautas. Por supuesto, el profesor debe tomar la decisión de cómo y cuánto ha de guiar para permitirles ir más allá. Para los alumnos más rápidos, y aquellos que querrán continuar su estudios matemáticos después de los 16 años, el desarrollo de investigaciones, con éxito, en la etapa 12-16 proporcionará una base óptima para los procesos de demostración y simbolización, así como en los de inducción y deducción.

Creación de un currículum pedagógico a partir de los tres componentes

El desafío final para la planificación de un nuevo currículo pedagógico será la integración de los tres elementos en un todo sensato. Por supuesto, no hay respuesta óptima a este problema tal como ocurre con cualquier problema de educación matemática debido a las diferencias entre los sistemas educativos, organizaciones escolares y experiencia de los profesores. A pesar de todo, se puede dar algún consejo basado en las experiencias de otros países.

Por ejemplo, si se acepta como razonable la idea de unidades de trabajo conceptual de tres semanas de duración, entonces una forma de tener en cuenta los proyectos e investigaciones consiste en utilizarlos alternadamente en cada unidad. Es decir, en una unidad de tres semanas incluir una investigación, en la unidad siguiente incluir un proyecto y así sucesivamente. Por ejemplo, en las 12 unidades posibles durante el año escolar, esto supone que habría seis investigaciones y seis proyectos.

Un esquema inicialmente más razonable podría ser realizar tres investigaciones y tres proyectos con los alumnos de 12 años mientras que tanto los profesores como los alumnos se estén acostumbrando a las nuevas ideas. Entonces sería posible incrementar gradualmente el número, tanto de investigaciones como de proyectos, a lo largo de los años siguientes. Evidentemente, esto dependerá mucho de cómo se desarrollen las bases conceptuales a través de las actividades, y con qué confianza se enfrenten los profesores a las innovaciones.

Se debería hacer un buen uso de la estructura de la escuela y del departamento de matemáticas para permitir a los profesores trabajar cooperativamente en el desarrollo y creación del nuevo currículo escolar de matemáticas.

Otro punto a destacar aquí es que, ningún profesor debería sentir que está haciendo él sólo esta creación y estructuración. Se debería hacer un buen uso de la estructura de la escuela y del departamento de matemáticas para permitir a los profesores trabajar cooperativamente en el desarrollo y creación del nuevo currículo escolar de matemáticas. En los centros con la etapa 12-16, los jefes de departamento de matemáticas tienen una gran responsabilidad coordinando y dando soporte a los profesores individuales y organizando relaciones de cooperación con escuelas parecidas que también estén experimentando estas nuevas ideas.

Las asociaciones profesionales de profesores de matemáticas también pueden jugar un gran papel ayudando a desarrollar materiales para las actividades, investigaciones y proyectos y facilitando el intercambio necesario de ideas y métodos. Este ha sido el caso de *The Mathematicas Association* y *The Association of Teachers of Mathematics* en el Reino Unido, de la *Asociación de Profesores de Matemáticas* en Australia, del *National Council of Teachers of Mathematics* en los Estados Unidos de América del Norte y de los *IREM* en Francia. En cada uno de los casos, la asociación ha sido el foco para que los profesores trabajasen cooperativamente con los colegas investigadores para desarrollar unos currículos escolares de matemáticas innovadores.

Finalmente, el Ministerio de Educación debería darse cuenta de que convertir la «guía telefónica» en un esquema pedagógico que pueda resultar útil es un gran reto para los profesores. Necesitarán un considerable apoyo de formación permanente y recursos para desarrollar los materiales necesarios en sus escuelas. El Ministerio debería considerar seriamente también la idea de un proyecto de desarrollo elaborado por profesores e investigadores que estarían encargados de desarrollar ejemplos de materiales curriculares adecuados a las unidades conceptuales, proyectos e investigaciones basadas en las ideas anteriores. Ésta sería una manera muy útil de comenzar el proceso y ayudaría a aquellos profesores que pudieran sentirse sin coraje ante este proceso de cambio. En otros países, en los que los profesores han estado apoyados y estimulados a participar completamente en este tipo de nuevo desarrollo, se ha puesto de manifiesto que hay mucha energía creativa con posibilidades de ser utilizada en las escuelas.

Por último, es mi deseo que las tres ideas estructurales que he esquematizado os capaciten, individual y colectivamente en vuestro sistema, para desarrollar una educación matemática para vuestros alumnos que no consiga tan sólo el equilibrio entre las necesidades de la educación general y la instrucción especializada, sino que también ayude a crear una experiencia de aprendizaje matemático más actualizado, significativo y satisfactorio. Os deseo «buena suerte» en vuestros esfuerzos.

Alan J. Bishop
Facultad de Educación
Universidad de Monash
Melbourne 3168
Australia

Referencias

ABRAHAM, J. y N. BIBBY, (1988): «Mathematics and society: ethnomathematics and a public educator curriculum», *For the Learning of Mathematics*, vol. 8, N.°2, 2-11

ABREU, G. de (1993): *The relationship between home and school mathematics in a farming community in rural Brazil,* PhD thesis, University of Cambridge, UK.

ATM (1987:) *Getting started with coursework,* Association of Teachers of Mathematics, Derby, UK.

BISHOP, A. J. (1987): «Social and cultural aspects of mathematics education», Conferencia Plenaria en el Segundo Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, Valencia, España.

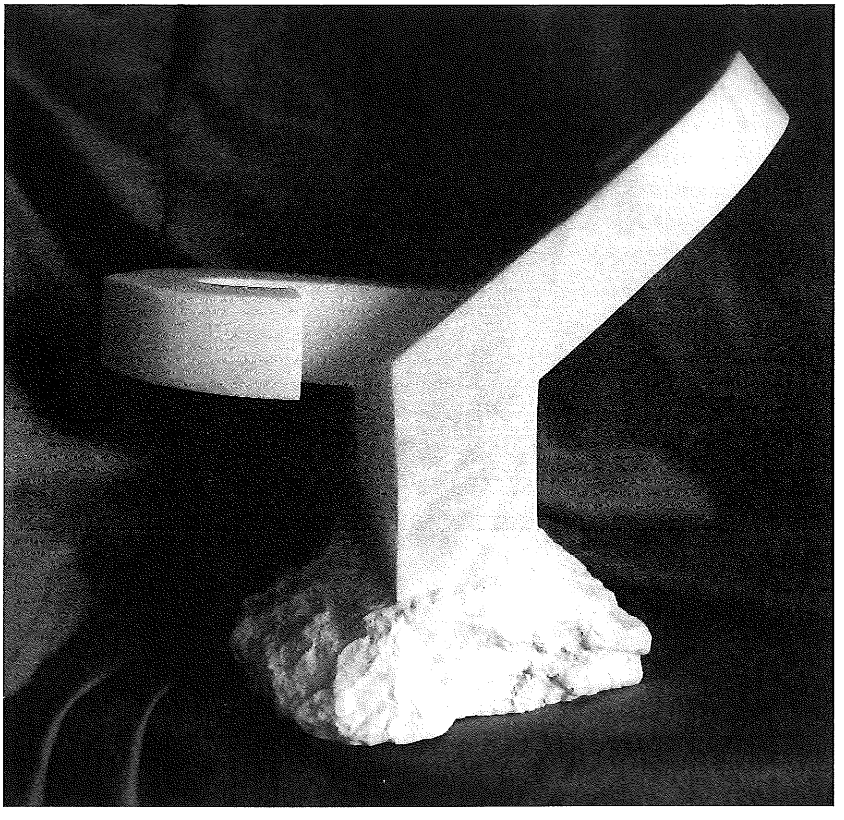
BISHOP, A. J. (1988): *Mathematical enculturation: a cultural perspective on mathematics education,* Kluwer, Dordrecht.

BISHOP, A .J. (1993): «Influences from society», en A. J. BISHOP, K. HART, S. LERMAN y T. NUNES (Eds.): *Significant influences on children's learning of mathematics,* Unesco, París.

BISHOP, A. J. y G. POMPEU (1991): «Influences of an ethnomatematical approach on teacher attitudes to mathematics education», en *Prceedings of PME XV,* vol. 1, 136-148, Assisi, Italy.

Catalan curriculum document

COOMBS, P. H. (1985): *The world crisis in education: the view from the eighties,* Oxford University Press, Oxford.



Tres arcos
Alabastro, 40x45x21
José Miguel Fuertes