SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 26

NOVIEMBRE 1997

SUMA 26
noviembre 1997

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna, 12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 5.700 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Luis Balbuena es el autor de las fotografías de *celosías* que ilustran este número.

SUMA 26
noviembre 1997

Matemáticas y cultura

EDITORIAL

HAY PERSONAJES de gran prestigio que no sienten ningún rubor en reconocer públicamente su ignorancia en asuntos científicos y, más concreta y frecuentemente, en temas matemáticos. A la vez, hablan con orgullo de su fracaso escolar-matemático que no les impidió llegar a ser figura en su campo. Desde él, además, reclaman para la formación humanística una mayor consideración en los currículos escolares. Probablemente, llevando su caso al absurdo, ellos mismos serían una muestra de la necesidad de una mayor formación matemática en las etapas escolares.

Una visión muy restringida de la historia de la cultura considera imprescindible que un ciudadano conozca a Shakespeare y Lorca, Vivaldi y Falla, Goya y Saura... y sus obras y, sin embargo, no se cree necesario ubicar y conocer la obra de Euclides, Cantor, Lobachevskiy y Gödel. La historia de nuestra cultura debe abarcar algo más que literatos, músicos o pintores; no se puede olvidar, por ejemplo, la influencia que Euclides ha tenido a lo largo de dos mil años, las revolucionarias ideas del infinito de Cantor, las geometrías no euclidianas o la influencia de los resultados de Gödel que provocaron una reconsideración de las teorías del conocimiento.

No obstante, una persona culta es algo más que una persona que conoce la historia de nuestra cultura: debe conocer los principios de diversos saberes humanos. Es más, estamos convencidos de que la matemática es uno de los saberes humanos primordiales, tanto por sus aplicaciones prácticas como por su papel en el desarrollo de capacidades de tipo general. Platón, reclamado por el joven tirano Dionisio II de Siracura, comenzó a instruirlo a él y a sus cortesanos en *geometría, según él, único camino para la sabiduría y la virtud...*

En un momento en el que está en discusión el papel de las humanidades dentro del sistema educativo, los profesores de matemáticas y nuestras organizaciones no podemos esconder la cabeza, no sintiéndonos afectados por la definición de este problema. No se trataría de entrar en una «guerra de horas» por una porción del horario escolar, sino de luchar porque la sociedad reconozca la cultura como «el resultado o efecto de cultivar los conocimientos humanos y de afinar por medio del ejercicio las facultades intelectuales del hombre», de acuerdo con la definición que da la Real Academia Española de la Lengua y, en consecuencia, coloque a las matemáticas y a la educación matemática en el lugar que les corresponde.

Desde el número 25, y esperamos que a partir de ahora, SUMA constará de 144 páginas en lugar de las 128 habituales. Este aumento de extensión es posible gracias al número y calidad de las colaboraciones que venimos recibiendo, que ha aumentado de un tiempo a esta parte. Nuestro deseo es que se consolide esta tendencia y podamos mantener dicho número de páginas.

A punto de cerrar esta edición nos llega el anucio del III CIBEM que se celebrará en Caracas del 26 al 31 de julio de 1998. Aunque en el próximo número de SUMA daremos amplia información sobre el mismo, debido a que algunos plazos ya habrán vencido en esas fechas, remitimos a quienes estén interesados en una información más inmediata a las siguientes direcciones electrónicas:

iiicibem@sagi.ucv.edu.ve ó asovemat@sagi.ucv.edu.ve

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 5-9

Las Matemáticas en la cresta de la ola. Buscando una salida*

Ricardo Luengo González

ARTÍCULOS

EN ESTOS últimos meses asistimos a una presencia intensa en los medios de comunicación de noticias y debates sobre distintos temas relacionados con la educación; esta es una señal de que la sociedad está preocupada por la formación de nuestros adolescentes ya que, en gran medida, del funcionamiento adecuado del sistema educativo, dependerá la forma de vivir y trabajar de los alumnos actuales, ciudadanos del futuro. Por ello está en juego el propio futuro de nuestra sociedad.

Y dentro de la formación que aporta el sistema educativo, hay materias, como la Lengua y las Matemáticas, que constituyen ejes fundamentales del currículum. Ello queda fuera de toda duda, y por eso figuran en todos los cursos de los sistemas educativos de todos los países. Las Matemáticas ha constituido siempre una asignatura polémica, pero en los últimos meses lo ha sido más debido a una serie de circunstancias, que más adelante comentaremos. El hecho es que se ha situado a esta materia en la «cresta de la ola» en el debate, que en nuestro país actualmente se lleva a cabo, sobre el estado de la enseñanza.

Los profesores de Matemáticas han sido muy activos en tratar de buscar soluciones a los problemas de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Desde hace casi dos décadas se han agrupado en grupos de trabajo, de renovación, equipos de investigación y sociedades de profesores. Actualmente las sociedades de profesores de Matemáticas de toda España se encuentran agrupadas en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), de la cual en la actualidad soy Presidente. Desde la representación de 14 sociedades federadas y más de cuatro mil afiliados quiero expresar la preocupación de nuestra Junta de Gobierno, reflejo de la de nuestros profesores, aportando a la opinión pública nuestro propio punto de vista sobre el estado y los pro-

* Carta abierta del Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM).

blemas por los que atraviesa en nuestro país la enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria.

No estaría de más comenzar resaltando la importancia de la Educación Matemática y su papel en la formación de nuestros ciudadanos, con objeto de sentar las bases desde las cuales pensamos aportar unos cuantos elementos para el debate.

Para ello hemos de analizar el papel que tiene la educación matemática en la formación de nuestros hijos y qué razones hay para que esté presente en su educación.

Las Matemáticas son fundamentales en la formación de las estructuras lógicas en los alumnos, son necesarias para el estudios de otras disciplinas, enseñan a pensar y constituyen parte de los cimientos sobre los que se construye un adulto libre y con capacidad de adaptarse a los cambios sociales: ayudan a interpretar, manipular y predecir la realidad.

Se ha dicho que las matemáticas son el lenguaje de la ciencia, pero son otras cosas además de un lenguaje. Las nuevas metodologías de la enseñanza de las matemáticas plantean la importancia de trabajar con problemas abiertos que ayuden a los alumnos a estimular la creatividad, el análisis de un problema observando todos los detalles y matices, dotándose de métodos generales y flexibles de resolución.

Las matemáticas son una asignatura útil a los estudiantes ya que los conocimientos matemáticos pueden utilizarse en campos muy diferentes, de hecho los métodos y conceptos matemáticos impregnan fuertemente todo el saber tanto de las ciencia experimentales como de las ciencias sociales.

La polémica con respecto a la Educación Matemática

Si reconocemos que las matemáticas son una asignatura importante en la educación de nuestros alumnos, ¿porqué siempre están cuestionadas? ¿Cuáles son las circunstancias actuales y en qué estado se encuentra la polémica respecto a los resultados de la Educación Matemática en España?

Actualmente padres, profesores y alumnos nos encontramos en un momento de cambio e incertidumbre respecto a la educación actual y futura de nuestros hijos. Cambio por el propio proceso de implantación de la LOGSE (que en este momento se está dando). Incertidumbre por la incorporación de un equipo ministerial de distinto signo político al que propició la LODE, la LOGSE y los actuales desarrollos legislativos y normativos de las mismas.

Si reconocemos que las matemáticas son una asignatura importante en la educación de nuestros alumnos, ¿porqué siempre están cuestionadas?

Pero en el caso concreto de la Educación Matemática más factores «avivan el fuego» en esta crisis:

1. El fuerte rechazo genérico a la LOGSE por parte de algunos sectores del profesorado.

2. La sensación generalizada de que el nivel en Matemáticas ha descendido vertiginosamente. Noticias en los medios de comunicación insisten en el mal nivel de Matemáticas de nuestro alumnado de acuerdo con evaluaciones internacionales, TIMS y otras, que sitúan nuestra área en bajos niveles de rendimiento de los alumnos comparados con otros países.

Sin embargo los datos y las al menos «dudosas» interpretaciones se hacen sin entrar a analizar las circunstancias sobre cómo y cuándo se han realizado, y en todo caso, si las pruebas son coherentes con el currículum y la metodología con la que se evalúa en cada país, aunque deslizan posibles causas del fracaso (por ejemplo, en los paises con más exito –Japón y Corea– no se permite utilizar calculadora).

3. La atribución casi exclusiva de la «bajada de nivel» a los cambios de contenidos y metodología (análisis, a nuestro juicio, parcial y que no tiene en cuenta que no hay apenas alumnado que haya cursado de modo íntegro los cuatro años de la Educación Secundaria Obligatoria).

4. La pérdida de horas de clase de Matemáticas en la ESO. Se está produciendo una fuerte ofensiva de distintos sectores –incluidos los ministeriales– para lograr un aumento de peso de las materias de humanidades en el currículo de la ESO y Bachillerato. No se tiene en cuenta, en este caso, el hecho de que las Matemáticas son mucho peor tratadas en el nuevo currículo, pues pierden horas e importancia, no sólo en comparación con la Lengua, sino con todas las materias del área de las ciencias sociales, que aumentan de forma extraordinaria su presencia en los planes de estudio.

Consideramos básico evitar cualquier indicio de corporativismo. En este momento podemos observar como colectivos vinculados a ciertas materias (fundamentalmente de las llamadas humanísticas), pelean por conseguir más horas en los programas de la Educación Secundaria. Alegan la potenciación de las humanidades desenterrando unos planteamientos en los que se enfrentan las «ciencias» a las «humanidades». Sorprende, sobre todo si tenemos en cuenta que la tendencia actual requiere integrar conocimientos y romper con estereotipos y falsos antagonismos. Ejemplos de ello pueden ser: la opción «Ciencias Sociales» de los nuevos Bachilleratos, en la que una asignatura básica es «Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales»; la utilización por parte de multitud de disciplinas tradicionalmente «de letras», de herramientas y procedimientos característicos de las «ciencias»; la aparición de nuevas asignaturas es las que se mezclan ciencia, historia, ética, antropología, tecnología...

Pero el hecho real es que ya se han perdido actualmente horas en la ESO respecto a las que los alumnos del mismo nivel cursaban en los cursos homólogos de la EGB. Concretamente 7.° y 8.° de EGB y 1.° y 2.° de BUP disponían de 4 horas por semana, mientras que ahora 1.°, 2.°, 3.° y 4.° de ESO disponen de 3 horas a la semana, por lo que se produce una pérdida objetiva del 25%, es decir, como si los alumnos tuvieran un curso completo de Matemáticas menos.

5. La práctica desaparición de los organismos públicos que controlaban de alguna manera la calidad del sistema educativo -Centro de Desarrollo Curricular, CIDE, etc. Actualmente se desconoce quién asume estas funciones y con qué criterios. Por ejemplo, se comenta entre los profesores que se están revisando de manera rápida y apresurada los currículos de las áreas de la ESO y del Bachillerato, así como la distribución de los horarios, y que esta revisión se está llevando a cabo sin posibilidad de acceder y discutir los criterios que se están siguiendo.

El proceso de enseñanza aprendizaje es un fenómeno complejo en el que intervienen distintos elementos: el alumno, el profesor, el entorno, los medios con los que se cuenta, la organización de la enseñanza, el tiempo, etc. Todos estos elementos han cambiado con la implantación de la ESO produciendo problemas que inciden negativamente en la enseñanza de las Matemáticas.

6. La falta de coordinación con la Universidad en lo que se refiere a los contenidos de los nuevos Bachilleratos. A veces, las pruebas de Selectividad no reponden a ellos o bien el nivel de exigencia es igual o mayor que en el COU (ver exámenes y resultados), lo que, unido al punto anterior, lleva indefectiblemente al fracaso del alumnado y al desprestigio de las nuevas enseñanzas.

7. El aumento de la edad de escolarización obligatoria, uno de los mayores aciertos de la LOGSE –desde nuestro punto de vista–, que conlleva una mayor presencia en el aula de alumnado con dificultades educativas generales que se ponen de manifiesto, más si cabe, en Matemáticas.

8. La pérdida de relevancia de nuestra disciplina. La educación Matemática y quienes trabajamos en ella no estamos nunca presentes en los foros de comunicación, salvo para publicar resultados negativos nunca contrastados y, por lo tanto, no existimos para la sociedad. Esto lleva a una falta de presencia social que incrementa dicha pérdida de relevancia.

El proceso de enseñanza aprendizaje es un fenómeno complejo en el que intervienen distintos elementos: el alumno, el profesor, el entorno, los medios con los que se cuenta, la organización de la enseñanza, el tiempo, etc. Todos estos elementos han cambiado con la implantación de la ESO produciendo problemas que inciden negativamente en la enseñanza de las Matemáticas.

Otro de los aspectos positivos de la LOGSE es la atención a la diversidad y, en efecto, se ha producido ya una diversificación del alumnado en la Educación Secundaria. Pero muchos profesores que imparten clase en este nivel educativo comentan la frustración por la imposibilidad de abarcar en la clase todas las situaciones: alumnos que necesitan ayuda continuada con avances más lentos y muchas actividades de refuerzo, alumnos interesados en avanzar y aprender nuevos métodos de trabajo e interesados en que en clase se hagan muchas más actividades. Y los programas, que a pesar de su reducción, se convierten en poco menos que imposibles de abarcar por la durísima reducción del horario de Matemáticas en la ESO, trasladando amplificado el problema al nuevo Bachillerato, donde el desarrollo de la programción completa sólo es apta para profesores formula-1 y el seguimiento de la misma para alumnos superdotados.

En cuanto al profesorado podemos decir que su nivel de competencia es más que satisfactorio. No sólo por la formación inicial sino también por la asistencia a actividades de formación continua, la mayoría del profesorado de matemáticas está a la altura de las circunstancias. Creo que el número de profesores de matemáticas debía aumentar para poder realizar otras actividades con grupos reducidos de alumnos. Es conocido por las autoridades educativas que el número de alumnos de cada profesor de matemáticas es de los más altos en sus centros, cuando debía bajar notablemente para atender a las dificultades de muchos de los alumnos con esta materia.

La escasez de medios con los que se cuenta es también un problema. Hoy se plantea en muchos centros la necesidad de dotarse de aulas para que se pueda trabajar en matemáticas a nivel experimental en temas como la medida, la probabilidad, la geometría, calculadoras y ordenadores, para lo que existen materiales educativos muy interesantes como ayuda al alumno a crear sus propias vías de acceso al conocimiento. En este sentido estamos un tanto retrasados con respecto a otros países europeos como Inglaterra, Dinamarca o Francia.

Pero consideramos que el mayor inconveniente a la hora de conseguir que nuestros alumnos sean competentes en matemáticas y, sobre todo, que sus conocimientos sean sólidos y no «cogidos con pinzas», es el número de horas de clase que disponen nuestros alumnos de secundaria y bachillerato LOGSE. En el nuevo Bachillerato sorprende que una parte de los alumnos de Ciencias tienen la posibilidad de no estudiar Matemáticas en el segundo curso. ¡Qué diferencia con otros países próximos como Francia o Alemania, donde las matemáticas son obligatorias durante todo el bachillerato incluso para los alumnos que no son de Ciencias!

Sin embargo, no fundamentamos la solicitud de más tiempo como el punto de llegada de una argumentación endógena, sino en el carácter instrumental de las Matemáticas, en el reconocimiento universal de que goza la materia y en las dificultades que rodean a su enseñanza y aprendizaje. No se puede negar el constante uso de las Matemáticas como elemento de referencia a la hora de evaluar la calidad de los sistemas educativos (actualmente se está evaluando la calidad de nuestro nuevo sistema educativo mediante un examen que se hace a alumnos de 4.° de ESO, en él las Matemáticas ocupan una parte importante). Tampoco podemos ignorar el papel de las Matemáticas en las pruebas de acceso a los ciclos formativos (nueva formación profesional), e incluso la indudable valoración (a veces exagerada) que tiene dentro de las propias familias de los alumnos.

De todas formas, conviene señalar que el tiempo no es el factor de más peso que influye en la calidad de la enseñanza de las Matemáticas. Es cierto que desarrollar los contenidos con la metodología adecuada para que la mayor parte de los alumnos alcancen los objetivos previstos, requiere más tiempo del que se dispone en este momento. Pero también lo es que la diversidad del nivel en Matemáticas de los alumnos y las propias características de las Matemáticas obligan a aplicar soluciones más imaginativas en la organización de la clase: agrupamientos flexibles, menor ratio alumnos/profesor, distintos «niveles» en función de las necesidades futuras del alumno etc.

...se hace necesario también reconocer la importancia de las Matemáticas, la necesidad de que se asignen los tiempos adecuados para su desarrollo en los distintos cursos del sistema educativo, de que se aporten los recursos humanos y materiales adecuados, de que se clarifiquen las orientaciones del MEyC y de que se intensifique la formación permanente del profesorado.

Y luego está el problema de la optatividad. No siempre coincide la optatividad que debe tener el alumno con la oferta que tiene en la realidad y a veces no siempre se han tomado decisiones atendiendo a criterios educativos. Por ejemplo, en Galicia existen en 1.° y 2.° de Secundaria Obligatoria (ESO) varias asignaturas optativas una de las cuales se denomina «Taller de Matemáticas»; es de suponer que la finalidad de una optativa es la de darle opción a los alumnos a que escogan una u otra materia, pero para el «Taller de Matemáticas» se incluyen unos obstáculos (tanto legales y organizativos como materiales) que impiden que la mayoría de los centros puedan, con la ley en la mano, ofertarlo. De esta forma la práctica totalidad del alumnado escogerá la asignatura que, por ley, no se ve sometida a esas restricciones (similares circunstancias se dan en otras comunidades). La optatividad es entonces ficticia.

Buscando una salida

La situación actual no es deseable y entre todos debemos buscar una salida. Para ello se hace necesaria una sensibilización de la sociedad hacia este problema y, por tanto, una sensibilización de todos los sectores implicados: administraciones educativas, padres, profesores y alumnos.

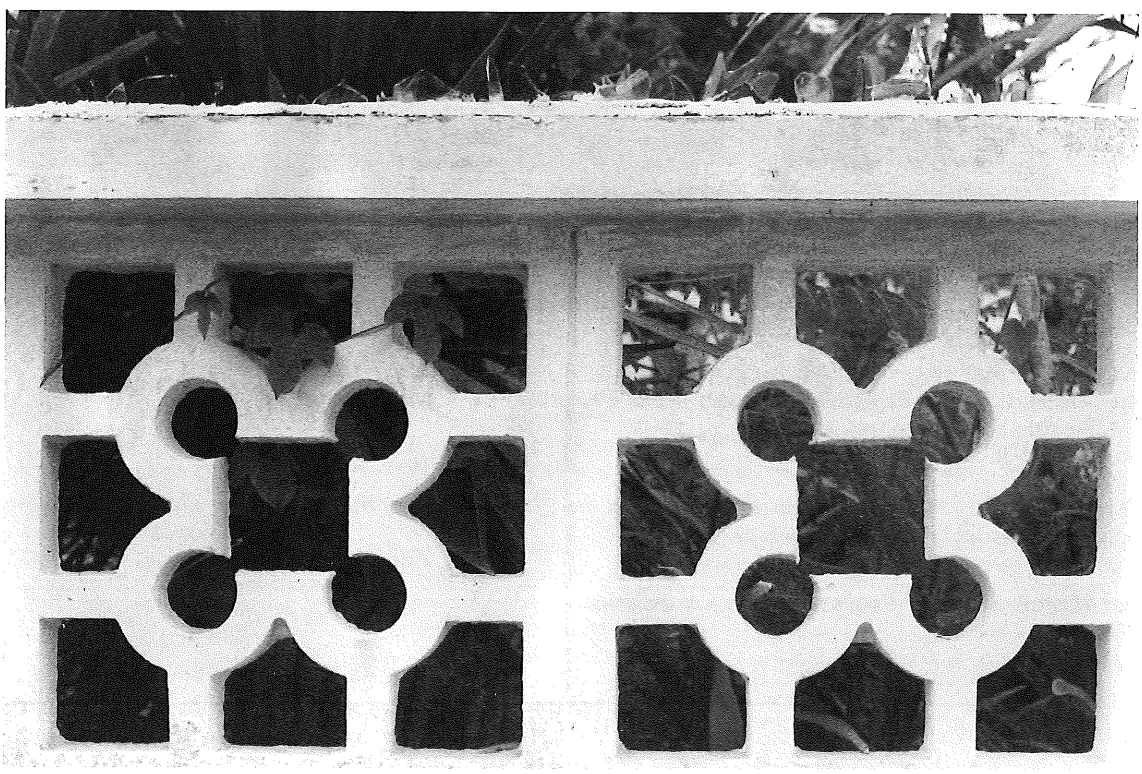
Y para ello se hace necesario también reconocer la importancia de las Matemáticas, la necesidad de que se asignen los tiempos adecuados para su desarrollo en los distintos cursos del sistema educativo, de que se aporten los recursos humanos y materiales adecuados, de que se clarifiquen las orientaciones del MEyC y de que se intensifique la formación permanente del profesorado.

De la misma manera debemos recuperar el prestigio de los profesores. Hay una falta de incentivos profesionales y una pérdida de prestigio social, lo que lleva a una desmoralización del profesorado en general, y en concreto de los profesores de Matemáticas y eso influye sin duda en la enseñanza. En cualquier reforma los profesores deben de ser tenidos en cuenta. A este respecto advertimos que cualquier reforma hecha a espaldas del profesorado está abocada al fracaso. Sostenemos que las sociedades de profesores y la FESPM son un cauce adecuado para el diálogo y deben de ser consultadas.

Nuestra Federación va a comenzar en breve proyectos de trabajo, seminarios y jornadas que aporten ideas y sugerencias, que haremos llegar al MEyC y a las comunidades autónomas con competencias educativas. Hemos establecido ya cauces de contacto y discusión con el MEyC y tenemos la intención de intervenir en los medios de comunicación de máxima difusión, con la intención de abrir un debate amplio y transparente.

Pensamos que las decisiones en educación deben apuntar al cumplimiento de los objetivos generales de nuestro sistema educativo y su desarrollo debe hacerse de acuerdo con criterios de rentabilidad a medio y largo plazo. Si se quiere dotar a los alumnos de una buena formación en todos los campos, será necesario que tengan una buena formación matemática. En otro caso, se impedirá que una mayoría de los futuros ciudadanos lleguen a alcanzar esta formación global, repercutiendo muy negativamente en aspectos que hoy ni siquiera podemos prever.

Ricardo Luengo
Presidente
de la Federación Española
de Sociedades
de Profesores de Matemáticas
(FESPM)



La Laguna (Tenerife). Foto: Luis Balbuena

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Antoni Vila
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Fidela Velázquez
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez Jiménez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya Bullido
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: J. Antonio Rupérez Padrón
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Modesto Sierra Vázquez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo González
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez
IES José María Pereda. C./ General Dávila, 288. 39007-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 11-21

Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad[1]

Josep Gascón

ARTÍCULOS

En este trabajo se presenta la noción de «contrato didáctico» y se demuestra su eficacia para analizar un problema didáctico concreto: el tránsito de la enseñanza de las matemáticas de secundaria a la universidad. Se muestra hasta qué punto las cláusulas del contrato están ligadas a las características específicas de las diferentes organizaciones matemáticas (de la geometría, del álgebra y del cálculo diferencial) y se describen los obstáculos epistemológicos asociados a los cambios de actividad matemática necesarios para llevar a cabo el proceso de estudio.

Planteamiento de un problema didáctico

Si queremos estudiar los cambios que se producen en la enseñanza de las matemáticas en el tránsito de la secundaria a la universidad deberemos seleccionar, entre la ingente cantidad de acontecimientos observables en las instituciones involucradas, una pequeña muestra que consideraremos como los «hechos relevantes» para nuestra investigación. ¿De dónde extraer los criterios para llevar a cabo esa inevitable selección? Así, por ejemplo, ¿hemos de restringirnos a los acontecimientos que tienen lugar en el aula?, y, dentro del aula, ¿cómo seleccionar los hechos que queremos tener en cuenta? En el supuesto de que decidamos ampliar el ámbito del estudio más allá del aula, ¿qué otras instituciones debemos tomar en consideración?

Si elegimos aquellos hechos que culturalmente aparecen como más relevantes, esto es, si los hechos que tomamos en consideración son los que, de alguna manera, dicta el sentido común sin el respaldo de ninguna teoría ni de ningún principio unificador, entonces nos resultará muy difícil interpretarlos de una manera coherente e integrada porque, inevitablemente, se tratará de hechos desligados que sólo podremos tratar de describir mediante nociones de la propia cultura escolar como, por ejemplo: contenidos más o menos «abstractos», mayor o menor «exigencia escolar», «capacidad» para el aprendizaje de las matemáticas, «nivel» inicial de los alumnos, «interés» y «motivación» de los estudiantes, metodologías de enseñanza más o menos «activas», etc.

El primer criterio que podemos utilizar para orientarnos en nuestra elección hace referencia al tipo de problema que pretendemos abordar: ¿queremos abordar un problema *psicológico*? ¿o se trata de un problema *sociológico*? ¿o bien de un problema *pedagógico*? En cada caso deberíamos escoger *hechos* susceptibles de ser interpretados como *fenómenos* (psicológicos, sociológicos, pedagógicos,...) y estudiar cómo evolucionan dichos fenómenos en el paso de la secundaria a la universidad. Así, por ejemplo, si quisiéramos estudiar los cambios que se producen en el «pensamiento del profesor» (entendido como el conjunto de procesos mentales de un sujeto), en el paso de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria de las matemáticas, nos estaríamos situando en el ámbito de la psicología y, en consecuencia, deberíamos tomar como base empírica hechos que se pueden describir e interpretar en el marco de dicha disciplina.

Pero si lo que queremos es plantear un *problema didáctico*, en el sentido de «didáctico-matemático», entonces la elección de los hechos que consideraremos «relevantes» vendrá determinada por los fenómenos que permitan plantear problemas didácticos, esto es, problemas relativos al *proceso de estudio de las matemáticas* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Para clarificar lo que esto significa, y dado que nosotros mismos formamos parte de la generación fundadora de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, es necesario explicitar algunas cuestiones que, en el caso de otras disciplinas, podrían parecer redundantes. De entre estas cuestiones básicas destacaremos, a título de principios metodológicos, las siguientes:

1) Existen *fenómenos didácticos*, relativamente universales y no sólo hechos didácticos aislados, singulares e irrepetibles.

En el marco de la didáctica fundamental en el que nos situamos, «fenómeno didáctico» significa «fenómeno didáctico-matemático». Todo fenómeno didáctico (en el sentido clásico de «relativo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas»), tiene un componente matemático esencial y, recíprocamente, los fenómenos relacionados con la actividad matemática no pueden ser analizados independientemente de los fenómenos relativos a su difusión y utilización. En este marco lo didáctico es denso en lo matemático de tal manera que es imposible separar empíricamente ambas aspectos de la realidad. La noción de «fenómeno didáctico» deja de ser exclusiva del proceso de enseñanza aprendizaje para referirse también a la producción, la utilización y la difusión de las matemáticas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

De la misma forma que la física se justifica por el estudio de los *fenómenos físicos* y no tendría razón de ser si únicamente existiesen hechos físicos singulares, la existencia de *fenómenos didácticos irreductibles* (esto es, que no se pueden reducir a los procesos *fisiológicos, psicológicos, sociológicos* o *pedagógicos* asociados) es lo que da sentido a la ambición de construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Para plantear adecuadamente nuestro problema didáctico sería preciso, por tanto, discernir cuáles son los fenómenos que, más allá de los hechos contingentes, observables en el aula o fuera de ella, permiten describir el paso de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria de las matemáticas. Qué relación hay entre los diferentes fenómenos que aparecen, cómo pueden ser explicados y, en última instancia, qué posibilidades tenemos de controlarlos.

2) A partir del análisis de la *actividad matemática escolar*[2] es posible describir los fenómenos didácticos y empezar a formular las leyes que los rigen. Este es uno de los postulados básicos de la didáctica fundamental (Brousseau, 1986).

Para llevar a cabo este análisis en el problema didáctico que nos ocupa, será preciso describir la *estructura de la organización matemática escolar* en cada una de las dos instituciones involucradas. Aquí nos centraremos únicamente en algunos aspectos de la organización de la geometría, el álgebra y el cálculo diferencial en secundaria y en la universidad.

3) Las reglas de juego de la *relación didáctica* están determinadas por una especie de contrato, el *contrato didáctico*[3], que rige en cada momento las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor en lo que hace referencia a la matemática enseñada en una institución dada.

Las cláusulas de este «contrato» son mayoritariamente implícitas y evolucionan con el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas. En nuestro caso será necesario, por tanto, investigar cómo se modifican las cláusulas del *contrato didáctico* y, en particular, cuáles son las nuevas cláusulas de dicho contrato que aparecen por primera vez en la enseñanza universitaria, así como las que desaparecen en relación a la enseñanza secundaria de las matemáticas.

Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo consiste, precisamente, en

1 Quiero agradecer a Josep Alsinet, Antoni Gomà y Agustí Reventós, compañeros en la comisión encargada por la Universidad Autónoma de Barcelona de redactar el «Informe sobre el pas de la secundària al primer curs universitari. Les matemàtiques al COU i al primer curs de la llicenciatura de matemàtiques i d'enginyeria informàtica en la UAB» (Alsinet, Gascón, Gomà i Reventós, 1997), la oportunidad que me han proporcionado de discutir, volver a pensar y reformular esta problemática en el ámbito de la didáctica de las matemáticas. Aunque el informe citado se basa en diversos estudios estadísticos comparativos del rendimiento de los estudiantes en COU y en los dos primeros cursos universitarios de matemáticas, aquí no utilizaré explícitamente esos datos.

2 Utilizaremos «escolar» en un sentido amplio, incluyendo en él todos los niveles educativos, desde la enseñanza primaria hasta la enseñanza universitaria. Postulamos que los fenómenos didácticos, en el sentido de didáctico-matemáticos, son relativamente independientes del nivel educativo en el que nos situemos aunque, como sucede, por ejemplo, con el fenómeno físico de la «gravitación», un mismo fenómeno didáctico puede manifestarse mediante efectos muy distintos en primaria, en secundaria y en la universidad. Este es uno de los aspectos en que los fenómenos didácticos son «universales».

3 La noción de «contrato didáctico» es una de las nociones fundadoras de la didáctica fundamental. Aunque se le han otorgado sentidos muy diversos y hasta se la ha trivializado como si se tratara de una noción que se puede interpretar desde el sentido común, la noción de «contrato didáctico» es, en realidad, una noción teórica que sólo toma su sentido preciso cuando se emplea a nivel de sistema didáctico en el marco de la *teoría de las situaciones didácticas* (Brousseau, 1986). En este trabajo utilizaremos la noción de contrato didáctico tal como aparece en el ámbito de la *institución escolar* (sea ésta secundaria o la universidad). Esto significa, por ejemplo, que consideraremos que el «contrato didáctico vigente en secundaria» es el constituido por las cláusulas que son comunes a todos los contratos didácticos que pueden establecerse actualmente en la enseñanza de las matemáticas en secundaria.

presentar la noción de «contrato didáctico», dada su importancia central en el paradigma de la didáctica fundamental. A través del análisis de los cambios que sufre el contrato en el paso de secundaria a la universidad, queremos poner de manifiesto hasta qué punto las cláusulas del contrato didáctico están ligadas a las características específicas de la organización matemática vigente en cada una de dichas instituciones y, hasta qué punto, los fenómenos didácticos (que, en general, se pueden analizar en términos del contrato) dependen para ser descritos, explicados e interpretados, del tipo de actividad matemática que sea posible llevar a cabo en cada una de dichas instituciones. Se trata, en resumen, de explicitar y ejemplificar en qué sentido el análisis de la actividad matemática, tal como ésta se lleva a cabo en las diferentes instituciones, constituye una nueva y vigorosa vía de acceso al estudio de los fenómenos didácticos.

Algunas organizaciones matemáticas escolares

¿Cuál es la diferencia entre las organizaciones escolares de la *geometría,* el *álgebra* y el *cálculo diferencial* tal como han sido reconstruidas[4] en secundaria y en la universidad?

Antes de empezar a contestar esta pregunta, indicaremos una diferencia muy característica y general entre las organizaciones matemáticas de secundaria y de la universidad. Dicho de una forma muy sintética, se trata del paso de una matemática «mostrativa» a una matemática «demostrativa». En secundaria la «demostración» está prácticamente ausente y las justificaciones, que aparecen sólo puntualmente, sirven para «embellecer» el discurso del profesor. El alumno (según el contrato didáctico vigente en secundaria) puede ignorarlas completamente. Casi nunca se ponen en cuestión los aspectos justificativos e interpretativos de la actividad que el contrato asigna a los alumnos.

...una diferencia muy característica y general entre las organizaciones matemáticas de secundaria y de la universidad [es] el paso de una matemática «mostrativa» a una matemática «demostrativa».

4 Postulamos que las matemáticas tienen que «volver a construirse» para poder ser enseñadas en la escuela (también en la universidad). Esto significa que deben ser «recreadas» bajo ciertas condiciones que no coinciden ni pueden coincidir con las condiciones que hicieron posible su construcción inicial. Las transformaciones que sufren las obras matemáticas para poder ser enseñadas son absolutamente imprescindibles e inevitables, no son accidentales, y responden a leyes totalmente independientes de las decisiones y la voluntad de los actores de las instituciones escolares. El conjunto de dichas transformaciones adaptativas se denomina *transposición didáctica* (Chevallard, 1985).

En coherencia con este carácter esencialmente *mostrativo* de la matemática de secundaria, las *definiciones* tampoco juegan un papel demasiado importante; incluso es habitual la utilización de definiciones implícitas porque no se siente la necesidad de explicitarlas. Así, por ejemplo, para un alumno de secundaria ningún rectángulo es un cuadrado «porque los rectángulos no tienen forma cuadrada». Se pone así de manifiesto que en secundaria las definiciones sirven más para describir objetos previamente «conocidos» que para construir lógicamente objetos nuevos.

En la enseñanza universitaria, por contra, la demostración pasa a ser la actividad matemática principal. Se produce así un cambio brusco en la función que las demostraciones desempeñan en la organización matemática escolar. El contrato didáctico vigente en la universidad establece que todas las afirmaciones deben poder ser justificadas por el estudiante: ha de verificar las hipótesis de un teorema para justificar su aplicabilidad; debe poder comprobar si un objeto satisface o no satisface cierta definición; las gráficas que «muestran» una propiedad dejan de tener valor «demostrativo», etc. Se produce, en resumen, una verdadera invasión del *razonamiento demostrativo* con la consiguiente importancia creciente del papel de las *definiciones.* Aparece el problema de determinar en cada momento «lo que está definido», «los términos exactos de la definición», «las hipótesis necesarias o superfluas de un teorema», «lo que se puede utilizar y lo que no se puede utilizar para hacer una demostración», etc.

Por lo que respecta a la actividad de resolución de problemas, y en coherencia con este cambio de la matemática «mostrativa» a la matemática «demostrativa», se pasa de una fuerte preponderancia de los *problemas por resolver* de secundaria, a una importante presencia de los *problemas por demostrar* en la universidad (Polya, 1945).

Este importante cambio en el paso de una organización matemática a la otra, está fuertemente relacionado con la nueva posición del estudiante en la relación didáctica: éste pasa de ser un alumno con escasa autonomía y mínima responsabilidad matemática, a ser un estudiante (co)responsable de su proceso de estudio.

Organización escolar de la geometría

Los diferentes tipos de problemas de geometría que aparecen en secundaria tratan principalmente de las *relaciones internas* entre los *elementos de figuras concretas.* Relacionan entre sí, por ejemplo, los elementos de un triángulo o de otras figuras simples y, en algunos casos, tratan de las relaciones internas entre los elementos de ciertas configuraciones (punto-plano, punto-recta, plano-plano, haz de planos, etc.) que hacen el papel de figuras compuestas. Cuando en un tipo de problemas aparece la relación entre dos o más figuras (por ejemplo, la relación de semejanza), se pone el acento en la relación que resulta entre los elementos de una figura y los correspondientes elementos de la otra (por ejemplo, la relación entre las áreas de dos figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza) y no en la relación en sí misma.

Los nuevos tipos de problemas de geometría que aparecen en la enseñanza universitaria dejan de centrarse en el estudio interno de figuras concretas para pasar a estudiar, desde el primer momento, *clases de figuras*. Se introducen ciertas características del *espacio* considerado globalmente (por ejemplo la *métrica*) y se problematizan las propias *transformaciones geométricas* de este espacio tomándolas como nuevos objetos geométricos. Piaget y García (1982) describen este cambio, sin situarlo en instituciones didácticas concretas, como el paso del estadio *intra-figural* al estadio *inter-figural*.

Los nuevos tipos de problemas de geometría que aparecen en la enseñanza universitaria dejan de centrarse en el estudio interno de figuras concretas para pasar a estudiar, desde el primer momento, clases de figuras.

Se produce de esta forma un cambio radical de la *problemática geométrica*. Todos los implícitos de la geometría de secundaria son aquí cuestionados, desde el *sistema de referencia* (transparente e incuestionable en secundaria) hasta las nociones geométricas que tenían en secundaria un sentido «absoluto» (como la «distancia», el «paralelismo» o la «incidencia») y que en la enseñanza universitaria pasan a tener un sentido geométrico «relativo» (nociones afines, métricas, proyectivas,...). Incluso las técnicas matemáticas más comunes en secundaria (como las que proporcionan la distancia entre dos puntos o el producto escalar de dos vectores) son aquí cuestionadas y reinterpretadas de acuerdo con las características globales del espacio (como, por ejemplo, la métrica que se considera en cada caso).

En cuanto al discurso teórico asociado a la práctica geométrica, hay que decir que en secundaria se suele reducir a la justificación inmediata de las técnicas que se utilizan. Se trata, en cualquier caso, de justificaciones no demasiado operativas que, por tanto, tienden a desaparecer de la práctica matemática de los alumnos. La proliferación de técnicas geométricas «injustificadas» ha llegado a tal punto que ha provocado la necesidad, por parte de los correctores de las pruebas de matemáticas de Selectividad, de exigir que los alumnos expliquen por escrito el procedimiento que utilizan bajo la amenaza de invalidar totalmente la resolución.

En la universidad, por el contrario, la *teoría* toma desde el principio un gran protagonismo. El discurso teórico lejos de estar subordinado a la práctica geométrica, esto es, lejos de limitarse a «justificar» e «interpretar» una presunta actividad geométrica previa, se constituye él mismo en el punto de partida de la actividad matemática y en la principal fuente de nuevos tipos de problemas. Así, por ejemplo, del análisis teórico de las estructuras que forman las transformaciones geométricas y de las clasificaciones (proyectiva, afín y métrica) de las cónicas surgen nuevos tipos de problemas. Se produce así el tránsito hacia el estadio *trans-figural* (Piaget y García, 1982).

Organización escolar del álgebra

La mayoría de problemas de álgebra escolar que aparecen en secundaria desembocan en la *resolución de ecuaciones aisladas*. Únicamente en el último curso de la enseñanza secundaria se introduce tímidamente el estudio de algunas relaciones entre diferentes ecuaciones y empiezan a aparecer algunos criterios de resolubilidad, aunque restringidos a los sistemas de ecuaciones lineales.

La mayoría de problemas de álgebra escolar que aparecen en secundaria desembocan en la resolución de ecuaciones aisladas.

En términos generales podemos hablar del *carácter prealgebraico de las matemáticas escolares* (Gascón, 1997) especialmente visible en la secundaria obligatoria y que se pone de manifiesto en un conjunto de características interrelacionadas entre sí. En el trabajo citado hemos mostrado los siguientes rasgos del carácter prealgebraico de las matemáticas:

a) La desintegración de las clases de problemas que aparecen y que es correlativa a la atomización de las técnicas matemáticas que se utilizan.

b) La incapacidad de la inmensa mayoría de las técnicas que se usan en secundaria para tratar en pie de igualdad las variables «conocidas» y las «desconocidas».

c) Las grandes dificultades que se presentan para llevar a cabo «justificaciones» o «fundamentaciones» algebraicas de técnicas aritméticas, geométricas o combinatorias y para «demostrar» fenómenos matemáticos de todo tipo.

d) La ausencia, a lo largo de toda la secundaria, del uso sistemático de parámetros y del juego entre parámetros y variables.

e) La utilización de las fórmulas como simples algoritmos de cálculo, en lugar de emplearlas como verdaderos modelos algebraicos capaces de producir conocimientos sobre el sistema modelizado.

f) El «lenguaje funcional» aparece en secundaria totalmente separado del «lenguaje algebraico» y esta separación comporta dificultades en el manejo de funciones. En particular, no está permitido que aparezcan funciones de varias variables y no se pueden utilizar las técnicas funcionales (de cálculo del dominio, de la dependencia recíproca, etc.) para estudiar fórmulas.

g) La impotencia de las técnicas matemáticas que se utilizan en secundaria para estudiar las *condiciones de existencia del objeto incógnita.* La obtención de la incógnita aparece como objetivo principal y prácticamente único en la resolución de problemas a este nivel.

Se constata, en definitiva, una presencia muy débil del instrumento algebraico en el trabajo matemático escolar, lo que nos permite hablar del *carácter prealgebraico de la actividad matemática en secundaria,* en el sentido de «actividad matemática aún no algebrizada». En la terminología de Piaget y García (1982) podría decirse que la organización del álgebra en secundaria se sitúa en el estadio *intra-operacional,* aunque esta caracterización no abarca toda la riqueza del fenómeno didáctico que hemos denominado «carácter prealgebraico de la matemática escolar».

Paradójicamente, y a pesar de su pobre presencia en secundaria, el instrumento algebraico se utiliza en la enseñanza universitaria de una forma transparente, como si su uso no fuese problemático en ningún sentido: la utilización sistemática de parámetros y variables y el juego entre sus funciones recíprocas; la traducción de condiciones al lenguaje algebraico; la manipulación de fórmulas con ayuda de las técnicas del lenguaje funcional y su utilización como modelos algebraicos, así como el uso de justificaciones y demostraciones «algebraicas» son, desde el inicio de la práctica universitaria, maneras de hacer casi rutinarias.

[en secundaria] se estudian las relaciones internas entre los elementos de una misma función, pero no se acostumbran a considerar las transformaciones de las funciones ni las diferentes familias de funciones.

Es precisamente esta supuesta pertenencia del instrumento algebraico al «medio matemático» de los estudiantes universitarios, esto es al «conjunto de objetos matemáticos cuyas propiedades se dan por sentado y que pueden ser manipulados de forma segura por los estudiantes» (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) lo que permite tomar el propio lenguaje algebraico como objeto de estudio en sí mismo y llegar muy rápidamente al *estudio de estructuras algebraicas,* generándose nuevos tipos de problemas que tratan sobre espacios vectoriales, clasificación de grupos cíclicos, anillos, ideales, anillos cocientes, grupos de matrices sobre un cuerpo finito, etc. Se pasa así muy rápidamente a los estadios *inter-operacional* y *trans-operacional* (Piaget y García, 1982).

En la enseñanza secundaria la práctica algebraica se interpreta como una actividad casi «aritmética» hasta el punto de intentar aritmetizar los objetos algebraicos que aparecen: las letras se interpreten como números generalizados, las ecuaciones como igualdades entre números desconocidos, etc. En cierto sentido esta aritmetización constituye una trivialización o desnaturalización del álgebra que está asociada a la interpretación de ésta como una especie de «aritmética generalizada» (Gascón, 1994-95).

Por el contrario, en la organización matemática universitaria la algebrización de la actividad matemática es tan completa y natural desde un principio que no hay ninguna necesidad de interpretarla de acuerdo con los aspectos más básicos, prealgebraicos, de la propia actividad. Este abismo entre las dos maneras de interpretar el álgebra, en secundaria y en la universidad, es uno de los aspectos más llamativos de la «ruptura» entre ambas organizaciones matemáticas.

Organización escolar del cálculo diferencial

De nuevo hay que decir que los problemas escolares de cálculo propios de secundaria hacen referencia a funciones concretas consideradas aisladamente; así, se estudian las *relaciones internas* entre los elementos de una misma función, pero no se acostumbran a considerar las *transformaciones de las funciones* ni las diferentes *familias de funciones.* Si se estudia algún tipo de relación entre dos o más funciones (por ejemplo entre la función logarítmica y la función exponencial o entre la función seno y la función coseno), el énfasis se pone siempre en las propiedades particulares de las funciones relacionadas más que en la relación misma.

En la organización matemática escolar de secundaria las familias de funciones no se toman como objetos de estudio en sí mismas. Así, por ejemplo, si una familia de funciones depende de un parámetro, éste se interpreta como un número concreto (inicialmente desconocido) que se corresponde con la única función de la familia que se quiere estudiar (por ejemplo, la única función de la familia que es continua o derivable). De esta manera se pone de manifiesto que la interpretación simplista del álgebra elemental como «aritmética generalizada», llega a tener consecuencias importantes incluso en la organización escolar del cálculo en secundaria.

En el nivel universitario, la problemática del cálculo diferencial pasa muy rápidamente del estudio de las funciones concretas y aisladas al de las clases de funciones, sucesiones de funciones y hasta espacios funcionales. Aparece, de nuevo, la rápida sucesión del estadio *intra-*, característico de la organización matemática de secundaria, a los estadios *inter-* y *trans-*, específicos de la organización universitaria.

Este cambio de problemática origina la *integración entre muchos tipos de problemas* algunos de los cuales eran tratados separadamente en secundaria, mientras que otros aparecen ahora por primera vez. En particular, muchos tipos de problemas relativos a sucesiones, ecuaciones e inecuaciones, límites, series numéricas, teorema del valor medio, serie de Taylor, derivación e integración, estudio de familias de funciones,... se tratan ahora conjuntamente de una manera efectiva, con técnicas muy potentes y complejas. Se genera de esta forma un gran campo de problemas cuyas técnicas integradas sólo pueden desarrollarse en el marco de una actividad matemática suficientemente algebrizada. Al mismo tiempo las nuevas técnicas analíticas requieren, para poder «vivir» con normalidad en la institución universitaria, un entorno teórico, justificativo e interpretativo, muy rico y sofisticado, lo que provoca un crecimiento muy rápido de la teoría asociada. Mientras que la «intuición geométrica» era suficiente en secundaria, uno de los objetivos principales del estudio del cálculo en el nivel universitario consiste, precisamente, en poner de manifiesto que dicha intuición no sólo es insuficiente sino que es engañosa. Esta ruptura en el discurso justificativo entre ambas organizaciones del cálculo es, también, bastante radical.

Paralelamente se ha detectado un fenómeno que algunos investigadores han denominado *algebrización del cálculo diferencial escolar* (Artigue, 1995) y que consiste en la tendencia a enseñar el cálculo mediante procesos «finitos» (incluyendo el paso al límite), intentando reducir las técnicas específicas del análisis, en las que prima la utilización de condiciones suficientes, a maneras de hacer puramente «algebraicas» centradas en el uso de equivalencias sucesivas. Aunque este fenómeno aparece en ambas instituciones, es mucho mejor «tolerado» en secundaria que en la universidad.

Cambios en el contrato didáctico

Hasta aquí hemos analizado algunas características específicas de la organización matemática escolar en secundaria y en la universidad. Queremos subrayar que dichas características constituyen, por sí mismas, un reflejo de los correspondientes contratos. Así, por ejemplo, el carácter prealgebraico de la matemática escolar en secundaria muestra bien a las claras qué tipo de actividad matemática y, en definitiva, qué responsabilidades matemáticas, podrá asignar a los alumnos el contrato vigente actualmente en dicha institución.

Una vez situados en el seno de una institución escolar determinada, con una organización matemática concreta, la noción clave para analizar el proceso de estudio será la de «contrato didáctico».

Una vez situados en el seno de una institución escolar determinada, con una organización matemática concreta, la noción clave para analizar el proceso de estudio será la de «contrato didáctico». Dicha noción fue introducida en didáctica de las matemáticas por Guy Brousseau (1986) en filiación, pero también en ruptura, con la noción de *contrato social* del filósofo francés J. J. Rousseau. En una primera aproximación podemos considerar que el contrato didáctico (a nivel de institución escolar) viene determinado por el conjunto de cláusulas que, de una manera más o menos implícita, asignan en el seno de dicha institución, las obligaciones recíprocas de los miembros de la comunidad de estudio en lo que hace referencia al proceso de estudio de una obra matemática concreta. El *carácter marcadamente implícito* de las cláusulas del contrato didáctico viene reforzado porque, en muchos casos, si fuesen explicitadas se pervertiría su función rectora del proceso de estudio.

Las cláusulas del contrato didáctico presentan cierta *relatividad institucional*, dependiendo no sólo de la institución como tal (secundaria o universidad), sino también de las organizaciones matemáticas respectivas («geometría en secundaria», «geometría en la universidad», etc.) y de los *dispositivos didácticos* concretos («clase de problemas», «clase de prácticas», «clase de teoría», «libro de texto», «dispositivos de evaluación», etc.) que intervienen en cada momento como ayudas al estudio.

Pero el contrato didáctico rige, en primera instancia, la distribución de responsabilidades en el juego didáctico que se establece entre los estudiantes, el conocimiento matemático y el profesor como guía del estudio. Por esta razón, aunque fijemos una institución escolar determinada y una organización matemática concreta (por ejemplo, la geometría en la universidad) y un dispositivo didáctico específico (por ejemplo, la clase de problemas) el contrato didáctico no queda fijado puesto que sus cláusulas evolucionan a medida que avanza el proceso de estudio.

En este trabajo no pretendemos llevar a cabo un análisis tan fino de los cambios del contrato (así, por ejemplo, no pretendemos estudiar aquí cómo evoluciona el contrato didáctico cuando en la clase de problemas de la universidad se avanza en el estudio de la clasificación proyectiva de cónicas). Situándonos en un nivel de análisis más general, describiremos únicamente algunos cambios del contrato didáctico cuando éstos se pueden observae en el ámbito de la institución escolar globalmente considerada.

En esta sección utilizaremos los análisis anteriores relativos a las respectivas organizaciones matemáticas en secundaria y en la universidad como base para interpretar los cambios que se producen en el tipo de actividad matemática (y, por tanto, en el contrato) al pasar de una institución a la otra.

Nueva distribución de la responsabilidad matemática

En el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad, y por lo que respecta a posibles cambios del contrato didáctico, una de las preguntas más generales que pueden formularse es la siguiente: ¿cuáles son los cambios del contrato que hacen referencia a la distribución de la «responsabilidad matemática» entre el profesor y los alumnos?

Para cumplir el contrato didáctico vigente actualmente en la enseñanza secundaria los alumnos deben únicamente «seguir las clases». El proceso de estudio de las matemáticas queda, en secundaria, muy encerrado en el aula; no es preciso «completarlo» fuera de ella salvo en lo que respecta a la obligación de hacer algunos ejercicios que deben servir para «entender» lo que se ha dicho en clase y para practicar lo que se ha hecho en clase. El contrato didáctico vigente en secundaria asigna al profesor la responsabilidad última y casi exclusiva del aprendizaje matemático de los alumnos. El profesor tiene la obligación (delante de los alumnos y de la institución) de explicitar con toda claridad lo que debe hacer el alumno para aprender y de controlar paso a paso y constantemente la actividad del alumno. A éste se le asigna únicamente la responsabilidad de no desaprovechar las clases y de realizar la actividad que el profesor le marca en cada momento.

...al pasar de la secundaria a la universidad se produce un cambio importante y repentino en el contrato didáctico: el nuevo contrato didáctico traspasa al estudiante una parte importante de la responsabilidad didáctico-matemática que en secundaria era exclusiva del profesor.

Según el nuevo contrato didáctico, vigente en la universidad, el proceso de estudio de las matemáticas deja de estar encerrado en el aula. Uno de los síntomas de este cambio lo constituye el desdoblamiento en dos dispositivos diferentes («clase de teoría» y «clase de problemas») de la tradicional y monolítica «clase de matemáticas» de secundaria. Esta organización universitaria responde a una concepción «teoricista» de las matemáticas y de su enseñanza y origina discordancias y vacíos que tienen, sin embargo, la virtud de poner de manifiesto la necesidad ineludible del estudiante de controlar su propio proceso de estudio.

Lo anterior comporta, en particular, una menor dependencia mutua entre el profesor y el estudiante, en comparación con la situación que se da en secundaria; sobre el estudiante universitario recae la responsabilidad de decidir de qué forma ha de estudiar y cómo ha de utilizar las clases de teoría y las de problemas para mejorar su estudio. De repente el contrato le asigna la responsabilidad de «entender» las matemáticas, de relacionar, interpretar, justificar y globalizar los conocimientos que adquiere de muy diversas fuentes y de decidir cuál es la utilización más adecuada de las diversas técnicas, definiciones, teoremas, etc. Él es, ahora, el último y principal responsable de su propio aprendizaje.

Tenemos, en resumen, que al pasar de la secundaria a la universidad se produce un cambio importante y repentino en el contrato didáctico: *el nuevo contrato didáctico traspasa al estudiante una parte importante de la responsabilidad didáctico-matemática que en secundaria era exclusiva del profesor.*

Cambio de las funciones del trabajo técnico

El trabajo matemático en la enseñanza primaria se caracteriza por la preponderancia de las *técnicas simples*, esto es, por la proliferación de técnicas matemáticas que se pueden describir con mucha precisión y evaluar con gran fiabilidad. Con la extensión de la obligatoriedad de la enseñanza hasta los 16 años se observa una tendencia a generalizar este tipo de trabajo a toda la ESO para «asegurar» resultados visibles en el aprendizaje matemático al final de la etapa y no quedarse «sin nada». Esta tendencia lleva a dar prioridad a las técnicas algorítmicas en toda la enseñanza secundaria obligatoria.

Al lado de este resurgimiento del *tecnicismo* está avanzando cada vez con más fuerza la tendencia *modernista* (Gascón, 1994) que propugna la necesidad de que el alumno resuelva problemas «abiertos», problemas «creativos» y, en última instancia, problemas de los que aparecen en las «olimpiadas matemáticas». Mientras que el tecnicismo está sólidamente enraizado en los sistemas de evaluación de primaria y secundaria, el modernismo se mantiene a un nivel más ideológico dada la dificultad objetiva para materializarlo en los dispositivos de evaluación.

En el contrato didáctico vigente en la enseñanza secundaria nos encontramos con la obligación del profesor de «enseñar a utilizar determinados algoritmos» (como núcleo de lo que se considera «enseñar matemáticas» a lo largo de toda la enseñanza obligatoria) mientras crece, paradójicamente, el rechazo ideológico del trabajo «rutinario» y «repetitivo» porque éste se contrapone culturalmente al «verdadero» trabajo científico. En secundaria, el contrato no establece ninguna ligazón entre el trabajo rutinario (el dominio de ciertas rutinas es una de las primeras responsabilidades que el contrato asigna a los alumnos) y la ambición creciente de que los alumnos sean capaces de resolver problemas matemáticos «abiertos». La proliferación de las olimpiadas matemáticas y su creciente prestigio, son un indicio más de que el contrato didáctico vigente en secundaria evoluciona rápidamente en esa dirección «esquizofrénica».

En la enseñanza universitaria la institucionalización del trabajo técnico es muy débil; así mientras en la «clase de teoría» no se tienen muy en cuenta las técnicas matemáticas ni la pericia en su utilización, el contrato vigente en la «clase de problemas» lleva a cambiar constantemente de tipo de problemas, lo que impide al estudiante llegar a ser «oficialmente» experto en el uso de las técnicas matemáticas. Se exige al estudiante universitario flexibilidad en el uso de dichas técnicas y, cada vez más, una actividad exploratoria «libre y creativa», pero no se le proporcionan los medios para desarrollar dicha actividad. Se produce de esta forma una contradicción interna en las cláusulas del contrato didáctico que da origen a la que hemos llamado «paradoja de la creatividad» (para más detalles, Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Cambios en la evaluación

El contrato didáctico vigente en secundaria asigna al alumno la responsabilidad de resolver los problemas de una forma bastante aislada y relativamente descontextualizada, como si resolver un problema constituyese un objetivo en sí mismo. Este aspecto del contrato es un reflejo de la *atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas* y de la consiguiente limitación de los objetivos didácticos a largo plazo en beneficio de los más puntuales y limitados en el tiempo. Se trata de una tendencia creciente que, en sus manifestaciones más extremas, está dando origen a la pretensión absurda de una *enseñanza instantánea de las matemáticas*. En la universidad, por el contrario, es posible *retardar mucho más* el cumplimiento de las obligaciones asignadas por el contrato didáctico, éstas dejan de ser así de inmediato cumplimiento.

Un indicador muy significativo de la diferente urgencia en el cumplimiento de las obligaciones que asignan los respectivos contratos, lo proporciona el tipo de relación que se establece en cada caso entre los actores de la relación didáctica (estudiantes y profesor) y, muy especialmente, las diferencias entre los respectivos dispositivos de evaluación.

El profesor de secundaria, presionado por la urgencia del contrato, debe preguntar constantemente a los alumnos sobre lo que se está haciendo en clase exigiendo su participación activa, inmediata y continua. En la universidad, sin embargo, el contrato no sólo no obliga, sino que hace muy difícil que el profesor tenga este tipo de relación con la relación que tienen los estudiantes con las matemáticas. Se diría que el contrato en la universidad preserva la privacidad de la relación de los estudiantes con las matemáticas impidiendo que dicha relación esté completamente controlada por el profesor.

Correlativamente a la debilitación de los objetivos didácticos a medio y largo plazo, los *dispositivos de evaluación* en secundaria ocupan cada vez más espacio y se confunden progresivamente con el proceso de enseñanza. El profesor se siente en la obligación de *evaluar continuamente* a los alumnos, de controlar y dirigir casi constantemente

Al lado de este resurgimiento del tecnicismo está avanzando cada vez con más fuerza la tendencia modernista (Gascón, 1994) que propugna la necesidad de que el alumno resuelva problemas «abiertos», problemas «creativos» y, en última instancia, problemas de los que aparecen en las «olimpiadas matemáticas».

la actividad de éste. Resulta así un tipo de evaluación en la que los alumnos deben reproducir casi mecánicamente lo que se acaba de hacer en clase, en la que tiende a desaparecer toda exigencia de explicaciones, justificaciones e interpretaciones y en la que se ha perdido cualquier atisbo de visión global de la materia.

Aunque algunos indicios hacen pensar que esta tendencia empieza a ganar terreno también en la enseñanza universitaria (asignaturas cuatrimestrales, multiplicación del número de pruebas escritas, clases de prácticas, publicación de los exámenes, instauración de «problemas tipo», etc.), todavía se mantiene una importante distancia entre el proceso de enseñanza y los dispositivos de evaluación.

De hecho, en coherencia con la mayor independencia del estudiante respecto al profesor, con la mayor responsabilidad matemática de éste y con la posibilidad de diferir en el tiempo las responsabilidades que asigna el contrato didáctico, la evaluación universitaria se basa en actividades cuya resolución requiere cierta elaboración personal y cierta interpretación global de la materia. El tipo de evaluación universitaria pone de relieve que las clases de «teoría» y de «problemas» todavía se conciben como ayudas al proceso de estudio de las matemáticas del que debe responsabilizarse, en última instancia, el propio estudiante (aunque éste no disponga de los instrumentos necesarios para hacerse cargo de dicha responsabilidad). Lo que se pretende evaluar es el fruto de dicho estudio y no únicamente las actividades «auxiliares» que se llevan a cabo en las clases.

Resulta así [en secundaria] un tipo de evaluación en la que los alumnos deben reproducir casi mecánicamente lo que se acaba de hacer en clase, en la que tiende a desaparecer toda exigencia de explicaciones, justificaciones e interpretaciones y en la que se ha perdido cualquier atisbo de visión global de la materia.

...la evaluación universitaria se basa en actividades cuya resolución requiere cierta elaboración personal y cierta interpretación global de la materia.

Obstáculos en el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad

Hemos visto que para analizar los cambios que se producen en el paso de la enseñanza de las matemáticas de secundaria a la universidad, debemos abordar el problema didáctico mucho más amplio del paso de *estudiar matemáticas en secundaria* a *estudiar matemáticas en la universidad.* Una vez en este ámbito, hemos descrito nuestro problema didáctico en términos de los cambios que sufre el *contrato didáctico* al pasar de una a otra institución. Hemos mostrado que dichos cambios dependen fuertemente de las *organizaciones matemáticas* de las obras matemáticas estudiadas (en nuestro caso: *geometría, álgebra* y *cálculo diferencial),* tal como han sido reconstruidas en secundaria y en la universidad.

Dado que los cambios en el tipo de actividad matemática necesarios para pasar de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad pueden ser descritos, en última instancia, a partir de las modificaciones de la organización matemática escolar, decimos que dichos cambios están asociados a ciertos «obstáculos epistemológicos» del proceso de estudio (Brousseau, 1983). Puede decirse que muchos de estos cambios son imprescindibles para avanzar en el proceso de estudio por cuanto que son *constitutivos del desarrollo del conocimiento matemático* (por ejemplo, el paso de una actividad matemática «prealgebraica» a una actividad matemática plenamente «algebrizada»); pero también es verdad que la forma como se institucionaliza el paso de secundaria a la universidad puede complicar más que favorecer la articulación de los necesarios cambios de actividad matemática, llegando a crear «obstáculos» artificiales e innecesarios al proceso de estudio.

Para concluir resumiremos los principales cambios en la naturaleza de la actividad matemática que se producen en el paso de secundaria a la universidad. Queremos subrayar que el carácter inicialmente «epistemológico» de dichos obstáculos no impide que éstos lleven asociados lo que Piaget y García (1982, 234) denominan «obstáculos psicogenéticos».

1) Se produce el paso de una *actividad matemática mostrativa* basada en recordar, ordenar y sistematizar conocimientos fundamentados en el sentido común, a una *actividad matemática demostrativa* cuyo objetivo principal es la construcción de conocimientos matemáticos que requiere decidir en cada momento qué hechos se pueden utilizar y cuáles no pueden utilizarse porque no han sido establecidos todavía (independientemente del grado de «evidencia intuitiva» de cada uno de ellos).
2) Se pasa de una *actividad matemática atomizada* que trata con problemas bastante aislados, problemas que forman pequeñas clases poco relacionadas entre sí, a una *actividad matemática más globalizada* en la que las clases anteriores se integran en grandes campos de problemas que incluyen nuevas clases. Esta actividad matemática globalizada está muy fuertemente

interrelacionada con los elementos «teóricos» (justificativos e interpretativos) que anteriormente estaban relativamente ausentes de la actividad y que ahora pasan a jugar el papel fundamental de ir construyendo progresivamente nuevas y más potentes técnicas matemáticas.

3) De una *actividad matemática evaluable instantáneamente*, encerrada en el aula y absolutamente dirigida y controlada por el profesor, se pasa a una *actividad matemática evaluable a medio y largo plazo*, con objetivos más globales, mucho más abierta (menos centrada en el aula, menos controlada por el profesor y menos dependiente de la enseñanza de éste) donde hay más espacio para que el estudiante desarrolle la «responsabilidad matemática», aunque no siempre se le proporcionan los medios para ello.

4) Se pasa de una *actividad matemática tecnicista* en la que la centración exclusiva en las técnicas más simples, visibles y algorítmicas impide el desarrollo interno de las mismas, a una *actividad matemática teoricista* en la que las técnicas juegan únicamente un papel auxiliar y donde el «trabajo de la técnica» no está institucionalizado.

   El crecimiento de las tendencias *modernistas* hace emerger en ambas instituciones la *paradoja de la creatividad*, esto es, la contradicción entre las nuevas cláusulas del contrato didáctico (que asignan al estudiante la responsabilidad de realizar una actividad matemática «creativa») y las funciones de los dispositivos de ambas instituciones que, por razones diferentes, no proporcionan los medios necesarios para llevar a cabo una verdadera actividad matemática creativa. La paradoja de la creatividad se manifiesta más crudamente en el nivel universitario debido, entre otras cosas, a las características propias de la organización matemática universitaria.

5) Se pasa de una actividad *matemática prealgebraica* o sólo rudimentariamente algebrizada, a una *actividad matemática plenamente algebrizada*[5]. El obstáculo tendría aquí relación con la forma abrupta y poco explícita de producirse la algebrización, esto es, con la brusquedad del cambio de tipo de actividad matemática. Se pasa muy rápidamente de una presencia muy débil del instrumento algebraico a una actividad en la que se supone implícitamente que dicho instrumento forma parte del «medio matemático» de los estudiantes, esto es, de los objetos matemáticos que no son problemáticos y pueden ser manipulados con absoluta seguridad por los estudiantes.

Cada uno de estos obstáculos pone de manifiesto, en primer lugar, las fortísimas restricciones que la organización matemática y, por tanto, el contrato didáctico vigente en secundaria, impone sobre el tipo de actividad matemática que se puede llevar a cabo en dicha institución.

Debemos insistir en que, tal como hemos explicado en la nota 4, las características de la organización matemática de una institución son el resultado de los complejos procesos de *transposición didáctica* que, a su vez, son esencialmente independientes de las decisiones, la formación y la voluntad de los actores de dicha institución. No se trata, por tanto, de hacer ninguna crítica, que sería absurda y acientífica, a los profesores de secundaria. Se trata, por contra, de constatar que algunos aspectos de la organización matemática de secundaria dificultan objetivamente el desarrollo del proceso de estudio y, en particular, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en este nivel educativo.

El análisis didáctico cumple así una de sus funciones menos conocidas pero no menos importantes: mostrar que *los profesores no son omnipotentes* y que los fenómenos didácticos no dependen ni de su voluntad, ni de su formación ni de las decisiones que ellos puedan tomar o no tomar. El profesor de matemáticas tiene que asumir muchas responsabilidades pero entre éstas no está la de cambiar el contrato didáctico *en la institución escolar* a la que el propio profesor está sujeto como tal profesor. En otras palabras, aunque el profesor puede incidir sobre la gestión del contrato en el *ámbito de la situación didáctica*, mediante modificaciones locales en la organización matemática de la situación (y, por tanto, sí puede modificar el contrato y su evolución a este nivel), no tiene sentido pedirle que, como tal profesor, cambie la organización matemática global en la que se sustenta el contrato didáctico vigente, por ejemplo, en secundaria.

Mirados desde el lado de la universidad, los obstáculos descritos muestran que, aunque muchas de las restricciones a las que está sometida la organización matemática en secundaria desaparecen en la universidad, resulta que los

...los profesores no son omnipotentes [...] los fenómenos didácticos no dependen ni de su voluntad, ni de su formación ni de las decisiones que ellos puedan tomar o no tomar.

5 En la terminología de Piaget y García (1982), el proceso que aquí denominamos «algebrización de la actividad matemática» podría describirse como el paso del estadio *intra-operacional* al *inter-operacional* y, en última instancia, al *trans-operacional*. Para estos autores «hay un cierto tipo de ruptura cada vez que se pasa de un estadio al otro, tanto en la ciencia como en la psicogénesis» *(op. cit.*, p. 234). En este mismo sentido podría también hablarse de «ruptura» o «obstáculo epistemológico» en el paso de la organización de la geometría o del cálculo diferencial de secundaria (organizaciones que hemos situado en el estadio *-intra*) a las correspondientes organizaciones universitarias que, resueltamente, debemos situar en los estadios *inter* y *-trans*.

dispositivos didácticos (o dispositivos de ayuda al estudio) de esta institución no siempre desarrollan las funciones que los cambios en la organización matemática (y, por tanto, en el contrato) posibilitan. La ruptura institucional entre secundaria y universidad (debida, en parte, a la escisión de la comunidad matemática) no sólo dificulta que ésta asuma su responsabilidad última en la educación matemática, sino que incluso provoca la emergencia de nuevos obstáculos artificiales que no se corresponden con cambios necesarios en el proceso de estudio.

Quisiéramos subrayar para terminar que los *obstáculos epistemológicos* en el proceso de estudio de las matemáticas constituyen simplemente la constatación de que dicho proceso no es homogéneo. El reto que se plantea no es el de eliminar los obstáculos, objetivo absurdo e imposible, sino el de modificar la estructura y las funciones de los dispositivos didácticos existentes y, si es preciso, crear nuevos dispositivos capaces de articular los cambios de actividad matemática necesarios para llevar a cabo el proceso de estudio.

Estos cambios en la estructura y las funciones de los dispositivos didácticos, lejos de ser insignificantes, pueden comportar modificaciones profundas en el contrato didáctico de cada una de las instituciones y en las respectivas organizaciones matemáticas escolares, por lo que deben ser abordados a nivel de Sistema de Enseñanza de las Matemáticas.

Josep Gascón
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma
de Barcelona

Referencias bibliográficas

ALSINET, J., J. GASCÓN, A. GOMÀ y A. REVENTÓS (1997): *Informe sobre el pas de la secundària al primer curs universitari. Les matemàtiques al COU i al primer curs de la llicenciatura de matemàtiques i d'enginyeria informàtica en la UAB*, Universitat Autònoma de Barcelona, Documento no publicado.

ARTIGUE, M. (1995): «La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos», en M. Artigue y otros (eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 97-140.

BROUSSEAU, G. (1983): «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, 4/2, 165-198 (Conferencia pronunciada en el XVIII encuentro del CIEAEM, Louvain la neuve, 1976).

BROUSSEAU, G. (1986): «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, 7/2, 33-115.

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y., M. BOSCH y J. GASCÓN (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori, Barcelona.

GASCÓN, J. (1994): «El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas», *Educación Matemática*, 6/3, 37-51.

GASCÓN, J. (1994-95): «Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée"», *Petit x*, 37, 43-63.

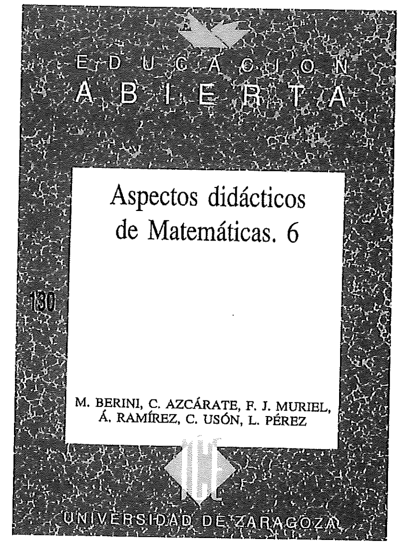
GASCÓN, J. (1997): «El carácter pre-algebraico de la matemática escolar», *Educación Matemática*, (pendiente de publicación).

PIAGET, J. y R. GARCÍA (1982): *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Siglo XXI (4a. edición), México, DF.

POLYA, G. (1945): *How to Solve It*, 2a. ed., (1957), Doubleday, Princeton.

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA



Aspectos didácticos de matemáticas. 6

CONTENIDOS

- *La gestión de la clase de Matemáticas.* Marta BERINI
- *Enseñar derivadas: un enfoque alternativo.* Carmen AZCÁRATE
- *De la geometría del área a la construcción del infinito.* F. Javier MURIEL
- *Cómo generar problemas.* Carlos USÓN y Ángel RAMÍREZ
- *Una apuesta por la globalidad.* Luis PÉREZ

BOLETÍN DE PEDIDO

Deseo me envíen contra reembolso de 1.200 pesetas más gastos de envío, el libro *Aspectos didácticos de Matemáticas. 6.*

Nombre: . . . .

Dirección: . . . .

Población: . . . . C.P.: . . . . Provincia: . . . .

CIF o NIF (a efectos de emitir la obligatoria factura): . . . .

Remitir a:

Instituto de Ciencias de la Educación. C/ Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA. Tno.: (976) 761991. Fax: (976) 761345

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 23-32

Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas

Enrique Castro Martínez
Pablo Flores Martínez
Isidoro Segovia Alex

Las fórmulas que empleamos para calcular el área de una superficie geométrica se basan en las medidas de longitudes de esas figuras, con el peligro de que se considere la superficie como una magnitud derivada de la longitud. Pero además estas fórmulas para el cálculo de áreas dependen de la forma geométrica que se ha elegido como unidad de superficie: el cuadrado. Aunque esta elección es adecuada desde un punto de vista práctico, si queremos formar mentes que sean capaces de resolver problemas más generales y comprender el concepto de superficie sin reducir su cálculo a la mera aplicación de una fórmula, debemos indicar opciones alternativas y una de ellas puede ser relativizar la elección de la unidad de medida. En este artículo hemos tomado como unidad de superficie un triángulo equilátero de lado unidad con el cual hemos revisado y mostrado la relatividad del proceso de cálculo de superficies áreas de figuras planas.

ARTÍCULOS

EN MUCHAS ocasiones la forma de enseñar las matemáticas escolares conduce a los estudiantes a la creencia de que la matemática es un sistema de verdades absolutas con fórmulas *mágicas* que los alumnos deben manejar sin un mínimo de control *inteligente*. Un ejemplo claro de lo que decimos lo constituyen las fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas. Para muchos estudiantes estas fórmulas son el concepto mismo de área y quedan cada una de ellas íntimamente ligadas a la figura correspondiente. Entre las razones que conducen a esta creencia hay que situar las *prácticas* educativas en el aula, y sobre ellas queremos proyectar nuestra reflexión.

De las fórmulas que empleamos para calcular el área de una superficie geométrica plana destacamos dos aspectos:

a) Se basan en las medidas de longitudes de esas figuras. De esta manera se está considerando la superficie como una magnitud derivada de la longitud. En muchas ocasiones la práctica escolar se queda sólo en estudiar la magnitud superficie como magnitud derivada de la longitud y relega al olvido el estudio de las propiedades inherentes a la magnitud superficie.

b) Las fórmulas que usamos para el cálculo de áreas dependen de la forma geométrica que se ha elegido como unidad de superficie: el cuadrado. Desde un punto de vista práctico esta elección es acertada, pero si queremos formar mentes flexibles y que sean capaces de resolver problemas más generales de una manera inteligente, que no sea la mera aplicación de una fórmula, debemos indicar opciones alternativas y una de ellas puede ser relativizar la elección de la unidad de medida.

En la enseñanza de la medida de superficies, hoy día parece haber una relajación en remarcar que la unidad de medida es producto de una elección arbitraria, aunque no caprichosa, y que las medidas son relativas respecto a la unidad de medida elegida. Esto se contrapone con la insistencia, en un pasado no muy lejano, de los autores de cursos de geometría elemental por dejar sentado la relatividad de las medidas y el carácter adoptivo de la unidad de medida. Así, en el libro de texto de Sánchez y Sabrás (1904, 185-186) leemos

Área es la relación con otra superficie que se toma como unidad [...]. Para la determinación de las áreas, se adopta como unidad un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal.

En muchos de estos textos clásicos de enseñanza de la Geometría hay una renuncia expresa a tratar la medida directa de las superficies. La razón que alegan Sánchez y Sabrás es que cubrir una superficie con cuadrados unidad no es posible en la mayoría de los casos y es bastante penosa en los demás. Como consecuencia de estas dificultades se suple por la determinación indirecta de las áreas de las figuras geométricas mediante las fórmulas.

Hay en estos autores clásicos un especial cuidado en poner de manifiesto y destacar que las fórmulas para el cálculo indirecto de áreas de figuras planas no son fórmulas absolutas, sino relativas a la unidad cuadrada (Puig, 1979). Incluso se intenta enfatizar esta circunstancia poniéndola al principio de la frase cuando los autores traducen las fórmulas del cálculo de áreas de figuras planas al lenguaje usual. Refiriéndose al área del rectángulo Sánchez y Sabrás escriben:

Cuando se toma por unidad de área un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal, el número que expresa el área de un rectángulo es igual al producto de los números que expresan las longitudes de su base y de su altura (p. 188).

Los autores anteriores son conscientes del olvido en que suele caer la referencia a la unidad de medida y lo advierten:

Ordinariamente, se abrevia este enunciado diciendo: El área de un rectángulo es igual al producto de su base por altura (p. 188).

Lo que sigue a continuación en el texto es una constante que se repite en muchos autores y materias. En aras de la brevedad los autores deciden que esta última es la expresión que emplearán en lo sucesivo. Para «curarse en salud» los autores aclaran:

En lo sucesivo, emplearemos este lenguaje abreviado, a pesar de ser inexacto, pero a condición de no olvidar qué sentido se debe atribuir a las palabras (p. 188).

Con estas aclaraciones se le traslada al estudiante la responsabilidad de suplir en lo sucesivo las inexactitudes lingüísticas que se emplean y el trabajo escolar se va a centrar en la obtención, memorización y aplicación de las fórmulas para calcular el área de las figuras planas. Ello tiene como consecuencia que el alumno, cuando le hablen de áreas de figuras planas, lo identifique con fórmulas, y que piense que estas fórmulas son únicas, en el sentido de que es la única manera que existe de calcular el área de las figuras planas. Pensamos que es bueno que se relativice un poco esta forma de pensar absolutista. Una forma de hacerlo es realizar actividades de medida con unidades alternativas al cuadrado que conduzcan a la obtención de otras fórmulas, que si bien no tendrán que memorizarse, sí contribuirían a la relativización de la medida, al mejor entendimiento de lo que es medir una superficie de modo directo y a percibir las implicaciones que tiene la elección de una u otra unidad de medida, no sólo sobre el resultado final sino también sobre la fórmula que se obtendría.

En muchos de estos textos clásicos de enseñanza de la Geometría hay una renuncia expresa a tratar la medida directa de las superficies.

Esto tiene además otros efectos, así para un alumno que ha trabajado ya la obtención de áreas de las figuras planas, es un ejercicio matemático muy motivador e intrigante descubrir, por ejemplo, que cuando se toma como unidad de medida el triángulo equilátero de lado unidad, un triángulo equilátero de lado *a* tiene como área a^2. Este puede ser el comienzo para realizar una reflexión sobre las nociones geométricas que son consecuencia de la elección del cuadrado como unidad de medida y poner de manifiesto cuáles son consustanciales con la forma cuadrada y cuáles no dependen de esta forma geométrica.

Una de las consecuencias más conocidas es la de los números cuadrados. Expresados en su nomenclatura más general, los números cuadrados son las potencias segundas de los números. El hecho de que el área de un cuadrado se obtenga mediante la potencia segunda de la medida de su lado, ha ocasionado que el nombre números cuadrados, desbanque a la terminología de potencias. Pero cuando uno mide superficies empleando como unidad de medida el triángulo equilátero, observa que las potencias segundas están relacionadas con el área de los triángulos equiláteros. Por tanto, las potencias segundas de los números no son una propiedad exclusiva de la figura cuadrada. Una civilización que hubiera elegido el triángulo equilátero como unidad de medida posiblemente se hubiera visto conducida a llamar a las potencias segundas «números equiláteros», término que etimológicamente refleja mejor la representación geométrica de las potencias segundas de los números, puesto que resalta la igualdad de la medida de los lados.

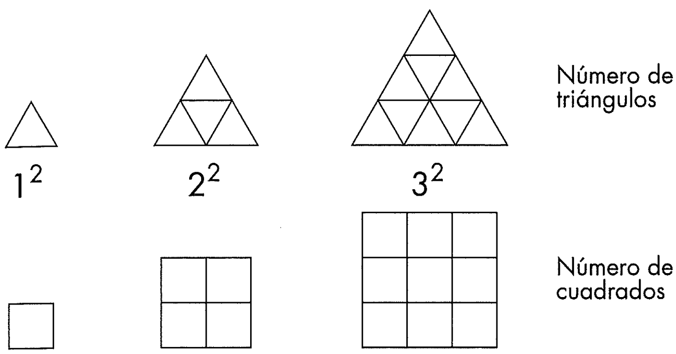


Figura 1. Relación entre la longitud del lado y el número de unidades

Elección de la forma de la unidad de medida

Para realizar prácticamente la medida en el plano del área de un polígono es preciso buscar una unidad que rellene el polígono de manera fácil. Esto forma parte de la práctica escolar. En el estudio escolar de las medidas de superficies, una de las actividades preliminares más aconsejadas por distintos autores son las de recubrimiento del plano (Olmo, Moreno y Gil, 1989). Estas actividades ponen al alumno en condiciones de percibir la superficie y lo introducen en las exigencias prácticas que requiere la medida directa de una superficie, como la no superposición de las piezas que se utilizan en el recubrimiento, las condiciones que requiere una figura para recubrir el plano y la observación directa de qué figuras recubren el plano y cuáles no.

En el estudio escolar de las medidas de superficies, una de las actividades preliminares más aconsejadas por distintos autores son las de recubrimiento del plano...

En esta fase el alumno puede ver con actividades de recubrimiento del plano que hay muchas figuras que recubren el plano, pero que si imponemos la condición de que la figura sea regular quedan sólo tres figuras: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular. También puede ponerse de manifiesto mediante actividades de recubrimiento que el hexágono regular se compone de seis triángulos equiláteros y que por tanto es fácil pasar de uno a otro recubrimiento. Puesto que el triángulo equilátero es más simple que el hexágono regular, produce recubrimientos de otras figuras del plano con menos huecos, por lo que produce un recubrimiento más fino y lo convierte en una figura más adecuada que el hexágono regular. Además, el triángulo equilátero y el cuadrado permiten construir un triángulo equilátero y un cuadrado, respectivamente, mientras que con hexágonos no podemos construir un hexágono. Así pues, con actividades de recubrimiento del plano podemos llegar con los alumnos a la conclusión de que entre las figuras que recubren el plano resaltan dos: el triángulo equilátero y el cuadrado.

Interesados, como ya se ha referido, en que en el estudio de la medida de magnitudes se incida con mayor frecuencia en la comparación de superficies y en quitarle una cierta rigidez absolutista al conocimiento matemático, hemos reflexionado sobre las implicaciones que tiene la unidad de medida elegida sobre las fórmulas de cálculo del área a partir de las longitudes, la demostración de los teoremas ligados a estas fórmulas y la influencia que ha podido tener sobre el uso de conceptos y términos asociados en la geometría del plano.

Para poner lo anterior de manifiesto hemos desarrollado la geometría que resulta de elegir como unidad de medida de superficie un triángulo equilátero. Trataremos de llegar a construir las fórmulas de cálculo del área de figuras planas en este nuevo sistema. Para ello nos apoyaremos en el proceso seguido cuando se toma una unidad de forma cuadrada. Una primera estrategia para obtener el número de triángulos unidad que caben en cualquier figura sería estudiar el número de triángulos unidad que caben en el cuadrado unidad y aplicar el coeficiente corrector a las fórmulas clásicas, es decir, hacer un cambio de unidad de medida. Pero nosotros estamos más interesados en razonar con el triángulo de manera independiente y estudiar las consecuencias de esta nueva elección, la forma en que repercute en los razonamientos en esta geometría del triángulo y sus consecuencias didácticas.

Relación entre las dos formas de la unidad de medida. Cambio de unidad de medida

Un concepto fundamental en el estudio de la medida es el cambio de unidad de medida y la obtención de las fórmulas que permiten realizar el paso de las medidas efectuadas con una unidad a las efectuadas con otra. Para el caso de la medida de superficies este punto plantea problemas interesantes que pueden dar juego en la clase. Un primer problema puede ser el estudiar la relación entre las dos figuras geométricas que se toman como unidad. Restringiéndonos al caso del triángulo equilátero y del cuadrado, ambos de lado unidad, la obtención de las dos fórmulas del cambio de unidad es un reto para el alumno que le permite poner en juego conceptos algebraicos y geométricos aprendidos previamente y descubrir nuevas relaciones entre el triángulo equilátero y el cuadrado a partir de su representación gráfica. Por ejemplo, si se hace coincidir un lado del triángulo equilátero de lado unidad con uno de los lados de un cuadrado de lado unidad, resulta sorprendente para los alumnos que el vértice del triángulo equilátero de lado unidad no alcance al lado opuesto del cuadrado (figura 2).

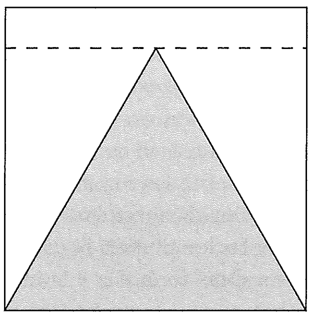


Figura 2. Relación entre unidades

Teniendo en cuenta que el área del triángulo equilátero de lado l en unidades cuadradas es

$$l^2\sqrt{3}\,/\,4$$

las fórmulas del cambio de base serán:

$$\text{Area del Triángulo} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{Area del Cuadrado}$$

$$\text{Area del Cuadrado} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{Area del Triángulo}$$

$$\text{Area de cualquier figura en unidad triangular} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{Area en unidad cuadrado}$$

Llegados a este punto el lector puede pensar que estas fórmulas del cambio de unidad permitirían por sí solas obtener las fórmulas de las áreas de las figuras planas cuando se toma el triángulo equilátero como unidad, a partir de las fórmulas previamente obtenidas cuando se toma como unidad el cuadrado. Pero la elección de una unidad de medida de superficies lleva aparejados el definir conceptos geométricos paralelos que son consustanciales con las características de esa forma geométrica. La elección del cuadrado como unidad de medida va paralela con otras elecciones: el ángulo recto de 90°, la malla rectangular, la noción de perpendicularidad relacionada con 90°, la noción de altura basada en la perpendicularidad, etc. Por ello, un simple cambio de unidad sólo nos permitiría obtener el número de triángulos equiláteros que caben en las figuras, pero en función de nociones que están asociadas con la unidad cuadrada. Si queremos obtener este área en función de nociones ligadas a la unidad triangular, hay que tener en cuenta además, que la noción de altura se ve afectada por el cambio de unidad de medida. En una geometría del plano en la que el triángulo equilátero fuese la unidad de medida de superficies, la altura cómoda para trabajar debería ser la longitud del segmento que forma 60° grados con la base, y no 90° como sucede en la geometría en la que se utiliza el cuadrado como unidad de medida. Por tanto, un simple cambio de unidad conduce a fórmulas que están a medio camino entre las nociones ligadas a una forma geométrica y otra. Hay que realizar además el cambio de alturas para obtener las fórmulas adecuadas.

Un concepto fundamental en el estudio de la medida es el cambio de unidad de medida y la obtención de las fórmulas que permiten realizar el paso de las medidas efectuadas con una unidad a las efectuadas con otra.

Veamos un ejemplo:

Cuando se toma el cuadrado como unidad, el área del triángulo es

$$(\text{base} \times \text{altura})/2$$

Haciendo el cambio de unidad

$$\text{Cuadrado} = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{Triángulo}$$

obtenemos la expresión

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Teniendo en cuenta que la razón entre la altura normal de un triángulo y la altura medida con una inclinación de 60 grados es el seno de 60° (figura 3)

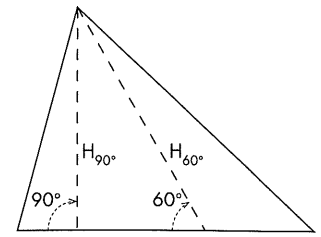


Figura 3. Relación entre las alturas de un triángulo

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\text{altura usual}}{\text{altura inclinada}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sustituyendo y simplificando al final obtenemos que:

Cuando se toma como unidad de medida el triángulo equilátero, el área del triángulo de base B y altura inclinada $H_{60°}$ es $B \cdot H_{60°}$.

El proceso anterior está montado a partir del conocimiento que ya se posee de las fórmulas obtenidas para la unidad cuadrada y puede ser un problema interesante para proponer en clase.

Paralelismo en las fórmulas y valor relativo de ellas

Si queremos obtener las fórmulas de medida de áreas para el caso de que el triángulo equilátero sea la unidad de medida, podemos seguir un proceso análogo al establecido para el caso de que la unidad sea el cuadrado. En este proceso el triángulo equilátero realiza la función análoga a la que realiza el cuadrado en las medidas usuales, y por tanto, éste es un primer elemento de analogía entre las dos proceso de medidas, tomado globalmente. Tomado puntualmente vemos que en la correspondencia triángulo equilátero-cuadrado hay diferencias resaltables: el cuadrado tiene ángulos de 90° y el triángulo tiene ángulos de 60°. El cuadrado tiene cuatro lados y el triángulo tiene tres lados. Estas diferencias entre las dos figuras básicas pueden tener o no incidencia en el proceso de analogía entre los resultados de uno u otro proceso de obtención de las fórmulas de medida.

Si queremos obtener las fórmulas de medida de áreas para el caso de que el triángulo equilátero sea la unidad de medida, podemos seguir un proceso análogo al establecido para el caso de que la unidad sea el cuadrado.

Surge la duda sobre cuál debe ser la figura básica que desempeña una función similar al rectángulo. Ya sabemos (Segovia, Castro y Flores, en prensa) que la obtención de las fórmulas usuales para el cálculo del área de las figuras geométricas se basan en la del rectángulo. Como el rectángulo es un cuadrilátero podemos pensar que la figura análoga debe ser un triángulo. Además el rectángulo comparte con el cuadrado el tener los ángulos iguales y tiene también los lados iguales dos a dos. En el caso del triángulo estas condiciones no se pueden dar, pues si los ángulos fuesen iguales tendríamos el triángulo equilátero y en él se confundirían la base con la altura. Si queremos conservar en ese triángulo algunos elementos que sean comunes con el triángulo equilátero, lo máximo que podemos conservar es un ángulo de 60°. Con ello, tenemos un triángulo especial con un ángulo de 60° que va a realizar la misma función que el rectángulo en el caso de las medida con cuadrados (figura 4).

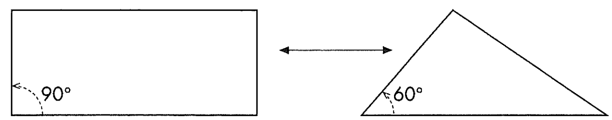


Figura 4. Correspondencia al rectángulo en unidades triangulares

La correspondencia anterior lleva implícita el tener que cambiar algunas ideas preconcebidas que están ligadas a la unidad cuadrada. Una de ellas, ya expuesta, es que si medimos la superficie con triángulos equiláteros tenemos que medir la altura sobre el segmento de recta que forma ángulo de 60° sobre la base. La función usual que hace el ángulo recto de 90° lo haría en este caso el ángulo de 60°. Por tanto, el triángulo que tiene un ángulo de 60° cobra una importancia decisiva en las medidas con triángulos equiláteros. La pregunta que habría que hacerse es si es posible demostrar, de manera similar a como se hace para el rectángulo, que el área del triángulo con un ángulo de 60°, cuando se mide utilizando el triángulo equilátero como unidad de medida, es la base por la altura (tomada sobre la recta que forma 60° con la base), y que esta fórmula es válida para todo triángulo.

En esta demostración hay un primer paso que consiste en poner de manifiesto que el área es la base por la altura cuando las medidas de la base y la altura son enteras. Para ello, de manera análoga a como se hace con el rectángulo, se parte de un triángulo ABC con un ángulo de 60° en A (figura 5). Sea n la medida entera de la base del triángulo y m la medida entera de la altura. En el dibujo n = 6 y m = 3. Dibujamos el triángulo equilátero ABD y trazamos la malla triangular con triángulos equiláteros cuyos lados miden la unidad. Trazando el segmento CQ paralelo a la base por el vértice C, y el segmento CP paralelo al lado BD se forma el paralelogramo CQBP. El segmento CB lo divide en dos triángulos iguales, por tanto, su medi-

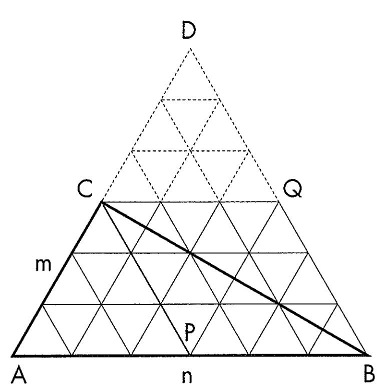


Figura 5. Área del triángulo es base por altura

da será la mitad que la del paralelogramo. Por un proceso de conteo se puede llegar a establecer que el número de triángulos coincide con el producto de la base por la altura.

El segundo paso de la demostración consiste en demostrar que la fórmula es válida para valores reales no enteros. La idea es la misma que para el rectángulo emplea Pogorélov (1974): se encuadra el triángulo con un ángulo de 60° entre dos triángulos con un ángulo de 60° con medidas enteras (figura 6) y se realiza un razonamiento del paso al límite similar al realizado para el rectángulo.

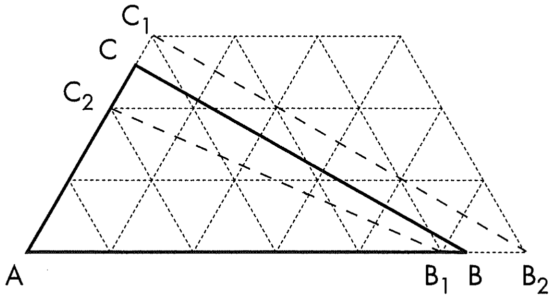


Figura 6. Cálculo del área del triángulo de 60° que no contiene un número entero de triángulos unidad

Una vez que se ha obtenido el área del triángulo de 60 grados se procede a extender la fórmula a figuras más generales. El primer paso es prescindir de la limitación del ángulo de 60° en el triángulo y comprobar que para un triángulo cualquiera se cumple que la fórmula para calcular el área es la base por la altura. Y de nuevo surge la analogía, con unidades cuadradas el paralelogramo tiene igual área que el rectángulo de igual base y altura. Dándole una visión geométrica a este aspecto, es como si a partir de un rectángulo los paralelogramos que se obtienen moviendo el segmento que hace de base o el opuesto sobre líneas paralelas, las figuras que se obtienen tienen la misma área. Esta idea se repite en el caso del triángulo y se puede observar que si en un triángulo trazamos una paralela a la base, todos los triángulos de igual base que tengan su vértice opuesto en esta paralela tienen igual área.

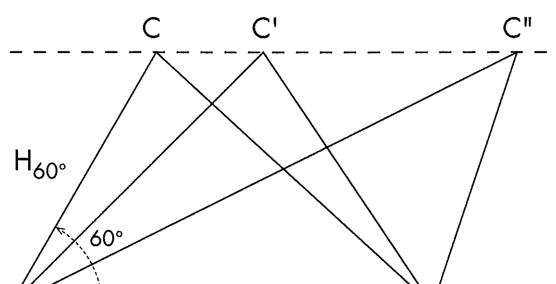


Figura 7. Equivalencia de áreas de triángulos

La consecuencia inmediata es que todos ellos tendrán la misma área que uno de los dos triángulo de 60° que se pueden dibujar con una misma base y, por tanto, el área de un triángulo cualquiera es igual a la base por la altura de 60° cuando la unidad de medida es el triángulo equilátero (figura 7).

De forma inmediata sale la fórmula l^2 para calcular el área de un triángulo equilátero como caso particular de triángulo con igual base y altura (figura 8).

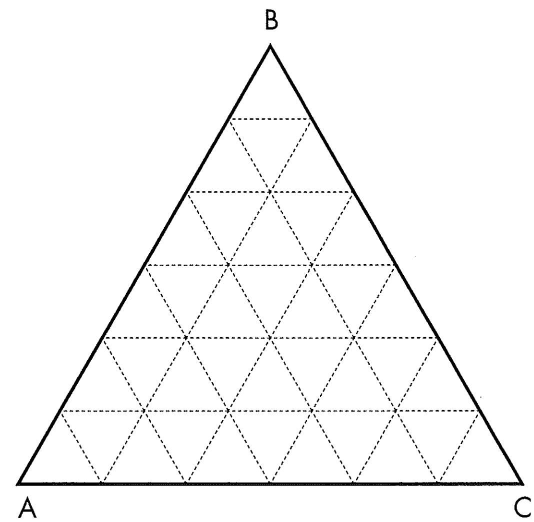


Figura 8. Área del triángulo equilátero

Una vez obtenidas las fórmulas del área del triángulo de 60° en función de la base y de la altura de 60° podemos, mediante relaciones afines entre figuras obtener las fórmulas de las áreas de figuras planas en unidad triangular de manera similar a como se hace para la unidad cuadrada.

A continuación presentamos la deducción de las fórmulas en unidades triangulares, *ut*, paralelamente a las obtenidas con unidades cuadrado, *uc*, situándonos en un punto de vista de enseñanza.

En unidades cuadradas, el área del rectángulo se obtiene multiplicando el número de unidades cuadradas (*uc*) de la base por el número de unidades cuadradas de la altura (de 90°):

$$S = B \cdot H_{90°}\ uc$$

La situación más simple, la que la base y altura del rectángulo contienen un número entero de unidades cuadradas se representa en la figura 9 (la situación más general puede verse en Segovia, Castro y Flores, 1996).

Paralelamente, en unidades triangulares, el romboide de 60° se obtiene multiplicando el número de triángulos de la base 2·B por el número de triángulos de la altura, $H_{60°}$ (ver figura 10). Así el área del romboide de base B y altura $H_{60°}$ es, $S = 2 \cdot B \cdot H_{60°}$ *unidades triangulares (ut)*.

Desde el rectángulo o desde el romboide de 60° se puede construir cualquier paralelogramo de igual altura sin más que trasladar una sección de cualquiera de ellos de un lado a otro como se ve en la figura 11. De esta manera, cualquier paralelogramo se puede construir a partir de un rectángulo o romboide de igual altura. El área, por tanto, de cualquier paralelogramo es la misma que la de la figura origen y según sea en *uc* o *ut*. En el caso del cuadrado donde B = H = L el área es L^2 *uc*; la figura análoga al cuadrado para las unidades triangulares sería el rombo de 60° que tendría la base igual a la altura de 60° y su área sería $2 \cdot L^2$ *ut*.

Por otro lado, cualquier triángulo es equivalente por construcción a la mitad de un paralelogramo de igual base e iguales alturas, bien sea de 60° o de 90° (figura 12). Por tanto la fórmula del área asociada a cualquier triángulo, en unidades cuadrado, es $S = B \cdot H/2$ *uc* y en unidades triangulares $S = B \cdot H_{60°}$ *ut*.

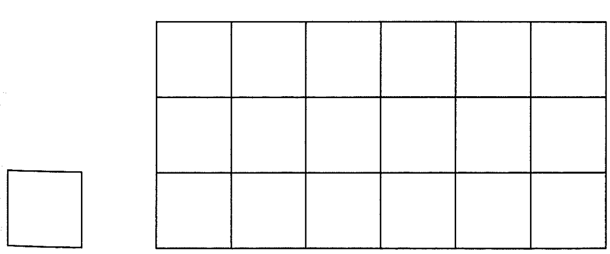


Figura 9. Rectángulo construido con cuadrados

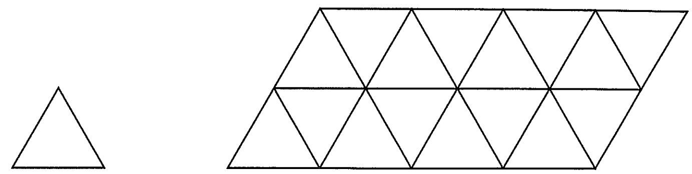


Figura 10. Construcción de un paralelogramo de 60° a partir de triángulos equiláteros

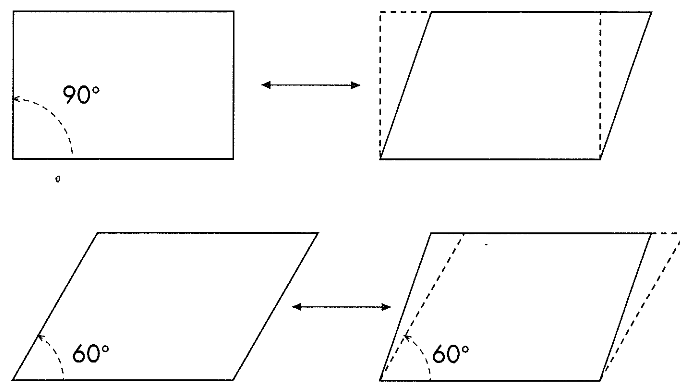


Figura 11. Paralelogramos equivalentes

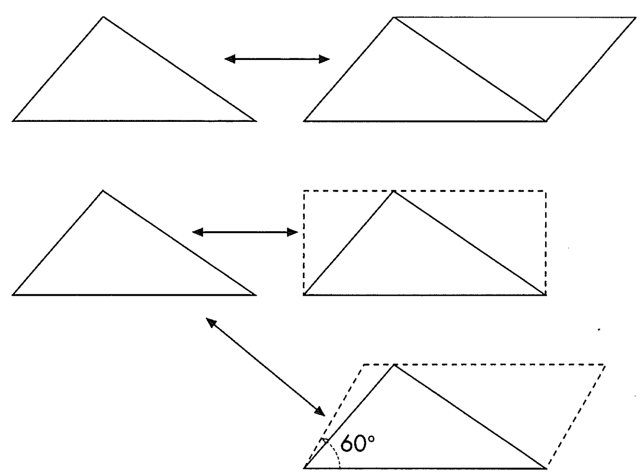


Figura 12. Relación entre superficie de triángulo y de paralelogramo

En el caso de los trapecios, cualquier trapecio se puede obtener a partir de un paralelogramo de igual altura de 60° 0 90° de acuerdo con la figura 13.

El área del trapecio es (B+b)·H/2 *uc* y en unidades triangulares $2 \cdot (B+b) \cdot H_{60}/2$ es decir $(B+b) \cdot H_{60}$ *ut*.

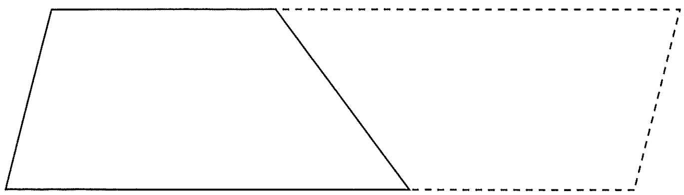


Figura 13. Conversión de un trapecio en un paralelogramo

Un polígono regular cualquiera de n lados de longitud l y de apotema A se puede obtener como composición de triángulos isósceles de altura A y base l. La apotema puede ser de 90° para el caso de las unidades cuadrado o de 60° para las unidades triangulares (figura 14).

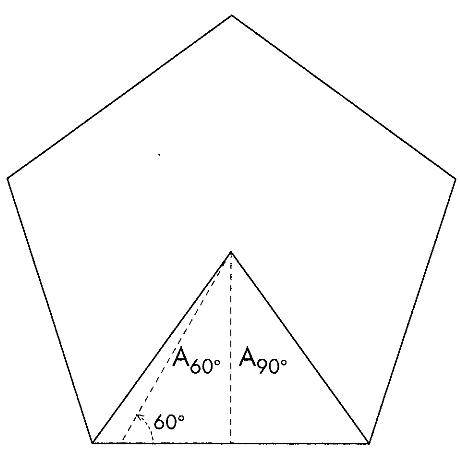


Figura 14. Polígono regular

El área del polígono será por tanto n·l·A/2 *uc* = P·A/2 *uc* y para las unidades triangulares $n \cdot l \cdot A_{60°}$ *ut* = $P \cdot A_{60°}$ *ut*.

Por último, el área del círculo puede obtenerse como límite, en cuanto al número de lados, del área de un polígono regular (figura 15).

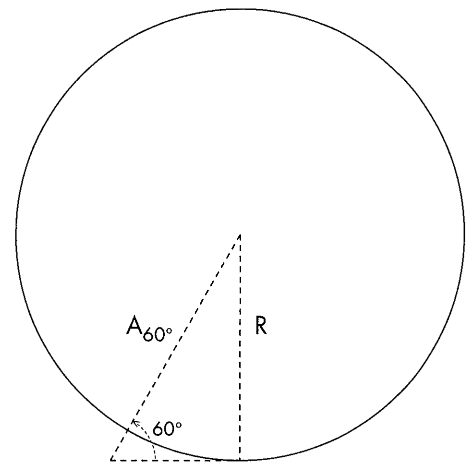


Figura 15. Círculo

En caso de *uc* el límite es $\pi \cdot R^2$ y en el caso de *ut* el límite sería

$$\lim_{n \to \infty} nlA_{60°} = 2\pi RA_{60°} = 2\pi RR\frac{2}{3} = \frac{4\pi R^2}{3} \quad ut$$

Un resumen de fórmulas se presenta en el cuadro 1.

Podemos expresar resumidamente la forma en que obtenemos las fórmulas de las áreas de estas figuras en unidades cuadradas y triángulas en el esquema de la figura 16 de la página siguiente.

		Triángulo	Paralelogramo	Trapecio	Polígono regular	Círculo
$H_{90°}$	□	$\frac{BH}{2}$	BH	$\frac{(B+b)H}{2}$	$\frac{PA}{2}$	πR^2
	Δ	$\frac{2BH}{\sqrt{3}}$	$\frac{4BH}{\sqrt{3}}$	$\frac{2(B+b)H}{\sqrt{3}}$	$\frac{2PA}{\sqrt{3}}$	$\frac{4\pi R^2}{\sqrt{3}}$
$H_{60°}$	□	$\frac{BH\sqrt{3}}{4}$	$\frac{BH\sqrt{3}}{2}$	$\frac{(B+b)H\sqrt{3}}{4}$	$\frac{PA\sqrt{3}}{4}$	$\pi R^2\sqrt{3}$
	Δ	BH	2BH	(B + b)H	PA	$2\pi RA$

Cuadro 1

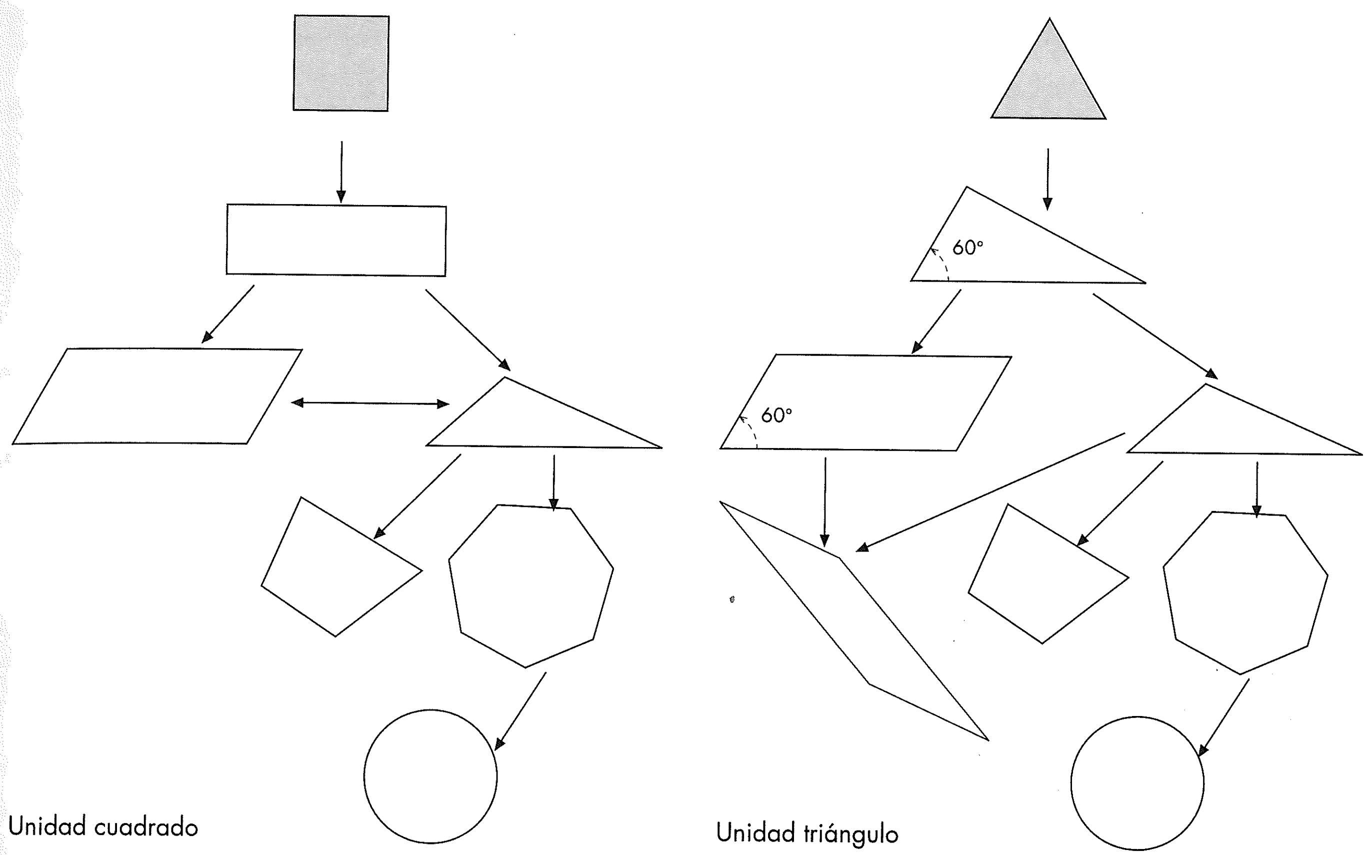


Figura 16. Relaciones para obtener las fórmulas de las áreas de las figuras planas

Conclusiones

El tratamiento escolar en paralelo de los aspectos geométricos relacionados con la medida de superficies que surgen de tomar el cuadrado o el triángulo equilátero como unidades de medida, permite poner en práctica uno de los métodos más potentes de descubrimiento matemático: la analogía (Hernán, 1989, Polya, 1979). El razonamiento analógico consiste en concluir de la semejanza en algunos aspectos de ciertos objetos su semejanza en otros. Hay que destacar que no es un método de demostración, pero sí un instrumento potente de descubrimiento. La aplicación práctica de la analogía en un caso concreto requiere una reflexión para detectar en la analogía establecida cuál es la parte de elementos de semejanza y cuál la de elementos de no semejanza.

...permite poner en práctica uno de los métodos más potentes de descubrimiento matemático: la analogía

La intuición analógica sugiere unas determinadas extensiones entre dos nociones matemáticas, pero si la extensión se realiza sin control puede conducir a conclusiones contrarias a la realidad. El trabajo paralelo entre las medidas de áreas con unidad de medida el cuadrado y con unidad de medida el triángulo es un excelente campo de entrenamiento en el pensamiento analógico, tanto para cultivar la intuición analógica, como para controlar las extensiones que de ella surjan. Además. permite la posibilidad de extender las analogías del plano al espacio, en la que aparece una de las analogías más completamente engañosa: la analogía entre los triángulos equiláteros y los tetraedros. Es fácil pensar que el cuadrado es al cubo como el triángulo equilátero es al tetraedro. Sin embargo, hay bastantes diferencias entre estas extensiones, la más notable en lo que se refiere a la medida, es que el cubo rellena el espacio y el tetraedro no. Esto da lugar a que no se pueda utilizar un tetraedro de lado unidad como unidad de volumen, lo que manifiesta una ventaja de la elección de la forma cuadrada de la unidad sobre la triangular.

Pese a esta limitación, esperamos que el razonamiento analógico habrá servido para hacer un recorrido por las fórmulas de obtención del área, para mostrar la relativización de éstas fórmulas a la forma de la unidad, y para hacer propuestas didácticas que permitan «hacer matemáticas» en clase, tal como se recomienda en las propuestas actuales epistemológicas y didácticas sobre la enseñanza de las Matemáticas (NCTM, 1991; Cockrooft, 1985).

Enrique Castro
Pablo Flores
Isidoro Segovia
Departamento Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

Referencias

COCKROFT (1985): *Las matemáticas si cuentan*, MEC, Madrid.

HERNAN, F. (1989): «La analogía en la formación de conceptos», *Suma*, 3, 13-20.

NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, SAEM Thales, Sevilla.

OLMO, M. A., M. F. MORENO y F. GIL, (1989): *Superficie y volumen*, Síntesis, Madrid.

POGORELOV, A. V. (1974): *Geometría elemental*, Mir, Moscú.

POLYA, G. (1979): *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México.

PUIG, P. (1979): *Curso de Geometría Métrica*, Gómez Puig, Madrid.

SÁNCHEZ, E. y T. SABRÁS (1904): *Curso de Geometría Elemental*, Est. Tip. de Zubiría y Compañía, Sevilla.

SEGOVIA, I., E. CASTRO y P. FLORES (En prensa): «Área del rectángulo», *UNO*.

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 33-38

Historia de la Matemática: implicaciones didácticas

José del Río Sánchez

ARTÍCULOS

Saber cómo ha evolucionado y cómo evoluciona la Ciencia Matemática ayuda a entender mejor las conexiones entre los diferentes conceptos y procedimientos que la vertebran y permite apreciar su naturaleza viva y humana. Como consecuencia, estos conocimientos contribuyen, sin duda, a enseñar mejor esta ciencia. En este artículo se muestran algunos principios didácticos generales que se obtienen al analizar el desarrollo histórico de la matemática y que se refieren a aspectos como el enfoque del proceso instructivo, la enseñanza de estrategias cognitivas y el uso de los recursos tecnológicos.

EL CONOCIMIENTO de la Historia de la Matemática proporciona una comprensión más profunda de los conceptos y de los métodos matemáticos al desvelar sus orígenes, su evolución y sus relaciones; al mismo tiempo, ofrece una visión *encarnada* de los mismos, ya que pone de manifiesto los rostros y las vidas de quienes fueron sus constructores. La Matemática aparece así como una ciencia viva, ligada a las circunstancias históricas, a los problemas de la humanidad y no como una fría sucesión de definiciones, teoremas y métodos flotando en la abstracción más deslumbrante y desvinculados de toda *miseria* humana. Además, el análisis de la evolución histórica de la Matemática proporciona algunos principios sobre cómo ha de enseñarse y aprenderse esta ciencia, principios que, naturalmente, son completados y matizados desde otras fuentes como la psicología del aprendizaje o la reflexión sobre la práctica docente. En las líneas que siguen, se mostrarán algunos de estos principios y su correspondiente justificación histórica.

En el principio fue el problema

La *Arithmetica* de Diofanto (s. III), considerado el padre del álgebra, es una colección de ciento cincuenta problemas concretos resueltos mediante ecuaciones. Tanto en esta obra como en el *Álgebra* de Al-Khowarizmi (s. IX), el introductor del álgebra en Occidente, las incógnitas representan números y longitudes de segmentos pues su intención era resolver problemas, no ecuaciones; éstas sólo son un instrumento de cálculo.

Descartes y Fermat descubren los principios de la geometría analítica cuando tratan de hallar las soluciones de las *ecuaciones indeterminadas* (con dos incógnitas) que los matemáticos anteriores (Viète, por ejemplo) despreciaban cuando surgían al resolver un problema. Descartes se preocupó de decidir cómo se podía construir geométricamente el valor de la y para cada valor de la x. Fermat dio un paso más, representó esos valores de la y, con lo cual obtuvo la gráfica de la ecuación y comprobó que las ecuaciones de primer grado se representan como rectas y las de segundo grado como cónicas. Utilizaba para ello una recta r en la que señalaba los segmentos OA, OA', OA'', etc. cuyas longitudes eran los valores de la x, y sobre los puntos A, A', A'', etc. dibujaba los segmentos AB, A'B', etc. cuyas longitudes eran los correspondientes valores (siempre positivos) de la y (figura 1).

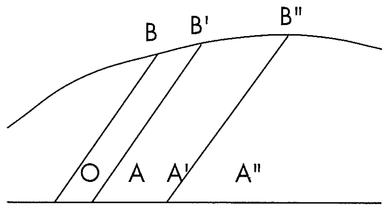


Figura 1

Huygens, un científico holandés con profundos conocimientos en física y astronomía, cuando buscaba un péndulo totalmente isócrono (período independiente de la amplitud) para adaptarlo a la regulación de los relojes, descubrió algunas propiedades asombrosas de la cicloide: por ejemplo, sobre un arco de cicloide invertida, un objeto abandonado a su propio peso, en ausencia de rozamiento se desliza desde cualquier punto al punto más bajo exactamente en el mismo tiempo, independientemente del punto de partida (figura 2); descubrió también que la evolvente de una cicloide es otra cicloide y ambos hechos los utilizó en la fabricación del péndulo buscado al mismo tiempo que fundaba la teoría de las evolutas y de las evolventes (figura 3).

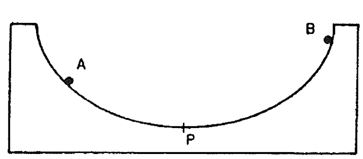


Figura 2

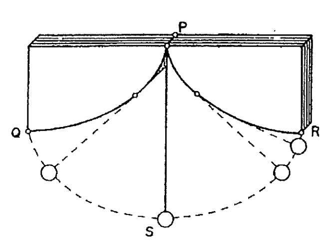


Figura 3

...el aprendizaje de las matemáticas debe arrancar con un problema que sea sentido como tal por quien aprende y, en consecuencia, la enseñanza de las matemáticas debe comenzar proponiendo a los estudiantes un problema con sentido para ellos.

Menecmo en el siglo IV a.C. descubre las cónicas cuando intentaba resolver el problema de la duplicación del cubo; las técnicas trigonométricas surgen como respuestas a problemas de astronomía; varios matemáticos del s. XVII inventan el cálculo diferencial e integral para resolver problemas de trazado de tangentes y determinación de áreas, etcétera.

Estos ejemplos ilustran suficientemente la idea de que la ciencia matemática se construye a partir de la resolución de problemas, problemas cuyos orígenes son además muy diversos: satisfacer o mejorar una necesidad práctica o técnica, buscar explicaciones a fenómenos físicos o sociales, responder a una inquietud cultural o lúdica, mejorar métodos de la propia matemática, etc. Por lo tanto, el aprendizaje de las matemáticas debe arrancar con un problema que sea sentido como tal por quien aprende y, en consecuencia, la enseñanza de las matemáticas debe comenzar proponiendo a los estudiantes un problema con *sentido* para ellos. Esta característica, tener sentido, es muy importante. Históricamente se comprueba que muchos problemas no fueron abordados por grandes matemáticos porque, en aquel momento, para ellos carecían de sentido. Veamos algunos ejemplos. Omar Khayyam, poeta y matemático árabe que vivió entre los siglos XI y XII, escribió un tratado de álgebra que extendía la obra de Al-Khowarizmi hasta incluir las ecuaciones cúbicas, resueltas geométricamente utilizando intersecciones de cónicas; sin embargo, no trató ecuaciones de grado superior porque su espacio no tenía más de tres dimensiones. Algo parecido le pasó a Pappus, un matemático de Alejandría (s. III-IV) que en su *Colección matemática* trató el problema del «lugar determinado por tres o cuatro rectas», cuyo origen parece remontarse a la época de Euclides; para cuatro rectas su enunciado es el siguiente: «Dadas cuatro rectas del plano, hallar el lugar geométrico de los puntos P que se mueven de tal manera que el producto de los segmentos PA y PB trazados con un ángulo fijo a dos de ellas, es proporcional al producto de los segmentos PC y PD trazados a las otras dos con el mismo ángulo.» Pappus demuestra que este lugar es siempre una cónica y generaliza el problema para cinco y seis rectas en cuyo caso sólo llega a reconocer la existencia de una curva determinada por la condición de que el producto de las distancias de un punto a tres de ellas sea proporcional al producto de sus distancias a las otras tres. Pero Pappus no analizó los casos superiores porque el producto de más de tres segmentos no tenía un significado geométrico y, por lo tanto, el problema carecía de *sentido* para él. Sin embargo, trece siglos más tarde, Descartes con una nueva mentalidad aborda este problema y demuestra que para cinco o seis rectas este lugar es una cúbica, para siete u ocho es una cuártica y así sucesivamente. De este modo, un nuevo grupo de objetos geométricos, las curvas algebraicas, entran a formar parte del dominio de la matemática.

Por lo tanto, el camino del aprendizaje de los conceptos y de los procedimientos matemáticos ha de partir de problemas con sentido para los estudiantes con el fin de que puedan asumirlos y se genere en ellos una cierta tensión epistémica, un cierto deseo de saber que ponga en marcha el proceso de aprendizaje. Esto no se consigue trasvasando literalmente los problemas que originaron el concepto o el procedimiento; es necesario reformularlos o buscar otros cercanos a lo habitual, a lo ya conocido, pero a la vez desafiantes y novedosos.

Y después el proceso

El proceso resolutivo conduce a la construcción de los conceptos y al descubrimiento de teoremas y métodos. Pero antes de llegar al producto final, a la teoría formalmente elaborada, se atraviesan etapas en las cuales se obtienen soluciones «aproximadas», conocimientos parciales, resultados aislados, que con el tiempo cuajarán en una teoría general. Así, por ejemplo, antes de que Newton y Leibniz descubrieran sus métodos generales para trazar tangentes y calcular áreas, ya se habían obtenido a lo largo del s. XVII resultados para casos concretos utilizando métodos similares cuando no isomorfos a los que luego se plasman en la teoría final: Gregory de St. Vincent conocía que el área bajo la curva $y = 1/(1+x^2)$ entre 0 y x era arctgx y bajo la hipérbola $y=1/(x+1)$, $L(1+x)$; Fermat calculó el área bajo las curvas $y = x^m$ para m racional distinto de -1; Barrow, Sluse y el propio Fermat poseían métodos para trazar tangentes a curvas dadas por expresiones de la forma $y = f(x)$ o $f(x, y) = 0$; etc.

...antes de llegar al producto final, a la teoría formalmente elaborada, se atraviesan etapas en las cuales se obtienen soluciones «aproximadas», conocimientos parciales, resultados aislados, que con el tiempo cuajarán en una teoría general.

A veces, a lo largo de estas etapas se producen conjeturas erróneas, demostraciones falsas o incompletas, proposiciones no demostradas y otras deficiencias que se corrigen posteriormente. Galileo, por ejemplo, confundió la catenaria con una parábola; Jean Bernouilli creía que $L(-n) = L(n)$; Leibniz aseguraba que $1-1+1-1+\ldots = 1/2$; G. de St. Vicent creía haber demostrado la cuadratura del círculo; Huygens sostenía que π era un número algebraico; Newton enunció y utilizó el teorema del binomio (la serie binomial) sin demostración; MacLaurin señaló la siguiente paradoja: Stirling había enunciado que $[n(n+3)]/2$ puntos determinan una única curva algebraica de grado n y el propio MacLaurin había establecido que dos curvas de orden m y n se cortan en general en mn puntos, luego dos cúbicas se cortan en nueve puntos y, por lo tanto, nueve puntos no determinan una única cúbica; etc.

Se observa también que en este proceso constructivo de la matemática juegan un papel importantísimo ciertas técnicas o estrategias generales que sirven para *hacer matemáticas*, es decir, para resolver problemas, para plantear nuevos problemas, para definir conceptos, para conjeturar propiedades o relaciones entre conceptos, para inventar procedimientos algorítmicos, para demostrar o refutar proposiciones, etc. Entre las más fructíferas destacamos la generalización, la búsqueda de regularidades o analogías, la representación mediante dibujos o modelos, la elección de un simbolismo apropiado, el estudio de posibilidades, la deducción lógica y la modificación de condiciones. Veamos algunos ejemplos de usos históricos de estas estrategias.

La generalización ha estado presente en todos los ámbitos de la construcción de la matemática. Ya hemos indicado antes que Descartes, generalizando el problema de Pappus, encontró las curvas algebraicas de grado mayor que dos. Fermat generalizó un problema de Diofanto (dividir un cuadrado en dos cuadrados) y formuló su famosa conjetura sobre la inexistencia de soluciones enteras de la ecuación $x^n+y^n = z^n$ para $n > 2$. Cramer, con su regla para resolver sistemas de ecuaciones lineales, generalizó un procedimiento ya conocido por MacLaurin para dimensiones pequeñas.

El estudio de posibilidades y la búsqueda de regularidades o analogías ha conducido a inventar conceptos nuevos, a clasificar objetos matemáticos, a descubrir procedimientos algorítmicos y a plantear y resolver problemas. Descartes, por ejemplo, clasificó las curvas en algebraicas y mecánicas (que luego serían llamadas, con más propiedad, trascendentes) y Newton hizo una primera clasificación de las cúbicas. Cardano, Tartaglia y Ferrari, en el s. XVI, utilizando métodos análogos a los de Al-Khowarizmi (completar cuadrados y cubos), consiguieron resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado.

La elección de un simbolismo apropiado ha sido determinante en la resolución de muchos problemas y en la facilitación de muchos algoritmos como lo demuestra la adopción del sistema de numeración hindú o del lenguaje algebraico que tan lentamente fue construyéndose a lo largo de los siglos. La representación de problemas, objetos geométricos, proposiciones, etc. mediante dibujos jugó un papel básico en la geometría tanto sintética como analítica. También la construcción de modelos ha sido útil en muchas ocasiones. Por ejemplo, Galileo para determinar el área encerrada por un arco completo de cicloide, recortó una lámina de metal con esta forma y otra con la forma del círculo generador; pesó ambas y conjeturó que el área de la cicloide era el triple que la del círculo. (Más tarde, Roberval demostró que esta conjetura era verdadera.)

El razonamiento lógico deductivo ha sido el mecanismo de demostración más utilizado en la historia de la matemática cuando sus contenidos se *comunican* a los demás en forma de libro o de artículo. Ya desde la época griega este razonamiento adoptó esencialmente dos modalidades que han persistido hasta hoy: el razonamiento analítico y el razonamiento sintético. El primero consiste en buscar una cadena de proposiciones equivalentes a la que se quiere demostrar hasta llegar a una proposición ya conocida o a un axioma, en cuyo caso la proposición es verdadera, o a una contradicción, en cuyo caso es falsa. El razonamiento sintético consiste en partir de axiomas o proposiciones conocidas y, mediante argumentos lógicos, llegar a la proposición que se desea probar. Los *Elementos* de Euclides y las *Cónicas* de Apolonio son modelos paradigmáticos del uso de esta estrategia, en cambio las técnicas algebraicas aplicadas a la geometría constituyen razonamientos analíticos, lo cual justifica el nombre asignado a esta geometría.

La modificación de las condiciones de un problema, la inversión de un procedimiento o la variación de las hipótesis de una proposición han producido resultados interesantes en la evolución de la matemática. Por ejemplo, al eliminar la condición de usar sólo la regla y el compás en la resolución de los tres problemas clásicos se obtuvieron numerosos descubrimientos: curvas (cónicas, trisectriz, cuadratriz,...), series numéricas, ecuaciones, etc.

El estudio de posibilidades y la búsqueda de regularidades o analogías ha conducido a inventar conceptos nuevos, a clasificar objetos matemáticos, a descubrir procedimientos algorítmicos y a plantear y resolver problemas

El razonamiento lógico deductivo ha sido el mecanismo de demostración más utilizado en la historia de la matemática cuando sus contenido se comunican a los demás en forma de libro o de artículo.

De este análisis se pueden extraer dos consecuencias didácticas:

En primer lugar, el método de enseñanza debe permitir a los estudiantes el uso de razonamientos inductivos antes de facilitarles los conceptos o los procedimientos totalmente elaborados: explorar, tantear, buscar ejemplos y contraejemplos, analizar casos particulares, formular conjeturas, etc.; luego debe venir una etapa de sistematización y formalización en la que se utilicen los razonamientos deductivos (hasta donde lo permita su capacidad); la formulación «rigurosa» es la última fase en la construcción del conocimiento matemático, no la primera.

En segundo lugar, las estrategias cognitivas generales que hemos citado antes, comunes a muchas otras ciencias, deben ser enseñadas como un contenido de aprendizaje en las mismas condiciones que los conceptos o los procedimientos específicos, y esto debe hacerse permitiendo a los alumnos que hagan matemáticas, que practiquen estas estrategias en todos los ámbitos de aplicación: enunciado y resolución de problemas, definición de conceptos, formulación de conjeturas sobre propiedades o relaciones entre conceptos, invención de procedimientos algorítmicos, demostración o refutación de proposiciones, etc.; algunos conceptos o procedimientos podrían perder su vigencia pero las estrategias cognitivas son mucho más duraderas como lo demuestra su presencia constante a lo largo de la historia.

La curva de la importancia

Si representamos en el eje de abscisas los conceptos y los procedimientos que se han ido construyendo a lo largo de la historia de la matemática y en el eje de ordenadas el grado de «importancia» que tuvieron en una determinada época, constatamos que la curva obtenida varía notablemente con el transcurso de los años. Los conceptos, las estructuras conceptuales y los procedimientos, relacionándose unos con otros, se organizan y tienden a engendrar otros más generales, es decir, más abstractos o con mayor ámbito de aplicabilidad. Por lo tanto, se trata de conocimientos en continua evolución, donde algunos pueden quedar obsoletos y otros se revisan para ampliar su significado o para relegarlos a un segundo plano. En la historia abundan los ejemplos: ciertas curvas descubiertas por los griegos como la trisectriz o la cuadratriz hoy carecen de todo interés específico, en cambio la curvas mecánicas, «desterradas» por Descartes, tuvieron gran importancia en los siglos posteriores; la geometría clásica sufrió un progresivo abandono en la Edad Moderna y hoy muchos de sus problemas de gran importancia histórica (como las construcciones con regla y compás) y la mayoría de sus teoremas no aparecen en los libros de texto de la enseñanza elemental y superior; las fracciones sexagesimales de uso generalizado hasta el siglo XVI fueron abandonadas y sustituidas lentamente por las fracciones decimales; hoy nadie utiliza las tablas logarítmicas ni el uso de los logaritmos tiene como objetivo facilitar los cálculos tal como habían pensado sus creadores, Bürgi y Neper; las fórmulas trigonométricas para emplear logaritmos también han desaparecido y la calculadora sustituye con ventaja a las tablas y a muchos algoritmos de lápiz y papel (como el cálculo de la raíz cuadrada). Estos ejemplos nos muestran que la importancia de un concepto, de un teorema o de un procedimiento algorítmico es algo contextual, relativo al estado de la ciencia en ese momento y, por lo tanto, la «eternidad» de las verdades matemáticas es una cualidad relativa.

En consecuencia, en la enseñanza de las matemáticas debe tenerse en cuenta el carácter evolutivo de los conocimientos, su estado actual y los recursos tecnológicos que pueden afectar a su desarrollo; por ejemplo, la generalización del uso de la informática debe llevar al profesorado a revisar la enseñanza de ciertos algoritmos del cálculo infinitesimal y del álgebra lineal (tal vez haya que poner más énfasis en la comprensión de los conceptos, en la resolución de verdaderos problemas y en la construcción de los algoritmos que en su aplicación rutinaria, tarea que debe encomendarse a las máquinas). No se puede caminar en contra de la historia.

Las matemáticas han sido construida por hombres de carne y hueso como la filosofía o las obras de arte; sin embargo, en su enseñanza se escamotean sus nombres y sus rostros.

Los rostros de las matemáticas

Las matemáticas han sido construidas por hombres de carne y hueso como la filosofía o las obras de arte; sin embargo, en su enseñanza se escamotean sus nombres y sus rostros. Cierto es que la memoria histórica no ha sido muy justa pues algunos autores se hunden en el anonimato y a otros se les atribuyen descubrimientos que no les corresponden. Por ejemplo, la geometría *cartesiana*, nombre utilizado por Jean Bernouilli en 1692, fue inventada también por Fermat; los logaritmos *neperianos* también fueron inventados media docena de años antes por Bürgi; la famosa regla del marqués De L'Hôpital fue descubierta por Jean Bernouilli quien había pactado con el primero que le enviaría sus descubrimientos a cambio de un salario regular; el triángulo numérico de Pascal aparece por vez primera en una obra china de 1303 y, en Occidente, en una obra de Petrus Apianus publicada un siglo antes de que Pascal estudiara sus propiedades; la serie de Taylor ya era conocida mucho antes por James Gregory y la de MacLaurin también había sido descubierta y publicada antes por Stirling; etc.

En cualquier caso, a pesar de las «falsificaciones», que el estudio de la historia de la matemática va desvelando, es necesario que los estudiantes conozcan algo de la vida y del contexto social y cultural en el que se movieron sus autores. Es particularmente interesante que los alumnos aprecien ciertas actitudes que ellos mantuvieron a lo largo de su vida: curiosidad e interés por buscar y resolver problemas, tenacidad en el trabajo, autonomía e independencia intelectual, estima de la competencia y del juicio de otras personas, actitud crítica y revisionista, etc. Estos conocimientos humanizarán la enseñanza de las matemáticas y contribuirán a que se generen en los estudiantes actitudes similares con lo cual mejorará también su aprendizaje de los conceptos y de los métodos matemáticos.

En resumen, creemos que los principios didácticos enunciados en cada uno de los párrafos precedentes, fundamentados en el análisis de la evolución histórica de la matemática y coherentes con la teoría constructivista del aprendizaje, deben ser tenidos en cuenta a la hora de diseñar cualquier metodología de enseñanza de las matemáticas que aspire a que los estudiantes sean algo más que memorizadores de definiciones y aplicadores de métodos rutinarios; estos principios pretenden que los estudiantes adquieran una comprensión profunda de lo que significan las matemáticas: sus conceptos, sus procedimientos y sus estrategias generales.

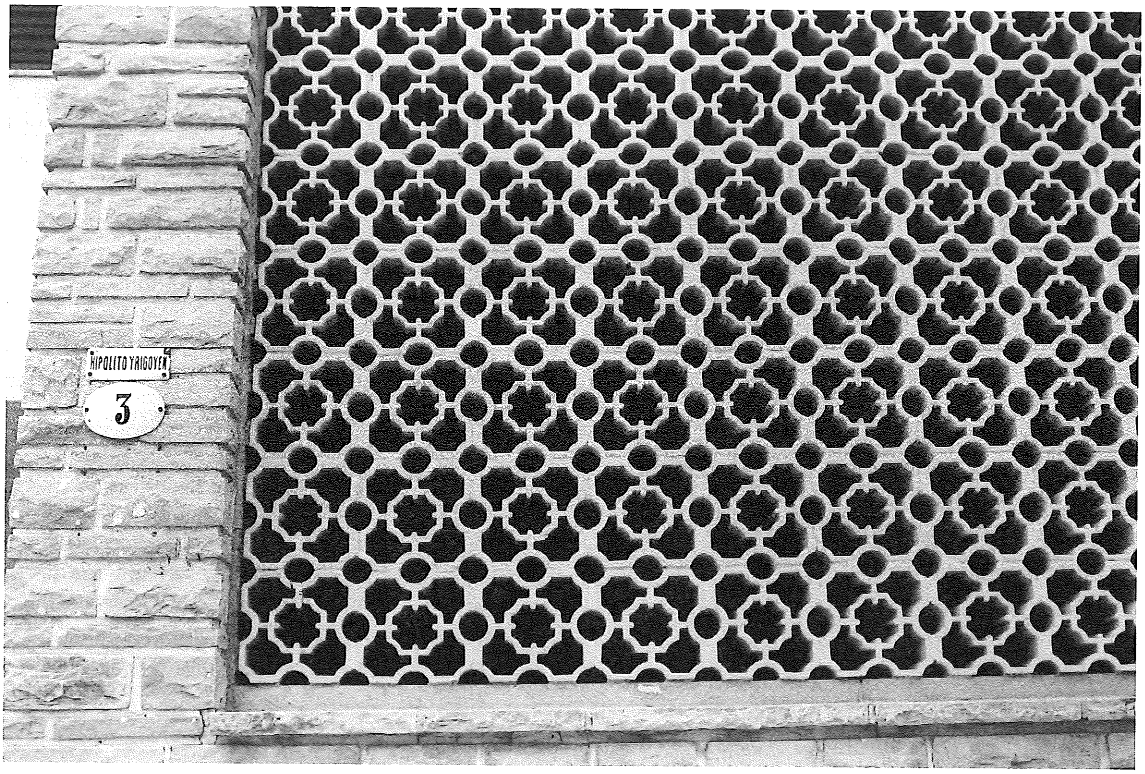
José del Río
IES Torres Villarroel.
Salamanca.
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesorado
de Matemáticas

Bibliografía

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.

COLLETE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI, Madrid.

KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestro días*, Alianza, Madrid.



Salta (Argentina). Foto: Luis Balbuena

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 39-52

El aprendizaje del concepto de integral

Pilar Turégano Moratalla

ARTÍCULOS

El propósito de este artículo es presentar una propuesta didáctica de la integral definida para la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato a través de unas secuencias de aprendizaje que ayuden al estudiante a captar las ideas fundamentales del cálculo integral, del concepto de integral y del proceso de integración.

EN EL AÑO 1991 presenté por primera vez, en las IV Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Castellón, una nueva propuesta didáctica para la integral definida. Desde entonces, muchos han sido los profesores de Secundaria y Bachillerato que se han interesado en ella. En aquel momento, la había experimentado durante tres años con estudiantes universitarios, pero fue en 1992 cuando la puse en práctica con estudiantes de 1.° de BUP. Los resultados de esta experiencia están recogidos en Turégano (1994*a*) y fueron objeto de una comunicación en las VII JAEM celebradas en Madrid en 1995. Allí me comprometí con varios profesores a escribir el presente artículo.

Las líneas básicas de mi propuesta son fundamentalmente dos:

- Introducción del concepto de integral como primera iniciación al estudio del cálculo infinitesimal, con independencia del concepto de derivación y previamente al estudio de límites.
- Presentación de dicho concepto como una continuación de la noción de área, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto y eliminar al máximo los cálculos algebraicos.

La utilización de un entorno gráfico informático es fundamental pues el estudiante se ve así liberado de tediosos y necesarios cálculos y representaciones, lo que permite al profesor centrar el estudio en los conceptos, globalizando los aspectos gráficos, numéricos, algebraicos y simbólicos.

En otros escritos[1] me he referido al modelo teórico elaborado, basado en la definición geométrica de integral de Lebesgue, por lo que remito a ellos a quienes deseen estudiar y encontrar una justificación a toda la propuesta.

Un enfoque conceptual para la integral definida

Mi idea es presentar la integral, en principio definida, como una continuación de la noción de área, que los estudiantes conocen desde los primeros días de la escuela. Lo que empezó para los estudiantes de educación primaria con la medición de área en general debe continuar en secundaria con el estudio de clases muy especiales de áreas: a saber, aquéllas cuyos límites inferiores, de la derecha y de la izquierda, tienen forma de caja, según la terminología de Toeplitz (1963), y que están limitados por una curva sólo por arriba o por abajo. De hecho, estas figuras no son otra cosa que representaciones gráficas de una función f(x) en un intervalo $a \leq x \leq b$. El problema de calcular el área de esas figuras consiste en determinar un dominio[2] rectangular (figura 2) cuya área sea igual a la del dominio original (figura 1), quedando el problema reducido al cálculo de la altura media de la función f(x) en todo el intervalo [a, b], y, a continuación, calcular el área pedida como el producto de esta altura por la longitud b - a del intervalo cerrado [a, b]. La existencia de la integral queda justificada por la existencia de la altura media.

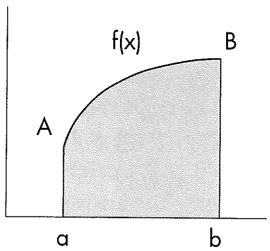


Figura 1

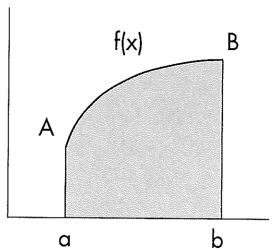


Figura 2

área abBA = área abCD

$$\int_a^b f = (b-a)M$$

Una razón para utilizar el símbolo anterior para la integral es que expresa con fuerza que ésta depende sólo de la función f y del intervalo [a, b].

En el caso de que f(x) no sea siempre positiva, la curva AB corta el eje *x* en un número finito o infinito de veces. En este caso se tienen dos especies de dominios: unos, por debajo de ox; los otros, por encima. Cada uno de estos dominios es cuadrable (Lebesgue, 1928, p. 41), y se define la integral de f(x) como la suma de las áreas que están por encima del eje ox menos la suma de las áreas que están por debajo de dicho eje. (Figuras 3 y 4).

$$\int_a^c f = A_1 - A_2 = (b-a)M_1 - (c-b)(-M_2) =$$
$$= (b-a)M_1 + (c-b)M_2$$

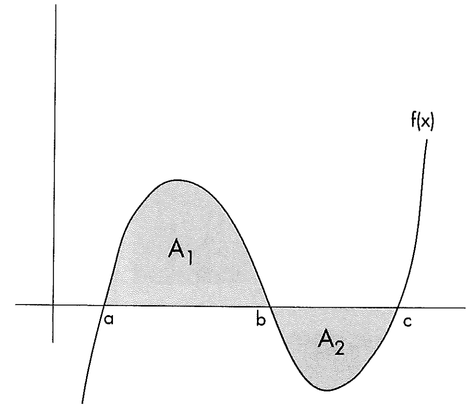


Figura 3

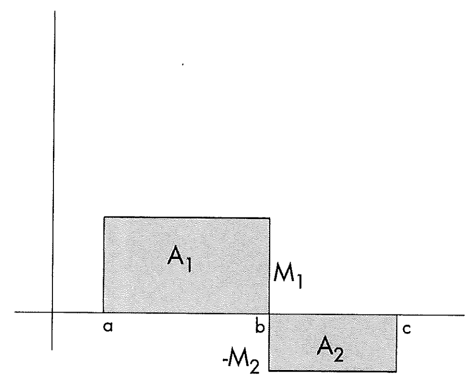


Figura 4

1 El modelo teórico se encuentra, abreviado, en Turégano (1991, 1992) y, de forma exhaustiva, en Turégano (1994*a*, 1996*a*, 1996*b*); la justificación del cambio curricular propuesto, en Turégano (1994*a*, 1995*a*, 1995*b*, 1996*a*); los resultados obtenidos con estudiantes de 1.° de BUP, y el diseño de situaciones didácticas, en Turégano (1994*a*).

2 Lebesque utiliza el término «dominio» para referirse a los puntos de la región interior que determina en el plano toda curva cerrada sin puntos múltiples.

Este enfoque nos llevaría a los métodos intuitivos anteriores a Cauchy, pero hoy la definición de medida les da una fundamentación lógica.

El proceso planteado para medir el área –proceso de integración– es apropiado para llevar a los estudiantes a la discusión de sucesiones numéricas, límites y número real. El resultado final de este proceso –un número real– es la integral buscada.

Este enfoque está en consonancia con las ideas previas puestas de manifiesto por los estudiantes (Turégano, 1994*a*, 1994*b* y 1996*c*) y con el desarrollo histórico del concepto de integral (Turégano, 1993*a*, 1994*a* y 1995*c*), complementado con la utilización de las nuevas tecnologías.

Todas estas recomendaciones se plasman de forma explícita en el Diseño Curricular Base (MEC, 1989), que recoge las bases de la propuesta oficial española para la Educación Primaria y Secundaria en la actualidad.

Considero este planteamiento como una clara alternativa a la aproximación mediante sumas «superiores» e «inferiores», por ejemplo, de rectángulos, pues, como dice Tall (1986), esta teoría de sumas superiores e inferiores se construye sobre un teorema de existencia que asegura que estas sumas existen sin llegar nunca a justificar al estudiante novel ni su existencia ni su convergencia. Este planteamiento basado en la integral de Riemann produce grandes dificultades conceptuales en los estudiantes, que ya han sido puestas de manifiesto en diferentes investigaciones (Orton, 1983; Cordero, 1987; Sneider-Gilot, 1988 y Turégano, 1994*a*), dificultades, principalmente, por estar en desacuerdo con las ideas previas de los estudiantes en relación a las descomposiciones infinitesimales de las superficies (Turégano, 1993*b*, 1994*a* y 1994*b*) y con las primeras intuiciones acerca de los infinitesimales y límites (Turégano, 1994*a*, 1994*b* y 1996*c*).

Ideas fundamentales del cálculo integral

Las ideas fundamentales del cálculo integral están presentes, aunque de forma inconsciente, en las experiencias diarias de muchas personas. Allí donde existe una función que relacione dos magnitudes de tal forma que, a cada valor de una de ellas, corresponde determinado valor de la otra, existe un problema de cálculo integral. El cálculo integral determina los resultados de los cambios entre esas dos magnitudes. Esos cambios pueden ser constantes a lo largo de un intervalo o variar de forma continua. Tanto en una caso como en el otro, una imagen visual nos permitiría darnos cuenta de que los resultados de los cambios y las áreas bajo los gráficos son exactamente lo mismo desde el punto de vista de las matemáticas. Es muy importante la imagen visual, que nos va a permitir interpretar el «significado» del área bajo el gráfico según el problema planteado. Unas veces puede representar una distancia, los puntos acumulados por un equipo de fútbol, las ganancias de un empresa, etc. En muchas aplicaciones de las integrales se está más interesado en la interpretación del significado de esa área que en el valor numérico de la misma.

Las ideas fundamentales del cálculo integral están presentes, aunque de forma inconsciente, en las experiencias diarias de muchas personas.

Los problemas reales del cálculo integral no se abordan ni en la Educación Secundaria Obligatoria ni en el Bachillerato, sino en la Universidad, pero es en la Educación Secundaria Obligatoria donde se tiene la responsabilidad de sembrar el germen del concepto de integral. Hay que huir de la exclusiva algoritmización del cálculo sin fundamentos conceptuales, ya que este enfoque es una de las causas del gran fracaso de los estudiantes universitarios (véanse referencias en Turégano, 1995*a*) en la asignatura de Cálculo Infinitesimal, no ayudándoles a reconocer en un determinado problema –donde no figuren de forma explícita– una integral, una derivada, una ecuación diferencial, etc.

Por otra parte, ya existe hoy día gran número de programas de ordenador que manejan los algoritmos de cálculo a la perfección, con lo cual no es necesario centrar la atención del estudiante en el estudio de esos algoritmos sino en los enfoques conceptuales del cálculo, no existiendo programas de ordenador que, mediante la pulsación de una tecla, nos planteen el problema o nos diga que hay que tomar una u otra decisión acerca de determinado fenómeno de estudio.

La idea del proceso acumulativo de la integral surge de las variaciones de las magnitudes: si esas variaciones son constantes en el intervalo, el problema se reduce a la suma de áreas de rectángulos, pero si son continuas, barren el área bajo el gráfico en el intervalo considerado.

Es necesario encauzar el trabajo de los estudiantes en estos procesos de variación, más que en el proceso de integración. En otras palabras, si criticamos la algoritmización temprana de la integral para centrarnos exclusivamente en el tecnicismo de las aproximaciones al área bajo una curva, estamos cometiendo otro error, diferente, pero, al fin y al cabo, otro error. El estudiante continuará sin captar las ideas fundamentales del cálculo integral y seguirá sin asociar la integral con el cálculo de la medida de las variaciones entre magnitudes. Estas variaciones nos permiten confeccionar una tabla de valores que, al ser representados, nos da una información interesantísima, ya que cada punto representa el área acumulada hasta ese momento, y el último punto, el resultado final.

El cálculo del área bajo un gráfico requiere muchos cálculos intermedios. Con métodos algebraicos, todos los ejemplos que no sean muy fáciles se hacen extremadamente difíciles y aburridos para los estudiantes. El esfuerzo que se les exige para la realización de los cálculos es tan grande que al final se olvidan del problema por estar excesivamente centrados en las aproximaciones al área. Además, la información numérica que se va obteniendo por sí sola no es suficiente para determinar el verdadero valor del área y llevaría mucho tiempo obtener aproximaciones cercanas con una calculadora normal y corriente.

Ejemplificaremos más adelante, en las secuencias de aprendizaje, estas ideas, que han sido tratadas con claridad por Wenzelburger (1994).

Por otra parte, estas variaciones son las que nos van a permitir explorar las propiedades de la integral y su conexión con el cálculo diferencial

Estos son, desde mi punto de vista, los objetivos que se deben conseguir en la Educación Secundaria Obligatoria y en Bachillerato con respecto al concepto de integral.

Soy consciente de que estos planteamientos chocan de frente con un agente externo: las pruebas de acceso a la Universidad, que ponen el énfasis, principalmente, en los aspectos mecánicos[3] y no en los conceptuales. Y es a estas pruebas a las que los profesores nos agarramos como una lapa para seguir trabajando en un terreno en el que nos encontramos sumamente cómodos y seguros. Y, aunque dichas pruebas sean muy importantes para los estudiantes –pues de las calificaciones que obtengan en ellas dependerá el que cursen una determinada carrera–, más importantes deberían ser los conocimientos que adquirieran en estas etapas, ya que numerosas investigaciones han puesto de manifiesto el gran fracaso de los estudiantes en los cursos de cálculo en la Universidad. Por tanto, no se deben seguir utilizando como excusa las pruebas de selectividad; debemos asumir que es totalmente necesario afrontar y llevar a la práctica una reforma metodológica que exija un ritmo de trabajo diferente y una organización de los contenidos y de las aulas también diferente. Es urgente, además, formar equipos de trabajo por centros para que pueda planificarse la continuidad en el proceso de aprendizaje de los estudiantes cuando éstos tienen que cambiar de profesor.

Secuencias de aprendizaje del concepto de integral

La adquisición por parte del estudiante del concepto de integral es un proceso lento cuyo aprendizaje se debe extender a lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato para pasar a la formalización en la Enseñanza Universitaria. Para que ese aprendizaje sea significativo para el estudiante, es necesaria una enseñanza que le permita participar activamente en la construcción de su conocimiento. Propongo, a continuación, una serie de secuencias que permitirán al estudiante hacerse una idea del concepto de integral y del proceso de integración, así como captar las ideas fundamentales del cálculo integral.

Imagen del área bajo un gráfico

Inicialmente, es preciso familiarizar al estudiante con el concepto de área bajo un gráfico, pues, como se puede ver en Turégano (1994*a*), los estudiantes cometen múltiples errores al sombrear áreas bajo gráficos, errores que, en algunos casos, alcanzan hasta el 75% de los estudiantes analizados en mi estudio.

Para ayudar al estudiante a crear una imagen completa de área bajo un gráfico, es conveniente utilizar programas de ordenador flexibles que le permitan construir gráficas de funciones y visualizar el área sombreada en un intervalo convenido. El programa ÁREA, creado y utilizado para mi investigación, permite al estudiante, en una hora, visualizar de 30 a 40 representaciones de funciones con el área sombreada bajo el gráfico.

En un principio, soy partidaria de la selección, por parte del profesor, de las funciones y de los intervalos a considerar, con la finalidad de incluir en estos ejemplos los casos posibles con diferentes dominios e intervalos.

La visualización juega aquí un papel importantísimo, ya que proporciona una visión holística del gráfico y del área sombreada. Este primer acercamiento a la integral tiene que ver con el área como magnitud, y, tal como argumenta Dreyfus (1991), el proceso de aprendizaje de un determinado concepto pasa inicialmente por la utilización de una sola representación. Pienso que esta representación debe ser gráfica.

A continuación, es conveniente dar al estudiante la oprtunidad de que explore los ejemplos que se le ocurran y, por último, tratar de crear alguna destreza

3 Existen excepciones, como el examen de P.A.U. Bachillerato LOGSE en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II del presente curso académico en la Universidad de Castilla-La Mancha. En dicho examen se pedía a los estudiantes que relacionaran, de forma razonada, las gráficas de tres funciones, de sus derivadas y de la función área de cada una de ellas.

con lápiz y papel en el sombreado de áreas bajo gráficos.

Estas actividades deben incluir representaciones gráficas de una misma función con variaciones de intervalo de integración.

Iniciación al proceso de integración

La noción de integral va asociada a la idea de medir el área bajo gráficos. Al proceso utilizado para determinar ese número es a lo que llamamos proceso de integración.

En la propuesta que estoy considerando, hay que determinar la altura del rectángulo congruente con el área a determinar. La existencia de la integral queda justificada con la existencia de esa altura.

Es conveniente mostrar a los estudiantes ilustraciones como las siguientes:

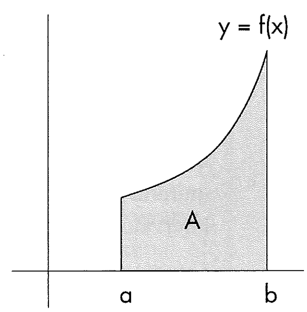


Figura 5

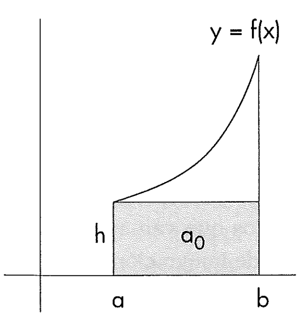


Figura 6

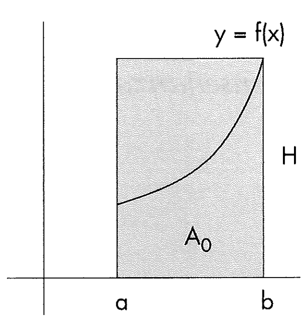


Figura 7

La figura 5 presenta el área que se desea determinar en el intervalo [a, b]. La figura 6 presenta el área del rectángulo tomando la altura mínima del intervalo [a, b], y la figura 7 la del rectángulo con la altura máxima del intervalo. La imagen visual permite al estudiante aceptar la siguiente desigualdad: $a_0 < A < A_0$.

La figura 8 muestra la diferencia de las áreas A_0 y a_0, surgiendo de esa imagen visual la necesidad de aproximar a_0 con A_0. Al ser la base de los rectángulos la misma, lo que hay que hacer es aproximar las alturas: aumentar *h* y disminuir *H* hasta hacerlas coincidir.

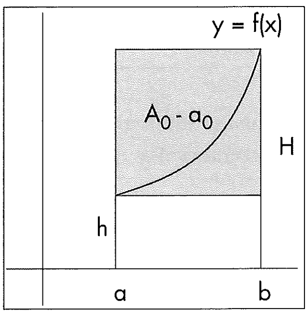


Figura 8

Este acercamiento entre *h* y *H* implica la realización de las siguientes actividades:

- División de un intervalo en subintervalos mediante sucesivas biparticiones y determinar las abscisas de los puntos de división.
- Calcular la ordenada en los extremos izquierdo y derecho de esos intervalos. Sustitución de la palabra «ordenada» por «altura».
- Calcular la media de las alturas en los extremos izquierdo y derecho.

  Al pasar de las curvas a las funciones, hay evidentemente un cambio de lenguaje (geométrico por algebraico) que nos permite dar sentido a alturas negativas y, posteriormente, a áreas negativas.

Para comenzar, elegimos una función sencilla $y = x^2$ y un intervalo con los extremos enteros y que al menos las primeras biparticiones determinen extremos también enteros: por ejemplo, [0, 4].

Es conveniente que, inicialmente, los estudiantes realicen las operaciones con calculadora, para que se hagan una idea de lo que están haciendo. Inmediatamente, se debe convertir en un programa de ordenador, que haga la parte más pesada de los cálculos, con el fin de que se puedan centrar en las ideas y no en los tecnicismos.

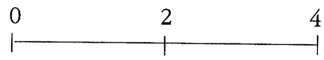
Actividades iniciales

Definición

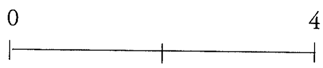
Llamamos bipartición de un intervalo a la división del mismo en dos partes iguales. Cada una de esas partes recibe el nombre de subintervalo.

Ejemplo

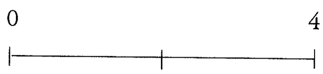
Consideramos el intervalo [0, 4] y efectuamos una bipartición. Los dos subintervalos que determina son el [0, 2] y el [2, 4].



Cuestión 1. En el mismo intervalo [0, 4] efectúa dos biparticiones y escribe los subintervalos que determina.



Cuestión 2. En el mismo intervalo efectúa tres biparticiones y escribe los subintervalos que determina.

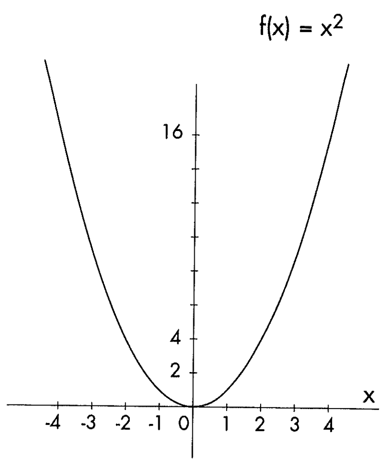


Cuestión 3. Si efectuamos 7 biparticiones, ¿cuántos subintervalos determinaríamos?

Cuestión 4. Si efectuamos n biparticiones, ¿cuántos subintervalos determinaríamos?

Ejemplo

El diagrama siguiente muestra el gráfico de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [–4, 4].



Cuestión 1. Determina qué valores toma en los extremos de los intervalos [0, 1], [1, 2], [2, 3] y [3, 4].

Cuestión 2. Dibuja sobre el gráfico las ordenadas calculadas. A esas ordenadas las llamaremos *alturas* de la función en los extremos de los intervalos.

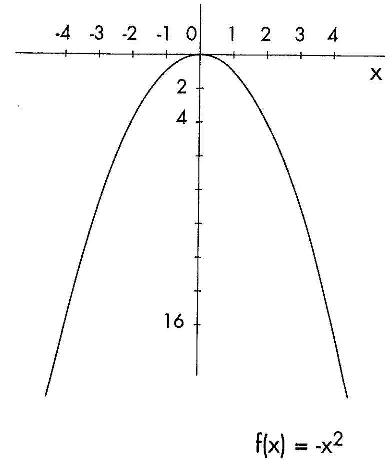
Cuestión 3. Di cuáles son las alturas «mínimas» y cuáles las «máximas» en los intervalos dados.

Cuestión 4. Halla la media de las alturas mínimas y la de las alturas máximas.

Si hemos de preparar al estudiante para lo desconocido el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza.

Ejemplo

El diagrama siguiente muestra el gráfico de la función $f(x) = -x^2$ en el intervalo [–4, 4].



Cuestión 1. Determina qué valores toma en los extremos de los intervalos [–4, –3], [–3, –2], [–2, –1] y [–1, 0].

Cuestión 2. Dibuja sobre el gráfico las ordenadas calculadas.

Cuestión 3. Di cuáles son las alturas «mínimas» y cuáles las «máximas» en los intervalos dados.

Cuestión 4. Halla la media de las alturas mínimas y la de las alturas máximas.

Actividades de refuerzo

Si hemos de preparar al estudiante para lo desconocido, el aprendizaje debe predominar sobre la enseñanza. Esto es lo que debemos conseguir con estas actividades previas a la determinación del valor numérico del área, haciendo hincapié en todos y cada uno de los subconceptos que van apareciendo en el proceso de integración.

La actividad siguiente debe realizarse con el ordenador.

Ejemplo

Utilizo el programa ALTURAS: se introduce la función, los extremos del intervalo y el número de biparticiones que queremos efectuar. A continuación aparecen en la pantalla las secuencias numéricas {h(f, a, b, n)}, {H(f, a, b, n)} y {H(f, a, b, n) - h(f, a, b, n)}, que representan, respectivamente, las medias en los extremos izquierdos de los intervalos, las medias en los extremos derechos y las diferencia entre las medias. La repetición continuada de este procedimiento apoyará fuertemente la intuición de que la diferencia entre h y H puede hacerse menor a medida que se hagan más subdivisiones. Esta intuición, que es correcta, viene reforzada por la imagen visual que plasma a continuación el ordenador, con la gráfica de la función y la impresión de h y H en distinto color, y, como quiera que con diez biparticiones ya son bastantes próximas para intervalos no muy grandes, se hace evidente que van a coincidir. Debe aprovecharse esta situación para la discusión de límites, ya que las ideas sobre límites empiezan a desarrollarse cuando se pueden explorar las situaciones en las que una sucesión se establece o converge, y que esto puede ser más real en una situación geométrica. Pensamos que esta es una buena ocasión para esta discusión y para establecer una relación entre los marcos geométrico y numérico.

Dispongo también de un programa, APROXIMA, que nos determina el número de biparticiones a efectuar, para que la diferencia H - h sea, por ejemplo, ≤ 0'002.

Para la función $y = x^2$ en el intervalo [0, 4] y 13 biparticiones, los datos obtenidos son los de la tabla 1.

Estas secuencias numéricas facilitan la discusión, como ya he dicho anteriormente, de límites y acercarnos al concepto de número real según la construcción de Cantor a partir de sucesiones fundamentales o de Cauchy. En esta construcción, el número real queda identificado con lo que llamamos clase de equivalencia de sucesiones fundamentales. La idea está organizada alrededor del concepto de punto de acumulación, ya que en el número real así definido resulta ser el punto de acumulación del conjunto formado por los términos de la sucesión asociados a él. Me

N.° de biparticiones	*Media de las alturas extr. izq. h*	*Media de las alturas extr. der. H*	*Diferencia de las alturas H – h*
Ninguna	0	16	16
1	2	10	8
2	3'50080	7'50000	4
3	4'37500	6'37500	2
4	4'84375	5'84375	1
5	5'08594	5'58594	0'50000
6	5'20898	5'45898	0,25000
7	5'27100	5'39600	0'12500
8	5'30212	5'36462	0'06250
9	5'31770	5'34896	0'03125
10	5'32552	5'34114	0'01563
11	5'32943	5'32724	0'00781
12	5'33138	5'33529	0'00391
13	5'33236	5'33431	0'00195
Con infinitas	5'3		0

Tabla 1

parece interesante este acercamiento ya que lleva implícito un doble empleo tácito del infinito actual: en primer lugar, la sucesión no tiende al número real sino que se identifica, al considerar la totalidad de sus términos, con el número real. En segundo lugar, mediante un criterio de equivalencia entre sucesiones, el número real queda identificado, no con una sino con todas las sucesiones equivalentes, esto es, con un conjunto infinito cuyos elementos son, a su vez, conjuntos infinitos.

Así, una sucesión infinita de números racionales constituye una multiplicidad que, al pensarse en su totalidad, da lugar a un único número real: el asociado a ella.

Cuando se tienen secuencias de números (en este caso las {h(f, a, b, n)} y {H(f, a, b, n)}), es importante saber encontrar los términos siguientes, y lo que es más interesante, tener un criterio para determinar cualquier término. En este caso, el criterio es muy fácil de establecer:

$$H(f,a,b,n) - h(f,a,b,n) = \frac{f(b) - f(a)}{2^n}$$

Aunque hay muchos estudiantes (Turégano, 1994*a* y 1996*c*) dispuestos a afirmar rotundamente que el límite de una sucesión es un número al que se acercan, pero que nunca alcanzan, esta práctica con el ordenador tiene como objetivo desafiar sus intuiciones ya hacerles reflexionar para que cambien esa imagen del concepto de límite.

Utilizo también las sucesiones {H(f,a,b,n)} y {h(f,a,b,n)} y su diferencia para razonar sobre la situación de la representación gráfica de f(x) con respecto a los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, forma de gráfico, etc.

Si H – h > 0 en un determinado intervalo la función es creciente; si H – h < 0, la función es decreciente; si las *h* y *H* son positivas, la función está por encima del eje ox, y, viceversa, si *h* y *H* son negativas, está por debajo de dicho eje, etc.

Cálculo de integrales definidas

Después de las actividades expuestas, el estudiante ya tiene una idea del proceso seguido para el cálculo de la altura del rectángulo congruente con el área a determinar.

Con el programa INTEGRAL tratamos ahora de unir las dos representaciones: una imagen visual del gráfico y el cálculo numérico de la altura que nos va a permitir obtener el área.

Se teclean los datos de la función, del intervalo y del número de biparticiones deseadas. Con la orden de ejecución, aparece una primera pantalla con el gráfico de la función y el área sombreada en el intervalo convenido.

Una segunda pantalla nos muestra las secuencias numéricas de {H(f, a, b, n)}, {h(f, a, b, n)}, {H(f, a, b, n) - h(f a, b, n)}, las secuencias del área con estas alturas y las diferencias de las áreas.

En una tercera pantalla aparece de nuevo el gráfico de la función con la impresión de *h* y *H* en diferentes colores, con el máximo de biparticiones solicitado.

Con las secuencias obtenidas se puede conjeturar el valor de la altura buscada *M* y del área $\int_a^b f$.

Por último, se pide el valor de *M* y $\int_a^b f$ cuando se efectúan infinitas particiones.

Soy de la opinión de que el proceso hay que terminarlo; no se puede dejar al estudiante ante la eterna duda de si el límite se alcanza o no se alcanza. Si no se determina el valor del área, estaríamos fomentando la concepción del infinito potencial –tan arraigado en los estudiantes–, siendo éste uno de los obstáculos con los que se encuentra el alumno para poder concebir un proceso infinito como algo definido o acabado.

En principio, creo que hay que calcular el área con funciones que sean monótonas y positivas en el intervalo de integración, pasar después a funciones monótonas y negativas y finalizar con funciones que conjuguen las dos situaciones anteriores.

Ejemplo

Calcular el área bajo la curva $y = x^2$ en el intervalo [0, 4]. (Ver tabla 2).

Definición geométrica de integral definida

Se selecciona una colección de ejemplos y contraejemplos, es decir, funciones en las que, al construir sus gráficas, el valor numérico de la integral sea exactamente el del dominio sombreado, para lo cual $f(x) \geq 0$ en el intervalo considerado, y funciones que nos

N.° de biparticiones	Media de las alturas extr. izq. *h*	Media de las alturas extr. der. *H*	Diferencia de las alturas *H – h*	Área (b–a)h	Área (b–a)H	Diferencia de las áreas
Ninguna	0	16	16	0	64	64
1	2	10	8	8	40	32
2	3'50080	7'50000	4	14	30	16
3	4'37500	6'37500	2	17'5	25'5	8
4	4'84375	5'84375	1	19'375	23'375	4
5	5'08594	5'58594	0'50000	20'343	22'343	2
6	5'20898	5'45898	0,25000	20'83592	21'83592	1
7	5'27100	5'39600	0'12500	21'08400	21'58400	0'5
8	5'30212	5'36462	0'06250	21'20848	21'45848	0'25
9	5'31770	5'34896	0'03125	21'27084	21'39584	0'125
10	5'32552	5'34114	0'01563	21'30208	21'36456	0'0625
11	5'32943	5'32724	0'00781	21'31772	21'34896	0'03125
12	5'33138	5'33529	0'00391	21'32552	21'34116	0'015625
13	5'33236	5'33431	0'00195	21'32944	21'33724	0'0078125
Con infinitas	5'3		0	21'33		0

Tabla 2

determinan dominios sobre el eje ox y debajo de dicho eje en el intervalo considerado, con lo que el valor de la integral será el área de los dominios con $f(x) \geq 0$ menos el área de los dominios con $f(x) \leq 0$.

Aquí se requiere una puesta en común con la finalidad de elaborar una definición para la integral. Se toma, por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ en el intervalo [-2, 2]. Si se aplica el programa INTEGRAL, el valor obtenido para el área será 0. Pero, según la imagen mostrada, claramente hay un área. Muchos estudiantes exclaman incrédulos: ¡No puede ser! Hay una fe ciega, por parte de los estudiantes, en que el ordenador no se equivoca, por lo cual hay algo más. Aquí hay una oportunidad para la investigación y llegar a dar una definición geométrica de integral. Es en este momento cuando hay que descomponer la imagen holística del gráfico en partes para proceder a su análisis, no en entidades discretas, aisladas unas de otras, sino relacionadas en un todo. Se analiza, por una parte, el dominio cuya área es

$$\int_{-2}^{0} x^3$$

y, por otro, el dominio de área

$$\int_{0}^{2} x^3$$

pero siempre tratando de relacionarlas con

$$\int_{-2}^{2} x^3$$

Merece la pena comentar brevemente la situación con la que nos podemos encontrar en la resolución de este problema, ya que se observa una clara división dicotómica en el pensamiento de los estudiantes:

- Unos razonan con los números que se obtienen al realizar las integrales.
- Otros lo hacen sobre las regiones cuya área hay que determinar.

Los primeros justifican su razonamiento de la forma siguiente: al calcular

$$\int_{-2}^{2} x^3 = 0$$

Con la realización de las actividades propuestas, el estudiante se va preparando para el difícil proceso de transición al concepto abstracto, pero ese proceso depende, esencialmente, de las conexiones entre las distintas representaciones que utilicen los estudiantes. Estas conexiones, según Dreyfus, constituyen una tercera etapa del aprendizaje.

y tener a la vista el gráfico con el área sombreada, deducen que esa área no puede ser cero. Un análisis por partes les permite calcular el área entre [–2, 0] y entre [0, 2]. Al ver que son iguales, pero con signo opuesto, dicen que habrá que restar en vez de sumar.

Los segundos argumentan que si el área entre [-2, 0] es negativa, como esa región es congruente con la de base [0, 2], el área sería

$$\int_{0}^{2} x^3 - \int_{-2}^{0} x^3$$

Alguno, incluso, llega a insinuar si el área no será el doble de la de arriba:

$$\int_{-2}^{2} x^3 = 2\int_{0}^{2} x^3$$

La conclusión a la que llegan es que, cuando la gráfica de una función corta el eje x en varios puntos, determina regiones sobre y bajo dicho eje. El área buscada no es la suma de áreas, ya que, al ser la de abajo negativa, la estaríamos restando, y llegan a la conclusión de que

$$\int_{a}^{b} f(x)$$

no se debe hacer de «una sola vez» en aquellos casos en que $f(x)$ corte el eje x en más de dos puntos, debiendo descomponerse, entonces, en la suma de tantas integrales como regiones distintas determine.

Es indudable que, sin la imagen visual, estos razonamientos no se hacen explícitos en los estudiantes. Quiero reseñar, además, que el ejemplo es muy significativo, ya que, si eligiéramos otro en que la integral primera no fuera cero, quizá no se hubiera suscitado esta discusión, a no ser que existiesen estudiantes con una estimación visual del área muy precisa.

Propiedades de la integral definida

Con la realización de las actividades propuestas, el estudiante se va preparando para el difícil proceso de transición al concepto abstracto, pero ese proceso depende, esencialmente, de las conexiones entre las distintas representaciones que utilicen los estudiantes. Estas conexiones, según Dreyfus, constituyen una tercera etapa del aprendizaje.

Si se da a los estudiantes la oportunidad de explorar las propiedades de la integral, se verá si han conseguido establecer la conexión entre las representaciones gráfica y numérica de integral utilizadas hasta ahora, así como su expresión simbólica. Se presentan ejemplos concretos:

Hallar –si existen– relaciones entre:

$\int_{1}^{3} x^2$ y las integrales $\int_{1}^{1'5} x^2$ y $\int_{1'5}^{3} x^2$

$\int_{1}^{3} (x^2 + x^3)$ y las integrales $\int_{0}^{4} x^2$ y $\int_{0}^{4} x^3$

$\int_{1}^{2} 3x^2$ y la integral $\int_{1}^{2} x^2$

Se observan diferentes tendencias entre los estudiantes:

- Unos justifican o deducen las relaciones partiendo de los números que determinan (medida del área).
- Otros las deducen partiendo de la interpretación geométrica (área como magnitud) recurriendo a los rectángulos.

Por ejemplo, si nos referimos a la aditividad del integrando y les pedimos que traten de hallar una relación entre

$$\int_a^b f \quad , \quad \int_a^b g \quad y \quad \int_a^b f+g$$

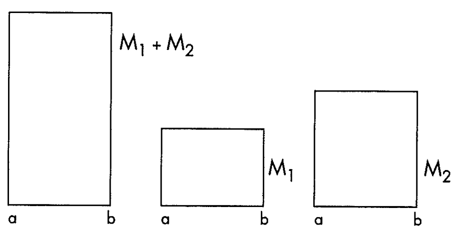
los primeros resuelven las tres y, con los números resultantes de medir el área, escriben la relación

$$\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

los segundos recurren a los rectángulos y escriben la relación entre sus áreas:

$$(b-a)M_1 + (b-a)M_2 = (b-a)(M_1 - M_2)$$

para pasar de ahí a las integrales correspondientes.



Los estudiantes utilizan las mismas estrategias para justificar las diferentes propiedades.

La ventaja de los estudiantes que utilizan la interpretación geométrica para justificar las propiedades de la integral es obvia, ya que les permite realizar generalizaciones; no así a los que utilizan los números, ya que éstos deben recurrir a ejemplos concretos para establecer las relaciones.

Un grupo pequeño de los que utilizan la imagen geométrica y obtienen bien las relaciones las valida recurriendo a los números, lo que pone de manifiesto la reticencia de algunos estudiantes a dar validez a las demostraciones visuales, tal y como manifiestan Dreyfus y Eisenberg (1990).

Construyendo una tabla de valores para la función área: representación e interpretación

La función área surge de la función que se integra, conservando los puntos de su gráfico un fuerte vínculo con las área acumuladas en los distintos intervalos. El punto final de este gráfico representa el área total acumulada a lo largo de todo el intervalo de integración considerado.

Si a la función que se ha de integrar se la considera como una función de razones de cambio que expresa la dependencia de dos magnitudes y la variación de una de éstas con respecto a la otra, entonces los resultados de estas variaciones a lo largo de los intervalos de la variable independiente se pueden sumar para obtener el valor de la integral. En

$$\int_a^x f$$

cada suma parcial de *a* a *x* nos da el área en función de *x*. Al ir variando *x*, se obtiene el área acumulada desde *a* hasta el valor de *x* considerado. Esas sumas parciales son muy interesantes ya que permiten tomar decisiones acerca de la suma final.

Los cambios pueden ser constantes o variables a lo largo de los intervalos.

Utilizaré el ejemplo de la liga de fútbol y del movimiento de un coche para aclarar estos conceptos.

Razones de cambio constantes

En estos casos la simple aritmética nos permite llevar a cabo los cálculos. Sin embargo, sólo el 50% de los estudiantes estudiados (Turégano, 1994*a*) fue capaz de interpretar y calcular el área de los rectángulos obtenidos en la representación gráfica de dos problemas que presentaban razones de cambio constantes.

Pienso que un problema que puede motivar de forma especial a los estudiantes es el seguimiento de los resultados, jornada a jornada, obtenidos por un determinado equipo en la liga de fútbol profesional.

La figura 9 muestra los resultados del Fútbol Club Barcelona a lo largo de las 10 primeras jornadas de la liga 1995-96.

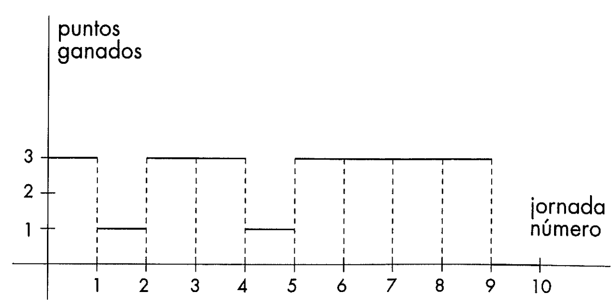


Figura 9

A cualquier aficionado a este deporte no le interesan solamente los puntos obtenidos cada semana, sino los acumulados semana a semana, y, por supuestos los acumulados al final del campeonato.

El cálculo de los resultados acumulados se puede interpretar como una suma de productos:

$$\left[\frac{3\text{ puntos}}{\text{jornada}}\times 1\text{ jornada}\right]+\left[\frac{1\text{ puntos}}{\text{jornada}}\times 1\text{ jornada}\right]+\left[\frac{3\text{ puntos}}{\text{jornada}}\times 1\text{ jornada}\right]+\cdots$$

$$+\left[\frac{0\text{ puntos}}{\text{jornada}}\times 1\text{ jornada}\right]=3\text{ puntos}+1\text{ puntos}+\cdots+0\text{ puntos}=23\text{ puntos}$$

Final jornada n.°	*Puntos acumulados*
1	3
2	4
3	7
4	10
5	11
6	14
7	17
8	20
9	23
10	23

Tabla 3

La tabla 3 nos muestra los puntos acumulados al final de cada jornada. El último valor nos informa de los puntos obtenidos al término de la décima jornada. La representación gráfica de esta tabla es la figura 10, donde se puede leer fácilmente la información que nos interese.

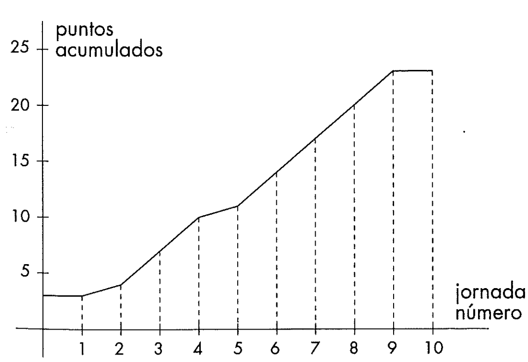


Figura 10

Cada uno de los puntos nos indica el total de puntos acumulados al final de la jornada indicada por la abscisa.

Razones de cambio continuas

Un ejemplo que ya fue utilizado en Turégano (1994*a*) y que nos puede ser útil para ilustrar los efectos de cambio con razones de cambio variables es el siguiente:

Un coche de Fórmula 1 se queda sin propulsión debido a una rotura de embrague. Se estima que a partir de ese momento ($t = 0$) su velocidad en metros por segundo vendrá dada por $v = 80 - 0'05\ t^2$, cuya gráfica es la de la figura 11.

Se les pueden hacer preguntas como las siguientes:

- ¿Qué distancia habrá recorrido a los 20 segundos?
- ¿Qué distancia recorre entre los 20 y los 40 segundos?
- ¿Qué distancia recorrerá hasta pararse?
- ¿Qué representa el área entre 20 y 30 segundos?

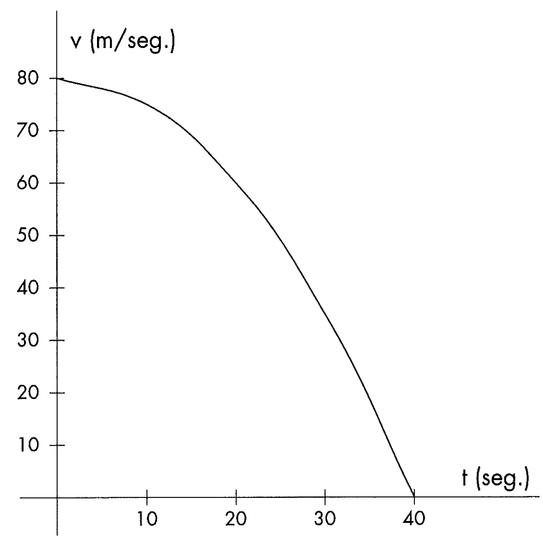


Figura 11

Con la ayuda del programa INTEGRAL se determina el espacio recorrido en los distintos intervalos, recogiendo esos valores en la tabla 4. Es conveniente que los estudiantes señalen sobre el gráfico el área a determinar en cada pregunta.

	Periodo	Espacio recorrido
Hasta el minuto 10	10 seg	783'333
Hasta el minuto 20	20 seg	1466'667
Hasta el minuto 30	30 seg	1950
Hasta el minuto 10	40 seg	2133'334

Tabla 4

A partir de los valores de la tabla 4 podemos representar una gráfica de los espacios recorridos cada 10 segundos, tal y como aparece en la figura 12. El punto final de esta gráfica representa el espacio total recorrido por el coche desde el momento en que se le rompe el embrague hasta que se para.

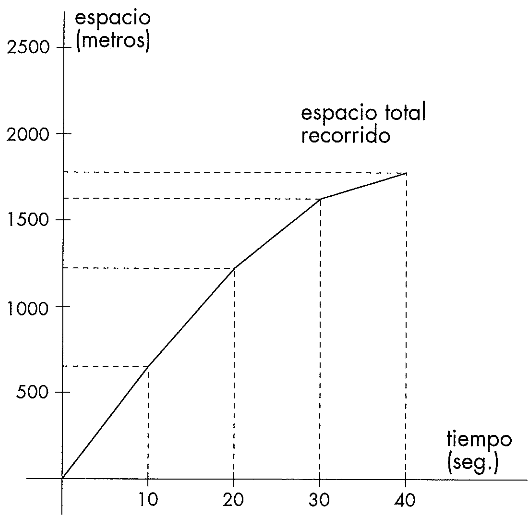


Figura 12

Al tomar períodos de tiempo más pequeños se obtienen más puntos y una gráfica más aproximada de la función integral o función área. La distancia recorrida en cada intervalo es función de la longitud de éste.

Este enfoque intuitivo, gráfico y a través de problemas concretos es lo que puede llevar al estudiante a reflexionar sobre las ideas fundamentales del cálculo integral.

La relación entre el cálculo diferencial e integral: Teorema fundamental del cálculo. Concepto de integral indefinida

Una vez que el estudiante ha captado las ideas del Cálculo Diferencial e Integral, de los procesos de derivación e integración y de los conceptos de función y variable, es el momento de buscar una relación entre todos ellos.

Supongamos que *f* es una función tal que

$$\int_a^x f(x)$$

existe para todo valor de x del intervalo [a, b]. Mantenemos a y f fijos y estudiamos esta integral como una función de x. Designamos el valor de la integral con F(x), con lo que

$$F(x) = \int_a^x f(x) \quad \text{si } a \leq x \leq b \qquad [1]$$

Una ecuación como esta permite construir una nueva función F a partir de la función dada f. El valor de F en cada punto de [a, b] es el determinado por [1]. El área bajo el gráfico de f(x) depende, por tanto, del valor de x:

$$F(x) = M(f, a, x)(x - a) \qquad [2]$$

En la igualdad [2], M(f, a, x) representa la altura media de la función f(x) en el intervalo [a, x], y (x – a) es la amplitud de dicho intervalo. En la figura 13 F(x) es el área ABEF.

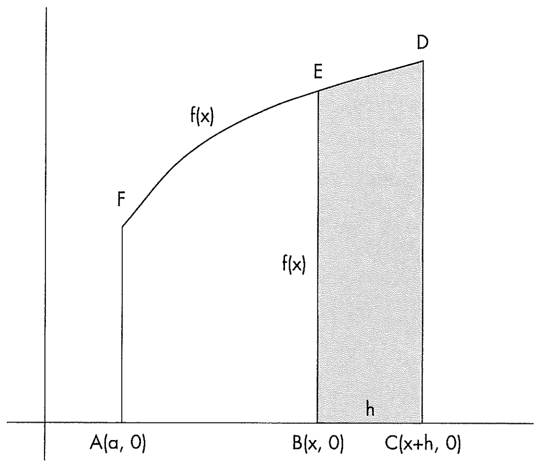


Figura 13

Si h es un número mayor o igual que 0 y $x \leq x + h \leq b$, C(x+h, 0) será un punto situado a la derecha de B(x, 0). El área bajo el gráfico en el intervalo [a, x + h] será:

$$\int_a^{x+h} f(x) = M(f, a, x + h)(x + h - a)$$

o lo que es lo mismo:

$$F(x+h) = =M(f, a, x + h)(x + h - a) \quad [3]$$

En la igualdad [3], M(f, a, x+h) es la altura media de la función f(x) en el intervalo [a, x+h] y (x+h–a) la amplitud del mismo.

La variación del área en el intervalo [x, x+h] es la parte sombreada de la figura 13, y existe una relación muy simple entre las áreas:

área BCDE = área ACDF - área ABEF

Escribiendo esta igualdad en términos de integrales, tenemos

$$\int_x^{x+h} f(x) = \int_a^{x+h} f(x) - \int_a^x f(x)$$

$$hM(f, x, x+h)(x+h-x) = M(f, a, x+h)(x+h-a) - M(f, a, x)(x-a)$$

$$M(f,x,x+h) = \frac{M(f,a,x+h)(x+h-a) - M(f,a,x)(x-a)}{h} = \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0} M(f,x,x+h) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

$$M(f, x, x+h) = F'(x)$$

Como $M(f, x, x) = f(x)$, quedaría que $f(x) = F'(x)$, igualdad que nos indica que la integración y la derivación son operaciones inversas.

$$\int_a^x f(x) = F(x) \quad \text{tal que} \quad F'(x) = f(x)$$

La función $F(x)$ recibe el nombre de función primitiva o antiderivada de $f(x)$ y nos va a permitir dar forma analítica a la integral. Esta es la última representación de la integral.

Si C = cte entonces $F(x) + C$ tiene la misma derivada que $F(x)$. Esto nos indica que una integral indefinida es una familia de funciones $F(x) + C$ tal que $F'(x) = f(x)$, donde a la constante *C* se le llama constante de integración, y a la integral

$$\int_a^x f(x) = F(x) + C \qquad [4]$$

integral indefinida de $f(x)$. La integración y la derivación son operaciones inversas, con la particularidad de que, al pasar de funciones derivadas a integrales, hay que tener en cuenta las constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales del problema.

A partir de aquí se establece la regla de Barrow, y con ella, un algoritmo de cálculo para la integral definida.

Particularizando [4] para x = a

$$\int_a^a f(x) = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad F(a) = -C$$

Particularizando [4] para x = a

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

...una notable ventaja de la integral Lebesgue con respecto a Riemann es que ésta se refiere a funciones acotadas, definidas en un intervalo compacto, mientras que la primera se refiere a cualquier función medible, definida en un conjunto arbitrario y acotado o no en él.

A partir de este momento es cuando se puede empezar, si se considera oportuno, con los algoritmos de cálculo para la resolución de integrales.

A lo largo de toda la propuesta hemos utilizado, para ilustrar el proceso, funciones polinómicas y monótonas, o monótonas a trozos, a lo largo de un intervalo, lo que no quiere decir que tengamos que limitarnos a este tipo de funciones. Precisamente, una notable ventaja de la integral Lebesgue con respecto a Riemann es que ésta se refiere a funciones acotadas, definidas en un intervalo compacto, mientras que la primera se refiere a cualquier función medible, definida en un conjunto arbitrario y acotado o no en él.

Una imagen gráfica que establece la comparación entre la integral de Riemann y la de Lebesgue es ésta: si colocamos sobre una mesa gran cantidad de monedas y queremos «medir» el dinero que hay allí, Riemann trocaría la mesa en rectángulos y contaría en cada uno de ellos; en cambio, Lebesgue clasificaría las monedas y contaría después. Esta es una manera de hacer alusión a la rigidez que suponen las particiones de Riemann, y una justificación a la elección de la integral Lebesgue para mi propuesta.

Referencias

CORDERO, F. (1987): «El cálculo diferencial e integral como un solo concepto: la derivada», *Memorias del IX Congreso Nacional de la Asociación de Profesores de Matemáticas*, 232-239. Xalapa (Veracruz, México).

DREYFUS, T. (1991): «Advanced Mathematical Thinking Processes», en D. TALL (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, Londres, 25-41.

DREYFUS, T. y T. EISENBERG (1990): «On difficulties with diagrams: Theoretical Issues», *Proceedings of the XIVth International Conference PME,* 1, México, 27-34.

LEBESGUE, H. (1928): *Leçons sur l'intégration et la recherche de fonctions primitives,* Éditions Jacques Gabay París. (Reimpresión Gauthier-Villars et Cie Éditeurs, 1989.)

ORTON, A. (1983*a*): «Students' understanding of integration», *Educational Studies in Mathematics,* 14, 1-18.

SCHNEIDER-GILOT, M. (1988): *Des objets mentaux "aire" et "volume" au calcul des primitives,* (Tesis doctoral), Université Catholique de Louvain, Faculté des Sciences, Louvain La Neuve.

TALL, D. (1986): «A graphical approach to integration», *Mathematics Teaching,* 114, 48-51.

TOEPLITZ, O. (1963): *The calculus. A genetic approach,* The University of Chicago Press, Chicago.

TURÉGANO, P. (1991): «Propuesta didáctica para la integral definida», Comunicación presentada en las IV JAEM, Castellón.

—(1992): «Una alternativa a la integral de Riemann», *Ensayos,* 6, 227-233.

—(1993*a*): *De la noción de área a su definición,* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, Cuenca.

TURÉGANO, P. (1993*b*): «Estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas», *IV C. I. Investigación Didáctica Ciencias y Matemáticas,* 353-355.

—(1994*a*): *Los conceptos en torno a la medida y el aprendizaje del cálculo infinitesimal,* Tesis Doctoral en microfitxes, Servei de Publicacions, Universitat de Valencia.

—(1994*b*): «Imágenes del concepto y estrategias que utilizan los estudiantes en la resolución de problemas de áreas"», *Ensayos,* 8, 237-257.

—(1995*a*): «El currículum y las dificultades de aprendizaje del Cálculo Infinitesimal», *Ensayos,* 9, 217-233.

—(1995*b*): «La integral definida en el nuevo Bachillerato», Comunicación presentada en las VII JAEM, Madrid.

Pilar Turégano
Departamento de Matemáticas
Universidad
de Castilla La Mancha
Societat d'Educació Matemàtica
de la Comunitat Valenciana
«Al-Khwarizmi»

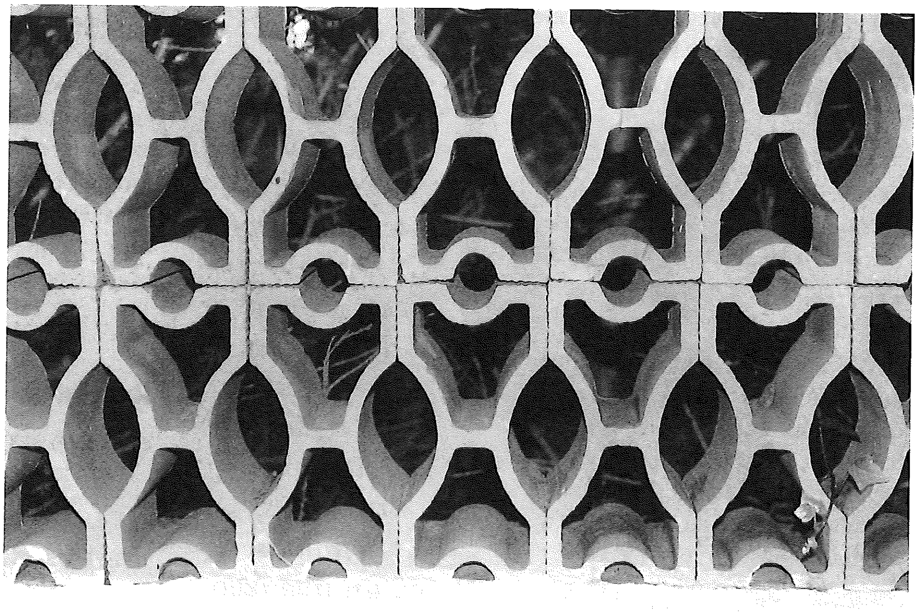
TURÉGANO, P. (1995*c*): «Imágenes del concepto de integral definida identificadas en la Historia», Comunicación presentada en las VII JAEM, Madrid.

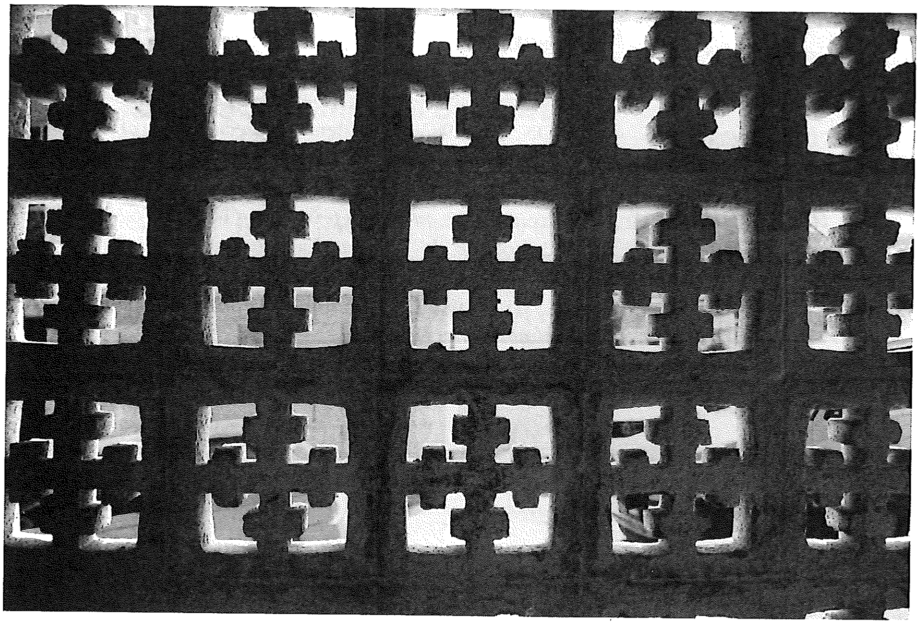
—(1996*a*): *Área e integral,* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha, Albacete.

—(1996*c*): «Intuición del infinito en estudiantes de Primero de BUP», *Épsilon,* 11-46.

WENZELBURGER, E. (1994): *Didáctica del Cálculo Integral,* Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Biarritz.
Foto: Luis Balbuena





Valle de Guerra.
Tenerife.
Foto: Luis Balbuena

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 53-58

¿Desaparecerá el álgebra elemental con la utilización de las nuevas calculadoras gráficas?

Jose R. Vizmanos

Se comienza haciendo un breve recorrido histórico sobre el desarrollo del álgebra desde Diofanto, Al Jwarizmi, Luca Pacioli, Tartaglia, Descartes, etc. A continuación se hace una relación de los contenidos y procedimientos algebraicos necesarios para los alumnos de la Enseñanza Secundaria y de Bachillerato, y como pueden hoy en día ser resueltos, muy fácilmente, con una calculadora gráfica, para lo cual se realizarán distintas ejemplificaciones con la TI-92.

* Texto de la conferencia plenaria impartida en el TG-18 del ICME-8.

ARTÍCULOS

UNA MIRADA al pasado

¿Qué entendemos por álgebra elemental? El álgebra elemental es el lenguaje con el que se comunica la mayor parte de la matemática. Gracias al álgebra podemos trabajar con conceptos a nivel abstracto y posteriormente realizar aplicaciones.

El álgebra elemental enlaza con la generalización de la aritmética para ir posteriormente centrándose en su propia estructura y mayor coherencia lógica. De ahí, la importancia que tienen los distintos usos de los símbolos algebraicos, cuando escribimos A + B, podemos expresar desde la suma de dos números naturales a la suma de dos expresiones algebraicas, o como una suma de matrices. Así pues, hay una primera parte de representación y simbolismo para, posteriormente, pasar al desarrollo de los algoritmos y procedimientos que permiten trabajar formalmente con las expresiones algebraicas.

Pero lo que hoy entendemos por álgebra ha sido el fruto del esfuerzo de muchas y muchas generaciones que han ido aportando su grano de arena hasta conseguir este magnífico edificio que hoy en día llamamos álgebra.

Parece ser que los egipcios ya conocían métodos para resolver ecuaciones de primer grado, en el *Papiro de Ahmes* (1650 a.C.) se dice así: «Calcular el valor del montón si el montón y el séptimo del montón es igual a 19», pero para resolver problemas de este tipo se utilizaban métodos aritméticos como, por ejemplo, la regla de falsa posición. Los babilonios resolvieron algunos sistemas de ecuaciones lineales muy sencillos. También, según descubrió Neugebauer en 1930, los babilonios manejaron ecuaciones cuadráticas con gran soltura.

Hacia el siglo VI (a.C.) aparece en la matemática griega el método deductivo y hacia el siglo IV (a.C.) lo que se podría llamar el *álgebra geométrica*, ejercicios como: «Dada la suma y el producto de los lados de un rectángulo, hallar dichos lados», fueron tratados de forma muy distinta a como lo hacían los babilonios. Parte de este álgebra geométrica lo trata Euclides en sus *Elementos*.

Pero el más importante de los algebristas griegos fue Diofanto de Alejandría. Poco se sabe de su vida, aun cuando en su tumba figura una inscripción que traducida a una ecuación lineal nos informa algo de ella. A Diofanto se le puede considerar el padre del álgebra antigua, su obra más importante fue *Arithmetica* tratado de trece libros de los que sólo han sobrevivido los seis primeros. No es un texto de álgebra, sino una colección de problemas sobre aplicaciones del álgebra. La influencia de Diofanto ha sido mucho mayor de la que se cree, el propio Pierre de Fermat (1601-1665), llegó a su celebre último teorema, cuando intentaba generalizar un problema que había visto en la *Arithmetica* de Diofanto: «descomponer un cuadrado dado en suma de otros dos cuadrados».

Los matemáticos indios Brahmagupta (598-?) y Bhaskara (1114-1185) aportaron al desarrollo del álgebra soluciones generales para las ecuaciones cuadráticas incluyendo las dos raíces aun en casos en que una de ellas es negativa. Uno de los miembros más distinguidos de la Casa de la Sabiduría de Bagdad es el matemático y astrónomo Al-Khowarizmi (hacia 780-850). En su obra *Algebra* estudia con detalle los seis tipos de ecuaciones lineales y cuadráticas que tengan una raíz positiva. Su forma de resolver las ecuaciones es preferentemente geométrica conectando así con el álgebra griega de Euclides.

Pero el álgebra clásica, como nosotros la conocemos hoy en día se desarrolla propiamente en el Renacimiento, que es cuando se produce la primera ruptura entre el álgebra antigua y el álgebra clásica. En 1494, el italiano Luca Pacioli (1445-1514) publicó *Summa Arithmetica* en la que se incluía la resolución de ecuaciones de primero y segundo grado. En dicho tratado se comenzaba a utilizar una rudimentaria álgebra simbólica. Pero sobre la ecuación cúbica, Pacioli tenía una impresión muy pesimista sobre su resolución, llegando a pensar que las ecuaciones cúbicas, y no digamos la cuárticas, estaban fuera del alcance del álgebra. Escipión del Ferro (1465-1526) aceptó el reto de Pacioli y llegó a encontrar una fórmula para la ecuación cúbica disminuida de la forma $ax^3 + cx + d = 0$, descubrimiento que desveló a su discípulo Antonio de Fiore (1506-?). También Nicolo Fontana (Tartaglia) (1500-1557) presumía de resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + mx^2 = n$, pero no sabía cómo resolver las ecuaciones cúbicas disminuidas, hasta que retado por Fior llegó a encontrar la solución para este tipo de ecuaciones. Ludovico Ferrari (1522-1565) logró encontrar un procedimiento para resolver la ecuación algebraica de cuarto grado.

Pero si los números negativos resultaban sospechosos en el siglo XVI, sus raíces cuadradas resultaban totalmente absurdas, eran los inicios de la aparición de lo que hoy en día llamamos números complejos.

Jerónimo Cardano (1501-1576) publicó *Ars Magna* en donde incluía el método de resolución de algunos tipos de ecuaciones cúbicas que le había revelado Tartaglia, a pesar de su promesa de no hacerlo publico, es lo que hoy en día se conoce como «resolución por radicales». Pero si los números negativos resultaban sospechosos en el siglo XVI, sus raíces cuadradas resultaban totalmente absurdas, eran los inicios de la aparición de lo que hoy en día llamamos números complejos.

En 1572 Rafael Bombelli (1526-1573) publicó su tratado *Algebra*, en el que dio un paso más en la resolución de las ecuaciones cúbicas, expresando las soluciones en la forma $2 + \sqrt{-1}$. A Bombelli hay que agradecer el haber descubierto que los números imaginarios juegan un importante papel en el desarrollo del álgebra.

El matemático francés Francisco Vieta (1540-1603) propuso un nuevo enfoque para la resolución de ecuaciones cúbicas. Además comenzó el estudio de las relaciones entre las raíces y los coeficientes de una ecuación, que completó el matemático flamenco Albert Girard (1590-1633), con la publicación de su obra *Invention nouvelle en l'algebre*, en 1629. Rene Descartes (1596-1650) en su Libro I: *La géometrie* incluye un sistema de instrucciones detalladas para resolver ecuaciones cuadráticas, pero por métodos geométricos como lo hacían los griegos de la antigüedad.

Tanto Cardano como Ferrari no supieron encontrar procedimientos para la resolución de ecuaciones algebraicas de 5.° grado. Hasta que en 1824 el joven matemático noruego Niels Abel (1802-1829) conmovió a toda la comunidad científica demostrando que no era posible resolver por radicales las ecuaciones de quinto o superior grado. Esto no quería decir, que las ecuaciones algebraicas de quinto o más grado no tuvieran soluciones, lo que significaba-es que no existía un método algebraico que permitiera obtener las raíces de la ecuación en función de sus coeficientes. El descubrimiento de Abel enlaza con el pesimismo de Luca Pacioli y se demuestra el fracaso del álgebra cuando se supera el grado cuarto.

Girard, ante la dificultad de extraer raíces cuadradas de número negativos, fue el primero que se atrevió a conjeturar en 1629 lo siguiente: «Una ecuación de grado *n* tiene exactamente *n* raíces, siempre que se cuenten las imposibles». Posteriormente Euler (1707-1783), Lagrange (1736-1813) y D'Alembert (1717-1783), estudiaron el mismo teorema pero sin pensar que las raíces podían ser números complejos. Es a Gauss (1777-1855) al que se le debe el nombre de *teorema fundamental del álgebra*, en su tesis doctoral leída en 1799, criticó los trabajos de Euler, Lagrange y D'Alembert y dio una demostración del teorema, que se apoyaba en consideraciones geométricas, por lo que no resultaba del todo convincente. En 1816 publicó dos nuevas demostraciones y cinco años antes de su muerte publicó la cuarta demostración tratando de encontrar procedimientos puramente algebraicos.

A principios del siglo XVIII, el matemático inglés Roger Cotes (1682-1716) y el francés emigrado a Inglaterra Abraham de Moivre (1667-1754), redujeron la resolución de la ecuación $z^n - 1 = 0$, a la división de la circunferencia en *n* partes iguales, mostrando así un buen dominio de los números complejos. Pero el álgebra sigue desarrollándose y en el siglo XVIII y XIX surge una nueva ruptura pasando del álgebra clásica al álgebra moderna, con aportaciones de matemáticos como George Peacock (1791-1858), iniciador del pensamiento axiomático, que luego desarrollarían matemáticos como Augustus de Morgan (1806-1871), Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) y George Boole (1815-1864). No podemos olvidar en esta época a los dos algebristas más prolíficos del siglo XIX, los ingleses Arthur Cayley (1821-1895) con el estudio de las matrices y J. J. Sylvester (1814-1897) con la teoría de los invariantes. Finalmente, Evariste Galois (1811-1832) con la creación de grupo hace de este concepto abstracto la idea central de la teoría de ecuaciones algebraicas dando por terminada el álgebra clásica.

Con la aparición de las calculadoras gráficas, con posibilidad de construcción de tablas, es posible resolver cualquier tipo de ecuaciones ya sea algebraica o trascendente, por métodos numéricos o gráficos.

Contenidos algebraicos necesarios para los alumnos de enseñanza preuniversitaria

Comencemos diciendo que se entiende por enseñanza preuniversitaria a la enseñanza que reciben los alumnos antes de entrar a la Universidad, más concretamente nos referimos a la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) para alumnos de 12 a 16 años y el Bachillerato para alumnos de 16 a 18 años. Así pues, en España la enseñanza preuniversitaria esta dirigida aproximadamente a alumnos menores de 19 años.

¿Cuáles son los contenidos algebraicos necesarios para estos alumnos?

Teniendo en cuenta los actuales currículos y sin tratar de ser exhaustivos, los contenidos algebraicos que estudian los alumnos en este período son los siguientes:

- Polinomios: operaciones.
- Expresiones algebraicas: operaciones.
- Resolución de ecuaciones de primer grado.
- Estudio de inecuaciones de primer grado.
- Resolución de ecuaciones de segundo grado.
- Estudio de inecuaciones de segundo grado.
- Resolución de ecuaciones cúbicas con una solución entera.
- Resolución de ecuaciones bicuadradas.
- Resolución de ecuaciones algebraicas de grado *n* con $n - 2$ raíces enteras.
- Resolución de ecuaciones irracionales.
- Resolución de ecuaciones trascendentes (logarítmicas, exponenciales, trigonométricas, etc.).
- Matrices: operaciones.
- Determinante de una matriz cuadrada. Matriz inversa.
- Sistemas de ecuaciones lineales: Métodos de Gauss, Cramer y Rouche.

Aplicaciones del cálculo algebraico con la TI-92

Con la aparición de las calculadoras gráficas, con posibilidad de construcción de tablas, es posible resolver cualquier tipo de ecuaciones ya sea algebraica o trascendente, por métodos numéricos o gráficos. Más recientemente con la aparición de la calculadora TI-92, que lleva incorporado el CAS (Cálculo algebraico simbólico) es posible realizar todo tipo de cálculos algebraicos. Así por ejemplo:

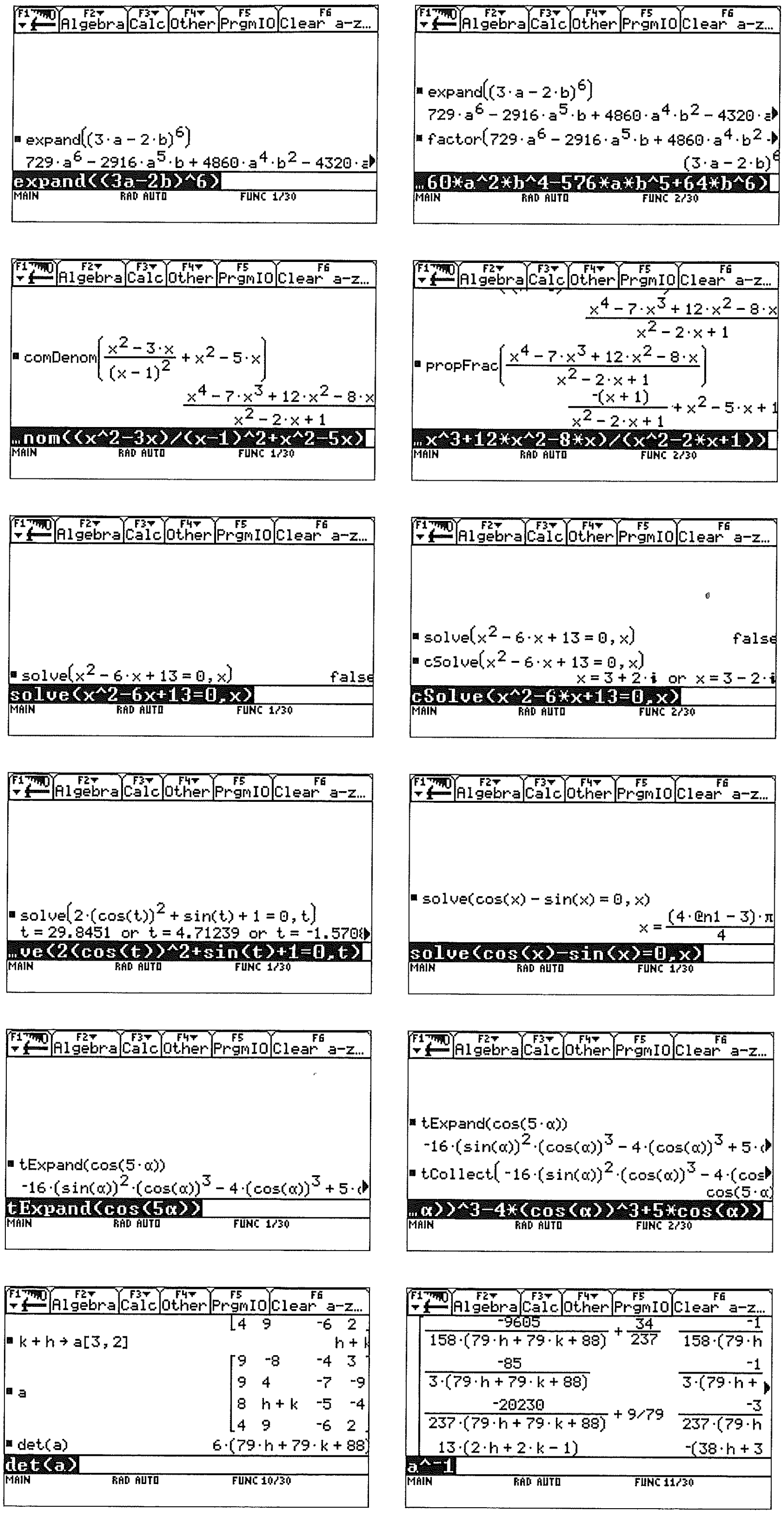


Figura 1

Así pues, podemos concluir que los procedimientos algebráicos con el CAS no presentan hoy en día ninguna dificultad.

Una mirada al futuro

De lo visto hasta ahora se deduce que los esfuerzos que ha realizado la humanidad para encontrar algoritmos y procedimientos que permitan desarrollar destrezas algebraicas así como para resolver ecuaciones, han sido muy loables, e importantísimos en su momento, pero hoy en día están totalmente obsoletos. ¿Qué sentido tiene actualmente resolver una ecuación cúbica por radicales, cuando como acabamos de ver podemos hacerlo de forma tan sencilla? ¿Quiere esto decir que los alumnos de estas edades no tendrán que estudiar álgebra, teniendo en cuenta que las calculadoras le resolverán con toda facilidad la ecuación?

Evidentemente, nuestros alumnos tendrán que seguir estudiando álgebra pero el currículo del álgebra que se debería proponer en un futuro debería de dejar de centrarse exclusivamente en la soltura manipulativa para dar una mayor importancia a las propias estructuras conceptuales del álgebra como medio de representación y de los métodos algebraicos como herramienta para la resolución de problemas. Pero esto, debería llevar a un cambio en cuanto al tiempo de docencia de cada una de las partes.

Hasta ahora cada vez que se enseñaba un contenido, pongamos por ejemplo las operaciones con matrices, se dedicaba mucho tiempo al calculo de expresiones con operaciones con matrices, pero como este tipo de cálculos es pesado y laborioso, resulta que cuando podríamos empezar a estudiar las aplicaciones del calculo matricial que es lo realmente importante, no queda tiempo y, por otra parte, resulta humanamente imposible calcular con papel y lápiz la potencia décima de una matriz para poder estudiar un problema de Markov.

Por el contrario, en un futuro proponemos dedicar mucho tiempo a los conceptos y a las estructuras de pensamiento algebraico, y menos tiempo a la manipulación algebraica tales como la resolución de ecuaciones, ya que esta puede hoy en día ser resuelta en tan solo un instante y siempre con el mismo procedimiento. En cambio, parece importantísimo dedicar mucho más tiempo a la aplicación del álgebra a distintas situaciones, para lo cual utilizaremos la tecnología existente.

Simplifiquemos un poco las cosas y pongamos tan solo un ejemplo. Supongamos que a los alumnos de 14 años se les enseña por primera vez la resolución de ecuaciones lineales. Tradicionalmente se venía dedicando mucho tiempo, aproximadamente cuatro semanas resolviendo ecuaciones que ya estaban planteadas, haciendo de este tiempo un período repetitivo y aburrido. A continuación, se dedicaba, generalmente muy poco, a veces tan sólo una semana, para el planteamiento y posterior resolución de ecuaciones de primer grado a partir de enunciados interesantes que obviamente resultarán mucho más motivadores que simplemente la utilización de una serie de reglas y recetas que el alumno llega a dominar con todo detalle, pero que, en muchas ocasiones, no sabe realmente lo que hace, ni por qué lo hace.

Frente a esta situación proponemos realizar un cambio sustancial partiendo de situaciones concretas suficientemente motivadoras que justifiquen la necesidad del lenguaje algebraico para que,mediante su simbolismo y representación podamos plantear la ecuación lineal correspondiente. Posteriormente, y tan sólo para ecuaciones suficientemente sencillas, tratar de resolverlas mediante papel y lápiz aplicando los tradicionales procedimientos algebraicos. Pero esta etapa manipulativa correspondiente a los procedimientos algebraicos puede recortarse mucho, teniendo en cuenta que los alumnos pueden utilizar una tecnología adecuada, que les permite resolver las ecuaciones muy fácilmente, tanto por métodos analíticos, como por métodos numéricos o gráficos. Y, en cambio, parece muchísimo más interesante dedicar más tiempo al planteamiento de las ecuaciones que se deducen de la lectura de enunciados diversos aplicados a diferentes campos de la vida cotidiana y mucho más próximos al alumno, que a la resolución de esas ecuaciones que se pueden hacer fácilmente con una calculadora.

¿Cómo ayudamos más a nuestros alumnos, enseñándoles a aplicar como autómatas reglas y recetas que permiten hacer cosas que resuelve fácilmente la tecnología o enseñándoles a pensar, cosa que todavía no pueden hacer ni los ordenadores ni las calculadoras?

Conclusión

Evidentemente el objetivo principal de la enseñanza de la matemática en la secundaria en todos los países es capacitar al alumno para enfrentarse a los retos que la vida en el futuro les pueda presentar. Ahora bien, ¿cómo ayudamos más a nuestros alumnos, enseñándoles a aplicar como autómatas reglas y recetas que permiten hacer cosas que resuelve fácilmente la tecnología o enseñándoles a pensar, cosa que todavía no pueden hacer ni los ordenadores ni las calculadoras? Incluso pensando en los futuros universitarios, los que obviamente deberán realizar un uso mucho más frecuente de destrezas algebraicas, un objetivo importante tendrá que ser el conseguir un nivel adecuado de suficiencia en este tipo de destrezas y procedimientos. Sin embargo, también estos alumnos se van a encontrar que la tecnología presente, y no digamos nada la futura, les va a exigir un replanteamiento de los niveles de destrezas que se deben conseguir.

En resumen, y a modo de ejemplo, se trata de poner más énfasis en el planteamiento de las ecuaciones, que es una forma de desarrollar estructuras de pensamiento algebraico, que en la propia resolución de la ecuación, que hoy en día ya no es tan importante. De hecho téngase en cuenta que todavía no existe ninguna calculadora u ordenador a la que se le edite un enunciado de un problema y automáticamente plantee la ecuación, en cambio hoy en día existen diversos programas de ordenador y calculadoras a las que se les edita la ecuación y con tan solo apretar la tecla ENTER se puede obtener su solución, en tan solo unos segundos. Tan solo a modo de ejemplo volvamos a releer algunos de los celebres problemas clásicos:

La vida de Diofanto

Este túmulo cubre aquí a Diofanto. ¡Contemplad este prodigio!

Mediante la habilidad del fallecido esta piedra muestra su edad.

Para ser niño Dios le concedió la sexta parte de su vida;

En una duodécima parte más le creció la barba sobre las mejillas;

En otra séptima parte más contrajo el vínculo del matrimonio.

Al cabo de cinco años nació de esta unión un hijo.

¡Pobre niño bien amado! A la mitad de los años del padre había llegado cuando sucumbió ante el Destino.

Durante los cuatro años siguientes ahuyentando de sí la aflicción, sumido en profundas reflexiones, también llegó al fin temporal.

Tomado del Lilavati de Brahmim Bahskara (1114-1185), matemático indio

De un enjambre de abejas, 1/5 de las abejas vinieron hacia una flor de loto, 1/34 hacían un banano. Un número igual a tres veces la diferencia entre las dos cifras precedentes. ¡Oh bella con ojos de gacela! voló hacia un árbol Codaga (con corteza amarga sucedáneo de la quina). Otra, por último, balanceándose, deambula por aquí y por allá en los aires, atraída al mismo tiempo por el delicioso perfume del jazmín y del pandano. Dime, querida mía, ¿cuántas son estas abejas?

Un problema de Euler (1707-1783)

Un padre deja una herencia de 8.600 libras a sus cuatro hijos. Según el testamento, la parte del mayor debe ser inferior en 100 libras al doble de la parte del segundo. La parte del segundo, inferior en 200 libras al triple de la parte del tercero. Y la parte del tercero inferior en 300 libras al cuádruple de la parte del más joven. ¿Cuál es la parte de cada uno?

La serie de Rachinski (siglo XIX)

Encontrar una serie de cinco numeros enteros consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los tres primeros es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

¿Donde reside la dificultad, en plantear la ecuación o, una vez planteada, resolverla?

José R. Vizmanos
IES Santamarca. Madrid

Referencias bibliográficas

BOYER, C. B. (1987): *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

DÍEZ BARRABÉS, M. (1994): «Dificultades en el uso y significación de las letras en álgebra. Propuesta de una nueva ingeniería didáctica», Comunicación presentada al II CIBEM, Blumenau (Brasil).

DUNHAM, W. (1992): *Viaje a través de los genios*, Editorial Pirámide, Madrid.

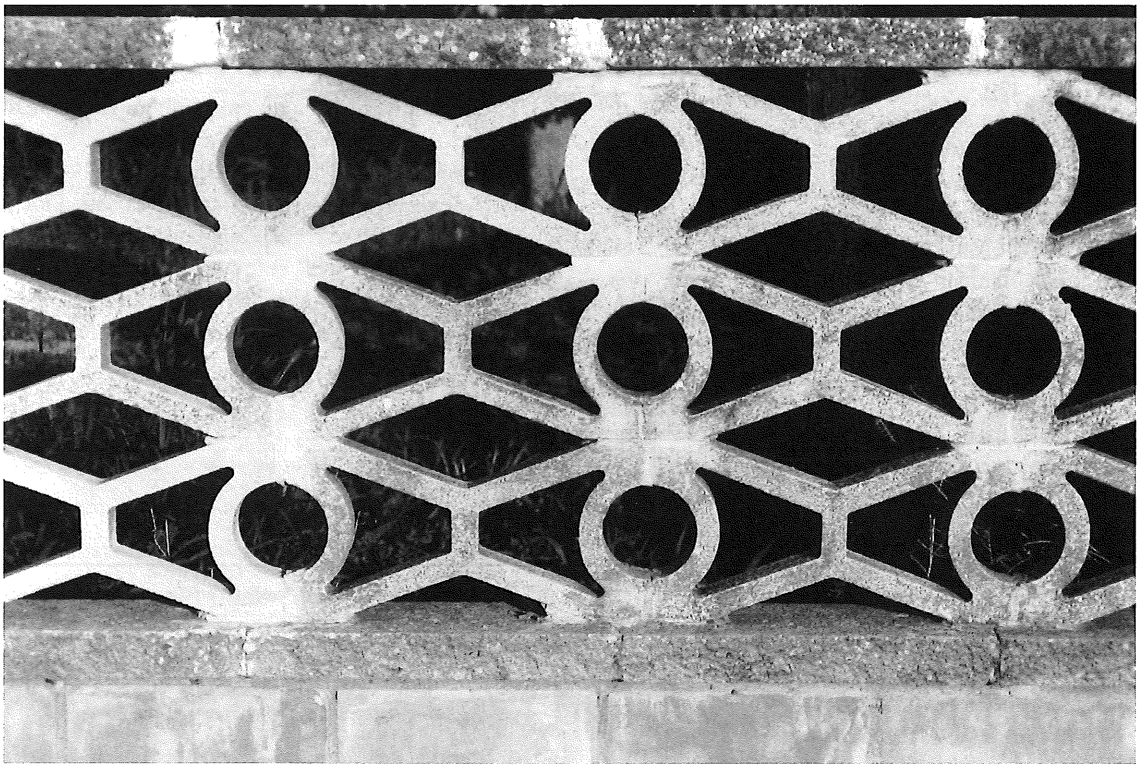
NCTM (1991): *Estándares Curriculares y de evaluación para la educación matemática*, SAEM Thales, Sevilla.

PARADIS, J. y otros (1989): *El álgebra en el período renacentista. La recuperación de los clásicos griegos*, PPU, Barcelona.

PERELMAN, Y. (1965): *Álgebra recreativa*, Editorial Mir, Moscu.

RADICE, L. (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona.

WUSSING, H. y W. ARNOLD (1989): *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza.



Lleida. Foto: Luis Balbuena

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 59-64

Proporciones en poesía. Versos áureos

José María Santa Olalla Tovar

MISCELÁNEA

La sección áurea puede ser un tema al que hacer referencia en distintos momentos y etapas del currículo escolar. Es idóneo para mostrar la relación entre las matemáticas y otras asignaturas del ámbito de humanidades y, de esta forma,contribuir a destruir el muro que tradicionalmente separa a los alumnos en «de letras» y «de ciencias». En este artículo, estudiando el ritmo de intensidad de la poesía clásica española, descubrimos cómo en los metros fundamentales y más utilizados por los autores de todos los tiempos podemos encontrar bien razones áureas, bien otras no menos bellas.

MI AFICIÓN por la poesía me llevó a disfrutar algunos poemas de uno de nuestros más grandes autores en lengua castellana cuya obra poética no se puede adquirir en una librería sencillamente porque está agotada. Me estoy refiriendo al genial Valle-Inclán. Su poesía a veces es jocosa e irónica pero casi siempre es sonora y musical, muy influida por el simbolismo francés. Un ejemplo es este soneto en alejandrinos de doce sílabas.

Por el Sol se enciende mi verso retórico
que hace geometría con el español,
y en la ardiente selva de un mundo alegórico,
mi flauta preludia: Do-Re-Mi-Fa-Sol.
¡Áurea Matemática! ¡Numen Categórico!
¡Logos de las Formas! ¡Teología Crisol!
¡Salve, Sacro Pneuma! Canta el Pitagórico
Yámbico, Dorado Número del Sol.
El Sol es la ardiente fuente que provoca
las Ideas Eternas en vaso mortal.
Por el encendido canto de su boca,
es la Geometría Ciencia Teologal.
Sacro Verbo métrico redime a la Roca
del mundo. Su estrella trasciende al Cristal.

A partir de la lectura de esta «Rosa del Sol», me pregunté si sería posible encontrar la divina proporción, o sección áurea, u otras en poesía. Para ello me he fijado en el ritmo de intensidad que los acentos marcan en un poema.

Es cierto que no es habitual encontrar regularidad en la disposición de los acentos en la poesía española, no obstante veremos que podemos señalar algunos versos y poemas más propensos a contener proporciones armoniosas y agradables.

Las sucesiones de Fibonacci y el número de oro

Una sucesión de Fibonacci es una secuencia infinita de números en la que cada término es suma de los dos anteriores. Cumple la condición:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Para cada pareja de términos a_1 y a_2 tenemos una sucesión de Fibonacci distinta. Por ejemplo:

a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

b) 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42,...

c) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,...

Todas estas sucesiones son un R-espacio vectorial con las operaciones usuales. Pero lo que aquí nos importa es que todas estas sucesiones tienen una característica común: Si una sucesión $\{a_n\}$ es de Fibonacci entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618033\ldots$$

En los ejemplos anteriores si calculamos los cocientes entre cada término y el anterior obtenemos las siguientes sucesiones:

a) 1, 2, 1'5, 1'6666..., 1'6, 1'625, 1'6153..., ...

b) 1, 2, 1'5, 1'6666..., 1'6, 1'625, 1.6153..., ...

c) 3, 1'3333..., 1'75, 1'5714..., 1'6363..., 1'6111..., ...

Todas ellas convergen hacia el mismo número Φ a este número le llamamos número de oro, o razón áurea. Este número tiene la propiedad de que

$$\Phi^{-1} = \Phi - 1$$

A Φ^{-1} en ocasiones también se le llama razón áurea. Ambos están íntimamente relacionados con las sucesiones de Fibonacci.

Proporciones áureas a nuestro alrededor

Es común ver en la matemática un hacer, una creación humana, que como una obra de arte puede ser elegante y bella. Algunas personas comparan la creatividad matemática con la creatividad artística. Muchos se han preocupado, también, de buscar en el arte y la propia naturaleza armonía y orden matemático.

Un ejemplo es el rectángulo de oro. Cuando en un rectángulo el cociente entre la base y la altura es aproximadamente igual al número Φ decimos que el rectángulo tiene proporciones áureas.

¿Cuánto hemos oído y leído sobre la presencia de la sucesión de Fibonacci y la divina proporción en el mundo vegetal y animal,. en la pintura de Miguel Ángel, las esculturas griegas, o en la arquitectura de todos los tiempos desde el Partenón hasta los trabajos de Le Corbusier? En música se han encontrado proporciones áureas, por ejemplo en las sonatas de Beethoven y ciertas sinfonías de Haydn o Mozart.

Se ha intentado también analizar la poesía desde un punto de vista matemático. Servien introduce una notación para representar el ritmo que los acentos imponen a cada verso francés.

Se ha intentado también analizar la poesía desde un punto de vista matemático. Servien introduce una notación para representar el ritmo que los acentos imponen a cada verso francés. Asocia a una frase o verso un número, N, que cumple:

1.°) Tiene tantas cifras como acentos tónicos tenga la frase.

2.°) Cada cifra indica el número de sílabas desde una sílaba tónica a la siguiente (inclusive).

3.°) Se anotarán los silencios añadiendo en la cifra el signo de puntuación, o, cuando no hay signos dejando un espacio en blanco.

4.°) Las sílabas átonas situadas después del último acento tónico de un grupo (verso o hemistiquio) no cuentan.

En este modelo, Servien divide el verso en cadenas fónicas que constan de varias sílabas átonas y una última sílaba tónica. Se adecua perfectamente al francés por ser una lengua donde predominan las palabras oxítonas o agudas, pero no es válido para el español que es una lengua predominantemente paroxítona o llana.

Planteo, ahora, una forma de asignar un número, Ñ, a cada verso o frase española:

La primera cifra del número visto de izquierda a derecha es el número de sílabas hasta la sílaba siguiente a la primera sílaba fonológicamente acentuada inclusive.

La segunda cifra, siempre de izquierda a derecha, será la diferencia entre el número de orden en el verso de la sílaba siguiente a la que tiene el segundo acento y el número de orden en el verso de la sílaba siguiente a la que tiene el primer acento.

En general, la cifra p-ésima será la diferencia entre el número de orden en el verso de la sílaba siguiente a la que tiene el acento p-ésimo y el número de orden de la siguiente a la que tiene el acento (p-1)-ésimo.

En el caso de tener dos o tres acentos seguidos consideramos para los cálculos la sílaba siguiente al último de los acentos que van seguidos.

En el caso de que el verso sea de arte mayor y esté dividido en dos hemistiquios, asignamos un número a cada hemistiquio como si fueran versos independientes y colocamos ambos números juntos y separados por el signo | |.

Veamos algunos ejemplos: (las sílabas fonológicamente acentuadas están en negrita)

¿Cuando el cociente entre las longitudes de dos olas se acerca a la razón áurea?

Tie-ne_al-an-**dar**-la-**gra**-cia-del-fe-**li**-no, (2324)
Es-**to**-da-**lle**-na-de-pro-**fun**-dos-**e**-cos, (3242)
en-**la**-bia-con-mo-**ris**-cos-em-be-**le**-cos (344)
su-**bo**-ca_os-**cu**-ra-**cuen**-tos-de_A-la-**di**-no. (3224)
(VALLE-INCLÁN)

¡**Nú**-me-ro-ce-**les**-te! ¡Geo-me-**trí_a**-do-**ra**-da! (24 | | 42)
¡**Ver**-so-Pi-ta-**gó**-ri-co! ¡**Cla**-ve-de-cris-**tal**! (24 | | 24)
¡**Can**-to-de-di-**vi**-na-**bo**-ca-en-lla-ma-**ra**-da! (24 | | 24)
¡**Ver**-so-del-ar-**dien**-te-pen-**tá**-cu-lo_as-**tral**! (24 | | 33)
(VALLE-INCLÁN)

Obsérvese que la suma de las cifras del número asociado a cada verso es el número de sílabas del verso.

Cada verso es como el mar, lo dividimos en olas que se acercan a la playa. Cada ola se levanta hasta la cresta de la sílaba tónica y luego decae en la sílaba siguiente. La longitud de cada una de estas olas es una cifra del número Ñ. Una ola es por tanto una cadena de sílabas que cumple que la última sílaba de la cadena es átona, la penúltima sílaba es tónica y si hay varias sílabas tónicas son consecutivas. Además la unión de todas las olas de un verso son justamente ese verso.

Es ahora cuando nos preguntamos. ¿Habrá alguna estrofa o poema en cuyos versos las cifras del número Ñ, sean términos de la sucesión de Fibonacci? ¿El cociente entre la longitud de un verso y la longitud de una ola será cercano al conocido número de oro en algún caso? ¿Cuando el cociente entre las longitudes de dos olas se acerca a la razón áurea? ¿Es posible encontrar simetrías, repeticiones curiosas o algún tipo de regularidad?

Octosílabo. Equilibrio y belleza

Podemos clasificar los versos en cuanto al número de sus sílabas. Son versos de arte menor aquellos que tienen ocho sílabas o menos. Si tienen más de ocho sílabas se llaman de arte mayor. Los versos de arte mayor de más de once sílabas se dividen en dos hemistiquios mediante una pausa llamada cesura.

Entre los versos de arte menor, hay uno que brilla con luz propia, el octosílabo. «Consta de ocho sílabas. Es el más importante de los versos de arte menor, y el más antiguo de la poesía española. Se ha cultivado desde los siglos XI al XII, en los que aparece como metro de alguna jarcha mozárabe, hasta nuestros días, empleándolo tanto el anónimo cantar popular, como nuestros más grandes poetas.

Por constituir el grupo fónico mínimo se adecua perfectamente a nuestra lengua y constituye una constante métrica en la historia de nuestra lírica; es injusto por ello, buscar su origen en los metros latinos o en la tradición galaica o provenzal. Es el verso por excelencia de nuestra poesía popular, de nuestros romances e incluso de nuestro teatro clásico» (Quilis, 1993). Pero es más, el octosílabo es el verso dorado por excelencia.

Los posibles números Ñ en un octosílabo, salvo reordenación, son 2222, 224, 233, 26, 35, 44. Cuando Ñ = 35 o Ñ = 53 tenemos que tanto la longitud del verso como la longitud de cada una de las olas son términos de la sucesión de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8,...

El cociente entre las longitudes de las dos olas es 1'6666... y el cociente entre la longitud del verso y la de la ola más larga es 1'6. No es posible encontrar en ningún otro verso razones tan próximas al número de oro. Los tres primeros versos del siguiente fragmento son octosílabos dorados:

La-**Vir**-gen-y-San-Jo-**sé** (Ñ=35)
per-die-ron-sus-cas-ta-**ñue**-las, (Ñ=35)
y-**bus**-can-a-los-gi-**ta**-nos (Ñ=35)
pa-ra-**ver**-si-las-en-**cuen**-tran. (Ñ=44)
(Federico GARCÍA LORCA)

En el siguiente fragmento de un romance de Luis de Góngora abundan los versos con Ñ=53 ó Ñ=35.

Ser-**ví**-a_en-O-**rán**-al-**rey**	(Ñ=332)
un-es-pa-**ñol**-con-dos-**lan**-zas	(Ñ=53)
y-con-el-**al**-ma_y-la-**vi**-da	(Ñ=53)
a_u-na-ga-**llar**-da_a-fri-**ca**-na	(Ñ=233)
tan-**no**-ble-co-mo-her-**mo**-sa	(Ñ=35)
tan-a-**man**-te-co-mo_a-**ma**-da	(Ñ=44)
con-**quien**-es-**ta**-**ba**_**u**-na-**no**-che	(Ñ=332)
cuan-do-to-**ca**-ron-al-**ar**-ma	(Ñ=53)

(Luis de GÓNGORA)

Cuando el número Ñ=44 entonces el verso queda partido por la mitad y hay simetría y equilibrio en la longitud de las dos olas que forman el verso. Otro fragmento del mismo romance de Góngora contiene versos con esta acentuación:

Tres-**cien**-tos-Ze-**ne**-tes-e-ran	(Ñ=332)
des-te-re-**ba**-to-la-**cau**-sa;	(Ñ=53)
que-los-**ra**-yos-de-la-**lu**-na	(Ñ=44)
des-cu-**brie**-ron-las-a-**dar**-gas	(Ñ=44)
las-a-**dar**-gas-a-vi-**sa**-ron	(Ñ=44)
a-las-**mu**-das-a-ta-**la**-yas	(Ñ=44)
las-a-ta-**la**-yas-los-fue-gos	(Ñ=53)
los-**fue**-gos-a-las-cam-**pa**-nas;	(Ñ=35)

(Luis de GÓNGORA)

También da idea de equilibrio 422 o sus reordenaciones, así como un verso con Ñ= 2222. Ñ=2222 corresponde a un ritmo total en el que aparecen todos los acentos rítmicos del octosílabo. Por ejemplo:

Ver-de-que-te-**quie**-ro-**ver**-de	(Ñ=242)
Ver-de-**vien**-to. **Ver**-des-**ra**-mas	(Ñ=2222)

(F. GARCÍA LORCA)

Finalmente cuando Ñ=62 o 26 entonces el cociente entre la longitud del verso y la de la mayor ola no se acerca a la razón áurea sino que con un valor de 1.3333... se aproxima a otra razón para algunos más bella que la universalmente conocida razón áurea, una razón recientemente descubierta, la razón cordobesa.[1] Este tipo de verso es poco frecuente ya que habitualmente no hay solamente un acento fonológico en seis sílabas. No obstante veamos un ejemplo donde aparece un verso cordobés:

Tha-**mar**-es-**ta**-ba-so-**ñan**-do	(Ñ=323)
pá-ja-ros-en-su-gar-**gan**-ta	(Ñ=26)
al-**son**-de-pan-**de**-ros-**frí**-os	(Ñ=332)
y-**cí**-ta-ras-en-lu-**ta**-das	(Ñ=35)

(Federico GARCÍA LORCA)

...el octosílabo, que es el verso natural en español, encierra en el ritmo que imponen sus acentos simetría y equilibrio, la razón de oro, o menos frecuentemente la recién nacida proporción cordobesa.

1 El cociente entre el lado de un octógono regular y el radio de la circunferencia circunscrita a él es igual a 1'3065629... Este número es la razón cordobesa. Cuando el cociente entre la base y la altura de un rectángulo toma este valor decimos que el rectángulo es cordobés. Sé han encontrado proporciones cordobesas en la arquitectura de Córdoba, Andalucía y de todo el mundo. Sobre este tema se pueden consultar las actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática.

En los versos que tienen por número Ñ 323, o 332, o sus reordenaciones podemos agrupar dos de sus olas y obtener nuevamente proporciones áureas o cordobesas.

Por tanto, el octosílabo, que es el verso natural en español, encierra en el ritmo que imponen sus acentos simetría y equilibrio (Ñ=44), la razón de oro (Ñ=35 o 53), o menos frecuentemente la recién nacida proporción cordobesa (Ñ=26 o 62). Estos bloques fundamentales se pueden partir en versos con un ritmo más marcado (Ñ=224, 233 o sus permutaciones).

Endecasílabo. El rey Midas del arte mayor

En la sucesión de Fibonacci {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...} el verso siguiente a estudiar sería el de trece sílabas. Pero este verso necesariamente se constituye de dos hemistiquios. Si buscamos proporciones áureas en versos sin cesura de arte mayor, sin duda los mejores candidatos son el decasílabo y el endecasílabo. Fijémonos en este último.

«Consta de once sílabas. Se utilizó en el francés, provenzal y el italiano desde la más remota antigüedad» (Quilis, 1993). En España se introduce con fuerza en el siglo XVI, por influencia italiana. A partir de aquí «va a ser el metro constante y más representativo de nuestra métrica» (Quilis, 1993). «Su estructura coincide perfectamente con el grupo fónico máximo» (Quilis, 1993).

Los posibles números Ñ asociados al endecasílabo son, salvo permutaciones:

32222, 5222, 4322, 722, 3332, 542, 533, 632, 443, 83, 56, 74, 92.

De entre todos los endecasílabos hay algunos que son destacados por su belleza y se distinguen con un nombre especial:

1.º) El endecasílabo enfático con acentos obligatorios en primera y sexta sílabas:

Dulce Soñar y dulce congojarme,
cuando estaba soñando que soñaba;
dulce gozar con lo que me engañaba,
si un poco más durara el engañarme.
(Juan BOSCÁN)

2.°) El endecasílabo heroico, con acentos obligatorios en segunda y sexta sílabas.

Con mudo incienso y grande ofrenda, ¡oh Licas!,
cogiendo a Dios a solas, entre dientes,
los ruegos que recatas de las gentes,
sin voz a sus orejas comunicas.
(Francisco de QUEVEDO)

3.°) El endecasílabo melódico, con acentos obligatorios en tercera y sexta sílabas.

La mano -ámbar de ensueño- entre los tules
de la falda desmáyase, y sostiene
el pañuelo riquísimo, que viene
de los ojos atónitos y azules.
(Manuel MACHADO)

4.°) El endecasílabo sáfico, con acentos obligatorios en la cuarta sílaba y en la sexta u octava:

Cuando me paro a contemplar mi ´stado
y a ver los pasos por dó me han traído,
hallo, según por do anduve perdido,
que a mayor mal pudiera haber llegado.
(Garcilaso de la VEGA)

Todos estos endecasílabos tienen la característica común de llevar acento obligatoriamente en 6ª y 10ª. Esto nos permite agrupar en dos partes el verso. Todas las olas que hay hasta el acento de la sexta sílaba forman un grupo de longitud siete. El resto de las olas forman un grupo de longitud cuatro.

Cuatro, siete y once son términos de la siguiente sucesión de Fibonacci:

1, 3, 4, 7, 11

Calculemos ahora los cocientes entre cada término y el anterior:

3, 1'333..., 1'75, 1'57...

Hemos comprobado por tanto que aquellos endecasílabos «con nombre» son justo aquellos en cuyo interior podemos encontrar proporciones más cercanas al ansiado 1'6180.....

Así como se divide el endecasílabo en dos cuerpos uno de longitud siete y otro de longitud cuatro obteniéndose la fracción (7/4), en el soneto el poema por excelencia que se ajusta al corsé del endecasílabo, tiene dos cuartetos y dos tercetos dividiendo los catorce versos del soneto en un grupo de ocho y un grupo de seis. ¿Será casualidad que volvemos a obtener de nuevo la fracción (14/8=7/4)?

El endecasílabo no solo lo encontramos en el soneto sino también en silvas y madrigales combinado con heptasílabos. Aparece en estos poemas la razón 11/7 dividiendo la longitud de endecasílabos y heptasílabos. Encontramos Silvas en las *Soledades* de Góngora, la obra de Fray Luis de León, y en toda la poesía española desde el siglo XVII. Veamos algún ejemplo:

¡Qué descansada vida
la del que huye del mundanal ruido,
y sigue la escondida
senda por donde han ido
los pocos sabios que ne le mundo han sido!
(Fray Luis de LEÓN)

Si he perdido la vida, el tiempo, todo
lo que tiré, como un anillo, al agua,
si he perdido la voz en la maleza,
me queda la palabra.
(Blas de OTERO)

¿Y en el aula qué?

El tema de la sucesión de Fibonacci y el número de oro tiene abundantes implicaciones matemáticas involucrando temas de todos los niveles: proporcionalidad, ecuaciones de segundo grado, geometría, sucesiones, límite de sucesiones, el número real como aproximación de números racionales, espacios vectoriales, ecuaciones en diferencias... Las actividades de contenido matemático que se pueden desarrollar son abundantes, un ejemplo puede ser realizar una estadística en el aula pidiendo a los alumnos que dibujen el rectángulo más agradable a la vista según su criterio. Los alumnos deberán decidir si agrupar o no los datos en intervalos, representar gráficamente los resultados, calcular parámetros de centralización y dispersión, y establecer conclusiones sobre las proporciones del rectángulo más agradable para la clase.

Es este un capítulo que se presta a la relación estrecha entre las matemáticas y otras asignaturas y materias: Literatura, Música, Dibujo, Arte, Ciencias Naturales, Fotografía, Filosofía,... Puede ser por tanto una forma de ganar el interés por las matemáticas de algunos alumnos más interesados en humanidades, hablando de esta presencia de la matemática en los cánones de belleza según se va viendo el currículo de cada curso.

La búsqueda de proporciones en el mundo real, la creación de esculturas, objetos, dibujos, poemas donde aparezca la divina proporción puede ser para los alumnos una forma de desarrollar la creatividad, y de experimentar que existe una interrelación entre todas las asignaturas.

Bibliografía

GARCÍA LORCA, F. (1971): *Obras Completas*, Aguilar, Madrid.

GHYCA, M. C. (1978): *El número de oro*, Poseidón, Barcelona.

HOZ, R. de la (1995): «La proporción cordobesa», Actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, SAEM Thales, Córdoba.

LÓPEZ-CASANOVA, A. (1994): *El texto poético. Teoría y metodología*, Ediciones Colegio de España, Salamanca.

MUÑOZ SANTOJA, J., C. CASTRO RODRÍGUEZ, C. y M. V. PONZA (1996): «¿Pueden las matemáticas rimar?», *Suma*, N.° 22, 97-102.

OTERO, B. de (1985): *Expresión y Reunión*, Alianza Editorial, Madrid.

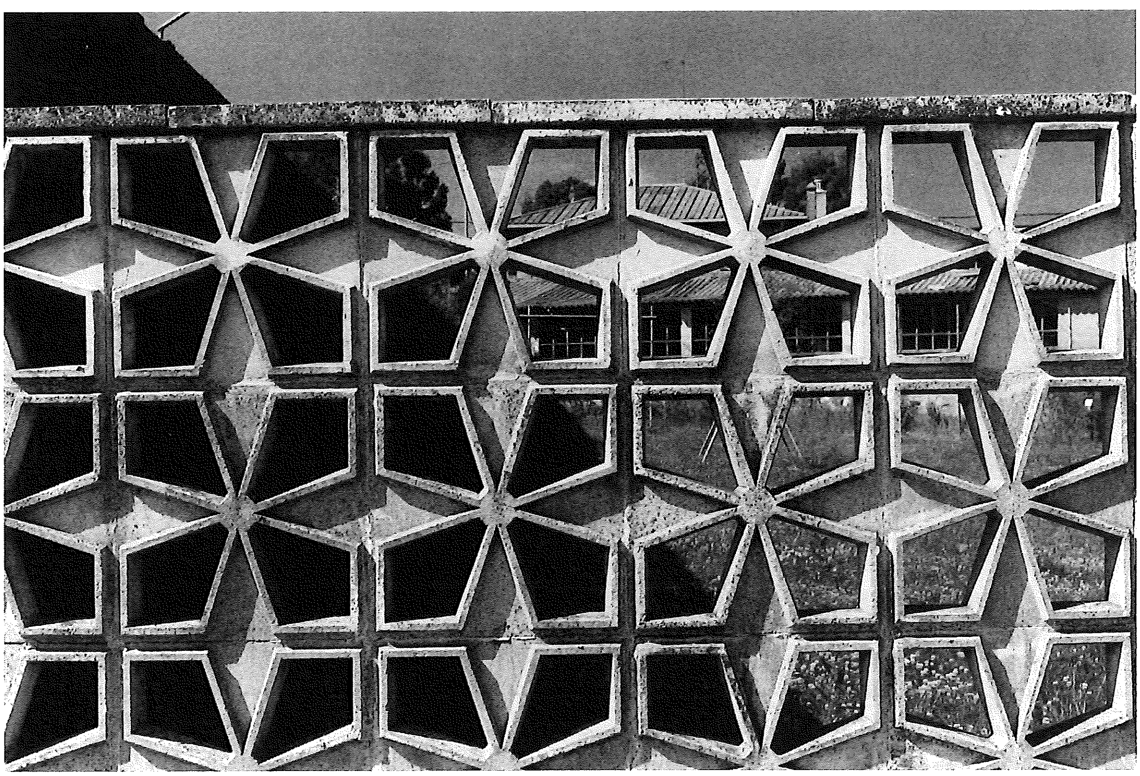
GÓMEZ, P. E. (1996): «Algunas seducciones entre poesía y matemáticas», *Suma*, N.° 22, 91-95.

QUILIS, A. (1993): *Métrica española*, Ariel, Madrid.

RIVERS, E. L. (1990): *Poesía Lírica del Siglo de Oro*, Cátedra, Madrid.

VALLE-INCLÁN, R. del (1967): *Obras escogidas*, Aguilar, Madrid.

José María Santa Olalla
IES de Laguna de Duero
(Valladolid)
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas



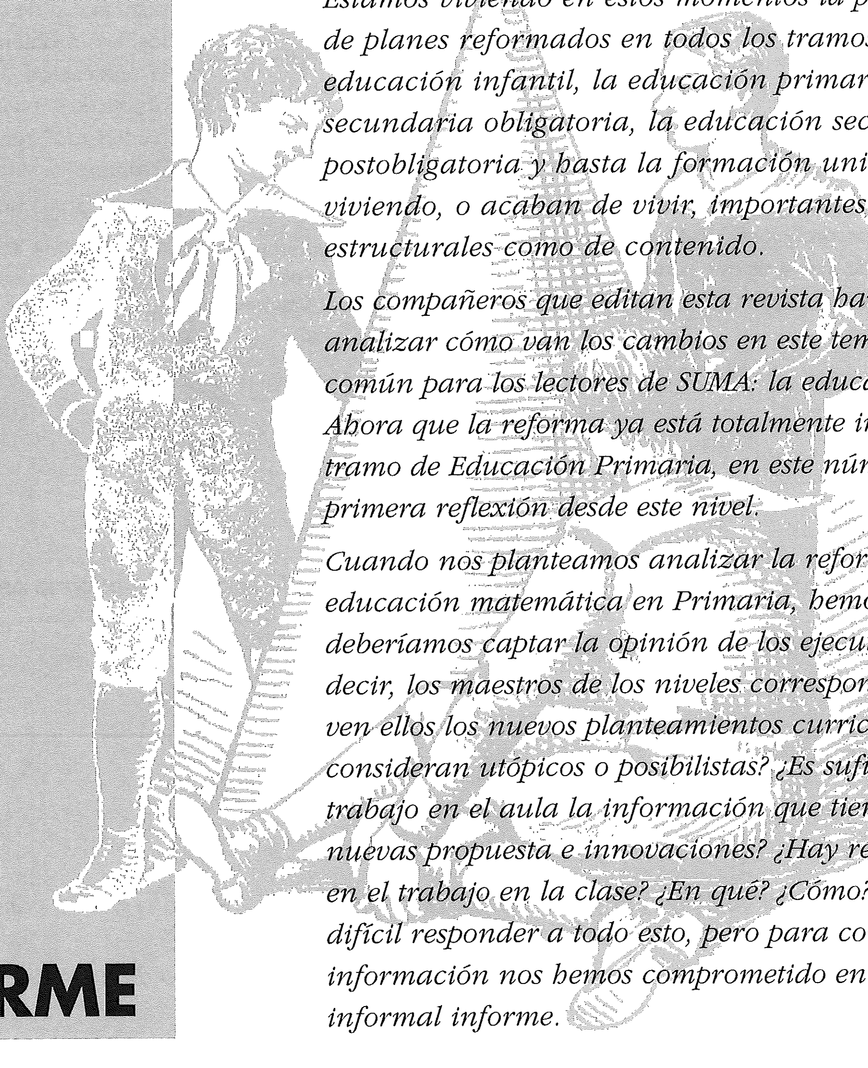
La Coruña. Foto: Luis Balbuena

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 65-67

Las Matemáticas en la Educación Primaria

Luisa Girondo (Coordinadora)

INFORME



DE TODOS es conocido el gran alcance de la actual reforma del sistema educativo en el Estado español. Estamos viviendo en estos momentos la puesta en marcha de planes reformados en todos los tramos del sistema. La educación infantil, la educación primaria, la educación secundaria obligatoria, la educación secundaria postobligatoria y hasta la formación universitaria, están viviendo, o acaban de vivir, importantes cambios tanto estructurales como de contenido.

Los compañeros que editan esta revista han sugerido analizar cómo van los cambios en este tema de interés común para los lectores de SUMA: la educación matemática. Ahora que la reforma ya está totalmente implantada en el tramo de Educación Primaria, en este número se hace una primera reflexión desde este nivel.

Cuando nos planteamos analizar la reforma vista desde la educación matemática en Primaria, hemos valorado que deberíamos captar la opinión de los ejecutores directos, es decir, los maestros de los niveles correspondientes. ¿Cómo ven ellos los nuevos planteamientos curriculares? ¿Los consideran utópicos o posibilistas? ¿Es suficiente para su trabajo en el aula la información que tienen sobre las nuevas propuesta e innovaciones? ¿Hay realmente novedad en el trabajo en la clase? ¿En qué? ¿Cómo? Por el momento es difícil responder a todo esto, pero para comenzar a recabar información nos hemos comprometido en este primer e informal informe.

Como suele haber opiniones que corresponden a un amplio espectro de adhesión a los cambios, hemos valorado que deberíamos huir de adhesiones fáciles así como de las descalificaciones sistemáticas, por tanto, aun sin ánimo de hacer un informe pasado por el tamiz de la objetividad estadística, hemos pensado un procedimiento que nos permitiera captar la opinión de varios maestros implicados en el proceso. Se pensó que un grupo de maestros de cada comunidad debatiera, o emitiera su opinión, sobre los cambios que les supone la reforma en sus clases de matemáticas; esta opinión debía ser recogida por un profesor, con alguna relación con la educación matemática en su comunidad, que se responsabilizaría de la elaboración del informe para esta publicación. A fin de no sobrecargar la lectura de este informe final, no han sido invitadas para este primer trabajo todas las comunidades autónomas sino que se han seleccionado aquellas que tenían competencias diferenciadas en educación, o que por otras razones (de disponibilidad, etc.) podían participar en esta primera tarea. A fin de darle un carácter homogéneo al informe, se han elaborado unas preguntas para guiar el debate con los maestros, cuestionario que puede verse más abajo. Los responsables de cada comunidad tenían libertad para añadir o modificar preguntas así como señalar aspectos que ellos consideraran de interés. Los resultados, en cada caso, pueden leerse en el apartado correspondiente.

Por otra parte, es bien conocido el hecho de que en numerosas sociedades de profesores de Matemáticas hay un importante número de maestros que suman a su necesario carácter de profesor generalista un interés especial por el área de matemáticas. Desde SUMA nos queremos dirigir a ellos para que también a través de esta revista comuniquen sus experiencias y reflexiones sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en las etapas iniciales. Ya que este número va dirigido a la Reforma en Primaria, hemos procurado incluir también otros artículos dirigidos a esta etapa. Así, en el artículo SAMBORI, se describe un material elaborado por los propios maestros y asesores del CEP de Alicante que consideramos de interés, tanto por la calidad del material como por el modelo de elaboración. Aún se discute si la calculadora sí o no en el aula de Primaria, a veces se piensa en ella sólo como herramienta de cálculo, no como herramienta didáctica; en el trabajo de J. Fraile vemos una utilización de la calculadora con niños bien pequeños con una finalidad bien distinta a la de comprobación de cálculos. Los problemas y su tratamiento en la educación Primaria, son también objeto de debate continuo, de Italia nos ha llegado esta aportación de Bruno d'Amore.

Pero esto es sólo una pequeña muestra, reiteramos la invitación a participar en la revista a maestros y profesores de cualquier nivel.

Luisa Girondo
Universidad Rovira i Virgili
Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Cuestionario

Preguntas orientativas para el debate con los maestros

Pregunta 1

¿Qué cambios crees que se deben acentuar de los teóricamente introducidos por la reforma en las clases de matemáticas de Primaria?

Se puede hacer referencia a los siguientes aspectos:

a) Contenidos.
b) Metodología.
c) Evaluación.
d) Otros.

Pregunta 2

¿Hasta qué punto consideras realista que el currículum sea abierto y, por tanto, lo pueda concretar el centro?

Se puede hacer referencia a:

a) ¿En qué medida y en qué dirección los maestros de la asignatura hacen uso de esa prerrogativa?
b) ¿Cuáles son los criterios utilizados para tomar decisiones en este aspecto?

Pregunta 3

Como profesor, ¿qué importancia le das a la resolución de problemas?

Se puede hacer referencia a:

a) ¿Consideras los problemas un eje vertebrador de contenidos?
b) ¿Abordas la resolución de problemas como un proceso de aprendizaje o crees más conveniente considerar los problemas como un campo de aplicación de aprendizajes previos?
c) ¿Cómo ve este trabajo el alumno?

Pregunta 4

¿Qué otros cambios metodológicos te ha aportado la reforma?

Se puede hacer referencia a:

a) ¿Qué importancia das al trabajo en grupo frente al trabajo individual?
b) ¿Has introducido nuevas formas de trabajo como trabajo fuera del aula, actividades interdisciplinares, recursos tecnológicos, etc.?
c) ¿Hasta qué punto crees que se reproduce el modelo anterior de clase, en el que predominaba el libro de texto?

Pregunta 5

La actual reforma reclama un trabajo al profesor ¿más o menos complejo?

Se puede hacer referencia a:

a) El trabajo diario con los alumnos te resulta ¿más a menos ilusionante?, ¿más complejo o menos?
b) Crees que a los alumnos ¿les resulta más motivador?, ¿les supone mayor o menor esfuerzo?

Pregunta 6

¿Qué cambios ves en la evaluación?

Se puede hacer referencia a:

a) La mayor autonomía para distribuir el trabajo dentro del ciclo ¿facilita la planificación y el seguimiento de los aprendizajes?
b) ¿Te sirve la evaluación para tomar decisiones en el trabajo diario o crees que continua siendo sólo importante cuando el alumno cambia de ciclo o de profesor?
c) ¿Dispones de instrumentos adecuados para evaluar que no sean los típicos exámenes?

Pregunta 7

¿Realmente crees que se aprenden «mejor» las matemáticas?

Se puede hacer referencia a:

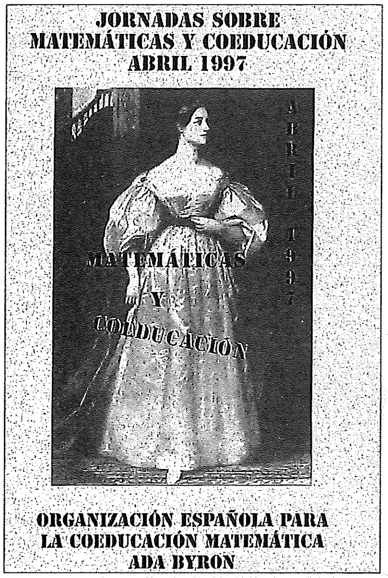
a) ¿Crees que ahora el alumno interioritza mejor los diferentes contenidos?
b) ¿Es significativo y funcional el aprendizaje? (¿Ayudan las matemáticas escolares a interpretar el entorno o continúan siendo «saberes escolares» únicamente?)
c) ¿Hay cosas superfluas en los nuevos currículos? ¿Las había antes?

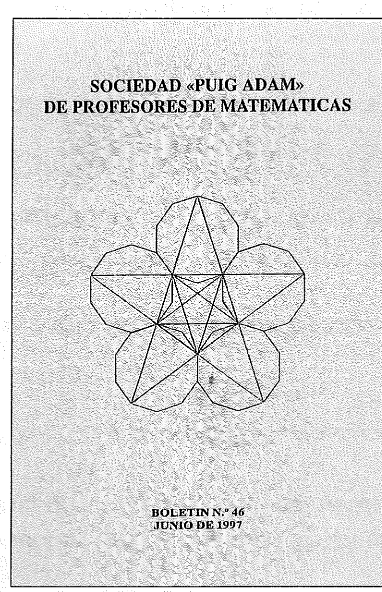
Pregunta 8

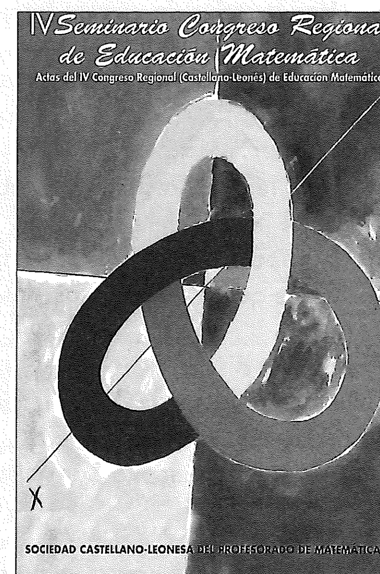
¿Qué líneas de mejora sugieres?

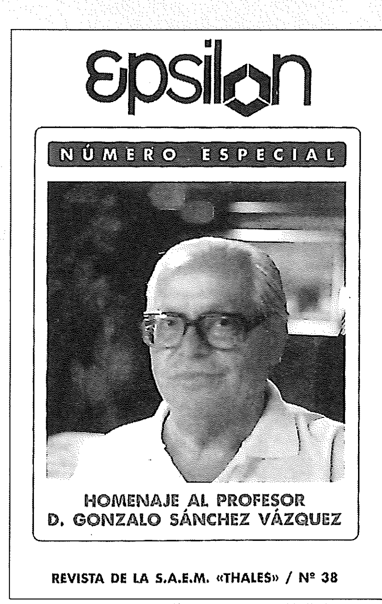
Preguntas elaboradas por:
BERNARDO GÓMEZ
Universidad de Valencia
LUISA GIRONDO
Universidad Rovira i Virgili

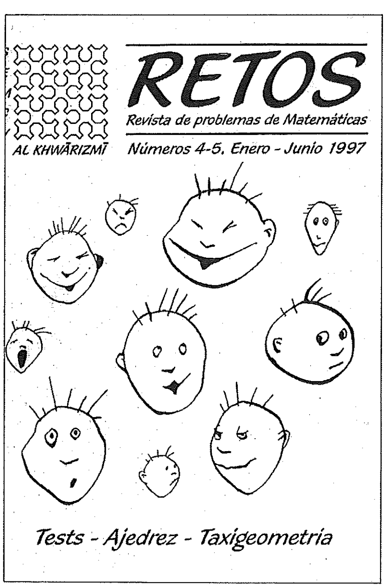
PUBLICACIONES DE LAS SOCIEDADES











SUMA 26
noviembre 1997, pp. 69-72

Valoración de los nuevos programas de Matemáticas de Primaria

Luisa Girondo

INFORME

A fin de situar al lector no implicado directamente en este nivel educativo, se describe en este trabajo brevemente el contexto y las intenciones de la reforma en cuanto a las matemáticas en la nueva etapa de Educación Primaria.

DADO que cada comunidad autónoma con competencias en educación tiene capacidad legislativa en este campo, vamos a centrar nuestro análisis en el Diseño Curricular Básico como marco que compete a todas las comunidades; las especifidades de cada una de ellas, si las hubiera, se reflejarán en los informes correspondientes.

Si comparamos las programaciones oficiales anteriores y los actuales, encontramos diferencias notables. No obstante, estos aspectos legales, aunque muy importantes, no tienen por qué suponer una ruptura con la práctica del aula ya que, afortunadamente, la educación es y debe ser un motivo de reflexión continua y, por tanto, muchas modificaciones importantes, aquellas que afectan a la vida diaria de los alumnos y de los maestros y que incorporan avances en maneras de entender el proceso de enseñanza-aprendizaje, se van haciendo de manera continua sin esperar necesariamente a estar recogidas en los programas prescriptivos de la administración. Seguramente, en los años previos a la actual reforma se había producido, en diversos lugares, un distanciamiento notable entre el currículum desarrollado en el aula (currículum real) y el currículum prescriptivo (currículum oficial), en un intento de adecuar éste a las necesidades y capacidades de los alumnos. Por tanto, en cierto sentido, la renovación curricular se veía como necesaria. Pero ¿son los nuevos currículos coincidentes con las expectativas de los reformistas? ¿qué cambios de los propuestos deben se asumidos por todos?

Como es sabido, los nuevos currículos apuntan a una enseñanza comprensiva, al alumno como centro de la acción educativa; el criterio prioritario de selección de contenidos no obedece tanto a la organización lógica de la materia como a la capacidad y necesidad del discente. Este planteamiento se concreta en matemáticas en:

- Opción por una visión constructivista del aprendizaje. Aunque el término constructivismo admite diferentes interpretaciones, hay acuerdo en admitir una enseñanza que atienda al progresivo desarrollo cognitivo del alumno, a la que el propio trabajo de la matemática ha de contribuir, frente a una visión de transmisión de unos saberes culturalmente organizados.
- Una postura epistemológica acerca de la naturaleza del conocimiento matemático en la que se resalta el proceso inductivo de su creación. En el DCB puede leerse: «Es preciso que el currículum refleje el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico como en su apropiación por el individuo. La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad».
- Unos objetivos educativos de área agrupados en torno a tres ejes:

  a) Establecimiento de destrezas cognitivas de carácter general, susceptibles de ser utilizadas en una amplia gama de casos particulares, y que contribuyen, por sí mismas, a la potenciación de las capacidades cognitivas de los alumnos.

  b) Una visión funcional de los aprendizajes, posibilitando que los alumnos valoren y apliquen sus conocimientos matemáticos fuera del ámbito escolar; en particular, a las situaciones de la vida cotidiana.

  c) Valor instrumental, creciente a medida que el alumno progresa hacia tramos superiores de la educación, y en la medida en que las Matemáticas proporcionan formalización al conocimiento humano riguroso y, en particular, al conocimiento científico.

Los bloques de contenido seleccionados obedecen a estos planteamientos y a la lógica jerarquización del saber matemático. Se concretan los contenidos en torno a los bloques: Números y operaciones, Geometría, Medida y Organización de la Información; se da una visión, a nuestro juicio, correcta y clara de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales para cada uno de los bloques, y también se considera correcta y clara la formulación de los objetivos terminales (o criterios de evaluación).

Si nos centramos en «las corrientes» que a lo largo del siglo inspiraron la educación matemática, debemos decir que esta reforma ha supuesto –también en los niveles que nos ocupan– el abandono de la visión «estructuralista», concretada en los temas relativos a la teoría elemental de conjuntos y a la que, como es bien conocido, habían llegado abundantes críticas de dentro y fuera del Estado.

El DCB hace especial hincapié en algunos contenidos que se consideran importantes y que tradicionalmente no han recibido atención adecuada...

El DCB hace especial hincapié en algunos contenidos que se consideran importantes y que tradicionalmente no han recibido atención adecuada; a causa de otras visiones acerca de la matemática escolar o consecuencia de otros momentos de menor nivel de acceso a la tecnología. Nos interesa resaltar estos contenidos ya que reflejan bien los cambios que se proponen en contenidos, los presentaremos agrupados en:

1) *Aspectos sobre el cálculo y el desarrollo del sentido numérico.* Se hace referencia a valorar el cálculo mental, la estimación y el uso de la calculadora. Además de ver la necesidad de adquirir un dominio en algoritmos básicos de cálculo escrito, se da especial importancia a la necesidad de adquirir y controlar otros medios: el cálculo mental, exacto o aproximado; el cálculo con calculadora; valorar la razonabilidad de los resultados; decidir el medio más adecuado para resolver un problema; etc.
2) *Tratamiento específico de algunos bloques.* Se llama la atención sobre el trabajo de Geometría, tradicionalmente olvidada al final de los programas y con un enfoque excesivamente formal, para proponer un trabajo que ayude al niño en el desarrollo de capacidades de organización y orientación espaciales. También, se hace especial mención a las nociones de azar y probabilidad del nuevo bloque de contenido Organización de la Información. Este es un tema que la reforma introduce desde los primeros niveles de Primaria.
3) *La importancia del lenguaje.* Muchas veces en las clases de matemáticas se daba poca importancia

al lenguaje verbal, como si el manejo de símbolos escritos o imágenes visuales fuera suficiente en el tratamiento de esta área. La llamada de atención sobre el trabajo oral en matemáticas para dotar de significado a los conceptos, establecer relaciones con la propia experiencia, intercambiar puntos de vista con los compañeros y con el maestro... son tareas que ayudarán a desarrollar el lenguaje matemático, además de dotar de significado y enriquecer el lenguaje habitual del alumno –no olvidemos que estamos en la educación Primaria y el desarrollo del lenguaje es un tema prioritario–. Podemos ver aquí el apunte hacia una determinada manera de hacer; potenciar el diálogo entre iguales y con el profesor; admitir otros puntos de vista; confrontar posibilidades de soluciones diferentes... Con el consiguiente beneficio sobre el llamado «razonamiento matemático».

4) *La resolución de problemas.* El DCB considera la resolución de problemas como un contenido prioritario, en línea con las corrientes actuales de Educación Matemática se señala que «es un medio de aprendizaje y refuerzo de los demás contenidos, da sentido aplicativo al área y permite la relación entre los distintos bloques de Matemáticas y con las restantes áreas. La resolución activa de problemas es considerada como el método más conveniente de aprender matemáticas». Más adelante se hace referencia a aspectos metodológicos de la resolución de problemas, indicando que el alumno debe desarrollar y perfeccionar sus propias estrategias, a la vez que va adquiriendo algunas generales y específicas que le permitan enfrentarse a nuevas situaciones con probabilidades de éxito. Este es un aspecto muy importante, ya que apunta a la idea de que «saber» matemáticas es «usar» las matemáticas; y aunque también hay que prestar atención a conceptos y procedimientos específicos, éstos sólo serán significativos si son operativos, es decir, cuando se pongan en funcionamiento en el transcurso de una actividad que pretenda conseguir un objetivo. De ahí que la práctica docente deba acentuar el «hacer» frente al «saber que», tal como recomiendan los conocidos *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* (NCTM).

...la propuesta de los nuevos currículos va hacia el planteamiento de las matemáticas escolares como una actividad que permite encontrar explicaciones, hacer planificaciones, entender el entorno, descubrir «misterios numéricos», codificar y descodificar mensajes, apostar por la situación de mayor ventaja, hacer el diseño más ingenioso...

No debemos pasar por alto el tema de las actitudes. Es claro que en los niveles que nos ocupan hay que optar por una matemática «para todos». Además, se debe lograr una actitud positiva hacia las matemáticas y hacer que los alumnos las utilicen con confianza. Esto se logrará si se procede de una determinada manera; se cree que planteamientos excesivamente formalistas de tiempos pasados han sido –muchas veces– la causa de los bloqueos que numerosos estudiantes han experimentado. Por ello, la propuesta de los nuevos currículos va hacia el planteamiento de las matemáticas escolares como una actividad que permite encontrar explicaciones, hacer planificaciones, entender el entorno, descubrir «misterios numéricos», codificar y descodificar mensajes, apostar por la situación de mayor ventaja, hacer el diseño más ingenioso... y si esto se ayuda con propuestas metodológicas que utilicen materiales sensoriales, observación de fenómenos; predicción y comprobación de resultados; utilización de nuevas tecnologías; etc. se está apostando por una mejora de las actitudes de los alumnos hacia el área.

Esto parece que el actual diseño curricular lo permite y hasta podríamos decir que lo exige pero ¿se hace? ¿se hará? No podemos olvidar que la tarea es compleja y que además de los contenidos propios del área se deben valorar otros factores.

Un aspecto importante de la nueva organización curricular es el tema de la concreción del currículum por parte del centro y del profesor del aula. Esto tiene un aspecto positivo y estimulante hacia el papel del maestro en el proceso, pero supone también esfuerzo y responsabilidad. Se requiere trabajo en equipo, coordinación, horas de reflexión... para lograr una planificación adecuada y una evaluación coherente para el proceso.

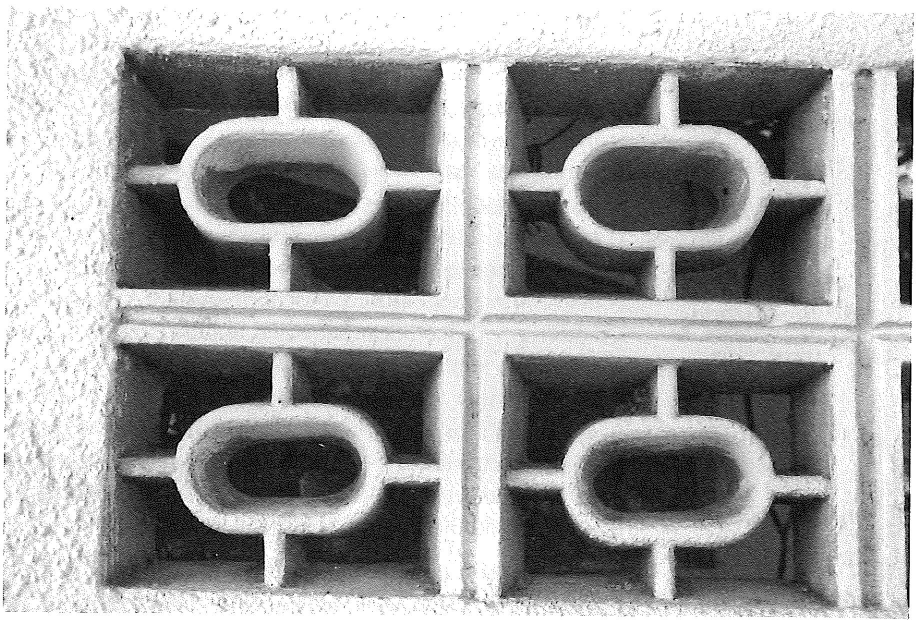
No se puede dejar de mencionar tampoco la complejidad que supone la atención a la diversidad del alumnado del aula; aunque casos límites pueden estar atendidos por personal especializado, son importantes las diferencias individuales en esta etapa. Esto origina problemas de gestión de aula, de búsqueda de actividades con diferente rango de dificultad, de evaluación, etc.

No debemos olvidar tampoco que el maestro es «generalista», debe atender a casi todas las áreas y no sólo al desarrollo intelectual de los alumnos, sino también al desarrollo social y afectivo. Es fácil, y bonito, decir desde los diseños curriculares que se debe recurrir a la globalización, pero los contenidos y objetivos se especifican por áreas... Que la enseñanza ha de estar centrada en el alumno, pero el listado de «contenidos» se ha pensado desde la materia (aunque se va mejorando). Además, también hay una tradición, una especie de «presión social» (padres, maestros de otros niveles, etc.) que valora más los contenidos «formales». A todo ello se ha de enfrentar el maestro; por tanto, debemos remarcar la complejidad de la tarea y a la vez intentar ser solidarios con su reivindicación de ayuda para integrar los diversos discursos que reciben.

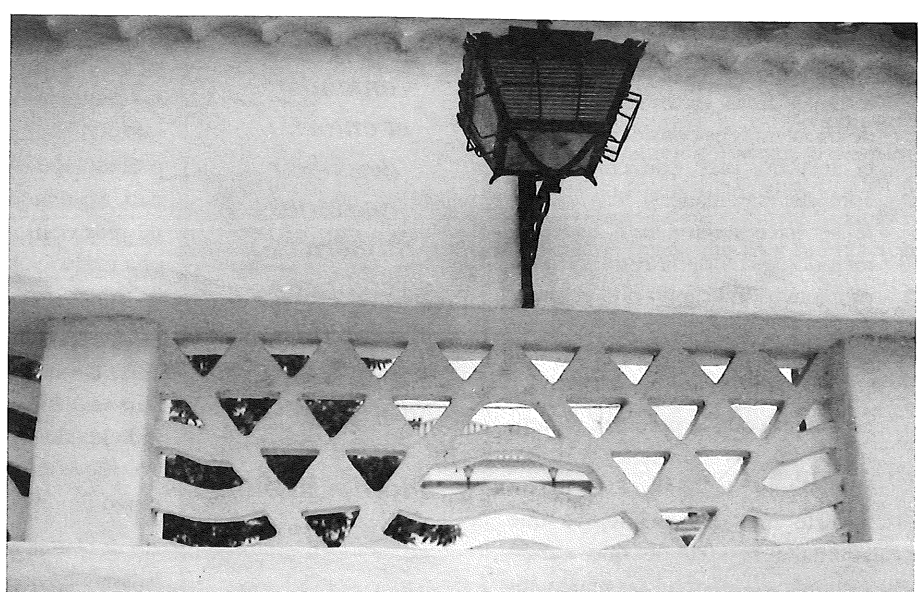
¿Cómo ven ellos la reforma? ¿Hacen uso de las potencialidades del currículo abierto? ¿Se sienten implicados en el proceso? ¿Qué cambios se están produciendo?

A esto se intenta responder en las próximas secciones.

Luisa Girondo
Universidad Rovira i Virgili
Federació d'Entitats per
l'Ensenyament de les
Matemàtiques a Catalunya



Pampatar (Venezuela).
Foto: Luis Balbuena



Pueblo Canario.
Las Palmas
de Gran Canaria.
Foto: Luis Balbuena

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 73-93

La Reforma vista por los profesores de Matemáticas de Primaria

Canarias

Responsables:
Fidela Velázquez Manuel
Ana Negrín Hernández

Introducción

La implantación de los diseños curriculares para la Educación Primaria se terminó de realizar en la Comunidad Autónoma Canaria en el curso 1995-96. En la actualidad, se está implantando progresivamente la Educación Secundaria Obligatoria, cuyo primer ciclo, por necesidades de espacio, permanece en la mayoría de los casos en los antiguos centros de EGB (actualmente de Educación Primaria) lo que está generando disfunciones espaciales y temporales, así como de índole curricular.

En cuanto al currículo del área de Matemáticas en esta comunidad, convendría resaltar los siguientes aspectos, que coinciden en lo básico con el de otras comunidades con competencias en materia educativa:

a) Se hace hincapié en un modelo de aprendizaje constructivista, obtenido mediante avances y retrocesos y a través de la observación y manipulación de materiales, representaciones, intuiciones y tanteos, resolución de casos particulares...

b) Se pretende la obtención del conocimiento matemático a partir de las etapas manipulativas, oral o gráfica y simbólica.

c) Se incentiva el desarrollo de la creatividad, del trabajo en grupo y el desarrollo de actitudes de confianza hacia las propias capacidades matemáticas y hacia las matemáticas en sí mismas, como elemento de compresión y explicación de la realidad circundante.

INFORME

Respuesta al cuestionario desde las comunidades de Canarias, Cataluña, Comunidad Valenciana, Extremadura, Galicia, Madrid y Navarra.

d) Se postula un aprendizaje de las Matemáticas lúdico y a través del éxito, para conseguir que los alumnos y las alumnas protagonicen su propio aprendizaje. Para ello se subraya la importancia del respeto de los ritmos individuales, así como el uso de situaciones problemáticas y del entorno que favorezcan la comprensión y la motivación mediante actividades atractivas, motivadoras, abiertas y de dificultad creciente.

Cada uno de estos grandes apartados conecta con las sugerencias para la evaluación, que van en la misma línea. En particular, se propone:

a) La observación del trabajo de cada alumno y alumna, de sus intervenciones individuales, opiniones y discusiones en el grupo, soluciones aportadas, participación y respeto por las ideas de los demás.

b) La evaluación de hojas de actividades y del cuaderno de clase.

c) La evaluación del desarrollo de situaciones problemáticas abiertas, con la consiguiente información sobre el desarrollo individual de capacidades matemáticas.

d) La autoevaluación, tanto de sí mismos como del aprendizaje en clase, en el grupo...

Un año después de que el profesorado de la comunidad haya ido paulatinamente implantando esta nueva propuesta, parece interesante comenzar a evaluar cómo se está llevando a la práctica, de ahí el interés de comenzar a realizar valoraciones como la que sigue.

Metodología

El informe se ha elaborado a partir de las opiniones de maestros y maestras que, individualmente o en grupo, han reflexionado sobre la base del cuestionario dado. Se ha procurado diversificar las opiniones, recogiéndose las mismas de centros públicos y privados, y de centros urbanos y de extrarradio, así como rurales. Se han reflejado opiniones generales del profesorado, recogidas en forma de reflexión abierta durante actividades de formación del profesorado de primaria en número de alrededor de cuatrocientas. Nuestro agradecimiento especial, por el interés que se tomaron, entre otros, a José Antonio Falcón, Mercedes Siverio, Esteban Vera, Hortensia, Vili, Ani, Adriana, Rodri, Inés, Zeneida, Vega...

Respuestas al cuestionario

Pregunta 1

Con respecto a los contenidos, los aspectos más novedosos de la reforma están relacionados con la introducción de los contenidos procedimentales y actitudinales así como con la metodología, la atención preferencial a los procesos y la evaluación, y son los que parece más conveniente acentuar.

Respecto a los contenidos, la opinión más general coincide en que la distribución actual parece más razonable, porque atiende más al proceso psico-evolutivo y de maduración de los alumnos y las alumnas.

Respecto a los contenidos, la opinión más general coincide en que la distribución actual parece más razonable, porque atiende más al proceso psicoevolutivo y de maduración de los alumnos y las alumnas. También se menciona como muy interesante la posibilidad de un tratamiento integrador de los diferentes contenidos, que termina con el estancamiento tradicional de los mismos, así como la posibilidad de conexión con otras áreas a través de las transversales. Otros aspectos, no tan novedosos, aparecen como necesarios (organización cíclica y aspecto globalizador de los contenidos) e interesante su inclusión y se adjetiva como muy importante el partir de los conocimientos previos, la insistencia en que se capte la complementariedad de las operaciones, el uso de estimaciones así como las tres fases (manipulativa, gráfica, formal) que llevan al aprendizaje.

Más que en otros aspectos, parece que los cambios reales se han realizado sobre todo en los contenidos impartidos. No obstante, existen dificultades a la hora de llevarlos a la práctica. Concretamente, y en el capítulo de contenidos procedimentales y actitudinales, las dificultades aparecen a la hora de seleccionarlos correctamente y de implicarlos en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Además, algunas voces siguen evaluando como muy amplios los contenidos a impartir, lo que junto a otros aspectos que se mencionarán, va en detrimento de su asentamiento y consolidación. Se detecta la necesidad de tiempo y mucha práctica, por lo que los esfuerzos de formación, sobre todo en los propios centros, deben centrarse en el tratamiento teórico-práctico de estos aspectos.

Respecto a la metodología, se valora la aplicación de estrategias de aprendizaje significativo por descubrimiento, con actividades más prácticas y manipulativas, partiendo de la realidad de los alumnos y las alumnas. Otro de los cambios que se destaca es el establecimiento del conflicto ideas previas-concepto, lo que permite que este último pueda abordarse mediante un aprendizaje significativo. En general, se reconoce que la actual reforma pretende introducir una revolución necesaria en los aspectos metodológicos con que se debe abordar el proceso educativo.

No obstante, estos cambios precisan, más que otros, de tiempo y maduración del profesorado, puesto que la mayor parte del que está en activo actualmente ha sido formado con otro modelo educativo y no se está lo suficientemente preparado para abordar en profundidad los cambios que se piden. Estos cambios, asimismo, van unidos a la necesidad de más tiempo curricular dedicado al área, así como a la utilización y el conocimiento de recursos y materiales didácticos y curriculares no disponibles en los centros. La discontinuidad del tiempo del alumnado, debido a la irrupción generalizada y, en algunos casos, arrolladora, de las nuevas enseñanzas y la falta de materiales específicos de matemáticas en las dotaciones de los centros y en los centros de recursos, hacen que el libro de texto se constituya en la vía de escape fundamental del profesorado. Por ello, la opinión más generalizada es que, en la actualidad, la metodología no ha sufrido grandes cambios y se sigue empleando la metodología tradicional.

Respecto a la evaluación, se valora como más completa la que se propone, por la gran cantidad de aspectos a evaluar, lo que permite que cada alumno y alumna pueda progresar en distintos aspectos y permite que cada cual sea comparado consigo mismo según sus propias capacidades y no con el resto. La evaluación venía haciéndose al final del proceso, mientras que ahora hay que evaluar a lo largo del proceso, y no sólo los conceptos, sino también los procedimientos y las actitudes, y, lo que es más complicado, atendiendo a la diversidad.

Este es otro cambio en el que se debe seguir profundizando con insistencia y rigurosidad, porque es otra de las carencias de la implantación de la actual reforma.

Todo lo anterior hace concluir que los cambios llevados a efecto son fundamentalmente burocráticos. La mayoría del profesorado conoce lo que son conceptos, procedimientos y actitudes, así como qué metodología y evaluación conlleva la correcta aplicación de los nuevos currículos. Pero no son muchos los que saben seleccionarlos correctamente y muy pocos saben o pueden desarrollarlos y aplicarlos metodológicamente en el aula y evaluarlos. Esto afecta sobre todo a la metodología y a la evaluación, puesto que los alumnos y las alumnas no se constituyen, como se pretende, en agentes activos sino que actúan como meros espectadores ajenos a su propio aprendizaje.

Las diferencias que se manifiestan entre lo teóricamente propuesto y lo realmente llevado al aula se deben, según la mayoría del profesorado consultado, a los siguientes factores:

- Falta de preparación del profesorado.
- Miedo a los cambios.
- Falta de materiales y asesoramiento sobre su uso.
- Falta de tiempo para la elaboración de materiales propios.
- Falta de acuerdos sobre líneas metodológicas comunes en los centros.
- Estrés en algunos profesores, al verse abrumados ante el enorme esfuerzo que la aplicación de los nuevos currículos precisa en tiempo y trabajo diario.
- Profesorado no interesado en los nuevos currículos (edad, comodidad, desmotivación...).

Pregunta 2

En general, el profesorado valora como positivo el hecho de que el currículo tenga carácter de abierto, con el fin de que pueda ser adaptado a las características de los centros y del alumnado. El carácter de abierto, asimismo, permite la adaptación a alumnos con necesidades educativas especiales, tanto carenciales como alumnos y alumnas con sobredotación.

Pero, en general, esta prerrogativa es poco aprovechada por los docentes, que se ciñen a lo impuesto por los programas y los libros de texto. En este sentido, algunos profesores le asignan a esta consideración cierto grado de utopía. En el contexto de los proyectos curriculares y educativos, y en la medida en que los centros se están implicando en su elaboración, se está llevando algo más de iniciativas al respecto. Los criterios usados fundamentalmente para realizar este nivel de concreción son: las adaptaciones curriculares individualizadas para el tratamiento de la diversidad en el aula, las secuenciaciones por ciclos en función de las características del alumnado y del centro, la programación de actividades globalizadoras a partir del entorno...

A pesar de su bondad, el profesorado advierte de los riesgos que supone, en este modelo curricular abierto, el que

El profesorado valora como positivo el hecho de que el currículo tenga carácter de abierto, con el fin de que pueda ser adaptado a las características de los centros y del alumnado. [...] Pero, en general, esta prerrogativa es poco aprovechada por los docentes, que se ciñen a lo impuesto por los programas y los libros de texto.

los centros no puedan o no sepan abordar la concreción curricular partiendo de la verdadera realidad del entorno y del alumnado, en muchos casos debido al excesivo agobio burocrático y de rigidez de fechas, que impide que el trabajo de reflexión y autocrítica sea más efectivo y puede llegar a ahogar la creatividad y los deseos de trabajo e innovación del profesorado. No obstante, se concluye que siempre será mejor que partir de currículos prefijados en entornos hipotéticos alejados de la realidad del alumno. Además, el profesorado cree necesario insistir en la necesidad de utilizar el decreto de mínimos como elemento referencial común, así como de controles de seguimiento y evaluación, y, en su caso, de reelaboración del proceso de concreción, mediante una reflexión crítica sobre el desarrollo de los proyectos educativos y curriculares

Pregunta 3

Todo el profesorado consultado opina que la resolución de problemas debe considerarse como un eje alrededor de los cuales desarrollar los contenidos, no sólo matemáticos, sino de comprensión y expresión y de desarrollo de capacidades y de estrategias, y como tal debe dársele una prioridad absoluta. La diversidad en el tipo de problemas ayudaría a abordar la diversidad en el aula, mediante el desarrollo de aquellos aspectos que se presentan como novedosos en los currículos actuales (complementariedad de situaciones, las tres fases del descubrimiento matemático, la posibilidad de integrar otros conocimientos mediante contenidos transversales...) así como permitiría trabajarlos desde los distintos niveles de aprendizaje existentes en el aula. Una idea interesante que se apunta es que la resolución de problemas pueda constituirse en elemento metodológico en sí mismo, capacitando al alumnado para afrontar situaciones novedosas, no sólo matemáticas, sino de la vida diaria.

No obstante, y con carácter general, el profesorado opina que, o bien no se le está dando esta importancia dentro del contexto curricular o bien no se consigue lo que se pretende, porque el alumnado no relaciona el aprendizaje de problemas con situaciones de la vida diaria y como ayuda en su vida cotidiana. En cierta medida, el profesorado opina que, más que un eje alrededor del cual se desarrollan los contenidos, los problemas se siguen considerando como simples aplicaciones prácticas de dichos contenidos. Esto produce un cierto tormento en la gran mayoría del alumnado, al abordar la resolución de problemas como algo alejado de su entorno y su realidad, sin otra razón de ser que la mera aplicación de una operatoria previamente aprendida.

Pregunta 4

El cambio fundamental y más significativo que ha aportado la reforma es precisamente el trabajo en equipo, tanto referido al trabajo del alumnado en el área como a la metodología de trabajo del profesorado. En este último caso, se valora el fomento de la interdependencia de trabajo interciclos e intraciclos, así como las coordinaciones con la Secundaria. El trabajo en equipo del alumnado, por su parte, se hace imprescindible dado que la importancia de los contenidos procedimentales y actitudinales y del modelo de evaluación propuesto precisan en múltiples ocasiones de una metodología de trabajo en grupo.

Todo el profesorado consultado opina que la resolución de problemas debe considerarse como un eje alrededor de los cuales desarrollar los contenidos, no sólo matemáticos, sino de comprensión y expresión y de desarrollo de capacidades y de estrategias, y como tal debe dársele una prioridad absoluta.

No obstante, muchos profesores consideran que el trabajo personal es insustituible porque permite que alumnos y alumnas demuestren su capacidad, responsabilidad, rapidez, atención, conocimientos y razonamientos y que el profesorado pueda comprobar el grado y calidad de sus aprendizajes.

También parece que se ha logrado consolidar cierto tipo de trabajos en grupo de marcado carácter interdisciplinar, pero no con actividades donde el desarrollo de las mismas se realice fuera de las paredes del aula, como debería ser frecuente en el área.

La introducción de nuevas tecnologías, a pesar de verse como sumamente interesante, está supeditada a la posibilidad de acceso a las mismas desde los centros escolares, lo que no siempre, ni siquiera frecuentemente, es posible. La falta de material específico de matemáticas, ya señalada, se puede ampliar haciendo referencia a este apartado.

Por contra, se ve como positivo el que los cambios metodológicos propuestos, cuando son llevados a la práctica, dotan al alumnado de una mayor libertad, proporcionándole una participación más activa y una progresiva autonomía respecto al libro de texto. A pesar de ello, y aún cuando algunos centros no tienen libro de texto referencial, éste se constituye en un referente continuo, por lo que muchas de las innovaciones, cuando se realizan, se hacen ligadas al desarrollo curricular que aquellos proponen.

Pregunta 5

La actual reforma reclama del profesorado no sólo un trabajo más complejo sino más exhaustivo, por exigir una mayor implicación y reflexión en su labor docente. También exige motivación, actualización, creatividad y dominio del área (entre otras). Múltiples razones complican este trabajo: la selección adecuada de los contenidos, la detección de las ideas previas del alumnado, el diseño y aplicación de la metodología de trabajo, la organización del trabajo en grupos flexibles, la organización de las actividades en grupo, la coordinación del profesorado inter e intraciclos así como las coordinaciones entre las etapas... En algunos casos, esta complejidad aporta ilusión al profesorado, sobre todo en lo referente a los aspectos de preparación de materiales para el aula, pese a que, como se ha comentado, no siempre existe formación ni medios. No obstante, algunos de los trabajo exigidos, pese a su interés, están excesivamente burocratizados, lo que quita tiempo y energías para atender con mayor ilusión y efectividad la enseñanza-aprendizaje del área.

El alumnado, a pesar de recibir enseñanzas aparentemente más motivadoras, y que en general se pretende facilitarle la comprensión, no siempre parece saber dirigir su propio comportamiento, y sigue sin ver al profesorado como fuente de ayuda, siendo incapaces, por lo general, de resolver autónomamente su propio aprendizaje. No siempre el profesorado acierta con la motivación (cada día, al parecer, más necesaria) y el descubrimiento de las ideas previas del alumnado y el consecuente desarrollo metodológico de los contenidos. Algunos de los aspectos citados como desalentadores y generadores de sobreesfuerzo en el profesorado pueden estar haciendo mella en el mismo e, inconscientemente, reflejarse en su relación con el alumnado, produciendo las consecuencias descritas.

Todo ello abona un campo de cultivo idóneo para que las Matemáticas, en muchas ocasiones, sigan siendo impartidas de la misma forma que hace años, y que en lugar de ser un área generadora de descubrimientos, se siga

El alumnado, a pesar de recibir enseñanzas aparentemente más motivadoras, y que en general se pretende facilitarle la comprensión, no siempre parece saber dirigir su propio comportamiento, y sigue sin ver al profesorado como fuente de ayuda, siendo incapaces, por lo general, de resolver autónomamente su propio aprendizaje.

impartiendo mediante una enseñanza basada en clases magistrales.

Pregunta 6

Uno de los mayores aportes del actual modelo de evaluación es que no sólo se valoran los resultados finales, sino que se hace en términos de capacidades adquiridas, esto es, aquellos aspectos relacionados con la progresión real de cada alumno y alumna: su integración psico-social, los procesos de aprendizaje y sus procedimientos y estrategias, las normas, valores y actitudes y el trabajo diario. Los instrumentos de evaluación también varían y se multiplican: observación, revisión de tareas, informes y cuadernos, participación y colaboración en clase... Además, y como elemento significativamente distinto de lo que se realizaba hasta la fecha, está el uso de los resultados de la evaluación del alumnado para revisar el trabajo del profesorado en cuanto a proceso de enseñanza, a la toma de decisiones en función de los resultados y a la realización de continuas reconduciones del proceso de enseñanza. Algunos de estos aspectos son difíciles de cuantificar y, por tanto, de evaluar. Es preciso fijar con anterioridad los criterios de evaluación.

No obstante, en muchos casos y a pesar de que la mayoría de los cambios señalados están siendo abordados por un estimable porcentaje de profesorado de primaria, se percibe que muchas veces se sigue evaluando sólo el proceso de aprendizaje. Esto es, sólo a los alumnos, y no a los profesores, metodología o recursos según los resultados obtenidos en función a los previstos. Esta autoevaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje es posiblemente, junto a la evaluación de los procesos y de las actitudes y la autoevaluación del alumnado, lo que menos se está desarrollando en la actualidad. Por ello, parece predominar aún, frente a lo realmente pretendido y valorado del proceso evaluador de este modelo curricular, la evaluación del alumnado en función de lo cognoscitivo, lo observable, lo negativo, las personas aisladas, cuantificadas, los meros aprendizajes académicos mediante el uso preferente de exámenes tradicionales. En muchos casos, la falta de formación previa a que se ha hecho referencia, hace que el proceso se desarrolle, a pesar de la buena voluntad del profesorado, con improvisaciones y errores, lo que se espera que se vaya compensando con la práctica, porque en estos caos el colectivo demuestra un reforzado interés y una notable predisposición a los cambios.

Pregunta 7

En general, el profesorado opina que la reforma supone la entrada de aire fresco en la educación. La percepción general es que aporta los elementos precisos para que se aprendan mejor las Matemáticas, aunque ha pasado poco tiempo para hacer una evaluación exhaustiva y fiable. Se considera que algunos contenidos siguen siendo, más que superfluos, excesivos, lo que convendría considerar a la hora de las revisiones del currículo. La enseñanza a través del descubrimiento permitirá interiorizar mejor los contenidos, fijándolos más permanentemente, cuando se superen las diversas «asignaturas pendientes» en cuanto a la puesta en práctica de los nuevos aportes y la corrección de los errores que se han apuntado. En la actualidad el cambio no se aprecia aún suficientemente, porque el alumnado en general sigue sin interiorizar los contenidos, los memoriza y no los relaciona con la vida cotidiana, constituyéndose el área en fuente de aprendizajes no significativos ni funcionales. Por ende, un aspecto adicional es el hecho de que el profesorado ha de competir con medios mucho más atractivos para el alumno. Esto hace muy difícil centrar la atención de éste y que interiorice los contenidos con la facilidad que presupone el uso de las nuevas metodologías.

Pregunta 8

- Que el profesorado cuente con ayuda específica de profesionales externos (asistentes sociales, orientadores...), que le ayuden a resolver determinados problemas que afectan a ciertos alumnos, y que le resta al profesorado tiempo y energías para dedicarlo al desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Revisión del tiempo de dedicación directa al alumnado en el área, y el disponible para la preparación del trabajo y de los materiales didácticos. Ambos se manifiestan en la actualidad como claramente insuficientes, y el segundo, cargado de aspectos burocráticos que aumentan año a año, lo que va en detrimento de la efectividad del trabajo en el área.
- Disponibilidad en los centros de materiales manipulativos, curriculares y de las innovaciones en el área, para que el profesorado pueda conocerlos y hacer uso de los mismos.
- Centrar el trabajo en contenidos sólidos, cuidando al máximo las áreas instrumentales, que en este momento han pasado a un segundo plano tras la irrupción de las nuevas especialidades. Seguimiento permanente del alumnado, implicación de los padres y madres y desarrollo de actitudes positivas del alumnado y del profesorado.
- Profundizar en la implicación del profesorado en la reforma.
- Confianza de las instituciones públicas en el valor de cambio social de la reforma y actuaciones de apoyo consiguientes.
- Desarrollar una visión optimista en el futuro del modelo educativo.
- Ser autocríticos y aceptar las críticas como elemento de reflexión sobre la práctica y de reelaboración de la misma.

El profesorado mayoritariamente opina que esta reforma era necesaria porque los cambios sociales demandaban con urgencia cambios educativos. [...] No obstante, parte del mismo se ha sentido marginado y poco implicado en el proceso de implantación y saturado de tareas burocráticas y poco efectivas.

Conclusiones

El profesorado mayoritariamente opina que esta reforma era necesaria porque los cambios sociales demandaban con urgencia cambios educativos. También se aprecia la bondad de este modelo curricular y los evidentes avances que propugna frente a los modelos curriculares anteriores.

No obstante, parte del profesorado consultado se ha sentido marginado y poco implicado en el proceso de implantación y saturado de tareas burocráticas y poco efectivas. También considera que se le ha restado tiempo y medios para realizar un mejor y más creativo trabajo en el área, así como para realizar las reflexiones conjuntas que el proceso de implantación genera y el modelo propone. Todo ello produce una sobrecarga y saturación que no ha ayudado a mejorar el rendimiento escolar.

Por otro lado, la irrupción de especialidades ha ido en detrimento de las áreas instrumentales, no siendo equivalente la sustracción que se ha realizado en estas últimas a la adición que en las capacidades del alumnado proporcionan los «nuevos» saberes. Estas áreas «novedosas» llegan de la mano de especialistas que se nombran para cada centro. Las instrumentales, por contra, corren el riesgo de quedarse, en algunos centros, sin profesorado realmente interesado en la materia, lo que unido a la desaparición en los centros de primaria de los departamentos didácticos, produciría en la práctica carencias o vacíos en el desarrollo curricular de áreas como las Matemáticas. Ausente este nivel de concreción curricular que afecta a contenidos, metodología, evaluación, de nada vale uno de los aspectos más novedosos e interesantes de la actual reforma: la concepción del currículo abierto.

La clave del triunfo o fracaso de la reforma educativa, se concluye, está en la actitud de todos los estamentos implicados en la reforma educativa (administraciones públicas, alumnado, padres y madres, profesorado...). Si todos ellos no consiguen crear un ambiente más optimista y esperanzador y mayores y mejores medios, así como revisiones de los aspectos más problemáticos, muy pocos cambios efectivos podrán producirse.

Cataluña

Responsable:
Luisa Girondo

Los nuevos programas en Cataluña postulan como bases psicopedagógicas la significatividad de los aprendizajes y una visión constructivista de los mismos; en cuanto a las orientaciones metodológicas se hace hincapié en la globalización como necesaria interrelación entre lo que el alumno conoce y lo nuevo que le permita reorganizar su estructura cognitiva, señalando la importancia de la evaluación formativa en el proceso didáctico. En el área de matemáticas se acentúa el aspecto funcional de las mismas como instrumento para la comprensión del mundo que rodea al niño aprendiendo a descifrar códigos y mensajes que se le ofrecen desde el entorno social y cultural. Los contenidos se presentan clasificados en contenidos procedimentales; contenidos relativos a hechos, conceptos y sistemas conceptuales; y contenidos relativos a actitudes. Hace ya un año que la reforma se sigue en todos los ciclos de Primaria. En este marco de actuación, se ha contactado con maestros individuales, o grupos de maestros, para que respondieran a las preguntas diseñadas para este informe. A fin de tener una visión desde diferentes zonas de Cataluña, se han pasado las preguntas a maestros de la ciudad de Girona, de la ciudad de Barcelona y de la ciudad y poblaciones cercanas a Tarragona. En algunos casos han respondido colectivamente, bien porque constituyen un grupo estable de trabajo o bien porque forman parte del claustro del mismo colegio; en otros casos han dado respuestas individuales. Los maestros y las maestras han sido elegidos por haber participado en cursos de formación sobre matemáticas, o pertenecer a asociaciones que reflexionan sobre esta temática. A partir de sus respuestas, hemos elaborado el siguiente resumen.

Se acentúa que los aprendizajes deben ser «significativos» y que ello implica que el profesorado se preocupe por buscar actividades interesantes que ayuden al niño a dominar su entorno próximo.

Pregunta 1

Los maestros entrevistados coinciden en señalar que la actual reforma educativa les exige un cambio metodológico. Argumentan que deben abandonarse los sistemas en los que enseñar es sólo un proceso de transmisión y que hay que preocuparse por el aprendizaje que los niños pueden realizar; ayudar a cada niño a conseguir su propio ritmo de aprendizaje.

Se acentúa que los aprendizajes deben ser «significativos» y que ello implica que el profesorado se preocupe por buscar actividades interesantes que ayuden al niño a dominar su entorno próximo. Se señala también la interacción entre los niños y con el profesor como característica metodológica importante para el trabajo en el aula. Los maestros y maestras que pertenecen a grupos de renovación pedagógica opinan que la actual reforma aconseja métodos que los movimientos de innovación ya utilizaban. En cuanto a contenidos, acentúan la importancia del cálculo mental y la estimación de resultados en contextos de resolución de problemas; se citan menos los demás bloques de contenido –especialmente grave parece el hecho de que no se piense en la geometría; parece que en el esquema mental del maestro también predomina «lo numérico»–. Desde algunos puntos de vista se valora positivamente la distinción entre contenidos de actitudes, conceptos y procedimientos señalando que se debe hacer más hincapié en estos últimos; no obstante, no es unánime la opinión de resaltar positivamente esta distinción.

La mayoría valora la necesidad de una evaluación continua que sirva de guía al proceso de enseñanza-aprendizaje y en este sentido, se valoran muy positivamente las propuestas de la reforma.

Pregunta 2

Se valora positivamente el hecho de que se plantee un currículum abierto, con unos límites que marcan unos niveles mínimos; se considera este aspecto necesario para poder atender la diversidad del alumnado en cuanto a ritmos de aprendizaje. Sin embargo, hay unanimidad prácticamente en decir que esto no se lleva a cabo en las escuelas de manera satisfactoria. Se opina que el currículum lo concretan las editoriales ya que el seguimiento de un libro de texto es la norma en la mayoría de centros. Atribuyen este hecho al poco trabajo en equipo que hay y a la seguridad que el maestro siente en la utilización del libro. Algunos maestros señalan que hay poco conocimiento del área y esto supone poco criterio a la hora de innovar y justifica las preferencias para recurrir al seguro «lo de siempre».

Como un imperativo de la administración, en todos los centros, los claustros, han elaborado sus diseños curriculares –segundo nivel de concreción– aunque el nivel de discusión generado en esta actividad ha sido desigual. Desde centros que han aceptado sin más el segundo nivel indicativo que proponía la administración hasta centros en los que se ha hecho un trabajo de elaboración total propia.

Pregunta 3

Hay unanimidad en señalar la importancia de los problemas para desarrollar habilidades de razonamiento y para ver la utilidad de las matemáticas. Piensan que los niños disfrutan haciendo problemas que les resulten motivadores y que sería deseable que fueran el eje vertebrador del currículum pero que no lo son, debido a que eso supone demasiado trabajo de preparación para el maestro.

Muchas opiniones coinciden en señalar que ya se podría dar por bueno si hubiera una buena parte del tiempo dedicada a los problemas y que éstos les resultaran interesantes a los niños; no fueran, como sucede frecuentemente, una simple aplicación de conceptos recién presentados.

Algunos maestros y maestras opinan que esta manera clásica de proceder resulta un verdadero «problema pedagógico» ya que el niño no muestra interés, no tiene ganas de aplicar operaciones que apenas conoce, no tiene ganas de leer un texto con poco significado para él, al que se enfrenta él solo sin discutir ni comentar nada con los compañeros y que, en la mayoría de las veces, el maestro sanciona con un «tienes que repasar la tabla del 8».

La visión de los problemas como proceso de aprendizaje, el ver la actividad matemática como un proceso de modelización de situaciones que tenemos que controlar, ver que los niños pueden aportar soluciones razonadas y procedimientos no estándares para resolver estas situaciones y el ver que los procedimientos formales son el final de un camino, no la única herramienta... son visiones que algunos profesionales de este nivel educativo tienen pero se está lejos de que sea la visión de la mayoría.

Pregunta 4

Los maestros más ligados a movimientos de renovación opinan que la reforma supuso un reconocimiento a sus formas de trabajar y a su manera de entender el aprendizaje. En general, coinciden en señalar que la reforma les ha hecho reflexionar sobre sus planteamientos para poder atender a la diversidad del alumnado y en general buscar otros recursos, como pueden ser los aprendizajes fuera del aula o la utilización de medios tecnológicos. También opinan que estos cambios deberían ir más allá; comentan que se empiezan a ver pero que el nivel de implantación es muy lento. Hay algunas opiniones reclamando la necesidad de que los textos, y otros materiales curriculares, sean buenos e innovadores porque son la herramienta básica del maestro....

Se menciona poco el trabajo en grupo frente al clásico trabajo individual y hay unanimidad en decir que en la mayoría de los centros se sigue un texto.

Los maestros más ligados a movimientos de renovación opinan que la reforma supuso un reconocimiento a sus formas de trabajar y a su manera de entender el aprendizaje.

Pregunta 5

Dicen que el trabajo que propugna la reforma es más exigente para el maestro, tanto por la preparación de actividades que tengan en cuenta los tres tipos de contenido como por el seguimiento que se debe hacer del alumno. En algunos casos se valora positivamente esta reforma ya que implicó reflexionar sobre la manera de hacer y ha supuesto un cambio positivo para maestros que han creído en los postulados que implicaba, haciéndoles salir de la rutina. Por otro lado, los que son más críticos, dicen que estos postulados no se pueden llevar a cabo dado que se necesitan ciertas condiciones; menos alumnos por aula, materiales para atender la diversidad... y, en general, más ayudas.

Hay unanimidad en señalar que los nuevos planteamientos para los alumnos resultan más motivadores, que trabajan con más ganas. Se hacen reflexiones sobre el nivel de exigencia que debe pedirse a los alumnos; la conclusión es que el nivel de exigencia debe ser el mismo; el que se trabaje de una manera más motivadora no ha de implicar un menor nivel de esfuerzo para el alumno; se insiste en que debe adecuarse esta exigencia a las capacidades de cada niño.

Pregunta 6

La frase más repetida es que la autonomía obliga a una planificación para obtener resultados. Esto se valora como un punto positivo de la reforma pero dicen que puede convertirse en negativo si no se utiliza de manera adecuada; si no se hace una planificación adecuada, si se trabaja de manera anárquica, no se podrá hacer un seguimiento sistematizado y por tanto no podrá haber una evaluación formada. Hay unanimidad en señalar la importancia de la evaluación como regulación del proceso de enseñanza-aprendizaje pero, también se constata que en la práctica las cosas no son así en muchos casos. Incluso, desde el sector más crítico, se reivindica la evaluación sumativa como un estímulo para el alumno (no se especifica qué tipo de alumno).

También se observa una cierta inseguridad relativa a los instrumentos de evaluación y a la necesidad o no de evaluar los diferentes tipos de contenido. Aunque no como una crítica a los planteamientos de la reforma, valoran que hay que dejar pasar más tiempo para ir interiorizando los cambios que se propugnan en este aspecto.

Pregunta 7

En general, se cree que si se trabajara de acuerdo con los planteamientos de la reforma, significatividad, funcionalidad... se facilitaría la asimilación real de los contenidos. Se dice que el poder distribuir los contenidos de manera diferente y el hecho de que algunos hayan desaparecido, permite relajar los aprendizajes y hacerlos funcionales. Esto facilita las cosas.

Desde el sector más crítico, se dice que no se pueden aplicar los cambios de manera drástica, sino que se debe buscar un punto de equilibrio; argumentan que hay que evitar los movimientos pendulares, ya que se podrían generar nuevos problemas educativos o dejar lagunas. Este sector tampoco se atreve a aventurar que se aprenden más o mejor las matemáticas; hablan de la necesidad de presentar las cosas de manera más acorde con la sociedad actual y preparar a los alumnos para esta sociedad; se concretan algunos puntos como la necesidad de introducir elementos lúdicos o utilizar la calculadora.

... en el tema de la evaluación, se puede observar aquí un amplio abanico que va desde quienes entienden la evaluación como regulación y autorregulación de los aprendizajes a los que «reivindican» la evaluación sumativa como estímulo...

En general, se dice que no puede hablarse de elementos superfluos en los nuevos currículos ya que depende de la definición que se haga de los objetivos. En todo caso, opinan que en los programas anteriores podrían señalarse más cosas superfluas, aunque no explicitan más este punto.

Punto 8

Las líneas de mejora que se señalan apuntan principalmente en dos direcciones: a) Potenciar determinados contenidos: más resolución de problemas; trabajar más geometría; matemática lúdica; más importancia al razonamiento y menos a la mecánica. b) Recursos diversos: mejor formación a los maestros; facilitar el asesoramiento específico a centros; promover materiales adecuados diferentes de los clásicos textos; menos alumnos por profesor, etc.

Valoración general

Haciendo la salvedad de que los maestros que han contestado al cuestionario no son una muestra al «azar», sino que, en cierta manera, han mostrado un interés por esta área en particular, puede decirse que en general están de acuerdo con los planteamientos de los nuevos currícula. En cuanto a la puesta en marcha surgen muchas más dudas. Si bien a nivel individual parece que se es capaz de ir adoptando cambios importantes; en este sentido podemos decir que el maestro individual se siente implicado con la reforma. Se tienen más dudas cuando el trabajo se debe plantear en equipo y es el centro el que debe concretar el currículum; en este aspecto se valora críticamente el uso que se está haciendo del currículum «abierto»; sin embargo, cuando se interpreta esta abertura como la necesidad de adaptación a las diferentes capacidades dentro del aula, se cree muy factible y necesario. Parece que se tiene asumida una educación centrada en el alumno y no en el contenido. Valoración aparte merece el tema de la evaluación, se puede observar aquí un amplio abanico que va desde quienes entienden la evaluación como regulación y autorregulación de los aprendizajes a los que «reivindican» la evaluación sumativa como estímulo... No era una pregunta explícita del cuestionario y, por tanto, no se refleja una crítica a la formación recibida para la implantación de la actual reforma. Como el lector se puede imaginar, esta formación se hace desde aspectos muy generales, muy preocupados por «la forma» y, por ahora, es difícil ver su incidencia en la prácticas concretas del aula de matemáticas. Si nos fijamos en las líneas de mejora que sugieren, creen necesaria una formación más específica y también una mejora en los materiales, textos para alumnos y otros tipos de material, que recojan los planteamientos de los actuales diseños curriculares.

Comunidad Valenciana

Responsable:
Bernardo Gómez Alfonso

Introducción

Basándose en los documentos del MEC, la Consejería de Educación y Ciencia de la Generalitat Valenciana, en uso de sus competencias educativas, hace públicas (DOGV, 20/2/1992) sus directrices para el currículum de Primaria, referidas a principios, objetivos, contenidos, y criterios de evaluación. Sus características se pueden resumir en:

Características generales

- Un currículum abierto con diferentes niveles de concreción, que posibilita la autonomía y la toma de decisiones del profesor, los departamentos y los centros.
- Un currículum pensado como un todo continuo, por encima de las divisiones de la organización anterior en etapas, que obliga a diseñar conjuntamente los currícula de Primaria y Secundaria, considerándolas como parte de un mismo plan.
- Un cambio en el papel que el profesor ha de desempeñar en la clase. La vieja imagen del profesor como técnico especialista que aplica teorías y conocimientos científicos está cuestionada en la reforma actual por un modelo que considera al profesor como gestor autónomo, que reflexiona sobre su práctica educativa, con capacidad para tomar decisiones sobre la planificación, desarrollo y evaluación.
- Atención a la diversidad de los alumnos, a sus diferencias y singularidades dentro de una enseñanza para todos.
- Una evaluación orientadora y reguladora del proceso de enseñanza-aprendizaje, porque no busca controlar la promoción de los alumnos, ni calificar resultados, sino la valoración de los aprendizajes y su mejora, detectando situaciones anómalas para proceder a remediarlas, reconduciendo el proceso de instrucción.
- Evaluación en la que se hace partícipes a los alumnos, haciendo que sepan los objetivos que se perseguían, sean conscientes de lo que han aprendido, conozcan los criterios que se les han aplicado y así puedan aprender de sus aciertos y de sus errores.

Características particulares referidas al área de matemáticas

- Una concepción del área de matemáticas en la enseñanza obligatoria como una acción de creación de conceptos y práctica de destrezas que continuamente se retoman y consolidan, más que como el estudio de un cuerpo de conocimientos lógicamente estructurado.
- Una deseable actitud positiva hacia la matemática proveniente del interés, de la motivación del placer ante las actividades matemáticas, de la apreciación de su propósito, su poder y su relevancia, de la satisfacción derivada de la sensación de progreso...
- La consideración del carácter terminal de la enseñanza obligatoria a la hora de seleccionar el contenido, lo que implica cubrir las necesidades básicas y no dar sólo unas matemáticas preparatorias para aprendizajes posteriores más complejos.
- La incorporación de avances tecnológicos como la calculadora o el ordenador, no como un fin en sí mismo, sino como herramienta de aprendizaje.
- Una modificación del contenido que atiende con el mismo nivel de consideración a diversos tipos: conceptuales, actitudinales y procedimentales.
- Se privilegia el desarrollo de estrategias generales que proporcionan a quienes aprenden verdaderas herramientas de resolución matemática.
- Se replantea la enseñanza de las técnicas algorítmicas a partir de un enfoque del cálculo más flexible y variado marcado por la posibilidad de entender las propiedades que lo hacen posible.
- Se potencian contenidos insuficientemente tratados o con enfoques distintos a los actuales, como la geometría, la probabilidad y el tratamiento de la información en un planteamiento basado en la observación, manipulación y experimentación con los objetos o las situaciones concretas cercanas, bajo una perspectiva compatible con el proceso psicoevolutivo de los alumnos, en un proceso continuo que va de lo concreto-intuitivo a lo abstracto-formal.

La incorporación de avances tecnológicos como la calculadora o el ordenador, no como un fin en sí mismo, sino como herramienta de aprendizaje.

- Se considera la resolución de problemas como el corazón de las matemáticas. Durante su resolución se utilizan todas las capacidades básicas y es una tarea privilegiada para desarrollar métodos y estrategias.

La situación en Valencia

Al finalizar el curso 1996-97, se le dice adiós definitivo a la EGB. En estos momentos la Educación Primaria y la ESO es un hecho en pleno funcionamiento formal. Ha llegado el momento de hacer un primer balance, con el propósito de colaborar a ello y sin más pretensiones se ha elaborado el siguiente resumen.

Este resumen se ha elaborado a partir de las opiniones vertidas en una «mesa redonda» pública, en la que se trató el tema en forma de debate y se videograbó para un posterior estudio más detenido. En la mesa participaron 6 maestros elegidos arbitrariamente entre los asistentes a las «III Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana» (Valencia, 23, 24 y 25 de Mayo, 1997). Estos fueron Empar y Paco, escuela privada, no confesional. Marisa, Vicente Josep y Albert, escuelas públicas de localidades diferentes.

Pregunta 1

Sobre los cambios que deberían acentuarse, se señalaron como más importantes, los que se refieren a la evaluación valorándose aspectos nuevos como los procedimientos y el esfuerzo individual, frente a los viejos hábitos de evaluar sólo resultados. También se puso énfasis en los cambios metodológicos, sobre todo en la elaboración de materiales por los que realmente tienen el saber que da la práctica diaria, frente al predominio del libro de texto elaborado por supuestos expertos de despacho.

Pregunta 2

En relación con el currículum abierto se señaló la necesidad de avanzar sobre ello y que esto no ha sido así en gran medida por las dificultades que entraña. Se requiere mucho trabajo, grupos de maestros que le dediquen mucho tiempo, revisar y reprogramar, lo que significa tiempo libre pagado; hace falta el respaldo e implicación de todos los compañeros y la coordinación entre ciclos, lo que plantea la necesidad de un coordinador; y hace falta perderle el miedo a la innovación. Mientras tanto el libro de texto sigue reinando y el currículum abierto aparece como una utopía.

Sobre los cambios que deberían acentuarse, se señalaron como más importantes, los que se refieren a la evaluación valorándose aspectos nuevos como los procedimientos y el esfuerzo individual, frente a los viejos hábitos de evaluar sólo resultados.

Pregunta 3

Sobre la resolución de problemas se considera que, efectivamente, es un eje vertebrador de contenidos, pero que cuesta mucho hacer cambiar los hábitos de trabajo tanto en alumnos como en profesores. Otro inconveniente es cuando estos problemas se ponen para casa y entonces son los padres los que los resuelven. No obstante, cuando se logra implicar a los estudiantes en la resolución de problemas, éstos se sienten a gusto porque aumenta su participación y rompen con el automatismo «para este problema tipo-este método tipo».

Pregunta 4

En relación a otros cambios metodológicos se señala la posibilidad de introducir grandes actividades de grupo, como la semana de la matemática, o de trabajo autónomo como «el rincón de matemática». En relación con nuevas tecnologías sólo se hace mención a la calculadora como elemento que libera tiempo dedicado a automatismos. En cuanto a los libros de texto se reconoce que comienza a tener un papel menos dominante que anteriormente, apareciendo como un recurso más sobre el que se amplía, se reduce o se complementa.

Pregunta 5

Se está de acuerdo en que el trabajo diario resulta más complejo, es más exigente para las profesores, les complica la vida, porque tienen que usar más recursos; pero, sin embargo, es más ilusionante por los logros de los alumnos y su mayor motivación. El tipo de esfuerzo anterior era más como una obligación, como algo impuesto, el actual es más a la carta.

Pregunta 6

Sobre la evaluación manifestaron lo difícil que les resulta hacerlo bien, que cuesta mucho cambiar esquemas, que incluso muchos hacen uso de la calificación, con nota, y después la traducen a la cualificación, con expresión cualitativa. Pero, que en cualquier caso los maestros evalúan todos los días y continuamente, por lo que en este tema se suele hablar sin saber muy bien de qué se está hablando.

Pregunta 7

En esta pregunta salieron a la luz los tópicos acerca de la rebaja de niveles, la disminución de contenidos, el camino más fácil, mucho juego y poca ciencia, etc., que algunas personas asocian a la reforma. Se estuvo de acuerdo en que eso era un riesgo que se corría, pero ninguno de los maestros presentes quiso reconocer que éste era su caso, más bien dijeron que lo que pasaba era que se aprendían otras cosas, que no eran comparables.

Como líneas de mejora se sugirió el apoyo de asesoramiento externo, con papel de árbitro frente a posturas enfrentadas entre compañeros de un mismo colegio o de animador y dinamizador de las innovaciones educativas. Como carencias se señaló la falta del cálculo estimado y la no consideración de la autoevaluación por parte del alumno.

Valoración general

Las respuestas no se ciñeron estrictamente al guión marcado por las preguntas orientativas, sino que hubo idas y venidas sobre los mismos aspectos filosóficos, palabras clave e ideas principales.

En síntesis, al escuchar a los asistentes al debate se saca la impresión de que hay un clima de opinión favorable a la reforma, y de que se aceptan sus principios constructivistas fundamentales. Sin embargo, cuando se entra en los detalles parece como si se conociera la música pero no se acabara de saber como bailarla. En concreto se percibe:

- Un sentimiento de inseguridad en cuanto a lo acertado del trabajo que uno hace en la práctica, especialmente en lo que se refiere a los cambios metodológicos.
- Divorcio entre lo que se hace en realidad y lo que de acuerdo con la reforma debería hacerse, especialmente manifestado en el debate en el tema de la evaluación.
- Confusión y desconocimiento en cuanto al significado de los verdaderos cambios concretos que introduce la reforma, particularmente visible en el debate en cuanto al significado de currículum abierto.
- Diferencias en cuanto al grado de implicación en la reforma, a su nivel de implantación de la reforma, a los logros que se manifiesta obtener, a los objetivos que se persiguen, y a las actividades innovadoras que realmente plantea y enfatiza cada uno.

Por otro lado, los maestros unánimemente manifestaron un sentimiento generalizado de soledad en su intento de avanzar en la reforma. Ellos plantearon la incomprensión que sufren frente a:

- Otros compañeros más inertes.
- Los padres que no entienden la reforma.
- La administración que les abandona y les coloca «solos frente al peligro».

...hay un clima de opinión favorable a la reforma, y de que se aceptan sus principios constructivistas fundamentales. Sin embargo, cuando se entra en los detalles parece como si se conociera la música pero no se acabara de saber como bailarla.

Extremadura

Responsable:
Lorenzo J. Blanco Nieto

Consideraciones previas

Dos maestros y una maestra. El diseño curricular de la comunidad se corresponde con el del MEC al no tener asumida las transferencias en educación.

La información ha sido obtenida mediante la grabación de una entrevista semiabierta a dos maestros y una maestra de primaria. La duración fue de 90 minutos, aproximadamente, y el análisis se realizó sobre la transcripción de la entrevista. La entrevista siguió el guión enviado por los coordinadores.

Fue una entrevista semiestructurada, con mucha espontaneidad y participación de los maestros que reflexionaron sobre los puntos tratados, en referencia constante a su propia experiencia. Los informantes tienen amplia experiencia docente, son considerados buenos profesionales por la comunidad educativa, y siempre habían mostrado deseos de mejorar la enseñanza. Un maestro se declara claramente a favor de la reforma, mientras que los otros dos no realizan ninguna manifestación expresa al respecto, aunque sí muestran deseos de mejorar la enseñanza de las Matemáticas.

En el informe presentado hemos querido recoger las contestaciones literales que aparecen entrecomilladas, que nos sugieren diferentes reflexiones sobre aspectos importantes de la reforma educativa.

Aspectos más destacados de la entrevista realizada

La primera referencia que aparece en la entrevista trata de situar la aportación de la reforma en torno a dos aspectos importantes: contenidos y metodología. En este sentido, se provoca una interesante discusión tras expresar una maestra:

P. «Como en toda la LOGSE, los contenidos han bajado muchísimo.

Entonces yo pienso que se le debía dar más prioridad al maestro para que pueda él decidir los contenidos que en cada nivel deben alcanzar sus alumnos, porque es que los grupos de niños son distintos».

Esta afirmación provoca la intervención de los restantes maestros en dos aspectos que destacan como cambios significativos debidos a la reforma: las adptaciones curriculares, con la posibilidad de intervención del centro en el establecimiento de niveles; y la conveniencia de darle más importancia a los procedimientos que a los contenidos.

Respecto del primer punto, todos reconocen las dificultades de concretar en el aula las orientaciones que a este respecto se realizan desde las propuestas oficiales. Y, en referencia a la propia experiencia, resaltan las dificultades de desarrollarlas en el aula, sobre todo si además en las aulas hay niños de integración. En cualquier caso, la colaboración de los maestros en los niveles y ciclos es necesaria para poder avanzar en el desarrollo del currículo. En este último aspecto, que se considera muy interesante, hay todavía que avanzar mucho.

En relación al segundo punto, se resalta la aportación de la reforma que quiere destacar en la enseñanza otros aspectos diferentes de los contenidos. Así, como señala un maestro:

L. «La reforma, al menos en mi opinión, nos trata de decir a los maestros que hay que fijarse un poquito más en otras cuestiones, por ejemplo, en el procedimiento».

Ligado a este último aspecto, surge una nueva coincidencia al aceptar una mayor preocupación actual por unir la enseñanza de las matemáticas con la realidad del niño. La necesidad de dar más sentido de utilidad a la enseñanza de las matemáticas, la búsqueda de actividades que partan de las preocupaciones de los alumnos es valorado positivamente por los maestros que lo ven como un avance propiciado desde la reforma educativa.

La necesidad de dar más sentido de utilidad a la enseñanza de las matemáticas, la búsqueda de actividades que partan de las preocupaciones de los alumnos es valorado positivamente por los maestros que lo ven como un avance propiciado desde la reforma educativa.

Una de las consecuencia inmediatas de la mayor importancia de los procedimientos es la necesidad de modificar los instrumentos de evaluación, lo que a su vez se analiza con bastante preocupación al no tener orientaciones claras y precisas.

G. «Si le das más protagonismo a los procedimiento, lógicamente la evaluación debe ser diferente a cuando se le da más protagonismo a los contenidos».

Sin embargo, y esto es una crítica clara respecto de la evaluación, los maestros consideran que no se han desarrollado instrumentos de evaluación útiles que permitan evaluar los contenidos, de procedimiento y actitudes desde la enculturación que las propuestas curriculares sugieren. Igualmente, consideran que tienen poca información acerca de los pasos importantes que hay que considerar en el proceso de evaluación: planificación, recogida de datos, interpretación y uso de los resultados.

Respecto de la evaluación, y debido a los problemas de su aplicación concreta en el aula, señalan que fundamentalmente ha habido un cambio de nombres.

L. «Se ha cambiado el nombre, de exámenes a controles, de controles a actividades de evaluación».

Otro de los aspectos que consideran fundamentales en la reforma y cuya incidencia en la enseñanza de las matemáticas ha sido escasa, se refiere a los temas transversales. En este sentido los maestros consideran la transversalidad en el desarrollo de sus clases en términos generales. Así, tratan de potenciar la comprensión de unos a otros, la solidaridad, colaboración y el trabajo en equipo, evitar la competitividad, primar lo colectivo sobre lo individual, etc. Sin embargo, este tratamiento de la transversalidad se realiza de una manera general para todas las materias.

Encuentran dificultades para concretar los valores de la transversalidad en las actividades concretas para desarrollar en el aula de matemáticas. A este respecto, hacen escasas referencia a la necesidad de modificar los enunciados de los problemas para reflejarlos, pero están de acuerdo en que todavía muchas de las actividades que se proponen para matemática en los libros de textos no los reflejan.

Uno de los aspectos que se valoran positivamente ha sido la aparición de nuevas perspectivas sobre la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. A pesar de las dificultades que señalan y de las lagunas que presentan y que ellos mismo explicitan, están de acuerdo en que la reforma ha potenciado la reflexión sobre la resolución de problemas en clase de matemáticas.

En la primera de las intervenciones se plantea la necesidad de modificar los enunciados clásicos de los problemas, a partir de un texto escrito, para plantear situaciones problemáticas que puedan ser dramatizadas por los alumnos. La profesora hace referencia a nuevas fuentes para plantear problemas como puedan ser las matemáticas recreativas o los periódicos en un intento de buscar nuevos recursos que puedan ser más motivadores e interesantes para los alumnos.

L.G. «...no solamente es suma, resta y multiplicación, sino que el problema es una situación en la que yo me tengo que esforzar tengo que sacar aquí todas mis capacidades mentales y esforzarme, a ver cómo lo resuelvo. Ampliar un poco el concepto de problema».

No obstante, reconocen que todavía suele ser usual los problemas tradicionales en nuestras aulas. A este respecto, realizan una crítica a las editoriales ya que consideran que éstas no reflejan las nuevas orientaciones que se realizan respecto de los problemas en relación a los grados de dificultades, estudio de sus estructuras, relación de los problemas con los otros contenidos que se trabajan en clase, etc.

Un aspecto difícil de considerar por los maestros es la perspectiva que se sugiere en las propuestas curriculares al señalar la resolución de problemas como el contexto donde el aprendizaje matemático tiene lugar.

Igualmente, indican la necesidad de iniciar a los alumnos en procedimientos diversos para resolver problemas, aunque también aquí presentan ciertas lagunas:

G. «Otra cosa que yo veo muy importante, el aprender a resolver problemas. Que tenga una especie de armario o cajonera donde en cada cajón el niño tenga una estrategia de resolución de problemas y que sepa que existen cincuenta mil estrategias que él ya conoce y que las puede aplicar para resolver un problema».

Ligado a los procedimientos para resolver problemas señalan que la reforma ha influido en los maestros para que éstos planteen más actividades de manipulación que permitan un aprendizaje matemático mas útil y motivador. En este sentido, es interesante la diferencia que establecen entre la manipulación con objetos reales y la utilización de objetos matemáticos que surgen de la mente.

Hay que destacar la ausencia durante la entrevista de la geometría, las escasas referencias que eran introducidas por mí, se eludían con referencias ambiguas o dando paso a otras cuestiones.

Nuevamente aparecen las referencias a los libros de texto de los que en términos generales señalan que han modificado las formas la presentación pero que indican que ha habido poco cambio en profundidad.

L. «Hay editoriales que lo único que han cambiado son las formas igual que cambiaron en el tema de la globalización... no era más que unos conocimientos enganchados no tenían nada que ver, eran enganchados por los pelos. Y con la reforma y con los libros de texto pasa exactamente igual».

...realizan una crítica a las editoriales ya que consideran que éstas no reflejan las nuevas orientaciones que se realizan «respecto de los problemas en relación a los grados de dificultades, estudio de sus estructuras, relación de los problemas con los otros contenidos que se trabajan en clase, etc.

Se señala que es difícil encontrar editoriales que resalten de manera efectiva el trabajo interdisciplinar, actividades que sean realmente creativas o actividades que se integren con el medio en el que está el alumno, que tengan en cuenta las áreas transversales, o actividades que sugieran diferentes modos de representación, etc.

L. «Son cosas de matices. Los libros, en general, no suelen recoger las recomendaciones de que sea abierto, con diferentes métodos, etc. Si se lee la guía del profesor no se corresponde con el libro del alumno».

El último aspecto sobre el que giró la entrevista trataba de la formación de los profesores. Había coincidencia al afirmar que uno de los fallos de la reforma ha sido la formación permanente de los profesores. Tanto en el contenido programado en la mayoría de las ocasiones, como en la forma en que la formación se ha programado.

Galicia

Responsable:

Manuel Pazos Crespo

Al inicio del curso 1992/93 se implantó, en Galicia, el primer ciclo de Educación Primaria, en el 1993/94 el 2.° ciclo, mientras que el 3.° se implantó en dos fases: el primer año del ciclo en el curso 1994/95 y el segundo año en el 1995/96. De este modo, podemos decir que hace un año que la etapa de Educación Primaria está en pleno funcionamiento, al menos formalmente.

Pero, ¿cómo funciona?, ¿cuál es el estado actual?, ¿en qué cambió la educación matemática en los centros?, ¿hay necesidades de mejora? La opinión recogida de profesores a nivel individual y grupal en distintas actividades de formación, así como de asesores, es muy variada e intentamos reflejar aquí aquellos aspectos generales y que nos parecen más importantes.

No creemos que la situación de la educación matemática en la Educación Primaria, en Galicia, difiera mucho de la que existe en las demás comunidades autónomas. Lo que sí puede ser distinto es el análisis que se haga de la misma y la forma de verla. Teniendo en cuenta el contexto en el que nos movemos, consideramos que habría que incidir en todos los aspectos, pero a la hora de establecer prioridades; los contenidos procedimentales y actitudinales, los principios metodológicos y la evaluación como proceso estarían en los primeros lugares. No cabe duda de que a pesar de ser temas de suma importancia puede ocurrir que todo siga como estaba pero utilizando otra terminología.

En cuanto al currículum, las mayores diferencias con los de otras comunidades no están tanto en los contenidos como en la manera de organizarlos por bloques, siendo de resaltar que en Galicia no aparece de modo expreso un bloque de contenidos dedicado exclusivamente a la resolución de problemas.

En cuanto al currículum, las mayores diferencias con los de otras comunidades no están tanto en los contenidos como en la manera de organizarlos por bloques, siendo de resaltar que en Galicia no aparece de modo expreso un bloque de contenidos dedicado exclusivamente a la resolución de problemas.

Los cambios más importantes que se introducen, a partir de 1990, en el terreno genérico de la educación y de la matemática en particular se manifiestan:

- En el ámbito de objetivos generales, al pasar de conductas terminales a capacidades.
- En contenidos, no se tienen en cuenta sólo los conceptuales, sino que se hacen explícitos los contenidos de tipo procedimental y los de tipo actitudinal.
- En el ámbito metodológico es importante el cambio de rol para el profesorado que debe centrarse más en el proceso de aprendizaje del alumnado que va a determinar el proceso de enseñanza, y no al revés.
- En la evaluación se pasa de un modelo de diagnóstico clínico a un modelo de diagnóstico curricular.

Parece claro que el profesorado, en general, no ve operativos ni el PEC ni el PCC, ya sea de etapa o de área, porque no le resultan funcionales; al contrario son una carga más burocrática que de ayuda para la clase. Es así que su elaboración, la del PC, va desde la copia de la propuesta que hace la editorial correspondiente hasta la elaboración personal, aunque esto último se da en un reducido porcentaje de casos, utilizando en algunas ocasiones criterios no muy claros, por lo que no es significativo, y sin la asunción de todos los implicados. De este modo, en la programación de aula, se sigue «el libro de texto», por lo que no se está concretando el currículum sino implantando el que figura en aquel.

En la metodología el cambio parece más bien lento y escaso. Cuesta asumir los principios que emanan de la LOGSE y, en general, se sigue con un modelo competencial del profesorado sin que se produzca el tránsito hacia un modelo mediador.

Puede ocurrir que el predominio de una metodología de elaboración deductiva en detrimento de un análisis y una toma de decisiones basadas en la propia práctica diaria favorezca este estado de cosas. Tampoco podemos olvidar la poca práctica en el ejercicio de la autonomía del profesorado que, en ocasiones, muestra su preocupación por la elaboración de un PCC realista y funcional. Sin embargo, a la hora de poner en práctica las decisiones tomadas o transcritas, no encuentra el camino adecuado y prefiere seguir los textos que «le facilitan las cosas» y que conectan con la cultura de trabajo tradicional.

Lo que se espera del trabajo profesional de los docentes en estos momentos es mucho y demanda una fuerte inversión de tiempo. Las tareas se multiplican:

- Desde la elaboración del PC hasta la programación de aula, en coherencia con aquel.
- La atención a la propia formación.
- La participación en actividades organizativas del centro (actividades complementarias y extraescolares).
- La posibilidad deseable de estar presente en los órganos de participación y gestión del centro, etc.

Pero, a pesar de estar muchas personas juntas en un mismo edificio, predomina el individualismo en el trabajo, la acomodación en la rutina y el temor a modificar e innovar en las tareas docentes porque pueden acarrear inseguridad. Esta carencia de hábito de trabajo cooperativo, que economiza tiempo, enriquece las tareas y rentabiliza esfuerzos no facilita el poder satisfacer todas las expectativas que la «ley» tiene puestas en el profesorado.

Es preciso planificar para educar, porque cuando planificamos:

- Acercamos más las actividades a los objetivos deseados que cuando improvisamos.
- Controlamos los factores que pueden incidir en los resultados.

El alumnado, a lo largo de su escolaridad recibe infinidad de mensajes. Pues bien:

- La planificación garantiza que el proceso que comienza con su escolarización sea un itinerario coherente, graduado y congruente hasta una meta prevista y planificada.
- Referente al rol del profesorado, si no planificamos, la «administración», las editoriales,... planifican por nosotros. ¿Es un sometimiento por miedo a usar la libertad de que disponemos? Si planificamos, tenemos la posibilidad de actuar colectivamente sobre nuestra realidad educativa.

La asistencia a actividades de formación abre, en algunos casos, horizontes y posibilidades aunque muchas veces se quedan en el simple conocimiento de su existencia. Así lo manifiesta una parte del profesorado que desconoce ciertos aspectos metodológicos, recursos materiales, etc., y que en el momento que accede a ellos también argumenta que el empleo de los nuevos recursos didácticos supone una exigencia a la que por situaciones distintas (personales, profesionales, de relación con los compañeros, familiares, etc.) no puede hacer frente.

La resolución de problemas es un campo inexplorado, en general, y el trabajo que se realiza es más de resolución de problemas-ejercicio de «aplicación de la teoría dada»... que de investigación y desarrollo del conocimiento matemático. No obstante, en aquellos casos en que esta actividad se intenta llevar a cabo, como divertimento y reto a las propias posibilidades, el profesorado manifiesta que, tanto él como el alumnado, disfrutan con este trabajo.

Es indudable que se precisa introducir en las aulas situaciones problemáticas para que el alumnado sea capaz de formular, probar y demostrar conjeturas, argumentar, usar procedimientos, etc., y así poder desarrollar las capacidades propuestas en los objetivos generales de área y de etapa.

La evaluación sigue siendo una asignatura pendiente. Decir evaluación en demasiados casos es decir medida, cuantificación, valoración,... del proceso de aprendizaje del alumno y no una recogida de información para retomar, modificar y mejorar el proceso de intervención. Se concibe más como una función de control que en su vertiente formativa.

Los cambios que se introducen, a partir de 1990, son significativos al incluir dentro de un mismo marco evaluar/enseñar/aprender, considerando estos procesos como una regulación continua de aprendizajes, entendiendo como regulación la adecuación de los procedimientos utilizados por el profesorado a las necesidades y progresos de los alumnos y, al mismo tiempo, como autorregulación de cómo conseguir que los alumnos vayan construyendo un buen sistema personal de aprender y sean autónomos en su proceso de aprendizaje.

...la evaluación se convierte en el elemento vertebrador y motor de todo el proceso de construcción del conocimiento, por lo que si se quiere cambiar la práctica educativa es preciso modificar el sistema de evaluación.

De este modo, la evaluación se convierte en el elemento vertebrador y motor de todo el proceso de construcción del conocimiento, por lo que si se quiere cambiar la práctica educativa es preciso modificar el sistema de evaluación.

La mayor autonomía de que se dispone en los centros y el profesorado hace más fácil fijar criterios y tomar decisiones en el terreno de la evaluación, pero va a resultar muy difícil si no cambiamos la forma de pensar y evaluamos también el proceso de enseñanza y no sólo el de aprendizaje de los alumnos.

La falta de sistematización y la carencia de estrategias de uso de la información que se obtiene a través de la observación del trabajo diario, de los cuadernos de clase, etc., conduce a una evaluación basada fundamentalmente en los «exámenes», «controles» o «pruebas de lápiz y papel» realizadas en momentos concretos, que resulta menos complicado que evaluar el diseño, planificación y desarrollo de todo el proceso en relación con el punto de partida del alumnado.

Mientras no asumamos todos o la mayoría de los cambios que se proponen, la evaluación sirve para decisiones al final de cada ciclo, etapa o cambio de profesorado, pero poco más. En la realidad, la estructura de la etapa en tres ciclos permite en cada uno de estos un aplazamiento de las decisiones de promoción o no promoción, pero la «mentalidad», bastante generalizada, con toda la carga que conlleva, parece ser la de «cursos» dentro de cada ciclo. Es preciso concienciarse de que se necesita recoger información día a día para reconducir todo el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Uno de los grandes retos que se nos presenta es el trabajo grupal, la toma de decisiones en equipo que permite una mayor coherencia en la intervención educativa a sabiendas de que se trata de un proceso largo y difícil. Y es que, estando amparados legalmente para introducir cambios curriculares a todos los niveles, se está reproduciendo el modelo tradicional en un alto porcentaje, frente a métodos innovadores. (Habría que recordar la utilización de recursos materiales motivadores que facilitan la construcción del conocimiento matemático, habría que hablar de la calculadora, etc.).

¿Cuáles son las razones de esta resistencia a innovar? Las causas van desde el desconocimiento hasta los miedos a introducir nuevas situaciones de aprendizaje que no dominamos. La tarea docente es más compleja en el nuevo sistema, pues pasamos de ser meros ejecutores de unos programas a ser parte activa en el diseño, planificación, desarrollo y evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje.

¿Cuáles son las razones de esta resistencia a innovar? Las causas van desde el desconocimiento hasta los miedos a introducir nuevas situaciones de aprendizaje que no dominamos.

Los problemas que señalamos, a menudo, en relación con el alumnado son casi siempre la falta de disciplina, de motivación, de interés,... desgana,... y el profesorado que asumió la responsabilidad que propone la Reforma y la está llevando a la práctica señala que es muy satisfactoria y motivadora tanto para él como para los alumnos, así como los resultados alcanzados.

El alumnado aprende mejor las Matemáticas, como el resto de las disciplinas, si el aprendizaje es funcional para él. Es decir, si ven utilidad a lo que aprenden para la vida diaria y para aprendizajes futuros. Existen bastantes centros en los que la enseñanza busca más la funcionalidad para el aprendizaje de contenidos de tramos superiores del sistema educativo, incluso, con ciertas lagunas a nivel vertical perdiendo de vista la variable propedéutica.

Es de gran importancia asumir la autonomía que tenemos para concretar el currículo y que no sea una u otra editorial la que planifique por nosotros. Es necesario lograr que el libro de texto sea un material de apoyo y que no sea el que dirija nuestra intervención. Es deseable usar y hablar de libros de texto, no de un único libro de texto que condiciona la libertad de una intervención educativa contextualizada. Sería deseable reconocer la necesidad de un cambio en la enseñanza en general y de las Matemáticas en particular, así como conseguir que el alumnado se motive de cara al aprendizaje de las Matemáticas, que disfrute y que vea su funcionalidad más allá del ámbito escolar.

Todo esto podemos resumirlo en un proceso de enseñanza-aprendizaje lúdico, significativo, comprensivo, funcional,... pero otra cosa muy distinta es lo que cada uno de nosotros está dispuesto o puede hacer para conseguirlo.

Madrid

Responsable:
Carmen Villanueva Cueva

He elegido el sencillo procedimiento de preguntar a distintos profesores su opinión acerca del acierto sobre las preguntas que se formularon, así como las evaluaciones efectuadas en los cursos impartidos por el Centro de Profesores para el área de matemáticas en Primaria.

En general, los profesionales de la enseñanza destacaron y valoraron positivamente, en primer lugar, el hecho de que el curriculum sea casi abierto –ya que no debemos olvidar los mínimos marcados, por otra parte necesarios para atender de forma diversa al alumnado en cuanto a su proceso de aprendizaje–. Opinamos que este último punto no es demasiado bien tratado, ya que en muchos colegios el desarrollo del currículum se centra en el texto de determinadas editoriales.

La mayoría destacan el cambio metodológico como necesario, en el que sobre la transmisión de conocimientos es prioritario incidir en otros aspectos, como el aprendizaje por descubrimiento, en que se respeten modos de aprendizaje y tiempo empleado. Destacando el papel del maestro en este proceso como acompañante y orientador del mismo.

Coinciden en señalar que el trabajo es mayor por la necesidad de buscar actividades que motiven el aprendizaje. Señalan el papel tan importante de una buena planificación y programación, así como la necesidad del trabajo en equipo para mejor llevar a cabo la labor y el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En la zona Oeste de Madrid se ha dado importancia al estudio de los recursos matemáticos del entorno como manera más adecuada a ese aprendizaje significativo, propuesto en el nuevo currículum

Los nuevos programas tienen como base el constructivismo y la significatividad del aprendizaje; es importante no perder esto de vista ya que las orientaciones metodológicas, las unidades didácticas etc., deben construirse desde la globalización, realizada de forma natural sin ningún tipo de situaciones forzadas y estableciendo siempre las relaciones oportunas con los conocimientos e ideas previas que los alumnos ya poseen. Ni debemos olvidar que estas ideas previas perduran en el tiempo y es muy necesario contar con ellas para reconducirlas de forma adecuada.

Según nuestro punto de vista, es esencial en los nuevos programas el papel que se asigna a la evaluación contínua en el proceso formativo, de forma que la evaluación procesual ocupe el papel que le corresponde, así como a la metaevaluación realizada. Los aspectos funcionales del área, opinan, adquieren vital importancia. También es importante destacar el papel asignado a los objetivos terminales, en que las capacidades adquiridas tienen una importancia digna de destacar. En cuanto a los contenidos parece de capital importancia la matización de conceptuales, procedimentales y actitudinales que los nuevos programan aportan y destacan. Aunque algunos profesores destacan la dificultad de evaluar los actitudinales.

Coinciden en que el trabajo es mayor por la necesidad de buscar actividades que motiven el aprendizaje. Señalan el papel tan importante de una buena planificación y programación, así como la necesidad del trabajo en equipo para mejor llevar a cabo la labor y el proceso de enseñanza-aprendizaje. Pero como ya hemos apuntado, muchos centros se apoyan y siguen el texto de alguna editorial por razones de seguridad. Algo semejante sucede a la hora de introducir determinadas innovaciones, como usar la calculadora como potenciadora del cálculo mental. Es de destacar el papel que la inmensa mayoría concede al planteamiento y resolución de problemas y desde este aspecto creen que se puede trabajar mejor la atención a alumnos diversos.

Se valora de forma positiva que los nuevos planteamientos hacen al alumno mas atractivo el aprendizaje y les hace descubrir aspectos matemáticos de su entorno, o el uso de diversos materiales didácticos que facilitan los aprendizajes. Hay diversidad de opiniones en cuanto el nivel de exigencia que se plantea cara al aprendizaje, aunque se tiene confianza en que con el paso del tiempo se dominarán las nuevas orientaciones metodológicas y el aprendizaje será ciertamente significativo.

Se ha destacado, o llamado la atención, en cómo se lleva a cabo la reforma en la que se cuenta con el voluntarismo de los maestros para determinadas programaciones y elaboraciones de curr;iculum de áreas, sin tener tiempo o medios para efectuarlo adecuadamente. De todas formas, casi todos coinciden en que si se trabajara con los planteamientos del currículum en cuanto a significatividad, adaptación, funcionalidad, etc., los alumnos asimilarían y trabajarían mejor.

Como mejoras aportan la potenciación del entorno, la resolución de problemas, el auge que se ha dado a la geometría y su significatividad en la vida diaria, la importancia del razonamiento y aprendizajes más lúdicos de forma que determinados contenidos como la medida, sean descubiertos y aprendidos significativamente y con gusto. El uso adecuado de la calculadora, como ya he indicado, y también de vital importancia el papel concedido a la organización de la información, y el inicio adecuado en el mundo de la estadística.

Como mejoras aportan la potenciación del entorno, la resolución de problemas el auge que se ha dado a la geometría y su significatividad en la vida diaria, la importancia del razonamiento y aprendizajes más lúdicos de forma que determinados contenidos como la medida, sean descubiertos y aprendidos significativamente y con gusto.

Navarra

Responsable:

María Luisa de Simón Caballero

Introducción

Para elaborar este informe se ha recogido información de las conversaciones mantenidas con profesores y profesoras asistentes a diferentes actividades de Formación en el Centro de Apoyo al Profesorado de Pamplona*.

Se ha contado, además, con las reflexiones realizadas por algunos profesores y un grupo de orientadores a los que se les ha pedido que realizaran un análisis de las cuestiones planteadas en las preguntas orientativas.

Hay que tener en cuenta, por lo tanto, que las opiniones recogidas pertenecen a un profesorado que, en alguna medida, se interesa por el cambio curricular que la LOGSE propone.

El informe se desarrolla en torno a las preguntas planteadas y en algunas de ellas se añaden además de las opiniones recogidas algunas reflexiones personales.

Consideraciones generales

En general, parece que el profesorado está abierto a las nuevas propuestas educativas, en la medida en que comprende la necesidad de dar un protagonismo mayor al alumno y de integrar en

* Las personas que realizaron los informes son las siguientes: Lourdes Escalada, Félix Enériz, J. Ramón Arrieta y el equipo de Orientación de Pamplona 2 de E. Primaria

el currículum aspectos de las áreas, en este caso de las matemáticas, que se adecuen a las necesidades sociales e intelectuales del alumnado.

No obstante, se encuentran dificultades para desarrollar la propuesta de cambio que presenta el currículum cuando tiene que contextualizarla en las programaciones didácticas y en actividades de aula. Esto es debido, a mi entender, a diferentes motivos:

- La inseguridad del profesorado a la hora de introducir en el aula propuestas novedosas, que le convencen, pero no encuentra la forma de integrarlas en el quehacer diario sin que supongan una ruptura con lo demás que hace.
- El desequilibrio entre las programaciones didácticas que, en general, se elaboran de forma global y los cambios que se pretenden introducir que son parciales, lentos y paulatinos.
- La tradición en la enseñanza de algunos contenidos, que aun considerando obsoleto su tratamiento, se incluyen en las programaciones didácticas por la costumbre y la presión social, que casi siempre parte de las familias.
- La falta de formación científica y didáctica, en algunos casos y campos de conocimiento, que provoca inseguridad para abordar determinados contenidos.

Comentarios a las preguntas del cuestionario

Pregunta 1

Una parte del profesorado consultado entiende que el cambio más importante está en el sentido que se da a la evaluación, entendiendo ésta como un elemento autorregulador del propio proceso de enseñanza-aprendizaje, que no se centra solamente en la valoración de los resultados, sino que informa sobre cómo aprenden los alumnos, sus situaciones de partida frente a la adquisición de nuevos aprendizajes y también sobre la acción del profesor. Este nuevo aspecto de la propuesta curricular se considera muy positivo.

Una parte del profesorado consultado entiende que el cambio más importante está en el sentido que se da a la evaluación, entendiendo ésta como un elemento autorregulador del propio proceso de enseñanza-aprendizaje...

Piensan además, que entender la evaluación así, implica tener un conocimiento exhaustivo de los elementos que intervienen en el proceso de aprendizaje y de enseñanza de las matemáticas para aprovechar las posibilidades que ésta ofrece como autorregulación y autoevaluación.

Otra parte entiende que el acento está en la metodología ya que la propuesta de reforma exige una «forma de hacer» en clase que respete los ritmos de aprendizaje, fomente el trabajo cooperativo y desarrolle las capacidades del alumnado al máximo y otorga, además, al profesor un papel más activo como facilitador del aprendizaje de los alumnos.

Se considera que el cambio en el contenido no supone tanto esfuerzo para el profesor y en este sentido la mayor dificultad se sitúa en la necesidad de optar entre unos contenidos y otros en relación a su valor formativo e instrumental.

Bajo mi punto de vista, cualquier cambio que se produzca en algún elemento del currículum produce un cambio en los demás. Es decir los motivos, principios de intervención educativa, criterios para la organización de los contenidos, etc., que permiten concretar y definir cualquier elemento del currículum supeditan la definición y el tratamiento de los demás elementos.

Evidentemente, para el profesor es más fácil analizar el currículum desde los contenidos por representar aparentemente situaciones más cercanas a su experiencia. No obstante el centrar el cambio, en este momento en la evaluación, tras varios años de elaboración de los proyectos curriculares, se debe, bajo mi punto de vista, no tanto a no conocer el qué evaluar si no en el cómo realizar esa evaluación.

Se hace necesario evaluar actitudes, procedimientos y conceptos, tanto desde un punto de vista cualitativo como cuantitativo para conocer si el proceso de enseñanza-aprendizaje se ajusta a lo que se ha establecido que es necesario aprender y a las posibilidades de cada alumno. En este sentido resulta complicado para el profesorado diseñar pruebas específicas y estrategias para la evaluación, así como diseñar instrumentos y definir los elementos para la observación. Al buscar soluciones a estas cuestiones el profesorado se ha visto obligado a replantear decisiones ya tomadas en relación al qué, cómo y cuándo enseñar.

Pregunta 2

La respuesta del profesorado es unánime en cuanto a la bondad y ventajas de un currículum abierto que permita adaptar el currículum base a las características de cada centro, pero se considera que en la mayoría de los casos el currículum lo cierra el libro de texto que define en gran medida el programa.

Estimo que el proceso de toma de decisiones en los centros educativos ha dado lugar a decisiones de tipo muy general que, por otra parte, es posible que sea a lo máximo que se puede llegar en un primer momento. Además, existe en los centros poca tradición de trabajo en equipo y existen diversidad de estilos y opiniones que en muchos caso es difícil explicitar y contrastar sin ayuda externa. Aunque se han presentado propuestas en diferentes cursos de formación, no todo el profesorado ha participado en ellas, y entre el profesorado participante la mayoría encuentra dificultades para desarrollar estas propuestas con cuyos planteamientos se identifica, por sentirse poco seguro.

En este sentido, el profesorado cree que los cambios han de realizarse paulatinamente hasta tener la suficiente confianza y seguridad para asumir y desarrollar un proyecto en su totalidad.

Pregunta 3

Hay unanimidad en cuanto a la importancia de la resolución de problemas en el currículum de matemáticas. El profesorado considera que debería ser éste el eje en torno al cual se organizaran el resto de los contenidos del currículum, pero se encuentran con dificultades para establecer qué problemas tratar y definir las secuencias de aprendizaje. Entienden que por un lado es necesario trabajar los problemas como un contenido con entidad propia: el proceso de resolución, las variables que intervienen en ese proceso, las estrategias heurísticas... y, por otro lado, que a través de la resolución de problemas se pueden tratar otros contenidos. No obstante, coinciden en que es necesario poseer un conocimiento exhaustivo de estos contenidos por parte del profesorado.

En la mayoría de los centros se ha optado por establecer periodos para tratar la resolución de problemas en el aula, por ejemplo, utilizando una clase a la semana para hacer problemas.

Se cuestiona hasta qué punto los alumnos aceptan propuestas basadas en la resolución de problemas, que les exigen una actividad mental más fuerte y un estilo de trabajo al que no están acostumbrados.

Pregunta 4

El profesorado consultado piensa que actualmente se otorga más importancia al trabajo en grupo, entendiendo que las situaciones grupales son más ricas ya que permiten la comunicación entre iguales.

En cuanto a las actividades interdisciplinares opinan que el libro de texto utilizado como programa limita, en gran medida, el desarrollo de este tipo de actividades realizándose ocasionalmente.

Se cuestiona hasta qué punto los alumnos aceptan propuestas basadas en la resolución de problemas, que les exigen una actividad mental más fuerte y un estilo de trabajo al que no están acostumbrados.

Pregunta 5

Se piensa que la tarea del profesor en el marco de la LOGSE es más compleja. Esta complejidad radica, bajo su punto de vista, en que el papel que se le atribuye al profesor es diferente del atribuido hasta ahora; tiene que tomar decisiones de tipo curricular, necesita periodos de reflexión, más tiempos para preparar las clases y, en definitiva, necesita poseer un conocimiento más profundo del área y de las situaciones de enseñanza que facilitan el aprendizaje.

Por otro lado, diseñar o encontrar situaciones que permitan adecuar los contenidos que se van a tratar y la intervención del profesor a las necesidades individuales y grupales del alumnado, supone un gran esfuerzo al profesor.

Pregunta 6

El profesorado encuentra cambios significativos en torno a la evaluación, al reconocer su dimensión autorreguladora y autoevaluadora. En este sentido piensan que este nuevo sentido otorgado a la evaluación ha servido para tomar decisiones en el trabajo diario, aunque en cierta medida, ya se venía haciendo.

Se reconoce la potencialidad de la evaluación para tomar decisiones en torno a la distribución de los contenidos a lo largo del ciclo, pero creen que se usa poco en este sentido.

Se reconoce también que se tiene poca seguridad ante el uso de diferentes instrumentos para la evaluación y en algunos casos desconocimiento. No obstante paulatinamente se van elaborando, mejorando e introduciendo diferentes instrumentos.

El sentido otorgado a la evaluación, como medio para obtener información sobre cómo y qué aprenden los alumnos y las alumnas y sobre la potencialidad de los materiales y métodos utilizados, ha ofrecido al profesorado la oportunidad de reflexionar en torno al aprendizaje de los alumnos y a su propia práctica, lo cual en muchos casos ha llevado al replanteamiento de algunas decisiones de tipo curricular. Pero entiendo que es necesario apoyar esta reflexión con propuestas concretas sobre el desarrollo de las áreas curriculares y el tratamiento de los contenidos que ofrezcan diferentes alternativas.

En todo caso, insistiendo en lo apuntado en la pregunta 1, parece que en ocasiones no se establecen conexiones entre el qué enseñar y el qué evaluar, centrándose los problemas en torno a la evaluación sobre los criterios de promoción y las estrategias para evaluar. Sin establecer, en la mayoría de los casos, conexiones entre los demás elementos del currículum.

Pregunta 7

En general, se coincide en que las matemáticas son más funcionales en tanto éstas se definen a partir de su contribución a la formación integral de los individuos.

Opinan que han disminuido los contenidos superfluos, pero que el currículum está excesivamente cargado de contenidos.

Pienso que actualmente se siguen tratando contenidos, que no se cuestionan por la fuerte tradición que tienen en la escuela y no se desechan de los currículos aunque no se encuentren motivos pedagógicos o de funcionalidad que justifiquen su tratamiento.

Por otro lado, los cambios curriculares requieren tiempo y son producto de un cambio en el pensamiento del profesor que ha llegado al convencimiento que algo «es mejor» que lo que hacía, y por lo tanto decide incluir o desechar algún contenido de la programación didáctica o modificar su tratamiento.

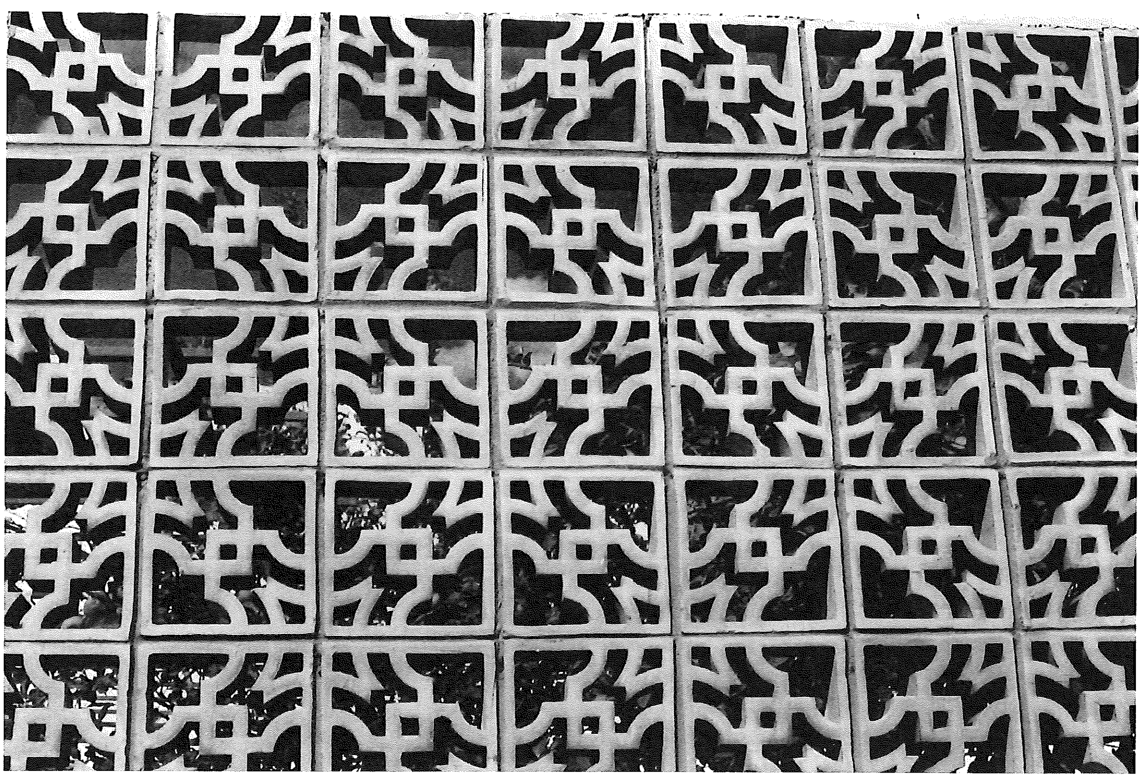
Pregunta 8

Se solicita más formación de calidad que facilite la reflexión e intercambio de ideas en los centros educativos así como la necesidad de establecer ratios menores.

Bajo mi punto de vista habría que establecer estrategias a corto y largo plazo para apoyar al profesor en el proceso de toma de decisiones y, en general, en el diseño y desarrollo de las programaciones didácticas.

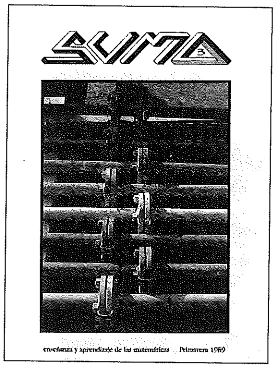
Un profesor de Educación Primaria aborda al menos tres áreas curriculares Matemáticas, Lenguaje y Conocimiento del medio. Para realizar una reflexión en torno al papel de cada una de estas áreas en el currículum de la etapa es necesario poseer una sólida formación científica, metodológica y didáctica.

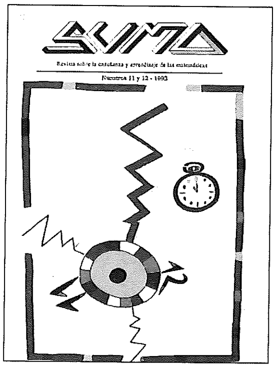
Fidela Velázquez
Ana Negrín
Luisa Girondo
Bernardo Gómez
Lorenzo J. Blanco
Manuel Pazos
Carmen Villanueva
María Luisa de Simón

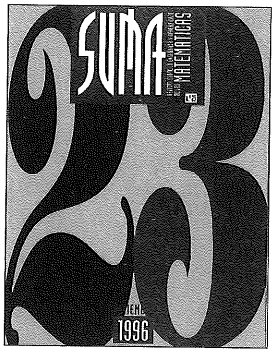


Gran Canaria. Foto: Luis Balbuena

OFERTA DE NÚMEROS ATRASADOS A SOCIOS Y SUSCRIPTORES







Durante un periodo de tiempo limitado se ofrece a los socios de la FESPM y a los suscriptores de SUMA la posibilidad de completar su colección de SUMA adquiriendo ejemplares de la misma a precio reducido.

- Precio: 500 pts. ejemplar tanto sencillo como doble.
- Fecha límite de la oferta: 30 de mayo de 1998.
- Forma de pago: talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.
- Números disponibles: 2 al 24 (números dobles: 11-12 y 14-15).
- Pedidos deberán remitirse por correo (Revista Suma. ICE Universidad de Zaragoza. C/Pedro Cerbuna, 12. 50009- Zaragoza) o por fax (976-76 13 45).
- Los pedidos se atenderán por orden de recepción y hasta fin de existencias.

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 95-102

Más allá de los algoritmos: uso de la calculadora y aprendizaje de estrategias con alumnos de 8 años

Javier Fraile Martín

INFORME

En este artículo se describen las conductas observadas en alumnos de 8 años durante un juego de estrategia con calculadora. Se pretende con ello analizar la función de la calculadora en las aulas de Primaria más allá de las actividades de papel y lápiz, comprobar la evolución de las estrategias que utilizan los alumnos y demostrar que el uso de la calculadora, lejos de limitar las capacidades de cálculo mental, puede convertirse en un material didáctico que favorezca su desarrollo.

ANTECEDENTES

La introducción de la calculadora en el currículum de la enseñanza primaria ha suscitado un importante debate en la comunidad educativa, e incluso fuera de ella, sobre las presuntas consecuencias negativas que su uso puede tener sobre otros aprendizajes y, también, sobre la edad más adecuada de los alumnos para iniciar su utilización en las aulas. Mucho se ha escrito y hablado a propósito del papel que debe jugar la calculadora y de su influencia en el desarrollo del pensamiento matemático (Fielker, 1986). En las últimas décadas se han publicado recomendaciones (*Informe Cockcroft*, 1985), documentos prescriptivos (DCB, 1989) y numerosos libros, artículos e investigaciones. A pesar de ello, algunos padres y educadores continúan manifestando su resistencia al uso de la calculadora, sobre todo con los alumnos más pequeños.

Los detractores de la incorporación temprana de este instrumento de cálculo basan sus creencias, fundamentalmente, en dos mitos muy difundidos que han sido analizados en estudios sobre el pensamiento del profesorado (Reys, Suydam y Lindquist; 1989):

a) La calculadora no desarrolla el razonamiento matemático puesto que para utilizarla basta con seguir exactamente las instrucciones de funcionamiento.

b) La calculadora limita la adquisición de las habilidades de cálculo numérico de los alumnos.

El *Informe Cockcroft* afirma que algunas investigaciones han demostrado que los alumnos habituados a usar la calculadora mejoran su actitud hacia las matemáticas, las destrezas de cálculo, la comprensión de los conceptos y la resolución de problemas. Otros estudios sobre el tema concluyen que no se encuentran diferencias significativas entre los grupos experimentales y los grupos control. En cualquier caso se puede afirmar que ninguna investigación prueba que el uso de la calculadora en la educación primaria produzca efectos adversos sobre la capacidad de cálculo de los alumnos.

Lo cierto es que la introducción de la calculadora en el aula no es una decisión aislada del resto de las decisiones sobre la enseñanza de las matemáticas: implica cambios sustantivos en el currículum que, para muchos expertos, afectan tanto a la metodología como a las intenciones educativas y a los contenidos de la enseñanza (Reys, B., 1989; Wheatley y Shumway, 1992; NCTM, 1991). Uno de los efectos didácticos más reiterados es que *el uso de la calculadora como instrumento de cálculo, proporciona a los maestros y alumnos el tiempo necesario para concentrar el esfuerzo y la atención en la comprensión de conceptos y en el pensamiento crítico.* Son muchos los trabajos que enfatizan el tiempo «liberado» al evitar operaciones tediosas y sostienen que la calculadora permite focalizar la atención de los estudiantes en los procesos de resolución de problemas más que en los cálculos que han de realizarse para obtener los resultados.

La interpretación sesgada y superficial de estas ideas, unida a la falta de formación específica del profesorado y a la escasez de materiales curriculares adecuados, han alimentado la creencia de que la función esencial de la calculadora es, exclusivamente, la de sustituir a los algoritmos escritos o, en algunos casos, la de verificar los resultados obtenidos mediante el cálculo escrito. Algunos informes constatan, efectivamente, que las actividades con calculadora que se realizan en los primeros cursos de Primaria tienen como objetivo, en su mayoría, la comprobación de los cálculos realizados con papel y lápiz (Hembree y Dessart, 1992). Con mucha frecuencia encontramos en la práctica real del aula que la calculadora se utiliza como instrumento autocorrector o, en el mejor de los casos, como sustituto del algoritmo escrito (en general previa autorización del profesor que es quien decide cuándo puede y cuándo no puede utilizarse la calculadora). Esta centración en uno de los múltiples usos de la calculadora en la Educación Primaria ha convertido el debate en una especie de batalla entre los algoritmos convencionales y la calculadora. Una posible consecuencia negativa de este planteamiento es que muchos alumnos consideran todavía que usar la calculadora es algo así como «hacer trampas» (Reys, R. E., 1980).

No es el objetivo de este artículo discutir si algunos algoritmos escritos son obsoletos o no, puesto que hay mucha bibliografía que ilustra el estado actual de la situación (Fernández y Goñi, 1995). Sin embargo, debemos señalar que a menudo se olvidan otras funciones de la calculadora que nada tienen que ver con los algoritmos: *la calculadora fomenta la exploración natural de estrategias en la resolución de problemas y la aplicación de procedimientos intuitivos.*

...se puede afirmar que ninguna investigación prueba que el uso de la calculadora en la educación primaria produzca efectos adversos sobre la capacidad de cálculo de los alumnos.

Bajo esta nueva perspectiva, al contrario de lo que podría sospecharse, el uso de la calculadora como instrumento que «propone» *problemas puros* (en el sentido de «problemas puros» como opuestos a los «problemas aplicados» tal como sugiere Fielker) constituye un trabajo de aula muy diferente al habitual e implica más dedicación en el tiempo, más complejidad en la planificación y más necesidad de interacción entre los alumnos y entre éstos y el profesor.

La preocupación por las supuestas secuelas perjudiciales que podía originar la calculadora sobre las habilidades de cálculo en la Educación Primaria provocó que en los EEUU se realizaran durante los años ochenta muchas investigaciones cuya atención se centraba en probar la existencia o no de estos efectos indeseados. Hembree y Dessart (1986) señalan, sin embargo, «la escasez de estudios dedicados a resaltar los logros de los alumnos» cuando se hace un uso sistemático de las calculadoras. Nuestra opinión es que, en el futuro, las investigaciones deberían apartarse del supuesto dilema «calculadora sí-calculadora no» y tratar de mostrar la importancia de este instrumento para el desarrollo de las capacidades de los alumnos y la formación del pensamiento matemático. Ésta puede ser una forma de vencer las resistencias al cambio de algunos docentes y padres a la vez que se convierte en una ayuda para la mejora de la práctica cotidiana de los profesores que ya la utilizan en el aula.

Introducir la calculadora, ¿a qué edad?

Fielker compara la calculadora con otros materiales de ayuda en la enseñanza de las matemáticas. Los materiales estructurados convencionales proporcionan un modelo estructurado y tangible de un modelo abstracto (Bloques Dienes, Regletas Cuisenaire...). Su manipulación proporciona imágenes visuales y facilita el uso de la intuición para generar nuevas ideas sobre el modelo abstracto. En cambio la calculadora no permite «ver» lo que está ocurriendo; el usuario no recibe ninguna imagen visual ya que sólo da cuenta del *resultado* del proceso. No favorece, por sí misma, la construcción intuitiva de nociones matemáticas, pero proporciona la oportunidad de hacer deducciones acerca de lo que está ocurriendo si uno observa el «input» y el «output»; sin embargo, son necesarias algunas intuiciones y conocimientos previos para sacarle partido inteligente a la calculadora en la construcción de nuevos conocimientos. Esto explicaría las reticencias para emplearla con los niños más pequeños que todavía necesitan materiales concretos o estructurados en los que basar su intuición y sus reflexiones (Fielker, 1986).

Con niños mayores, la calculadora se convierte en un excelente material de ayuda que «propone» problemas; hace falta, no obstante, determinar qué significa «niños mayores».

A continuación describiremos las observaciones realizadas con niños de 8 años durante una actividad de calculadora donde se volverá a abordar alguno de los aspectos esbozados hasta ahora.

La experiencia que se relata fue planteada, durante el asesoramiento a un centro público de Primaria, con la intención de comprobar si los niños del primer ciclo son «demasiado pequeños» para usar la calculadora o si, por el contrario, son capaces de aprovecharla para ampliar sus habilidades matemáticas sin interferir en la enseñaza del cálculo mental ni del aprendizaje de los algoritmos. Como tarea adecuada para esta finalidad, se eligió un juego por parejas.

Observación en el aula: más allá del papel y lápiz

La actividad cuyo estudio cualitativo se presenta ahora, fue realizada con 8 alumnos de 2.° curso de Primaria elegidos al azar en un colegio público del extrarradio de Barcelona de nivel socio-cultural medio-bajo*. Aunque el centro disponía de calculadoras para trabajar en el aula, éstas se reservaban para los cursos del ciclo superior (5.° y 6.°), por lo que los alumnos observados no estaban habituados a utilizarlas en actividades escolares. Realizaron un par de sesiones de una hora de duración para habituarse al manejo de la calculadora. Finalmente, se propuso un juego de estrategia que denominamos «Conseguir el 10».

Se juega por parejas y cada pareja dispone de una calculadora. El primer jugador escribe el número 38 en la pantalla, resta un número de una cifra y pasa la calculadora al otro jugador. Éste debe restar otro número del 1 al 9 y así sucesivamente. Gana el que consigue el número 10.

Descripción del juego y método de observación

Se juega por parejas y cada pareja dispone de una calculadora. El primer jugador escribe el número 38 en la pantalla, resta un número de una cifra y pasa la calculadora al otro jugador. Éste debe restar otro número del 1 al 9 y así sucesivamente. Gana el que consigue el número 10. Cada pareja realizó 5 partidas y se registraron todas las jugadas así como los comentarios que hicieron los jugadores. La profesora se limitó a actuar como observadora, y sólo intervino en una ocasión para pedir una aclaración tras el comentario de un niño.

Sobre los juegos de estrategia

En diversos estudios sobre este tipo de actividades se habla de juegos de estrategia cuando se trata de conseguir procedimientos para ganar siempre o para no perder (Corbalán y Deulofeu, 1996; Corbalán, 1996; Corbalán, 1995; Corbalán, 1994). Una *estrategia ganadora* es aquella que conduce a un jugador al éxito hagan lo que hagan sus adversarios. La estrategia ganadora pueden ser *total* o *parcial* según sirva para ganar desde cualquier posición o sólo desde una determinada posición.

En el juego que nos ocupa, diremos que un alumno ha logrado una estrategia *ganadora-parcial* cuando es capaz de ganar con una sola jugada al recibir la calculadora con un número inferior a 20. Si es capaz de ampliar la estrategia a las decenas superiores, provocará que el otro jugador siempre reciba la calculadora con un 20, con lo que se asegura la partida en la siguiente jugada. Cuando este procedimiento se utiliza desde el 30 decimos que se dispone de una estrategia *ganadora-total* y el que inicia la partida tiene asegurado el éxito.

Actividad escrita

Antes de iniciar el trabajo con las calculadoras se planteó una batería de ejercicios escritos de composición y descomposición de números del 10 al 19 con el fin de saber si los alumnos eran capaces de resolver tareas del tipo:

* La recogida de información la realizó Elisabeth Poch, profesora del centro, sin cuya colaboración no hubiera sido posible este trabajo.

a) 10 + 8 = p
b) 16 – p = 10
c) 10 + p = 14
d) 13 – 3 = p
e) p + 5 = 15

Las tareas precedentes son requisitos para poder alcanzar una estrategia ganadora-parcial. En un ejercicio complementario se comprobó si eran capaces de ampliar la descomposición de números a otras decenas, condición necesaria para obtener la estrategia ganadora-total:

f) 30 + 6 = p
g) 57 – p = 50

Resultados

Una vez se tuvieron todos los registros se pasó a analizar los siguientes aspectos:

a) Actividad escrita: número de errores cometidos en los 35 ejercicios (5 de cada bloque) realizados por cada alumno.
b) Juego con la calculadora:
   b.1) Número de alumnos que no consiguieron utilizar ninguna estrategia. Análisis de sus jugadas y comparación con los resultados obtenidos en el ejercicio escrito.
   b.2) Número de alumnos que utilizaron una estrategia ganadora-parcial. Análisis de sus jugadas y de las posibles reflexiones que generan en los niños.
   b.3) Número de alumnos que consiguen elaborar la estrategia ganadora-total y proceso seguido para ello.

Era de esperar que las primeras partidas no desencadenaran una estrategia ganadora-total puesto que, en general, sirven para que los jugadores se familiaricen con el juego. En partidas posteriores es cuando se analiza con más detalle el desarrollo de las partidas y se producen las reflexiones que Corbalán llama «ideas clave». Estas reflexiones conducen al jugador a mejorar sus prestaciones y elaborar estrategias ganadoras. Esta dinámica también se da con los adultos: en un seminario con profesores pudimos comprobar que durante las dos primeras partidas sólo utilizaron la estrategia ganadora-parcial ($n - q = 10$ donde $10 < n < 20$). Cuando se les dijo que podían ganar si recibían la calculadora con un 27, reflexionaron y obtuvieron la estrategia ganadora-total.

Actividad escrita

En la tabla 1 se detalla el número de errores cometidos por cada alumno. Recordemos que tuvieron que resolver 5 ejercicios por cada tipo de actividad.

	a	b	c	d	e	f	g
Manuel	–	–	–	–	–	–	–
Mª José	–	–	–	–	–	–	3
Miriam	–	–	–	–	–	–	–
Eduardo	–	–	–	–	–	–	–
Iván	–	–	–	–	–	–	–
Estela	–	–	–	–	–	–	–
Daniel	–	–	–	–	5	–	–
Víctor	–	–	–	–	–	–	–

Tabla 1. Número de errores cometidos

Era de esperar que las primeras partidas no desencadenaran una estrategia ganadora-total puesto que, en general, sirven para que los jugadores se familiaricen con el juego.

Sólo Mª José y Daniel tuvieron equivocaciones en grupos de ejercicios concretos. Ningún alumno falló en la tarea más relacionada con el juego de la calculadora ($16 - p = 10$) y, por tanto, se podía sospechar que no tendrían grandes dificultades para utilizar la estrategia ganadora-parcial.

Ausencia de estrategias ganadoras

Dos de los ocho niños observados no consiguieron, a lo largo de las cinco partidas, ninguna estrategia ganadora. Actuaban como si se tratara de un juego de azar y las acciones alrededor del 10 parecían responder a un tanteo sin intención premeditada. En cuatro partidas «se pasaron» del 10 y obtuvieron números menores tal como podemos ver en el siguiente ejemplo:

Número recibido	Estela	Iván	Número entregado
38	–8		30
30		–9	21
21	–9		12
12		–5	7
7	+5		12
12		–7	5
5	+4		9
9		+1	10

Todas las partidas se ganaron sumando o restando números del 1 al 3, es decir en el intervalo de 7 a 13. Debemos destacar que estos dos alumnos no cometieron errores en los ejercicios escritos lo que parece confirmar que la actividad con calculadora cumple funciones distintas a las de aquéllos, exigiendo además un esfuerzo diferente de cálculo mental. También viene a poner de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos para realizar transferencias de los conocimientos adquiridos a un nuevo contexto o dominio específico. Como dice Pozo (1994): «El paso del ejercicio al problema o del uso técnico del conocimiento a su uso estratégico constituye muchas veces un largo camino que hay que recorrer».

Uso de la estrategia ganadora-parcial

Cabía preguntarse, en general, si los alumnos que habían demostrado por escrito disponer del procedimiento para alcanzar el 10 a partir de cualquier número del 11 al 19, eran capaces de usarlo de forma sistemática al jugar con la calculadora a «Alcanzar el 10». En la tabla 2 se muestran los resultados obtenidos.

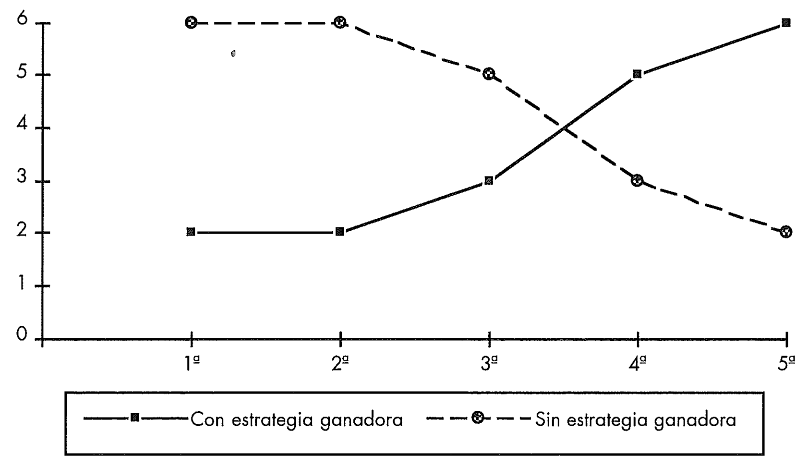
Según parece, los ejercicios escritos que habitualmente se hacen en las aulas con la finalidad de mejorar las habilidades de cálculo mental no garantizan que se puedan resolver con éxito actividades de similar contenido matemático cuando tienen formato diferente a las que sirvieron para enseñar dichas habilidades.

Sin embargo, cuatro de los alumnos observados descubrieron el procedimiento correcto (estrategia ganadora-parcial) después de varias partidas. Esto parece indicar que la calculadora, lejos de impedir el ejercicio del cálculo mental puede ser un instrumento de apoyo para ejercitarlo. La peculiaridad del trabajo con calculadora respecto al ejercicio escrito queda de manifiesto una vez más si comparamos las tablas 1 y 2: los alumnos que cometieron errores en el papel obtuvieron éxito con la calculadora, mientras que los dos que no consiguieron descubrir la estrategia ganadora no habían tenido fallos en el ejercicio escrito.

En la gráfica 1 se muestra la evolución observada en las conductas de los 8 alumnos a lo largo de las cinco partidas analizadas.

	N.° de alumnos	Nombre alumnos
Utilizan la estrategia ganadora-parcial desde la primera partida	2	Eduardo Miriam
Descubren la estrategia ganadora-parcial después de jugar más de dos partidas	4	Manuel Mª José Víctor Daniel
No descubren la estrategia ganadora a lo largo de las cinco partidas	2	Estela Iván

Tabla 2



Gráfica 1. Evolución de las partidas

¿Cómo evolucionan las conductas de los jugadores de una partida a otra? Veamos, por ejemplo, cómo se desarrollaron las partidas 1 y 3 de Victor y Daniel:

N.R.	Víctor	Dani	N.E.	Observaciones
38	−9		29	«Jugadas de aproximación»
29		−5	24	
24	−5		19	
19		−2	17	Hacen tres jugadas de «aproximación» (pero con números más pequeños) a pesar de ser jugadas «ganadoras»
17	−3		14	
14		−3	11	
11	−1		10	

Partida 1 (N.R.: Número recibido; N.E.: Número entregado)

N.R.	Víctor	Dani	N.E.	Observaciones
38	–8		30	«Jugadas de aproximación»
30		–9	21	
21	–5		16	
16		–3	13	Víctor toma conciencia de que 16 era una jugada «ganadora» y le dice a Daniel: «Tenías 16 y has quitado 3. Si hubieras quitado 6 tendrías 10».
13	–3		10	

Partida 3

La idea expresada por Victor en la jugada del 16 es lo que Corbalán denomina «idea clave» ya que desencadena la obtención de una estrategia ganadora. Resulta llamativo que la interacción entre los jugadores conduce a la mejora de resultados de ambos ya que a partir de esta partida tanto Victor como Daniel ganaron sin dificultad cuando recibían un número inferior a 20. Además, el 20 se convirtió en una especie de «número indeseable» y en las jugadas de aproximación los dos niños utilizaron, en lo sucesivo, números pequeños para «no pasarse». Esta conducta sugiere que la calculadora permite diseñar actividades matemáticas donde la interacción entre los alumnos favorece el desarrollo de procedimientos de cálculo más elaborados.

Estrategia ganadora-total

El caso más espectacular es el de Miriam que consiguió elaborar la estrategia ganadora-total para desesperación de su adversario, Eduardo. Tras dos partidas en las que cada jugador utilizó la estrategia ganadora-parcial, Miriam descubrió que si lograba pasarle a Eduardo la calculadora con un 20, tambien ganaba (Partida 3).

N.R.	Miriam	Edu	N.E.	Observaciones
38	–6		32	
32		–9	23	
23	–5		18	
18		–8	10	

Partida 1

N.R.	Miriam	Edu	N.E.	Observaciones
38		–9	29	
29	–9		20	
20		–1	19	
19	–9		10	

Partida 2

N.R.	Miriam	Edu	N.E.	Observaciones
38	–3		35	
35		–9	26	
26	–6		20	Miriam: «Ya gano yo»
20		–1	19	
19	–9		10	

Partida 3

N.R.	Miriam	Edu	N.E.	Observaciones
38		–1	37	
37	–6		31	
31		–9	22	
22	–2		20	Edu:«Siempre que tenga el 20 gana ella» Profesora: «¿Por qué?» Edu: «Porque siempre lo pone»
20		–2	18	
18	–8		10	

Partida 4

Queda claro que cuando Miriam exclama en la tercera jugada que gana ella, ha realizado mentalmente varias operaciones que le permiten anticipar las jugadas posteriores: a Eduardo no le queda más remedio que restar un número y esto pone a Miriam en situación de ganar. Debemos resaltar el grado de interacción y de atención que se pone en juego en esta actividad: pese a que Miriam no explicita el motivo por el que sabe que va a ganar, Eduardo dice en la siguiente partida que siempre que ella tenga el 20 ganará, aunque no sabe cuál es el motivo. Finalmente, Miriam logra refinar la estrategia y asegura que con 30 también gana (estrategia ganadora-total):

N.R.	Miriam	Edu	N.E.	Observaciones
38	–3		35	
35		–3	32	
32	–2		30	Miriam: «¡Ah, con 30 también gano!»
30		–2	28	
28	–8		20	
20		–1	19	
19	–9		10	

Partida 5

Aún se les dejó jugar algunas partidas más y Eduardo intentaba imitar la estrategia de Miriam aunque de una forma mecánica lo que no le permitió ganar ninguna más:

N.R.	Miriam	Edu	N.E.	Observaciones
38		–8	30	Edu intenta imitar la jugada anterior de Miriam
30	–5		25	
25		–6	19	Eduardo intenta llegar a 20 desde 25 pero no acierta y pide que se vuelva a empezar la partida

Partida 6

En la tabla siguiente presentamos el resumen de los logros obtenidos por los ocho alumnos observados:

	Número de alumnos
Elabora una estrategia ganadora-total	1
Elabora una estrategia ganadora-parcial	5
No elabora ningún tipo de estrategia	2

Conclusiones

A juzgar por los resultados presentados, podemos afirmar que son infundados los temores que apuntan a que el uso de la calculadora no desarrolla el razonamiento matemático ni las habilidades de cálculo mental. Más bien al contrario, se demuestra que ciertas actividades *permiten trabajar complejos procedimientos no rutinarios* relacionados con la resolución de problemas tales como las estrategias.

...se demuestra que ciertas actividades permiten trabajar complejos procedimientos no rutinarios relacionados con la resolución de problemas tales como las estrategias.

Los datos obtenidos confirman que dos actividades, idénticas desde el punto de vista matemático formal, exigen distintas habilidades si se realizan con calculadora o con papel y lápiz. Por tanto, vemos que la calculadora puede tener funciones específicas y creemos que debería utilizarse como un *instrumento de apoyo didáctico* para ejercitar determinados procedimientos y no sólo como sustituto de los algoritmos escritos o como herramienta de autocorrección.

En este trabajo hemos visto que los niños de ocho años pueden obtener gran rentabilidad en actividades similares a la descrita aquí, por ello pensamos que *el problema no reside en decidir «a qué edad empezamos» sino en utilizar las actividades de calculadora más adecuadas para cada edad.* Ello exigirá que los profesores la incorporen como un material didáctico al servicio de los objetivos de enseñanza-aprendizaje.

Podría pensarse que la calculadora sólo permite el trabajo individual, sin embargo, el análisis de algunas partidas nos ha mostrado hasta qué punto *los alumnos interactúan entre ellos y cómo son capaces de hacer suyas las ideas y procedimientos del otro.* Ello confirma la existencia de razonamiento durante las actividades con calculadora y pone de manifiesto que éstas no tienen por qué ser meras rutinas repetitivas.

Futuras investigaciones acerca de las habilidades que desarrolla la calculadora en los primeros cursos de la enseñanza deberían aportar más información relativa a su papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el fin de evitar errores en su utilización por falta de referentes teórico-prácticos.

Bibliografía

COCKCROFT (1985): *Las matemáticas sí cuentan*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

CORBALÁN, F. (1994): *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*, Síntesis, Madrid.

CORBALÁN, F. (1995): «Matemáticas, Juegos y Calculadoras», *Aula,* n.° 34.

CORBALÁN, F. (1996): «Estrategias utilizadas por los alumnos de secundaria en la resolución de juegos», *Suma,* n.° 23.

CORBALÁN, F. y J. DEULOFEU (1996): «Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas», *Uno,* n.° 7.

FERNÁNDEZ, S. y J. M. GOÑI (1995): «El cálculo en la Educación Matemática para la Sociedad de la Comunicación», *Aula,* n.° 34.

FIELKER, D. S. (1986): *Usando la Calculadoras con niños de diez años*, Generalitat Valenciana, Valencia.

HEMBREE, R. y D. J. DESSART (1986): «Effects of Han-held Calculators in Precollege Mathematics Education: A Meta-Analysis», *Journal for Research in Mathematics Education,* 17, 83-99.

HEMBREE, R. y D. J. DESSART (1992): «Research on Calculators in Mathematics Education», en NTCM 1992 Yearbook: *Calculators in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Primaria*, MEC, Madrid.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1991): *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática,* SAEM Thales, Sevilla.

POZO, J. I. (1994): *La solución de problemas*, Santillana, Madrid

REYS, B (1989): «The Calculator as a Tool for Instruction and Learning», en NCTM 1989 Yearbook, *New Directions for Elementary School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

REYS, R. E., M. SUYDAM y M. LINDQUIST (1989): *Helping Children Learn Mathematics*, Prentice Hall, New Jersey.

Javier Fraile
ICE
Universitat de Barcelona

REYS, R. E. (1980): «Calculators in the Elementary Classroom: How Can We Go Wrong!», *Arithmetic Teacher,* 28 (November), 38-40.

WHEATLEY, G. H. y R. SHUMWAY (1992): «The Potential for Calculators to Transform Elementary School Mathematics», en NTCM 1992 Yearbook: *Calculators in Mathematics Education*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

Tenerife. Foto: Luis Balbuena

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 103-110

SAMBORI: materiales de matemáticas para la Educación Primaria

Jorge Aldeguer Álamo

INFORME

En los primeros años de implantación del nuevo sistema educativo en los niveles no universitarios, se trataba de mostrar mediante ejemplificaciones, materiales y propuestas de cómo podrían abordarse los contenidos curriculares más novedosos y más interesantes. Esta experiencia trata de dar alguna información acerca de un proyecto de elaboración de materiales de matemáticas para la Educación Primaria. El reto era plasmar en propuestas de trabajo, las intenciones y prioridades que se estaban discutiendo en el terreno de la educación matemática en la escuela primaria.

SAMBORI es la denominación en catalán del juego de la rayuela y se eligió este nombre para identificar –dentro del conjunto de materiales de desarrollo curricular publicados por la Conselleria d'Educació i Ciència, València, 1993/94– los materiales de matemáticas para la educación primaria que iban a dar continuidad a las primeras ejemplificaciones, cajas rojas, en los primeros años de puesta en marcha de los programas de reforma.

La rayuela, el sambori, es un juego de calle que presenta a quienes juegan los dos objetos de conocimiento de las matemáticas: los números y el espacio, y parecía un bonito nombre para un proyecto de elaboración de materiales.

A partir de una convocatoria de elaboración de materiales (DOGV 1651 de 28.10.91) se puso en marcha un proyecto de trabajo en el que ha participado diez autores y otros colaboradores, profesores y profesoras de centros públicos y centros de profesores de la Comunidad Valenciana, que pretendía varios objetivos:

— Disponer de unidades didácticas de Primaria que ejemplificaran propuestas de Reforma en el trabajo con el alumnado y que podrían ser utilizadas en la experimentación de Primaria previa a la implantación del nuevo sistema educativo, que estaba realizando la administración educativa, y también en actividades de formación del profesorado: cursos, formación en centros, etc.

— Permitir el intercambio de ideas, señalar aspectos básicos e introducir novedades en propuestas de trabajo escolar, entre un grupo de personas que compartían responsabilidades en tareas de formación del profesorado, en programas de desarrollo curricular o que desde sus centros de enseñanza estaban interesadas en la elaboración de materiales.

— Definir una propuesta de trabajo en el aula que planteara el tema de la globalización de los aprendizajes (las matemáticas, el conocimiento del medio, el lenguaje) y los contextos de enseñanza y aprendizaje (los talleres, los proyectos, los juegos, la interacción profesor-alumnos, etc.).

El compromiso de elaboración de materiales consistía en disponer de unidades didácticas para los tres ciclos en el plazo de un año. A lo largo de 1992 se fue redactando el material previsto y una vez entregados los originales, el Equipo de Reforma de Primaria asumió el conjunto de materiales elaborados y los incorporó a otro conjunto de unidades didácticas. Éstas tratan de ser, junto con el documento principal (Proyecto Curricular de Educación Primaria/Projecte Curricular d'Educació Primària, Colección Materiales para el desarrollo curricular, c/ISBN, editado por la Conselleria de Cultura, Educació i Ciència, València 1993), parte del trabajo del equipo de reforma para ofrecer una ejemplificación del segundo nivel de concreción, respecto a todas las áreas de conocimiento del currículo de primaria.

Para llegar a elaborar propuestas de trabajo se trazó un marco de referencia y un calendario de compromisos. Previamente, tenían que ponerse de acuerdo las seis o siete personas que adquirían más compromiso de trabajo en cómo entendían el trabajo escolar para el aprendizaje de las matemáticas. Teníamos cierta presión para que las matemáticas se presentaran bajo un enfoque globalizador, en contextos cotidianos, etc., al igual que otras unidades del Proyecto Curricular de Educación Primaria (Erm/Yermo, Acció,...) que integran contenidos del área de conocimiento del medio natural, social y cultural con los del área de lenguas. Sin embargo, la opción se decantó por realizar una colección de unidades didácticas que presentan «únicamente» contenidos del área de matemáticas y que ha tenido una revisión importante del lenguaje utilizado y de determinados usos lingüísticos. Se trataba de presentar trabajo y propuestas matemáticas desde la propia disciplina bajo los supuestos genéricos de aprendizaje significativo, funcional, relacional, etc., desde un trabajo específico de área y afianzando la idea de que además de otras muchas propuestas muy relacionadas con otras áreas del currículo, había un lugar para hacer matemáticas sin contaminar conceptos realmente interesantes como el de globalización de los aprendizajes, que en propuestas de trabajo mal resueltas pierden su significado.

El siguiente paso era fijar unos criterios comunes que expresaran en qué estábamos de acuerdo respecto a la orientación e intenciones que íbamos a darle a los materiales. Se convino en estos puntos:

1. Partiendo del decreto de enseñanza de la comunidad valenciana, tratar de abarcar los contenidos propuestos desde los bloque de contenidos con la intención de que cada unidad didáctica se identificara fácilmente con parte de los contenidos propuestos en dichos bloques: Números, Medida, Geometría, Estadística, Azar, Probabilidad y Resolución de Problemas.
2. La opción didáctica implícita era partir de la resolución de problemas.
3. El conjunto de unidades didácticas y el conjunto de actividades de cada unidad didáctica se planteaba como un banco de recursos sin primar un orden preestablecido en cuanto a posibles secuenciaciones y, por lo tanto, como un conjunto de materiales diseñados como partes bastante independientes que favoreciera la labor del profesorado a la hora de programar.
4. Grados de libertad. Cada autor podría concebir cada unidad didáctica con bastante libertad, sobre todo, ante la oportunidad de poder plasmar en propuestas de trabajo, ideas, opciones y prioridades, fruto de la experiencia docente y de la actualización profesional, ante los cambios que suponía la reforma de la enseñanza, como reto para tratar de priorizar qué cosas no merecía la pena plantear reiterativamente en la escuela y qué cosas valía la pena proponer a los futuros destinatarios de nuestro trabajo, niñas y niños de 6 a 12 años.

Quienes estábamos participando pensábamos tener suficiente información para creer que sabíamos qué matemáticas valía la pena tratar en primaria y primar el desarrollo de capacidades en el alumnado en sentido amplio, y favorecer la estimación, el sentido numérico, la percepción espacial, el cálculo mental, abordar y resolver problemas, etc., más que tratar de cubrir con actividades un extenso inventario de objetivos terminales, específicos, didácticos...

Por último, se diseñó el formato que iba a tener el material y se elaboró un cuadro orientativo del número de unidades didácticas, título provisional y contenido aproximado que iba a tener

...primar el desarrollo de capacidades en el alumnado en sentido amplio, y favorecer la estimación, el sentido numérico, la percepción espacial, el cálculo mental, abordar y resolver problemas, etc., más que tratar de cubrir con actividades un extenso inventario de objetivos terminales, específicos, didácticos...

el conjunto. Ese cuadro que pretendía inicialmente que todos los miembros del grupo conocieran qué harían los demás, se formalizó en catorce unidades de primer ciclo, quince unidades de segundo ciclo y nueve unidades de tercer ciclo, el título de las cuales puede verse en el cuadro 1.

Unidades primer ciclo	*Unidades segundo ciclo*	*Unidades tercer ciclo*
NUMERACIÓN Y CÁLCULO TALLER DE CÁLCULO: Ábacos y regletas TALLER DE CÁLCULO: Circuitos de regletas TALLER DE CÁLCULO: Bolos TALLER DE CÁLCULO: Vacaciones divertidas	CÁLCULO Y OPERACIONES TABLA DEL CIEN TALLER DE CÁLCULO: Dados TALLER DE CÁLCULO: Barajas	TALLER DE CÁLCULO: Calculadoras INVESTIGANDO CON FICHAS, FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES: Tangram
TRABAJO DE MEDIDA	OLIMPIADAS ¡HAY QUE TOMAR MEDIDAS!	TALLER DE CONSTRUCCIÓN
TALLER DE GEOMETRÍA: Un, dos tres, espejos LA CLASE COMO GEOESPACIO TALLER DE GEOMETRÍA: Mosaicos TALLER DE GEOMETRÍA: Cuerdas, Varillas y Geoplano ¿Y TÚ CÓMO LO VES?	GEOESPACIO Y GEOPLANO CUERPOS Y FORMAS TALLER DE GEOMETRÍA: Espejos y polígonos TALLER DE GEOMETRÍA: Mosaicos	TALLER DE GEOMETRÍA: Espejos y polígonos TALLER DE GEOMETRÍA: Mosaicos
FRESA O MENTA CUENTA Y RECUENTA PITO-PITO-GORGORITO	JUEGOS DE SUERTE ¿CUÁNTOS? POSIBLE/PROBABLE EL MENÚ DEL COLE	ENCUESTAS COMBINA PROBABILIDAD
	¿Y TÚ CÓMO LO HARÍAS?	

Cuadro 1

Descripción del material impreso

Cada unidad didáctica consta del material del alumnado y del material del profesorado. El material del alumnado es un conjunto de actividades que se le presentan al alumnado en soporte papel (figura 1) y las características se indican a continuación.

- El material es fotocopiable, en hojas sueltas y sin paginar.
- Lo anterior permite que el material se convierta en las hojas de trabajo del alumnado si fuera preciso escribir, calcular, dibujar.
- Un índice señala el conjunto de actividades y un orden de realización propuesto pero, en bastantes unidades, el orden para trabajar las propuestas lo determina el profesorado.
- Cada hoja tiene una cabecera que es el nombre de la unidad y trata de situar al alumnado respecto al contenido, al contexto o al recurso utilizado.
- Cada hoja tiene un título o nombre de la actividad, el material requerido, el enunciado y las propuestas de trabajo.
- Cada hoja tiene un pie de página que aporta más información: el logotipo, el ciclo o ciclos al que se dirige la propuesta (C1, C2 será un material apto para ser trabajado en segundo o tercer nivel de primaria), además la palabra página __ sin ningún número, permitirá a cada alumno o alumna que ponga el núme-

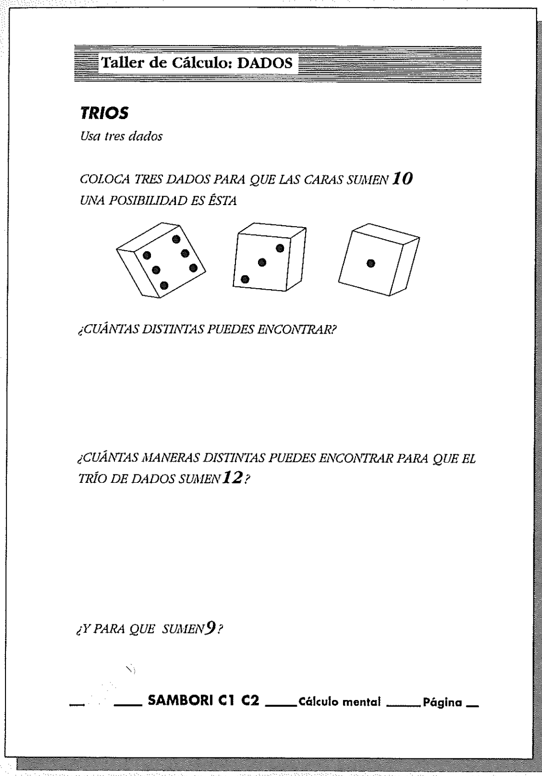


Figura 1

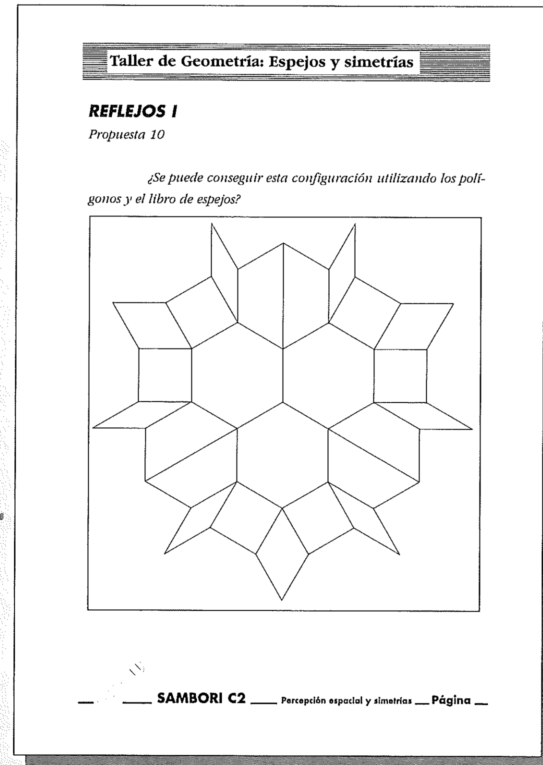


Figura 2

ro de orden cuando haya ordenado los trabajos de un periodo de tiempo y realice su álbum. Por último, y en un tamaño de letra más pequeño, una o dos palabras definen de nuevo en qué estamos trabajando, pero más en términos de capacidades u objetivos o contenidos matemáticos más sutiles.

- En la portada de cada unidad, un subtítulo sugiere en cada caso la utilización didáctica más adecuada (actividades, experiencias, trabajo en taller, proyecto).

El papel de las cabeceras, los títulos, los pies de página, tienen una intención de que el alumno sepa qué está haciendo o qué está tratando de aprender. Como si en términos de enseñanza metacognitiva, explicitáramos al alumno que estamos realizando un juego, hallando números ocultos, etc., pero que realmente lo que está haciendo es descubrir relaciones, desarrollar su capacidad de cálculo mental,...

Ese aspecto homogéneo que tiene todo el material: cabeceras, pies, títulos, pretendía suplir otro hecho: la autonomía que cada autor iba a tener para crear propuestas.

El contenido del material en conjunto es básicamente una colección de actividades que como más adelante se expone sugiere la posibilidad de ser tratadas en distintas situaciones o contextos, de forma individual o en pequeños grupos o taller, como actividad que hay que realizar, como problema para resolver, como proyecto a desarrollar o sencillamente como juego. Se han ido ofreciendo distintos tipos de actividades, más o menos abiertas, más o menos sencillas, más o menos extensas. Por lo tanto la dedicación de cada alumno (intensidad, dificultad, etc.) a cada actividad será desigual y distinta en cada caso. Como referencia se ofrece una propuesta de geometría de tipo medio (figura 2); el enunciado indica que utilizando piezas de polígonos o mosaicos y un libro de espejos, se trata de conseguir la configuración propuesta en la hoja de trabajo.

En el cuadro 2 se indica el número de actividades de cada unidad didáctica a fin de que el lector pueda hacerse una idea del proyecto global.

Unidades didácticas	*N.° actividades*
Primer ciclo	
NUMERACIÓN Y CÁLCULO	49
TALLER DE CÁLCULO: Ábacos y regletas	22
TALLER DE CÁLCULO: Circuitos de regletas	10
TALLER DE CÁLCULO: Bolos	9
TALLER DE JUEGOS: Vacaciones divertidas	1
TRABAJO DE MEDIDA	18
TALLER DE GEOMETRÍA: Un, dos, tres espejos	20
LA CLASE COMO GEOESPACIO	19
TALLER DE GEOMETRÍA: Mosaicos	8
TALLER DE GEOMETRÍA: Cuerdas, Varillas y Geoplano	55
¿Y TÚ CÓMO LO VES?	34
FRESA O MENTA	16
CUENTA Y RECUENTA	19
PITO-PITO-GORGORITO	14
Segundo ciclo	
CÁLCULO Y OPERACIONES	50
TABLA DEL CIEN	21
TALLER DE CÁLCULO: Dados	11
TALLER DE CÁLCULO: Barajas	20
OLIMPIADAS	48
¡HAY QUE TOMAR MEDIDAS!	25
GEOESPACIO Y GEOPLANO	39
CUERPOS Y FORMAS	
TALLER DE GEOMETRÍA: Espejos y polígonos	47
TALLER DE GEOMETRÍA: Mosaicos	7
JUEGOS DE SUERTE	20
¿CUÁNTOS?	26
POSIBLE/PROBABLE	17
EL MENÚ DEL COLE	19
¿Y TÚ CÓMO LO HARÍAS?	-
Tercer ciclo	
TALLER DE CÁLCULO: Calculadora	35
INVESTIGANDO CON FICHAS	21
FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES: Tangram	14
TALLER DE CONSTRUCCIÓN	6
TALLER DE GEOMETRÍA: Espejos y polígonos	16
TALLER DE GEOMETRÍA: Mosaicos	28
ENCUESTAS	27
COMBINA	29
PROBABILIDAD	

Cuadro 2

El material del profesorado trata de explicar qué intenciones y objetivos se pretenden en cada unidad en una redacción sencilla y en ocasiones se comentan una por una todas las actividades, en otros casos no; se incorporan a veces soluciones gráficas y también propuestas de trabajo que no están en el material del alumnado.

Propuesta metodológica

En el apartado anterior, que describía el material elaborado, se ha podido ver que buen número de aspectos del diseño respondían a intenciones de tipo metodológico, tratando de presentar un material que se abordara de forma muy distinta a un manual escolar, puesto que los materiales curriculares también deben contribuir a mejorar esa dinámica de la clase que favorezca y mejore los procesos de enseñanza y aprendizaje. Desde esa perspectiva, los materiales que hemos elaborado, tratan de ofrecer propuestas de trabajo en el aula a partir de tres tipos de situaciones didácticas:

Taller o trabajo autónomo en pequeño grupo

Bajo esta denominación se considera el trabajo de un grupo de alumnos, en torno a cuatro, que realizan tareas de aprendizaje y que éstas respondan a la consideración de «taller»: manipular, construir, hacer, calcular, decidir, etc.

Aquellas unidades didácticas que responden a esta forma de trabajo en el aula, se presentan bajo la denominación de TALLER DE_________ y figura esa referencia en la parte superior de las hojas. Así mismo la unidad JUEGOS DE SUERTE, Material de azar y probabilidad para Primaria, está pensada para ser tratada en situación de taller de aprendizaje.

Actividades y Experiencias

Bajo esta denominación se considera el trabajo de un grupo de alumnos, que podría coincidir con todo el grupo-clase, que desarrollan sus tareas con bastante intervención del profesorado y sin la connotación de taller (manipular, probar, experimentar, hacer construcciones físicas...).

Es posible que el trabajo propuesto en las unidades didácticas de este tipo, también requiera material manipulativo, acciones que precisen movimiento, trabajo en equipo, etc. pero una característica de estas unidades está en que precisan de mayor intervención por parte del profesor que actuando como mediador y facilitador sugiere, evalúa, realiza nuevas propuestas mientras los escolares van desarrollando sus tareas.

Proyectos

Bajo esta denominación se considera el trabajo de un grupo de alumnos que acomete una tarea común a fin de conocer algo nuevo, aprender cuestiones, resolver situaciones, etc. Qué características podemos considerar tienen un Proyecto: desde la perspectiva de Primaria, trabajar en el aula de esta forma puede ser significativo para tratar de dar respuesta a cuestiones planteadas por los mismos alumnos o propuestas por el profesorado ante pequeños problemas que surgen o tareas consideradas interesantes. Así, construir una maqueta después de haber visitado un zoo, construir un circuito de carreras que luego servirá para jugar con él, investigar formas de medir el tiempo, etc., son propuestas que van a permitir trabajar con los alumnos cómo abordar una tarea de este tipo e ir conociendo un proceso general ante la cuestión que nos interesa y distintos procedimientos particulares.

Contenidos matemáticos tratados

Sería engorroso presentar un cuadro de objetivos y contenidos de cada una de las unidades y en este aspecto se trata de dar una idea más global, que en parte ya se ha ido apuntando en los primeros párrafos del artículo. Hay que tener en cuenta que parte del equipo de trabajo había participado directamente en las fases de diseño del currículo de la Educación Primaria en la C.V y en el desarrollo legislativo: decreto (elementos prescriptivos) y resolución complementaria (elementos no prescriptivos), y el resto participaba plenamente de lo que podía esperarse de la Reforma de la enseñanza en primaria. Por lo tanto, lo más importante era que se participaba de la filosofía educativa de renovación del *Simposio de Valencia 1987* en nuestro contexto, del *Informe Cockcroft* en otro contexto más rodado que el nuestro, de la tradición de grupos y personas que llevaban años aportando propuestas diferentes, etc. Por lo tanto, cabía esperar que lo que cada uno de nosotros podía hacer, se plasmara en algunos ejemplos que subrayaran aspectos básicos tanto respecto a contenidos como a tratamiento de los mismos.

A continuación se presenta una síntesis de los contenidos que se han tratado y se incorporan enunciados de algunas actividades

Cálculo

Dos unidades «Numeración y cálculo» y «Cálculo y operaciones» presentan en el primer y el segundo ciclo los contenidos tradicionales en los primeros cursos de primaria: aproximación al concepto de número, conocimiento del código numérico, de los algoritmos, etc., y hacer hincapié en la realización de recuentos, la utilización de otros códigos para expresar cantidades, el cálculo por procedimientos no estándares y el desarrollo de destrezas de cálculo mental.

Dos unidades «Numeración y cálculo» y «Cálculo y operaciones» presentan en el primer y el segundo ciclo los contenidos tradicionales en los primeros cursos de primaria: aproximación al concepto de número, conocimiento del código numérico, de los algoritmos, etc.

Contenidos ya trabajados en esas dos unidades se plantean de nuevo en el resto de unidades que completan el bloque de números, «Taller de cálculo: ábaco y regletas», «Taller de juegos: bolos», etc. y desde una perspectiva más parcial y centrada en algún recurso didáctico: «El ábaco», «Los dados», «La tabla del cien», constituyen actividades y juegos que insisten en el cálculo mental, las relaciones entre los números y el cálculo aproximado.

El trabajo con números y operaciones, en el tercer ciclo, se plantea en tres unidades que usando cada una un recurso: la calculadora, el tangram y fichas, plantean básicamente: el uso inteligente de la calculadora, el desarrollo de destrezas de cálculo mental, la expresión de la relación parte/todo, las series numéricas y un inicio al concepto de proporcionalidad, además de la realización de cálculos, conceptualización de fracciones y decimales, estimación de resultados, etc.

Un ejemplo de actividad para tercer ciclo es la siguiente:

OPERACIONES TRIANGULARES:

Realiza las operaciones siguientes utilizando la calculadora

1 x 8 + 1 =
12 x 8 + 2 =
123 x 8 + 3 =
1234 x 8 + 4 =
12345 x 8 + 5 =
123456 x 8 + 6 =
1234567 x 8 + 7 =
12345678 x 8 + 8 =
123456789 x 8 + 9 =

¿Observas algo curioso con los resultados?

¿Puedes hacer todos los cálculos con la calculadora?

¿Es necesario realizar todos los cálculos con la máquina o puedes prescindir de ella?, ¿a partir de dónde no has necesitado calculadora?

Medida

Una unidad, «Trabajo de medida», presenta en el primer ciclo los conceptos de magnitud y medida de una magnitud como construcción personal de unos conocimientos en propuestas tradicionales de uso de medidas naturales no estándares, practicar mediciones directas, estimaciones previas y construcción de instrumentos de medida.

En el segundo ciclo, dos unidades analizan todo tipo de datos que en un contexto específico, como son unas olimpiadas (la unidad se redactó en año olímpico), hay que tratar de darles significado. Este es un enunciado:

> DISCO
>
> Sabes que el disco sale de las manos del lanzador tras haber dado éste varias vueltas sobre sí mismo; haz un cálculo y explica el dato: Giro de 540°.

Una batería de propuestas de estimación y medida de tamaños, masa,capacidad, etc. de objetos cotidianos completan la propuesta:

> EL ARROZ
>
> Para esta actividad debéis preparar unas bolsas que contengan 1,1/2, 1/4 y 1/5 kg de arroz. A un miembro del grupo se le tapan los ojos con un pañuelo y tratará de averiguar el contenido de cada bolsa. Usad un tablero de puntuaciones.

La unidad que se centra en deportes olímpicos, es susceptible de tratarse en el tercer ciclo junto con otra unidad que básicamente son pequeños proyectos de construcción de objetos: dibujos, piezas y tableros para juegos, etcétera.

Geometría

Dos unidades pretenden en los ciclos primero y segundo, vivenciar el espacio a partir del movimiento personal, de la posición de objetos en espacios familiares como la propia aula, que se interpreta como un geoespacio o recurso didáctico en 3D donde se contextualizan actividades y propuestas bastante innovadoras. A la vez se abordan contenidos de geometría tradicionales como el reconocimiento de cuerpos y figuras, relaciones y propiedades, en otras unidades que presentan únicamente un recurso, mosaicos, espejos, o varios de ellos (varillas, cuerdas, geoplanos). Otra propuesta, «¿Y tú cómo lo ves?», consiste en tratar de desarrollar en cada alumno, su capacidad de percibir, imaginar, comprender e intuir el espacio, desde una opción de trabajo sistemático utilizando distintos recursos como tramas, transparencias y retroproyector, cubos, etc.

A la vez se abordan contenidos de geometría tradicionales como el reconocimiento de cuerpos y figuras, relaciones y propiedades, en otras unidades que presentan únicamente un recurso, mosaicos, espejos, o varios de ellos (varillas, cuerdas, geoplanos).

La utilización de espejos y mosaicos se plantea en varias unidades de los dos últimos ciclos que progresivamente van complicando la tarea: copiar, reproducir, construir con y sin modelos, etc., aprovechando la novedad y la magia de los espejos, combinando éstos con mosaicos y ofreciendo propuestas visuales muy estimulantes donde implícitamente se trabajan buen número de conceptos y procedimientos: simetrías, tipos de polígonos, posiciones, tamaños, etc.

Una actividad para primer ciclo es ésta:

> EL CIRCUITO
>
> Vas a procurarte un buen número de varillas.
>
> En una zona del suelo de la clase podéis dibujar circuitos diferentes con las varillas.
>
> Recorredlos con cochecitos de juguete.
>
> ¡Cuidado! Antes de empezar, el conductor debe decir qué movimiento va a realizar con su coche y después debe de realizarlo correctamente.
>
> Los demás deciden si lo realizó bien o no.

Estadística, azar y probabilidad

Un total de nueve unidades más una unidad de juegos presentan en los tres ciclos contenidos de estadística, azar y probabilidad. Se presentan actividades de recogida, recuento, registro y análisis de datos en los tres ciclos. También se pretende avanzar en métodos sencillos de recuento sistemático y se realizan experiencias en relación con la posibilidad de que un suceso ocurra o no, de que un juego sea justo o no justo o que podamos cuantificar la posibilidad de un suceso y manejar un vocabulario sencillo.

Una actividad de conteo propuesta para primer ciclo es la de la figura 3.

Resolución de problemas

Ya se indicó con anterioridad que hemos querido basar buena parte del material en un enfoque de resolución de problemas y en cualquier unidad se plantean de forma general actividades que requieren entender, interpretar, acotar una situación, delimitar datos e incógnitas, estable-

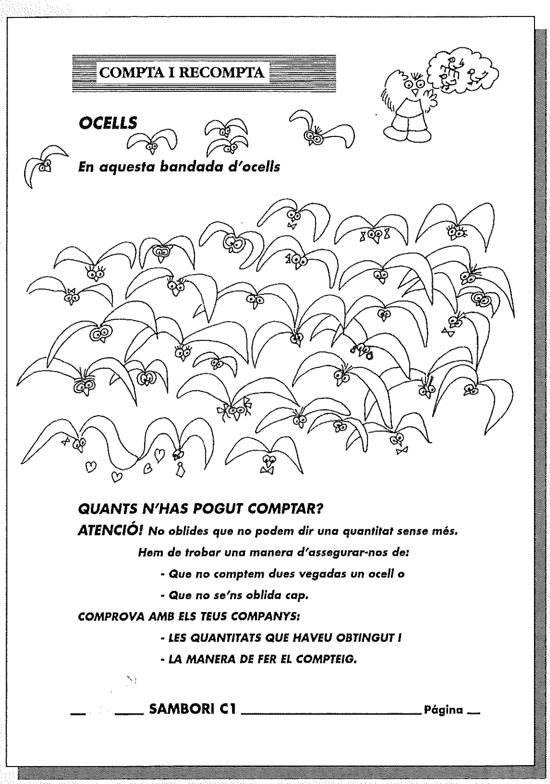


Figura 3

cer hipótesis, etc., y han ido apareciendo algunas estrategias generales, heurísticos, modos de hacer propios de este campo del conocimiento. Además, se quiso presentar una unidad «¿Y tú cómo lo harías?» que aparece en el material de segundo ciclo pero que es fácilmente interpretable en los otros dos. Tan sólo se enuncian situaciones problemáticas, cotidianas o cercanas y muy abiertas que estimulen poder dar algún tipo de procedimiento de resolución. Es tan sólo una invitación a compartir con el alumnado cómo abordar problemas «complejos» del tipo: ¿se puede medir el grosor de un folio?, ¿cómo cortar una cartulina cuadrada?, ¿cómo contar los espectadores de un estadio de fútbol?

Algunas conclusiones

El material entendido como un material experimental y versión 1, cumplió mínimamente la función prevista porque sirvió para discutir y plasmar opciones entre los autores, sabiendo que iba a ser posteriormente utilizado en cursos de formación, en centros experimentales de reforma y aunque editado con poco presupuesto y limitado número de ejemplares, sí están o estaban a disposición del profesorado en la totalidad de los Centros de Profesores de la Comunidad Valenciana.

En estos años transcurridos, a veces comentábamos que siendo el material difícil en principio, porque se pretendía romper con los esquemas tradicionales en enseñanza primaria –uso casi exclusivo de libros de texto, escasa utilización de material didáctico, poco interés en las actividades basadas en la resolución de problemas, desigual trabajo en numeración y cálculo respecto a los otros bloques de contenidos, etc.–, se trataba de un material «con asesor incorporado» porque normalmente el uso que se hacía en las aulas surgía a partir de un curso institucional general de primaria, de cursos específicos de matemáticas, del trabajo de Formación en Centros, etc. porque durante unos cinco años, el conjunto de asesores y asesoras de matemáticas tanto de primaria como de secundaria, hemos tenido la gran oportunidad de participar de unas reuniones mensuales de autoformación y todo el colectivo se ha beneficiado de estos y otros materiales dentro de ese marco enriquecedor que supuso el citado plan de autoformación.

En este sentido el «asesor incorporado», es decir, los profesores que hemos desarrollado labores de asesores de formación y hemos utilizado estos materiales, orientaba respecto a las intenciones, justificaba carencias y lagunas que existen y en la medida en que se consideraba oportuno, animaba a otros compañeros y compañeras a dotar de más significado el trabajo escolar.

No se ha pretendido llegar a más conclusiones, sabiendo que algunas unidades han funcionado muy bien y otras no tanto y tampoco nos ha preocupado la posibilidad de convertir el material en material ofertado por alguna editorial. Como tantos otros materiales y esfuerzos, que suelen permanecer en el anonimato del trabajo diario, ha servido de pretexto para hacer matemáticas, plantear cuestiones, discutir ideas, investigar, probar, descubrir y colaborar a abrir horizontes en la educación matemática con niños y niñas de 6 a 12 años.

SAMBORI
Materiales de Matemáticas

Autores
Jorge Aldeguer Álamo
(Coordinador)
Albert Ángel Selfa
Manolo Gómez Costa
Pilar Gregori Monzó
Carlos López
Toni Miquel Mollà
Pascual Olaya Sánchez
Pascual Pérez Cuenca
Julio Rodrigo Martínez
José María Tirado

Colaboradores
Clara Andreu
Javier Fuster
Octavi Palanca
Joanvi Sempere
Vicent Varella

Dibujos
Concepción Llavata
Pepa Valero

SUMA 26
noviembre 1997, pp. 111-116

Lápices-Orettole-Przxetqzyw
¿Las imágenes mentales de los textos de las situaciones-problema influencian su resolución?[1]

Bruno D'Amore

INFORME

En este trabajo se discute una opinión muy difundida, según la cual un niño, al prepararse para resolver un problema, se debe hacer un modelo lo más completo y correcto posible de la situación descrita por el texto, de otra forma corre el riesgo de no poder resolver el problema. Se proponen pruebas cuyo resultado parece desmentir, al menos en parte, esta opinión.

ESTADO de la cuestión

Hay una opinión muy difundida según la cual la resolución de un problema de matemáticas se facilita e, incluso, se consigue por la capacidad que tiene el sujeto que lo resuelve de hacerse un modelo mental de la situación descrita en el texto. Para apoyar esta opinión se recurre, a menudo, a Paivio (1986)[2] o bien a Vergnaud (1985) que escribe (la cursiva es mía): «La representación lingüística no es una especie de reflejo del proceso de adaptación del sujeto a su ambiente; por el contrario es funcional e *indispensable* para el tratamiento de las situaciones problemáticas por parte del sujeto».

Durante la redacción inicial de mi libro *Problemas* (entre 1990 y 1991) (D'Amore, 1993), me plantee la siguiente cuestión: supongamos que, ante el texto de un problema, el potencial resolutor no pueda imaginar la situación descrita por motivos objetivos, por ejemplo, por motivos ligados a la escritura del mismo; ¿lo resolverá, no lo hará, o con qué diferencias lo hará suponiendo que pudiese imaginar la situación descrita en todos sus detalles?

Me plantee, entonces, la hipótesis, que me parecía compartida e incluso preconizada por Paivio (1986) y Johnson-Laird (1983), de que una imposibilidad objetiva de imaginarse el modelo de la situación debería obstaculizar necesariamente la resolución del problema.

Además, al buscar modalidades que hiciesen imposible[3] la formación de un modelo de la situación descrita, tomando como referencia lo que afirma Vergnaud (1985), estudié el caso en que el texto del problema contiene un término desconocido para el resolutor. En realidad, me limité sólo a dos tipos de sujetos: niños de la escuela primaria (II ciclo, 8-11 años) y profesores de escuela infantil.

Un primer texto, propuesto al final de 4.° de Primaria (niños de 9-10 años), consistía en el clásico ejercicio-problema de disponibilidad-gasto-ganancia: el dueño de una papelería compraba *resmas* de papel a un cierto precio y las vendía a otro; se pedía la ganancia en cada resma.

Al tratarse de un problema-ejercicio muy habitual en ese ciclo de la escuela primaria, había supuesto que una eventual no resolución debería ser causada necesariamente por la presencia de la palabra escrita con letra cursiva en el texto: *resma.*

Esta prueba se realizó con pocos alumnos (la mitad de una clase: 12), sea porque había pensado que la respuesta sería evidente, conforme a la posición de Paivio, Johnson-Laird y Vergnaud (posición convincente según mi punto de vista), sea porque quería estar seguro de recoger cualquier señal (explícita o no) de los alumnos y poder entrevistarlos inmediatamente después de la prueba.

El resultado fue exactamente el esperado, de forma que se desvanecía cualquier duda al respecto. Hubo una reacción, casi violenta, de desasosiego general, de rechazo de la tarea y más de un alumno evidenció la incomprensión del término extraño y, *así pues*[4] la imposibilidad de resolver el problema.

A continuación, en un curso de actualización para profesores de la escuela infantil, propuse un problema análogo a una veintena de ellos pero, suponiendo que conocían la palabra "resma", decidí sustituirla por una palabra inexistente: "pluca". También, en este caso, hubo una reacción violenta e irónica al mismo tiempo, del tipo siguiente: «¿Qué son las plucas?». Yo insistí, invitando a los profesores a decirme si el problema era o no era resoluble, aunque no se conociese esa palabra; la respuesta fue positiva, pero con una manifestación explícita del desagrado...

Deduje[5] contrariamente a las posiciones de Paivio, Johnson-Laird y Vergnaud, que un adulto podría sortear el obstáculo que representaba el desconocimiento de una palabra, pero que no lo podría hacer un niño de la escuela primaria.

Las pruebas realizadas perseguían ese objetivo: proporcionarme la certeza de que esa tesis era aceptable y, por tanto, que yo podría sostenerla durante la redacción definitiva del libro *Problemas.*

Sin embargo...

Cuestiones actuales y respuestas hipotéticas

Sin embargo, el escaso número de sujetos examinados y el aparato de control usado para la prueba, que evidentemente hacía aguas por todas partes, me habían dejado dubitativo. Me prometí entonces que, una vez que *Problemas* fuese editado, reharía las pruebas con extremo cuidado incluso si, siendo sincero, creía en las hipótesis del apartado anterior.

Deduje que un adulto podría sortear el obstáculo que representaba el desconocimiento de una palabra, pero que no lo podría hacer un niño de la escuela primaria.

De noviembre de 1993 a diciembre de 1995 he podido realizar esas pruebas con mayor cuidado, para verificar cuál era la respuesta a la pregunta que ahora formulo de forma explícita:

Si el texto de un problema-ejercicio estándar, dado en las condiciones habituales de clase, contiene una palabra (referida al objeto del que se trata en el texto del problema) inexistente o que el alumno no conoce, es imposible que se haga un modelo mental, de forma perfecta y en todos sus detalles, de la situación descrita en el texto.

En tales condiciones, ¿en qué porcentaje disminuye la capacidad de resolver el problema?

Mi hipótesis, según lo dicho anteriormente, era que debería darse una disminución neta y que, ante la exigencia explícita, los alumnos denunciarían justamente la presencia de tal palabra como causa de la falta de resolución.

Modalidades de desarrollo de las pruebas

Elaboré, entonces, dos textos (T1 y T2) para un problema-ejercicio estándar:

El señor Pedro es un comerciante. Compra 625 x, a 50 ptas. cada una, y las vende todas, obteniendo 48.000 ptas. ¿Cuánto gana en cada x?

En el texto T1 el término *x* se sustituía por la palabra *lápiz,* en el T2 por la inexistente palabra *orettola* (naturalmente expresados, ambos, en el número correspondiente, singular o plural).

Los dos textos se daban en un folio A4, cuadriculado, mecanografiados en la parte alta del folio; en el centro del folio aparecía un recuadro en blanco; los estudiantes debían escribir su respuesta en ese recuadro (con bolígrafo negro y sin usar goma u otros borradores).

1 Trabajo realizado con la subvención del C.N.R. y del Ministero dell'Università e della Ricerca (MURST), fondos respectivos del 60% y del 40%. La palabra «orettole» no existe en italiano.

2 Una presentación óptima del trabajo de Paivio se encuentra en Vecchio (1990).

3 Con todo detalle, es decir, comprendidos los objetos aislados de que se habla en el texto, los personajes, los pasos de la consigna y de los papeles, el ambiente, etc.

4 Ese apresurado *así pues* mío, de entonces, es el punto de apoyo de mi trabajo actual.

5 Esa apresurada deducción mía, de entonces, es también básica para mi trabajo actual.

Debajo del recuadro cada estudiante debía indicar si el problema le había parecido difícil o no y, en caso de respuesta positiva, indicar el por qué de la dificultad.

Se había dado la consigna de trabajar individualmente y en silencio. Quería evitar que la indicación, en voz alta, de un estudiante pudiese influenciar o condicionar el trabajo de los otros, invitándolos así a reflexionar por sí solos sobre algo que no hubiesen llegado a percibir.

Cada clase se había dividido en dos partes; a una mitad se le daba T1, a la otra mitad T2. Esto se hacía para controlar cuántos estudiantes eran capaces de desarrollar el problema T1 y cuántos el T2 y, así, poder controlar los resultados.

La prueba se hizo en 5.° de Primaria (niños de 10-11 años) y, en total, eran 107 estudiantes.

A fin de poder considerar la prueba como realizada en condiciones escolares normales, evité aparecer en clase, encomendando la prueba a profesores de absoluta confianza a los que había recomendado no interferir, en modo alguno, en el trabajo escrito de los alumnos, vigilando para que se cumpliesen totalmente mis requisitos.[6]

Primeros resultados

Veamos los resultados del test T1 (lápices):

- el 32% de los alumnos dio una respuesta totalmente incorrecta;
- el 10% no lo resolvió (o escribió sólo alguna indicación);
- el 15% lo resolvió de forma totalmente correcta (presentación aparte);
- el 43% se equivocó de forma parcial (de estos, el 41% calcula sólo la ganancia total –mientras el problema hablaba de la ganancia en cada lápiz–, el 2% desarrolla casi todos los cálculos, de forma incompleta).

Los resultados obtenidos revelan que la hipótesis inicial podría no darse por probada tan fácilmente.

Veamos ahora los resultados del test T2 (orettole):

- el 25% dio una respuesta totalmente incorrecta;
- el 10% no lo intentó;
- el 16% lo resolvió correctamente (salvo errores de cálculo o de presentación);
- el 49% se equivocó de forma parcial (de estos el 37% sólo calculó la ganancia total, mientras el 12% cometió otros errores).

Para poder usar los datos, en apariencia poco significativos, de la mejor forma posible, los recogeremos en clases más aptas para nuestra indagación específica.

Conviene aclarar que el error de calcular la ganancia total en vez de la que se produce para cada objeto, es un error típico de los estudiantes de 5.°, según manifiestan los profesores; está motivado por la lectura apresurada del texto o por el deseo usual (persistente aunque haya sido desaconsejado por el profesor) de acabar la prueba en el menor tiempo posible.

Propongo entonces la consideración de dos clases solamente:
— Exacto o equivocado porque se calcula sólo la ganancia total, E.
— Erróneo del todo o no resuelto o con graves equivocaciones, N.

En tal caso, los porcentajes resultan:
- Para T1: E 56%, N 44%.
- Para T2: E 53%, N 47%.

Dado el número relativamente bajo de estudiantes examinados, se trata sustancialmente de *porcentajes idénticos.*

Vale la pena precisar algunas cosas.

Nota 1: Sólo dos estudiantes (del grupo T2) denunciaron su malestar, al final de su folio, por la palabra «orettola» y se trata, en ambos casos, de estudiantes que resolvieron bien el ejercicio.

Nota 2: Al final de las pruebas, 13 estudiantes (de los que habían sido sometidos al test T2) fueron entrevistados. Entre ellos y sólo después de una exigencia explícita del entrevistador, tan sólo 2 declararon haberse sentido molestos por la presencia de la palabra «orettola». De estos 2, uno de ellos dice que las orettole «deben ser verduras» (¡Vendidas en una papelería! Pero sobre esto el entrevistador no ha hecho comentarios) y después se equivocó en la resolución (grupo N); el otro dijo que se trata de «objetos» y resolvió bien el ejercicio.

Pruebas y resultados ulteriores

Los resultados obtenidos revelan que la hipótesis inicial podría no darse por probada tan fácilmente.

6 Debo manifestar, llegados a este punto, que sin embargo he preferido ignorar los protocolos de una clase entera, al surgir dudas sobre la realización de la prueba.

Sin embargo, existe una posible objeción: que el problema-ejercicio dado, vistos los resultados, parece ser demasiado difícil. Se había presentado el texto, anteriormente, a profesores (que no tenían nada que ver con la experiencia) y habían manifestado que, salvo errores de cálculo ligados al hecho de que se obtenían números «no exactos», se trataba de un texto adaptado y corriente.

Efectué[7] entonces una prueba (auxiliar, por así decirlo) a alumnos de 3.° (niños de 8-9 años), proponiendo el texto siguiente: «Un papelero compra 4 x cortas, 6 x largas y 12 x medianas. ¿Cuántas compra en total?».

A algunos niños se les dio el texto T1' en que x se sustituía por «lápices», a otros el texto T2' en que x se sustituía por «orettole«. Ya que se trataba de una prueba «auxiliar» se propuso solamente a 15 niños. El resultado fue el siguiente:

- de los 8 niños a los que se había dado el texto T1', 7 respondieron de forma adecuada (uno sumó, sin embargo, los dos primeros números dados: 4+6);
- de los 7 niños a los que se dio el texto T2', 6 respondieron adecuadamente (uno se comportó de la misma forma indicada en el paréntesis anterior, haciendo: 4+6).

Durante la entrevista sucesiva, hecha a los 7 niños del grupo T2', incluso ante la exigencia explícita, *ninguno* manifestó desagrado por la palabra «orettola».

Primeras consideraciones y una duda

El resultado significativo que se obtiene, sobre todo gracias a las entrevistas, es que los niños reinterpretan la palabra desconocida, dándole connotaciones semánticas diversas: o le atribuyen un significado, por así decirlo, «constante« (verdura), o bien la aceptan como algo desconocido, pero presente, de forma acusada, en la realidad descrita por el texto del problema, es decir, como un significado «variable« en el contexto, pero definible según las necesidades (objetos).

Incluso cuando las respuestas a las entrevistas no son tan claras o patentes, es totalmente evidente que el niño supera el supuesto obstáculo, atribuyendo un sentido al término. Es como si se activase una cláusula del contrato didáctico según la cual el profesor no puede insertar en el texto una palabra inexistente. Se trata de una clausula perteneciente al grupo que me gusta definir como el de «fe en el profesor». Es más bien plausible que, para el niño, se trata de una palabra que él no conoce pero que significa algo, lo que no parece impedir, en absoluto, la resolución.

...es totalmente evidente que el niño supera el supuesto obstáculo, atribuyendo un sentido al término. Es como si se activase una cláusula del contrato didáctico según la cual el profesor no puede insertar en el texto una palabra inexistente.

Pero surge una duda: quizás la palabra «orettola» tiene un sonido que conduce vagamente a algo real, existente; tiene, por así decirlo, una forma «buena», después de lo cual, gracias a la cláusula del contrato didáctico mencionada más arriba, se podría pensar que el *resultado obtenido está ligado a la palabra elegida*. Es, por tanto, lícito pensar que, si se hubiese elegido una palabra patentemente inexistente, habríamos podido obtener resultados distintos.

En otras palabras: el niño no sabe lo que significa «orettola» pero, dando por descontado que exista, se hace en cualquier caso una imagen, más o menos confusa, más o menos explícita de ella. Y esto parece bastar para dar la razón a Paivio, Johnson-Laird y Vergnaud, y pensar que los buenos resolutores se pueden hacer, *en cualquier caso*, un modelo mental de la situación.

Una prueba nueva. Comentarios

Efectué, entonces, una nueva prueba, siempre en 5.°, con 38 niños (4 medias clases). Del mismo modo propuse el texto T3, idéntico al T1 y T2, pero en lugar de «lápiz» o «orettola» puse: przxetqzyw.

Los resultados fueron los siguientes:

- el 29% se equivocó completamente;
- el 12% ni lo intentó;
- el 32% lo resolvió de forma correcta (salvo errores de cálculo o de presentación);
- el 27% se equivocó porque calculó la ganancia total.

Si consideramos estos resultados según lo que habíamos visto anteriormente, es decir, si consideramos las dos clases: E (correcto o equivocado porque se calcula la ganancia total) y N (totalmente equivocado o no intentado), obtenemos:
- E: 59%
- N: 41%

y, por tanto, dado el exiguo número de alumnos a los que se ha aplicado la prueba, vemos que aparece, a *grosso modo*, el mismo tipo de porcentajes.

7 Gracias a una idea de Giorgio Gabellini, maestro en Cattolica y miembro del NRD de Bologna.

Ello parece eliminar cualquier duda. En particular, sólo dos alumnos muestran su desasosiego ante la lectura de la «palabra extraña».

A partir de la experiencia adquirida en las entrevistas y de la importancia que tienen este tipo de técnicas para darse una idea de lo que piensan realmente los niños, realicé la entrevista a muchos más alumnos de los habituales. El 26% de los entrevistados manifestó haberse sorprendido en el momento de leer aquella «extraña palabra», pero casi todos admiten haberse dado una justificación: es una «marca de bolígrafos», es «una cosa», es «un dato», es una «marca de caramelos» (¡vendida en una papelería!), es un «modo de escribir algo», etc. *(No existe relación alguna entre estas justificaciones y la buena o mala resolución del problema).* Me ha sorprendido encontrar una clasificación muy simple y semejante a la ya encontrada para «orettole»: o se trata, por decirlo así, de «constantes» (marca de bolígrafos, de caramelos) o se trata de «variables» que, según la necesidad de cada caso, se pueden precisar (elementos, cosas, datos, una forma de escribir algo).

Una conclusión... inicial

Sustancialmente debo admitir que la posición descrita en el inicio de este trabajo se contradice con estas pruebas. El estudiante parece no sentir la necesidad de hacerse un modelo, *preciso en todos sus detalles*, de la situación descrita en el texto del problema-ejercicio estándar, para intentar resolverlo; parece que lo que le sirve es sólo un modelo impreciso de la situación, incluso sin demasiados detalles. Supera el obstáculo de la falta de un dato significativo imaginando más el desarrollo global de la escena que los singulares detalles de la misma.

Existe además un punto de cierto interés.

Me parece que se puede afirmar que el contrato didáctico ligado al problema de... resolver un problema es muy fuerte en relación con la necesidad de hacer cálculos, mucho más que en relación con la necesidad de imaginar, en todos sus detalles, la escena. Como si el verdadero problema no fuese el descrito en el texto, sino el de la implicación del estudiante. A propósito, es muy importante y reveladora la frase de un niño entrevistado que, después de la usual insistencia del entrevistador para obtener su opinión acerca de la palabra extraña, ha exclamado: «Lo importante no es comprender, sino resolver el problema».

No sólo el contrato didáctico, sino también el modelo general del problema que el niño se ha dado en la práctica, parecen convertir en superflua, en vez de estrictamente necesaria, la formación de un modelo de la situación en el curso de la resolución de un problema.

Supera el obstáculo de la falta de un dato significativo imaginando más el desarrollo global de la escena que los singulares detalles de la misma.

Otras pruebas, para terminar

Tomándolo como un ensayo, realicé los test T1 (lápices) y T2 (orettole) en clases de 1.° de Enseñanza Media (alumnos de 11-12 años), sólo con 68 alumnos.

Subdividiendo los resultados directamente en las clases E y N, los porcentajes obtenidos fueron:

- T1: E 41%, N 59%.
- T2: E 49%, N 51%.

El porcentaje de éxito aumenta con el paso de lápices a orettole, pero pienso que puedo considerar este resultado casual, ligado al número bajo de estudiantes examinados. En estos casos 2-3 protocolos pueden variar sustancialmente los porcentajes.[8]

Lo que interesa es que se ha detectado el mismo tipo de comportamiento: la palabra «orettola» se usa con total indiferencia. Algunos alumnos la reinterpretan de forma personal como se ha visto anteriormente. Divertida, a la vez que interesante, la interpretación de un muchacho que supone que las «orettole» son «bettole» (una palabra italiana poco difundida que significa «bodegones») y que, por tanto, las deben vender en la papelería; en mi opinión, esto significa que no sólo las palabras inexistentes para el adulto deben ser reinterpretadas... Este estudiante ha leído «orettole», le ha recordado algo ya oído y lícito semánticamente, «bettole», palabra de la que ignora su significado real. Así pues, no se ha hecho un modelo mental detallado de la situación, ni en lo que se refiere a las «orettole», ni en lo que se refiere a las «bettole».

Algunas veces el entrevistador insistía para que algún estudiante expresase su parecer sobre la relación entre la dificultad de resolver el problema, la dificultad de imaginarse la situación y la palabra a examen. A la pregunta provocativa: «¿Debes hacer algún comentario sobre el

8 La prueba se realizó en un Liceo Clásico Experimental (en 1.°, alumnos de 14-15 años), aplicando la prueba completa: los tres textos T1, T2 y T3. La excesiva facilidad del problema ha producido un numero casi total de resultados positivos (clase E). Los muchachos han aceptado, en una gran mayoría, las «palabras extrañas» de forma divertida e irónica y sin hacer de ello un drama. Algunos las han reinventado, otros las han considerado extrañas, sin darle demasiada importancia.

texto?», hecha a un buen resolutor, éste lo leía de nuevo y respondía que: «El texto estaba bien explicado».

Comentario final

Para concluir el trabajo debo hacer una observación.

En 3.° de Primaria ningún estudiante denuncia la presencia de palabras sin sentido o de las que ignora el sentido; en 5.° de Primaria, los estudiantes que efectúan tal denuncia son más, pero pocos más; en 1.° de Media aumentan de forma considerable; en 1.° de Enseñanza Superior lo hacen todos.

Parece que, mientras es un hecho que para resolver un problema (bien o mal) sirve de poco hacerse un modelo mental preciso de la situación, en todos sus detalles particulares, la atención sobre las palabras aisladas aumenta con la edad. No se trata pues de la necesidad de hacerse un modelo sino de simple atención, capacidad crítica o cosas similares.

Bibliografía

D'AMORE, B. (1993): *Problemi. Pedagogia e Psicologia della matematica nell'attività di problem-solving,* [Prefacio de G. Vergnaud], Angeli, Milano 1993 (I edicción)-1996 (II edicción). La traducción española: Editorial Síntesis, Madrid, con prefacio de M. de Guzmán, 1997.

JOHNSON-LAIRD, P. N. (1983): *Mental Models,* Cambridge University Press, Cambridge.

PAIVIO, A. (1986): *Mental representations: A dual coding approach,* Clarendon Press, Oxford.

VECCHIO, L. (1990): «Breve storia delle ricerche sull'immagine mentale», en L. Vecchio (edit.), *Le immagini mentali,* La Nuova Italia, Firenze, 15-48.

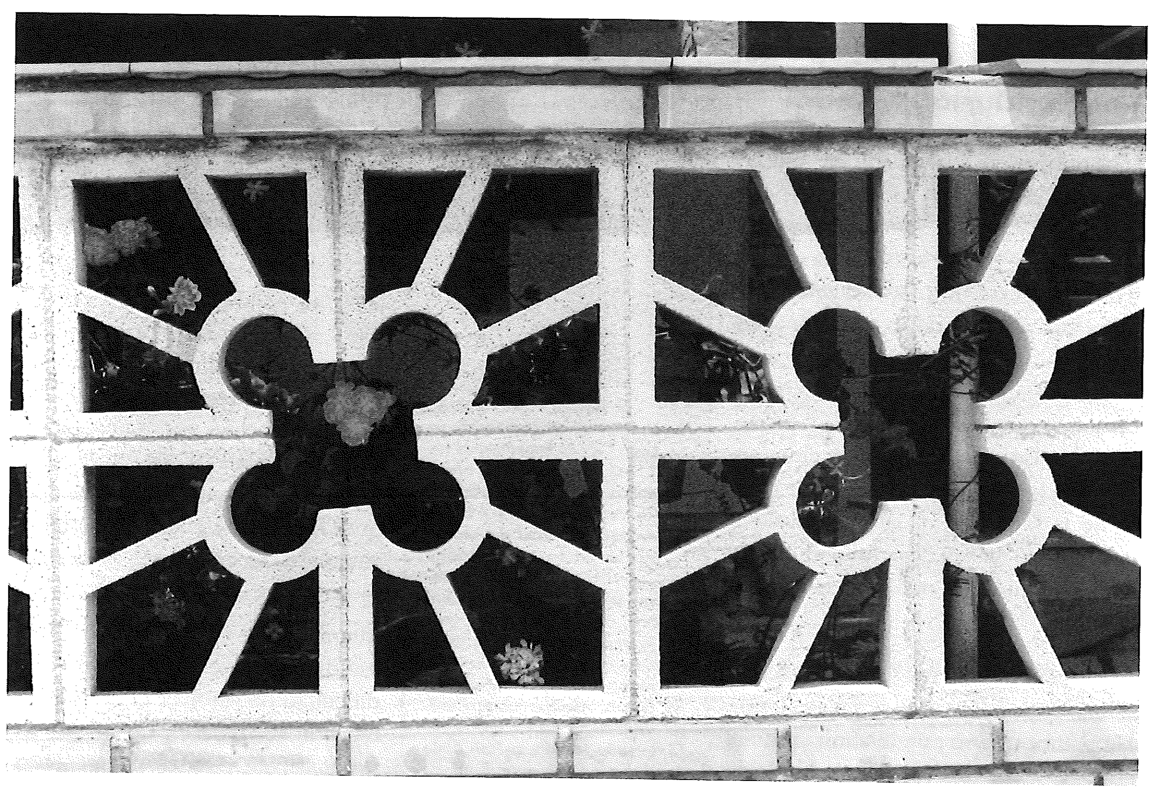
VERGNAUD, G. (1985): «Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche», en L. Chini Artusi (edit.), *Numeri ed operazioni nella scuola di base,* Zanichelli-UMI, Bologna, 20-45.

Bruno D'Amore
NRD
Nucleo di Ricerca in Didattica
Dipartimento dei Matematica
Università di Bologna
Bologna, Italia
IAA
Instituo per l'Abilitazione e l'Aggiornamento dei docenti
Locarno, Suiza

Traducción:
Francisco Vecino

Agradecimientos

Una investigación que implica un gran número de pruebas se facilita con la ayuda de amigos-colaboradores competentes y fiables. Debo agradecer la dedicación y disponibilidad de muchos profesores y de algunos miembros del N.R.D. de Bologna, principalmente de Gianna Foroni, Giorgio Gabellini y Laura Giovannoni. Agradezco, asimismo, las sugerencias y la lectura crítica de Giorgio Bagni y de Berta Martini.



Huelva.
Foto:
Luis Balbuena

Solidaridad y Matemáticas

SOLIDARIDAD, Educación y Matemáticas

No soy matemática y, aunque en mi condición de maestra y pedagoga no me siento ajena a la reflexión sobre la importancia formativa, instrumental y funcional de las matemáticas, así como a las dificultades de la enseñanza y aprendizaje de las mismas, es mi circunstancia de estar casada con un profesor de matemáticas la que más ha propiciado el acercamiento a esta disciplina y, en todo caso, es dicha circunstancia la que da una información más genuinasobre el mundo de los matemáticos y la que me ha hecho tomar la iniciativa de escribir estas líneas para hacer mi particular reconocimiento a las personas que os dedicáis a la enseñanza de esta siempre difícil, además para vosotros apasionante, ciencia.

Parte de esta información genuina procede de las revistas profesionales, que al andar rondando por mi casa, me resulta mucho más probable hojearlas y leer algunas de sus partes más digeribles. Pues bien, en el número doble 11/12 de la revista SUMA, encontré una de las informaciones más agradables y estimulantes que recuerde: me refiero a la transcripción del discurso presidencial en la ceremonia de inauguración del penúltimo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-7), en Québec, el 17 de agosto de 1992. Cito textualmente el párrafo nuclear:

> *Las actuales circunstancias mundiales nos impelen a seguir trabajando en las direcciones en las que la Comisión lo ha venido haciendo tan fructíferamente hasta ahora y tratar de proporcionar un fuerte estímulo a un proyecto que, en opinión de nuestro actual Comité Ejecutivo, requiere en estos momentos una firme prioridad. Éste es: «Solidadridad en Educación Matemática».*

Cuatro años más tarde he tenido la oprtunidad de estar presente en el ICME-8, celebrado en Sevilla, y ver *in situ* algunas de las materializaciones de esa idea. De entre ellas, la más llamativa ha sido el hacer posible el reto lanzado en el ICME-7 de que «ningún profesor de matemáticas que quiera presentar algún trabajo se quede sin asistir por problemas económicos». Y para ello, entre otras acciones concretas, se destinó a becas el 10% de las inscripciones al congreso. El resultado fue un espectacular aumento, respecto de los anteriores ICME, de la presencia de personas procedentes de países pobres. Una buena manera de ir promocionando el «Año Mundial de la Matemática», previsto para el año 2000, con la intención de favorecer el progreso del mundo a través de esta ciencia.

Pero con ser muy importante lo mencionado hasta ahora, lo más significativo, para mi gusto, es el llamamiento a la colaboración personal directa. En palabras de Miguel de Guzmán:

> *No podemos conformarnos solamente con lo que las instituciones globales van tratando de hacer. No podemos silenciar nuestras conciencias con la excusa de que ya hay organizaciones encargadas de tratar de redimir las injusticias de la situación actual. Es necesario que fomentemos en nosotros y en nuetsro derredor un compromiso personal. Hemos de tomar parate activa y personal para mejorar esta situación. ¿Qué podemos hacer?*
>
> *[...]*
>
> *Podemos buscar activamente lugares en nuestro alrededor donde nuestra cooperación personal en educación podría ser muy bien recibida y necesitada. Hay un Sur en cada Norte. Existen muchos grupos de personas en necesidad de desarrollo dentro de cada país. Tal vez durante demasiado tiempo hemos ido buscando lugares donde poder encontrar nuestro provecho para nuestro propio desarrollo. Tal vez haya llegado ya el tiempo de buscar lugares donde podamos ofrecer algo de nosotros mismos.*

Una experiencia concreta

No conozco la repercusión global de esta valiente petición, pero sí una experiencia concreta, pues participé de manera secundaria en ella, de título «Matemáticas recreativas para todos», desarrollada por un grupo escogido y reducido de internos del centro penitenciario «Cáceres I», de abril a junio de 1995, y que tuvo su continuidad, con los cambios pertinentes, con otro grupo de internos, jóvenes ex toxicómanos en este caso, del centro penitenciario «Cáceres II», de mayo a junio de 1996. El objetivo principal era fundamentalmente terapéutico: se trataba de «engancharles» a la actividad lúdica matemática (juegos de estrategia, paradojas, puzzles, etc.), la cual requiere mucho tiempo y toda la energía mental disponible. Espero que algún día escribamos con detalle esta preciosa experiencia y que sirva para que otras perosnas puedan repetirla mejorándola. En todo caso, estoy segura de que no es la única surgida en conexión con el mencionado discurso.

Animando a continuar

Yo quiero aprovechar este escrito para expresar, públicamente, mi satisfacción al sentir que la persona con la que comparto mi vida pertenece a un colectivo, el de los profesores de matemáticas, que fija como objetivo prioritario su preocupación, y coherentemente su ocupación, por el desarrollo global del mundo. Yo creo que, si todas las asociaciones profesionales se plantearan, como objetivo prioritario, un compromiso de solidaridad al estilo de la propuesta del ICME, la tendencia en la que ahora parece moverse la humanidad (según los escalofriantes datos y su correspondiente análisis que en dicho discurso se incluyen) cambiaría de rumbo. Yo creo que, si todas las asociaciones profesionales hicieran lo mismo, casi sobrarían las ONG, pues cada asociación sería propiamente una ONG.

...si todas las asociaciones profesionales se plantearan, como objetivo prioritario, un compromiso de solidaridad al estilo de la propuesta del ICME, la tendencia en la que ahora parece moverse la humanidad cambiaría de rumbo.

La relación entre educación y solidaridad no es ninguna novedad; de hecho, salud y educación son los campos en que más se aplica la solidaridad, pero sí puede sorprender un poco, al ciudadano medio, que esta propuesta solidaria venga desde el mundo específico de las matemáticas pues, a pesar del ímprobo esfuerzo que en los últimos tiempos hacéis los profesores de matemáticas por relacionarlas con la realidad (y esto ya intentará «demostrármelo» mi cónyuge cuando vea escrito el artículo...), lo cierto es que prevalece la idea de que vivís con vuestra ciencia en un universo, supongo que platónico, distinto al del resto de los mortales. Por esto también me parece importante la campaña desde el punto de vista de la imagen de vuestro colectivo, pues demuestra que sois los primeros en asumir que «la matemática es una de las claves centrales para la comprensión del mundo y para el progreso de la cultura humana» y que esa convicción, junto con vuestra propia generosidad, es la que os lleva a hacer este esfuerzo suplementario a vuestras obligaciones habituales, un esfuerzo destinado a «enseñar a pescar», en vez de «dar peces» que es a lo que habitualmente nos dedicamos.

Como simple ciudadana del mundo, consciente de la importancia de este tipo de proyectos para la mejora global de la humanidad, pido a vuestro colectivo de profesores de matemáticas que mantengáis esta iniciativa, incluso intensificándola, en el tiempo. Estos modelos de comportamientos, además de las aportaciones concretas, son siempre una bendición, y en palabras de Federico Mayor Zaragoza «Mañana siempre es tarde».

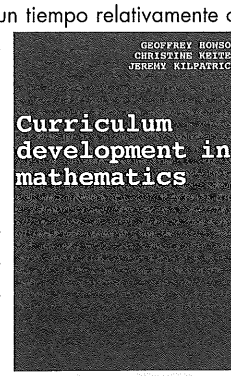
Mª Luz Sánchez Alegre

SUMA 26
noviembre 1997

Un clásico anglosajón sobre currículo en matemáticas

CURRICULUM DEVELOPMENT IN MATHEMATICS
G. Howson, C. Keitel y J. Kilpatrick
Cambridge University Press
Cambridge, 1981
288 páginas

En 1981 aparece publicado el libro *Curriculum Development in Mathematics*, cuyos autores son G. Howson, C. Keitel y J. Kilpatrick. La conveniencia de escribir un manual sobre los trabajos curriculares realizados desde los sesenta era sentida dentro de la comunidad de los especialistas en educación matemática; la decisión de realizar este trabajo fue adoptada durante el Simposio Internacional sobre el Currículo de Matemáticas, celebrado en Osnabruck (1979); su redacción fue llevada a cabo en un tiempo relativamente corto, dada la experiencia y nivel de conocimientos con los que contaban los autores.



En el prefacio del libro se hace constar que:

- durante las décadas de los sesenta y los setenta ha habido modificaciones de los currículos escolares de matemáticas en la mayor parte de los países;
- los cambios, aunque hechos sin seguir criterios científicos formales, han permitido sacar a la luz problemas claves para los profesores de matemáticas;
- el libro se propone estudiar la evolución de los cambios curriculares en matemáticas.

El libro está organizado en 8 capítulos y 2 apéndices.

Sobre el currículo y el cambio curricular

Los dos primeros capítulos presentan la noción de currículo y su carácter dinámico, destacando los condicionamientos sociales que acompañan a los cambios curriculares y la evolución histórica de estos cambios.

Se inicia la presentación de la noción de currículo con una discusión sobre la falta de acuerdo general respecto al concepto. Los autores, en la línea de Osnabruck, adoptan el siguiente concepto: Curriculo significa el conjunto formado por objetivos, contenidos, métodos y medios de valoración. El papel del profesor en el currículo de matemáticas se destaca desde el comienzo de este trabajo.

RECENSIONES

A continuación pasan a presentar diversas reflexiones obtenidas del análisis de los procesos de cambio curricular ocurridos con anterioridad en el área de matemáticas. Comienzan considerando las presiones y barreras que actúan a favor y en contra de los cambios curriculares en matemáticas. Entre las presiones a favor de los cambio curriculares señalan las debidas a la sociedad y la política, las procedentes del campo de las matemáticas, las que tienen su origen en la educación y las debidas a los deseos de innovación del profesorado. Entre las barreras que obstaculizan los procesos de cambio se encuentran razones de valoración, de poder, de orden práctico y psicológicas.

En cada uno de los tipos de presiones que pueden actuar a favor de los cambios curriculares señalan varias opciones:

- Entre las presiones sociales y políticas destacan grandes planteamientos ideológicos o filosóficos, como los que dieron lugar a los movimientos igualitarios, las demandas procedentes de diferentes campos profesionales, las necesidades derivadas del desarrollo económico y tecnológico de un país o región determinados, o los deseos expresados por autoridades educativas que tratan de dar cumplimiento a demandas políticas locales.
- El desarrollo de las propias disciplinas matemáticas también plantea la necesidad de cambios curriculares.
- El campo de la educación también es una fuente de presiones, a favor o en contra, de los cambios en el currículo. Entre las más conocidas señalan la aparición de nuevas teorías educativas bien de aprendizaje bien de enseñanza; también los resultados de investigaciones ya realizadas pueden producir cambios, nuevas tecnologías aplicadas a la educación o, finalmente, la importación de vocabularios, técnicas o modelos procedentes de otros campos de la educación.
- Los deseos de innovación que actúan con fuerza en personas inteligentes, la necesidad de abandonar aspectos rutinarios y cansinos de la práctica escolar, la competitividad que surge entre grupos de enseñantes implicados vigorosamente en su trabajo, la necesidad de plantear y superar nuevas metas, son, entre otras, algunas fuerzas que presionan a favor de los cambios. También hay que tener en cuenta las presiones comerciales, de editoriales y fabricantes de materiales didácticos, por cambiar los productos cuando éstos llevan mucho tiempo en el mercado y las ventas disminuyen.

Entre las barreras indicadas hay igualmente una gran variedad de opciones.

- Los principios y valores, que responden a diferentes ideologías e intereses, plantean las oposiciones más fuertes e insuperables a los cambios curriculares. Las causas pueden ser de origen político, educativo, social o religioso.
- Motivos de poder y cambios en las fuentes de decisión. Toda modificación implica un cambio en la balanza de poder; unas veces es el predominio que pueden tomar las generaciones jóvenes, formadas en nuevas técnicas y conceptos que, ahora, van a protagonizar el currículo, con pérdida de la influencia de los profesores de más edad, formados anteriormente. En cualquier caso, hay sectores sociales y educativos que aprecian el cambio como un beneficio mientras que otros lo interiorizan como disminución de algún indicador de influencia o poder.

Comienzan considerando las presiones y barreras que actúan a favor y en contra de los cambios curriculares en matemáticas.

- Un tercer grupo de barreras se derivan de cuestiones de tipo práctico. Entre ellas encontramos el desconocimiento de los nuevos contenidos o procedimientos por parte del profesorado, la inexistencia de libros de texto adecuados al nuevo currículo o de los materiales necesarios para su desarrollo; también hay cierto rechazo a abandonar conocimientos que se estiman como útiles y que desaparecen con las innovaciones.
- Conectadas con las barreras anteriores se encuentran las de origen psicológico. Lo conocido proporciona seguridad y las innovaciones suponen siempre riesgos o, al menos, se aprecian así; por este motivo siempre hay que superar bloqueos psicológicos antes de aceptar una innovación.

La práctica señala que, en líneas generales, hay tres niveles de trabajo posible en la puesta en funcionamiento de un cambio curricular: grandes proyectos, proyectos locales y proyectos individuales. Los *grandes proyectos* vienen promovidos por los organismos oficiales o, al menos, suelen estar apoyados por tales organismos; afectan a todo el sistema escolar cuando éste es centralizado. El material elaborado, como programas y libros de texto o material de trabajo, se utiliza en todos los centros. La mayor parte del profesorado no participa en la planificación, fijación de metas, preparación del material y de pruebas de evaluación. Los *proyectos locales* abarcan un grupo de centros en una región o que comparten un sistema educativo. Suelen aceptar la guía de un profesional del currículo, pero una característica es que los centros o profesores representativos suelen estar implicados en la toma de decisiones y en las fases del trabajo. Se fomenta la creación y empleo de materiales de elaboración propia, de este modo evitan los problemas derivados de la difusión y ejecución de materiales.

En tercer lugar están los *proyectos individuales*, emprendidos por una sola escuela, grupo reducido de profesores o un solo profesor; estos proyectos constituyen la unidad de innovación. Varios profesores cooperan regularmente en equipo para discutir un tópico o elaborar un material.

Dentro de la dinámica del cambio se mencionan y analizan las posibles estrategias para implantar modificaciones curriculares, cuya tipología se establece en tres variantes: estrategías de *poder coercitivo*, *racional-empíricas*, y *racional-educativas*. En todas las estrategias el papel asignado al profesor como agente del cambio expresa la consideración social que tiene el profesor dentro del sistema.

Por lo general, el papel del profesor dentro del sistema no está definido claramente ni de manera unívoca; por ello su participación en los cambios curriculares dependerá de cómo asuma sus funciones, de su talante respecto a las innovaciones y de su dedicación al trabajo en los diferentes niveles que todo cambio conlleva.

Finalmente, otro dato que se desprende del estudio de los cambios curriculares es su realización mediante fases. Las fases consideradas son:

Identificación; todas las innovaciones comienzan por la identificación de una necesidad o una posibilidad de actuación.

Formulación; la identificación viene acompañada por una propuesta o formulación de un curso de acción.

Negociación; después de identificar una necesidad se debe persuadir a otros grupos a que se interesen en la innovación y acepten participar en su puesta en práctica, surge así la necesidad de negociar. Algunas innovaciones en educación se refieren al desarrollo de nuevos materiales u otros recursos físicos; esta fase es clave en la mayoría de los proyectos curriculares.

Difusión; si se acepta la innovación en un sistema educativo resulta necesario explicar sus metas a una audiencia más amplia, así comienza la difusión.

Dentro de la dinámica del cambio se mencionan y analizan las posibles estrategias para implantar modificaciones curriculares, cuya tipología se establece en tres variantes: estrategías de poder coercitivo, racional-empíricas, y racional-educativas.

Ejecución; la puesta en práctica sigue a las fases anteriores, la innovación necesita sostenerse durante un periodo de tiempo; al igual que en sus comienzos habrá que considerar y superar las barreras que surgen frente al cambio.

Evaluación; finalmente, hay que considerar la realización de evaluaciones consecutivas y comparativas; la evaluación debe contribuir a identificar nuevos problemas, de este modo pueden iniciarse otras innovaciones.

Como balance de la revisión histórica presentada sobre los cambios en el currículo de matemáticas, los autores concluyen con dos reflexiones:

El proceso democratizador que supuso la apertura de las escuelas a toda la población en los países y sociedades avanzadas hizo necesarios e ineludibles los cambios en la organización, metas y contenidos del currículo. La democratización del sistema educativo hizo más necesario justificar las decisiones curriculares y las actuaciones subsiguientes así como proporcionar argumentos lógicos y consistentes sobre su desarrollo.

La ausencia de una autoridad central administrativa significa que las nuevas ideas y conceptos no pueden ser difundidas con facilidad a través del sistema educativo. Como consecuencia, muchos intentos de reforma están limitados en su difusión y no sobreviven a sus impulsores.

Gestión del cambio curricular

Los capítulos tercero y cuarto del libro están dedicados a analizar la gestión del cambio curricular. El capítulo tercero presenta como estudio de casos tres proyectos de innovación curricular: el *Fife Mathematics Project* de Escocia, el *Secondary School Mathematics Improvement Study* de los Estados Unidos de Norteamérica, y el *Individualised Mathematics Instruction Project* de Suecia. Cada uno de los proyectos se presenta esquematizado en sus principales rasgos y características y, a continuación, se discuten conjuntamente en relación con las cuestiones de gestión que tienen en común y aquellas otras en las que se diferencian.

El capítulo cuarto está dedicado a la práctica y gestión de la innovación curricular en el campo de las matemáticas. La estructura del capítulo presenta el currículo de matemáticas como un sistema receptor de energías sociales y con energía en su interior, centrada principalmente en la aportación de los profesores. Se trata de un sistema dinámico, cuya gestión se hace especialmente compleja en las situaciones de innovación. El carácter comparativo del estudio que estamos comentando se pone de manifiesto en este capítulo:

Pensemos en un aula de matemáticas en cualquier parte del mundo. Puede tratarse de una cabaña abierta en las planicies de África, o un aula laboratorio en una ciudad de Europa, o quizás un grupo de alumnos trabajando en sus casas delante de la televisión en los despoblados de Australia. El profesor puede disponer de una gran riqueza de materiales para la enseñanza, tener sólo pizarra y tiza, o nada en absoluto. La clase puede incluir varios niveles de edad y de habilidad o *puede estar restringida a un rango muy preciso; el curso puede dirigirse a todos los alumnos o ser opcional, puede estar controlado externamente o no. Las clases de matemáticas presentan una pasmosa variedad de formas, pero todas ellas operan en una sociedad, como una parte del sistema educativo de esa sociedad. Cualesquiera que sea la clase de matemáticas en la que pensemos, podemos verla, desde el exterior, como el centro de un sistema de círculos concéntricos que representan la comunidad local, la región y la nación. Dentro de cada uno de esos círculos se pueden identificar fuerzas que influyen en lo que ocurre en la clase* (p. 49-50).

El análisis trata de enfatizar el contraste entre la variedad de situaciones y la unidad de estructura. Las clases de matemáticas presentan una pasmosa variedad de formas, pero todas ellas operan en una sociedad, como una parte del sistema educativo de esa sociedad; en todos los casos hay que llevar a cabo un plan de formación en matemáticas para niños y jóvenes.

Resumimos algunas de las ideas que presentan los autores sobre el sistema de fuerzas que confluyen sobre la innovación curricular:

a) *Metas sociales y tradiciones.* La historia y la cultura de un pueblo influyen en el desarrollo curricular de las matemáticas escolares mediante el modelado de las creencias que consideran, a la vez, la importancia del estudio de las matemáticas en ese pueblo y la necesidad de cambios en el currículo de matemáticas. Las visiones tradicionales de la educación no pueden abandonarse ni cambiarse fácilmente; los profesores actuales son el producto más conseguido del sistema antiguo, y están imbuidos de sus características.

b) *Factores sociales y geográficos.* Un sistema educativo se gobierna de modo muy considerable por factores sociales y geográficos, los cuales afectan al desarrollo curricular y a su gestión. Cuestiones como la diferencia de desarrollo económico inciden en la inversión en educación; el mayor nivel cultural de una región o país sobre otros afectan a la estructura, amplitud y profundidad de los currículos; las diferencias lingüísticas, o la existencia de varias lenguas oficiales inciden en el desarrollo curricular. Las cuestiones geográficas afectan al clima y, por tanto, a los periodos y horarios escolares.

c) *El estatus profesional y la preparación de los profesores.* La calidad profesional y el grado de autonomía concedido a los profesores varía considerablemente de un país a otro y, aunque pueda parecer sorprendente, ambas condiciones no siempre van ligadas. La cualificación del profesorado es la clave de cualquer innovación curricular; además de la formación inicial, debe preverse la formación de reciclaje para la puesta al día de los profesores. El uso de incentivos para los profesores que se actualizan es una herramienta adecuada, pero la integración de reciclajes periódicos en los hábitos profesionales del educador proporciona mayor efectividad. Estar actualizado es un signo del profesional preparado en ambos sentidos: para tomar decisiones y para aceptar responsabilidad por ello.

Las clases de matemáticas presentan una pasmosa variedad de formas, pero todas ellas operan en una sociedad, como una parte del sistema educativo de esa sociedad; en todos los casos hay que llevar a cabo un plan de formación en matemáticas para niños y jóvenes.

d) *El sistema educativo.* El grado de control estatal sobre la educación, como alternativo al control local, varía considerablemente de un país a otro. El control sobre el currículo puede ejercerse desde varios niveles, y el grado de libertad atribuido al profesor puede variar sustancialmente. En particular, se indica que el sistema para determinar el currículo puede diferenciarse según la forma de administrar las escuelas; también se subraya que las influencias actuales sobre el currículo son siempre más numerosas que lo que el sistema oficial sugiere. No importa cómo de centralizado esté el sistema, cada profesor individual, una vez que cierra la puerta de la clase, asume algún grado de autonomía. Una de las mayores limitaciones en la autonomía del profesor es el sistema de exámenes externos. Cuestiones significativas en relación con los exámenes públicos son las siguientes :

1. ¿pueden los centros elegir el programa? ¿pueden optar entre varias versiones de programas distintas?
2. ¿quién controla y programa los exámenes?
3. ¿resulta sencillo a los profesores hacer cambios en el programa?, ¿qué participación tienen los profesores de aula en el proceso de elaboración de los exámenes?
4. ¿qué técnicas de asesoramiento se emplean?
5. ¿quién controla a los asesores?, ¿quién examina a los examinadores?

e) *La inspección.* La inspección parece ser una característica de casi todos los sistemas docentes, pero las funciones que ejercen los inspectores varían mucho de unos países a otros. Dentro del desarrollo curricular afecta considerablemente si los inspectores son observadores imparciales, dirigentes de una sociedad de profesores, o si verifican el cumplimiento de un currículo autodiseñado.

f) *Textos y publicaciones.* Los textos son uno de los factores que mayor influencia tienen en el aula; en muchas ocasiones determinan efectivamente el currículo. Cómo se escriben y se seleccionan los textos para el aula es aún un problema de importancia primordial en el desarrollo curricular. La situación varía de país a país. En un extremo están los países con un texto único, escrito y redactado por la administración central y que todos los centros deben usar; en el otro están aquellos países en que los profesores seleccionan libremente de un amplio catálogo de textos comerciales. Entre estos dos extremos hay una variedad de posibilidades.

Después de analizar las fuerzas externas que inciden sobre cualquier innovación curricular, conviene considerar su motor principal, es decir, el papel del profesor en el cambio curricular. El profesor es intermediario entre el currículo y los alumnos, por ello, cualquier intento de cambiar el currículo debe considerar el papel del profesor. Los profesores pueden verse implicados en el cambio curricular de dos modos: como participantes en el proceso o como usuarios de un producto. El papel del profesor varía de unos países a otros a causa, principalmente, de las diferencias nacionales en las expectativas para los profesores y en la concepción de sus reponsabilidades. El impacto del desarrollo curricular en el papel del profesor depende también de creencias sobre aquello que es posible y adecuado. Las autoridades educativas, por medio de los diseñadores, suelen producir materiales curriculares que ofrecen al profesorado pocas opciones y que, a veces, necesitan de un alto nivel de competencia docente. Hay diseñadores que creen a los profesores incapaces de contribuir al proceso de desarrollo del currículo, por ello suelen producir materiales que rodean o evitan al profesor, reduciendo su papel al de un monitor. Los innovadores que creen que sus profesores son la clave del desarrollo curricular tienden a colocar el proceso por encima del producto; los materiales que se producen de esta manera son, con frecuencia, ejemplos o materiales de partida y requieren que el profesor haga su propio desarrollo.

Desde el interior del aula el profesor ve el currículo de matemáticas sólo como una parte del proceso educativo. El profesor se propondrá cambiar su enseñanza solamente si ve el cambio garantizado tanto por objetivos educativos más amplios como por los más específicos de la enseñanza de las matemáticas.

El último apartado está dedicado a reflexionar sobre la gestión del cambio curricular. El primer modelo de gestión utilizado en los proyectos fue importado, casi sin modificaciones, desde el mundo industrial; sus deficiencias se hicieron evidentes casi de inmediato. Desde entonces se han ideado estructuras para gestionar los procesos de cambio curricular; se distinguen tres grandes categorías de estructuras en terminos generales: centros, redes y agencias.

El profesor es intermediario entre el currículo y los alumnos, por ello, cualquier intento de cambiar el currículo debe considerar el papel del profesor. Los profesores pueden verse implicados en el cambio curricular de dos modos: como participantes en el proceso o como usuarios de un producto.

El proyecto es la mayor contribución moderna al campo del cambio curricular; surge como respuesta de la sociedad tecnológica al problema de realizar un cambio cualitativo en el currículo escolar. Los primeros proyectos de cambio curricular han copiado sus estrategias, conscientemente o no, de los procedimientos usados en la industria para la obtención de nuevos productos, enfatizando el papel del director.

Muchos de los proyectos basados en el modelo *Investigación-Desarrollo-Difusión* (I-D-D) actúan mediante el siguiente esquema: grupos de matemáticos y profesores de matemáticas escriben el material que se ensaya en los centros piloto, éste se revisa y se ensaya de nuevo una o dos veces y, entonces, se distribuye en un campo más amplio. Los centros piloto usualmente son invitados a unirse al proyecto porque los profesores de matemáticas en el centro son conocidos personalmente o bien por la reputación que pueden conseguir mediante el proyecto.

La cantidad y el tipo de entrenamiento que un proyecto oferta a los profesores depende a la vez de la justificación filosófica, de la participación del profesor en el cambio curricular y de la visión del entrenamiento especial que el proyecto requiere. En cierto sentido cada proyecto debe venderse a sí mismo. Incluso si el proyecto es solamente un grupo de profesores locales que se reúnen para intercambiar ideas, los participantes deben estar seguros de la validez de su actividad. La administración y gestión de un proyecto de cambio curricular, tanto si planifica o no formalmente sus actividades de difusión, debe considerar seriamente cómo las ideas del proyecto se llevan a cabo en el aula.

> *El contexto social es la fuerza crítica exterior que da forma al cambio curricular; pero también hay una fuerza interior. Esta fuerza es el contenido de la innovación, las ideas que se difunden y la filosofía que las motiva. En último extremo, el determinante interno principal de la práctica y gestión del cambio curricular en las matemáticas escolares es la visión de innovación que se tenga sobre la propia matemática y del motivo para su enseñanza en la escuela* (p. 82).

El cambio curricular en matemáticas tiene un contexto y un contenido. Ambos determinan su estructura, su operatividad y su perfeccionamiento.

Innovación curricular e Investigación

Los capítulos 5 y 6 ponen de manifiesto las bases teóricas que han sustentado los principales proyectos de innovación curricular realizados con anterioridad a la redacción del libro, así como las estrategias seguidas para su realización. En el capítulo 5 se hace una revisión de antecedentes, una caraterización detallada de cinco métodos y una descripción de dos estrategias de innovación, mientras que en el capítulo 6 se realiza una revisión de proyectos en relación con los métodos presentados en el capítulo 5.

La revisión de antecedentes sobre trabajos teóricos del currículo se remonta a comienzos del presente siglo, con los trabajos de Bobbitt (1918, 1924). La revisión incluye la presentación de los trabajos de Tyler y Taba como autores influyentes. Los estudios sobre estilos de desarrollo curricular, discutidos durante la conferencia de Allenton Park (Illinois), celebrada en 1971, también se presentan y ejemplifican.

De la revisión realizada, los autores destacan la gran cantidad de trabajos realizados entre 1950 y 1970 sobre desarrollo curricular a nivel internacional. Concluyen que el objetivo principal de la teoría curricular es el reconocimiento de la complejidad de factores interdependientes y organizados que intervienen en todo proceso de cambio. Para dar razón de esta complejidad y sistematizar el estudio de los proyectos, ya realizados o en curso de realización, los autores utilizan dos sistemas de categorias: las categorías de *modelo de desarrollo del currículo* y las categorías de *estrategias de innovación curricular.*

Los modelos son las diferentes tendencias teóricas que sirven de fundamento a los proyectos de innovación, si bien se señala que los límites entre los distintos métodos son fluidos; difieren más por el énfasis que ponen en algunos determinantes del cambio curricular que por la selección y diversidad de los determinantes. De aquí que sea posible que los proyectos realicen una mezcla de métodos diversos, o bien manifiesten tendencias distintas en los distintos niveles de su trabajo. Sin pretensión de exhaustividad, se presentan cinco métodos: método conductista, método de las matemáticas modernas, aproximación estructuralista, aproximación formativa y método de enseñanza integrada. Cada uno de estos métodos se presenta mediante una breve sinopsis y, a continuación, se ejemplifica como estudio de casos, con una referencia de cierta extensión a los trabajos de uno o varios autores significativos del marco teórico correspondiente.

El capítulo 6 se dedica a revisar varios proyectos, llevados a cabo tanto en Inglaterra como en Estados Unidos, utilizando como criterios de análisis las categorías estudiadas de modelos y estrategias de innovación.

De la revisión realizada, los autores destacan la gran cantidad de trabajos realizados entre 1950 y 1970 sobre desarrollo curricular a nivel internacional.

Valoración

El cuarto bloque de temas que se presentan y desarrollan en este libro está dedicado a cuestiones de valoración de los proyectos e innovaciones curriculares presentados. Este bloque se estructura en dos capítulos; en el primer capítulo se habla de evaluación en general y de la metodología de evaluación de proyectos. En el segundo capítulo se hace un balance global de los trabajos presentados, sobre los que trata de obtener una serie de lecciones.

Relacionando la noción de evaluación con la innovación curricular encontramos que el currículo es un objeto particularmente difícil de evaluar. Un currículo es una abstraccion que sólo puede captarse parcialmente, por medio del análisis de la exposición de sus fines, la observación de su contenido en el momento de impartirse, o bien la evaluación del aprendizaje de los alumnos. También resulta difícil la evaluación del currículo por la imposibilidad de aislar éste del contexto sociopolítico en que se toman las decisiones educativas.

La evaluación de un currículo se emprende cuando es preciso tomar decisiones básicas: si se acepta, se modifica o se abandona; para ello hay que considerarlo de tal modo que sus múltiples cualidades y rasgos se puedan combinar, para obtener una serie de indicadores que permitan elaborar un juicio único de su valía. La evaluación de un currículo es un proceso interactivo de lo psicológico con lo político. Todo esfuerzo de evaluación del currículo debe venir precedido por un intento de clarificar para qué sirve esa evaluación; una evaluación no debe emprenderse para legitimar una decisión ya tomada en otros ámbitos.

Varias son las metáforas propuestas para la evaluación de currículos. Las metáforas más usuales son tres:

- La evaluación es un *proceso de ingeniería*: la escuela es una fábrica y la educación es un proceso de producción; el currículo se considera como un instrumento para convertir materia prima en producto acabado. El proceso de evaluación viene dado por unos indicadores sobre la calidad del instrumento.
- Una segunda metáfora es la de *proceso clínico*; el currículo se considera como un tratamiento médico para unos pacientes especiales, los alumnos. La evaluación en este caso se mide por la eficacia del proceso completo del diagnóstico, tratamiento y curación, mediante la tasa de salud conseguida.
- La tercera metáfora es la *periodística*. Usando diversos métodos de observación procedentes de la sociología y etnografía se resume información sobre el currículo para diferentes grupos sociales.

Los autores del libro no se pronuncian por ninguna de estas metáforas sino que sugieren una aproximación ecléctica para la evaluación curricular.

El resto del capítulo está dedicado a revisar ejemplos de evaluaciones de proyectos de innovación sobre el currículo de matemáticas; concluye con la observación de que todos los estudios de evaluación contemplados han tenido naturaleza empírica; sobre esta base habrá que construir una práctica mejor para el futuro.

El capitulo 8 realiza un balance global del estudio emprendido sobre innovación curricular, con el fin de obtener *lecciones para hoy y para mañana.* El capítulo se estructura en un balance inicial, dos propósitos y tres apartados que desarrollan el balance final.

El primer balance pone de manifiesto la escasez de resultados confiables obtenidos en relación con la magnitud del esfuerzo de innovación realizado. Los problemas del sistema educativo permanecen; en particular, nuestra escasa habilidad para ayudar a los estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas. El principal resultado es que hoy comprendemos mejor la complejidad de los problemas que hay que superar, pero tampoco está claro que tal comprensión sea compartida por muchos educadores y especialistas.

Los dos propósitos de este último capitulo son:

- considerar críticamente el proceso de reformas curriculares iniciado con posterioridad a la segunda guerra mundial, es decir, sus logros y fracasos, y las lecciones que se pueden aprender de este periodo;
- destacar los argumentos que sostienen la convicción de que la enseñanza y la innovación curricular están vinculadas intrinsecamente.

El primer apartado hace referencia a la evaluación del desarrollo curricular. Comienza planteando algunas preguntas sobre *el desarrollo del desarrollo curricular*, en particular la siguiente: durante el periodo considerado ¿se ha producido algún progreso? En estos años se ha buscado una estructura teórica global, que proporcionara respuestas estables a las necesidades de innovación. Durante un tiempo pareció que la aproximación estructuralista proporcionaba un marco teórico adecuado, pero las nuevas demandas sociales y políticas, que tratan de encontrar mayor consideración dentro del currículo, ponen de manifiesto las contradicciones entre finalidades individuales y necesidades sociales. Aunque este conflicto se resolvió de una manera aparentemente elegante: *aprender a aprender*, esta manera de contentar a las dos posiciones enfrentadas es calificada de *compromiso insustancial.* Considerando el desarrollo curricular y la realidad de la práctica escolar parece estar claro que el descontento con los currículos implantados procede de sus dificultades prácticas y de organización y no de consideraciones de tipo teórico. Una de las lecciones aprendidas de la experiencia es que cuando la innovación entra en conflicto con la realidad escolar, es la innovacion la que está obligada a adaptarse. Otra de las lecciones es el papel crucial que el profesor debe desempeñar en las innovaciones; un modelo tendrá tanto más éxito cuanto mejor garantice, mediante los materiales y estrategias correspondientes, un papel efectivo y una participación activa del profesor. Una última consideración dentro de este apartado es la reflexión sobre la relativa ineficacia de importar diseños curriculares, pensados para una sociedad y unas condiciones determinadas, y puestos en práctica en sociedades diferentes; el ejemplo de las innovaciones alemanas anteriores a 1968 parece ilustrativo.

Una de las lecciones aprendidas de la experiencia es que cuando la innovación entra en conflicto con la realidad escolar, es la innovacion la que está obligada a adaptarse.

El segundo apartado revisa cuatro tipos de problemas en relación con la investigación curricular. Un primer problema es el de la linealidad que se observa en la presentación, organización y desarrollo de los contenidos en los currículos de matemáticas, así como en el tratamiento de la dificultad de los conceptos implicados; algunas investigaciones se han dirigido a diseñar actividades no secuenciales. Un segundo tipo de problemas hacen referencia al grado de libertad que pueden tener profesores y alumnos en la elección del currículo. Relacionado con el anterior se encuentra el tercer tipo de problemas a los que denomina problemas de diferenciación en el currículo; este tipo de problemas tiene sentido en particular para el currículo de secundaria, ya que estos centros debieran ofertar la posibilidad de elección entre cursos teóricos y prácticos, de manera que sean los propios alumnos los que elijan su modo de formación en matemáticas en función de sus intereses o de su ritmo.

El cuarto tipo de problemas remite a la investigación básica. Una primera reflexión recuerda lo poco que sabemos sobre lo que sucede realmente en los procesos de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas, bien individualmente o a nivel del grupo clase, sobre los procesos de interacción en clase o de cómo los conocimientos del profesor condicionan su actuación en el aula. De ahí se deriva la conveniencia de cooperación entre prácticos e investigadores para obtener comprensión de lo que sucede en las aulas. Son varias las recomendaciones que se derivan para promover esa cooperación. En primer término orientar las investigaciones a las dificultades surgidas en la práctica y presentar los informes y resultados de investigación de tal forma que puedan ser leídos y comprendidos por la comunidad de educadores matemáticos; es esencial que la investigación se perciba como una ayuda para los profesores y diseñadores del currículo. Una segunda recomendación trata de promover el uso de modelos no estandarizados para la investigación, de manera que ayuden a profundizar en la comprensión de los problemas involucrados y de su complejidad.

El tercer y último apartado está dedicado al maestro en relación con el desarrollo curricular; los autores concluyen el libro destacando la importancia de los profesores en los procesos de cambio y dando algunas recomendaciones sobre esta cuestión, que pasamos a resumir. Favorecer la autonomía del profesor es beneficioso para el sistema:

> *El sistema educativo que dé a sus maestros cierta libertad en la determinación del currículo estará autodesarrollándose. Para el maestro el conocimiento del currículo es esencial a la hora de tomar una decisión responsable. Si desea asumir el rol que pueda interpretar en el aprendizaje de sus alumnos, entonces necesitará ser consciente de la debilidad de los materiales que está utilizando, de cómo mejorarlos y de cómo sacar provecho de sus potencialidades. También necesitará competencia en el dominio del desarrollo curricular [...] Si el conocimento es competencia del formador, la experiencia es propia del docente. La habilidad, la disposición para decidir y actuar responsablemente en la práctica dependen tanto de la práctica como del conocimiento* (pp, 259-261).

Para fundamentar adecuadamente la autonomía del profesor es necesario un buen plan de formación inicial así como planes de actualización y reciclaje. El diseño de los planes de actualización no es una cuestión trivial; aunque hay gran variedad de opciones, hay aún pocos acuerdos básicos sobre sus componentes más adecuadas.

Una consecuencia de la autonomía reivindicada para los profesores es la posibilidad de rechazar las innovaciones.

> *Hay razones evidentemente para optar o rechazar la innovación. La ociosidad total es deplorable, pero el profesor empeñado en aprender algo sobre innovación, estudio de materiales, visita a clases en las que se sigue un nuevo currículo y que después decide que eso no es para él o para sus alumnos no está actuando sin profesionalidad. Mejor es actuar así que convertirse en un profesional arrastrado por la corriente sin convencimiento ni interés. [...] Flaco favor se le hace a la autonomía si sólo intentamos saltar por encima de cualquier cuestión que se atraviese* (p. 263).

Las lecciones del periodo de reformas estudiado indican que la mayoría de los intentos por forzar cambios radicales se han visto afectados en la práctica por turbulencias y distorsiones; raras veces las intenciones originales se han llevado a la práctica. Una de las tareas más importantes para el trabajo futuro en el campo del desarrollo curricular es abrir la base de la innovación.

Conclusión

El texto, desde la perspectiva de la educación matemática es una aportación fundamental. Los propósitos iniciales, relativos al estudio de los cambios curriculares y de algunos invariantes en la dinámica de innovación curricular, quedan cubiertos extensamente. Los autores proporcionan una base teórica para la crítica y el análisis de los procesos y resultados del cambio currícular en matemáticas.

La reflexión sobre el currículo de matemáticas tiene en este trabajo uno de sus documentos más precisos y clarificadores; aporta elementos teóricos que mantienen su utilidad y marca líneas de actuación que aún no han sido cuestionadas.

La noción explícita de currículo en la que se fundamentan se basa en cuatro componentes: contenidos-objetivos-metodología-evaluación. La innovación es concebida como resultante de un sistema dinámico, de fuerzas y tensiones encontradas. Las variables detectadas en los cambios son el tipo de institución implicada, la estrategia empleada para implantar el cambio y el papel del profesor; se han señalado cinco fases o etapas en un proceso de cambio.

El estudio de las clases de matemáticas en una diversidad de países determina un nuevo nivel de análisis, que permite establecer otros cuatro invariantes o componentes para el currículo: profesores, alumnos, conocimiento matemático y escuela. Sobre estas componentes actúan, igualmente, una diversidad de fuerzas, cuya caracterización se hace atendiendo a varias dimensiones: dimensión social, dimensión cultural, dimensión política y dimensión educativa.

La complejidad de factores interdependientes en los procesos de cambio se analiza mediante los modelos de desarrollo y las estrategias de innovación. La valoración de proyectos pone de manifiesto dos deficiencias: la escasez de resultados confiables obtenidos hasta el momento y la poca habilidad mostrada para ayudar a los estudiantes en su aprendizaje de las matemáticas.

La búsqueda de una estructura teórica global que proporcione respuestas estables a la permanente necesidad de innovación del currículo de matemáticas concluye con dos reflexiones: en la primera se hace un balance de dificultades de tipo práctico, aún no resueltas; en la segunda se vuelve a insistir en el papel predominante del profesor en el diseño y desarrollo del currículo de matemáticas.

La reflexión sobre el currículo de matemáticas tiene en este trabajo uno de sus documentos más precisos y clarificadores; aporta elementos teóricos que mantienen su utilidad y marca líneas de actuación que aún no han sido cuestionadas.

Luis Rico

LA CRESTA DEL PAVO REAL
Las Matemáticas y sus raíces no europeas
George Gheverghese Joseph
Ed. Pirámide
Madrid, 1996
ISBN:
páginas

El autor, un auténtico cosmopolita: hindú de nacimiento, criado en Kenia, de padres sirios cristianos ortodoxos, que estudió en Gran Bretaña y pasó algunos años de su vida en Tanzania... nos invita a quitarnos la venda europeista con la que habitualmente analizamos la historia de las matemáticas y nos anima a buscar sus verdaderas raíces allí donde se encuentren. Para ello suscita un amplio recorrido a través de diversas culturas que resulta fascinante tanto por las aportaciones al conocimiento de la génesis de diversos pasajes de las matemáticas como por las curiosidad que despierta el descubrir rincones insospechados dentro de su propia historia. Nos incita así a desprendernos del chovinismo típico de cultura dominante (tan sólo en estos últimos cuatrocientos años) con derecho a escribir e interpretar la historia a nuestro antojo.

Todo ello permite desmontar algunas concepciones parciales de nuestra propia realidad cultural. Entendiendo la palabra propia en el sentido restringido en el que se dice cultura occidental, árabe, oriental, gitana, etc. Por ejemplo: se acepta con absoluta naturalidad una visión, que el autor denomina «eurocéntrica clásica», de cómo las matemáticas se han desarrollado a lo largo de la historia y que se podría esquematizar de la siguiente forma:

Grecia (600 a.C.-400d.C)
↓
Edad Oscura (400-1500)
↓
Redescubrimiento del saber griego
↓
Renacimiento
↓
Desarrollo del saber europeo

Autores tan notables como Kline en 1953 o Rouse Ball a principios de siglo aceptan a Grecia como el origen de las matemáticas, en una concepción egocéntrica que olvida a toda la matemática egipcia (2000 a.C.), de la que es deudora indiscutible la matemática griega, la mesopotámica (1500 a. C.), la china (1500 a. C.), la precolombina o la india (800 a.C.). Se infravalora igualmente la importancia de la matemática árabe que fue protagonista, tan indiscutible como olvidada, de toda la «Edad Oscura». Pero los estudios se amontonan y empiezan a ofrecer pruebas acerca de las múltiples conexiones entre unas y otras civilizaciones que es necesario incorporar a nuestro conocimiento de la historia de las matemáticas.

De paso no estaría mal que esta nueva visión se trasladara a las aulas. Es importante que los adolescentes aprecien como el predominio cultural en matemáticas ha dependido de la época que se esté considerando y, sobre todo, que entiendan hasta que punto somos deudores unos y otros del empuje cultural de cada civilización en cada momento histórico. Quizás no consigamos desmontar algunos prejuicios tales como considerar que diferentes implica superiores y que pobreza es sinónimo de incultura o, lo que es peor, de impostura moral. Pero es posible que contribuyamos de algún modo a aumentar el respeto hacia las demás culturas y aprendamos de paso a considerar a sus miembros en un plano de igualdad.

No estaría mal recuperar la memoria colectiva de esos pasajes de la historia de la ciencia que han quedado fuera de nuestros marcos de referencia (bien por el desinterés de quien los escribió interesadamente o por razón de otras dificultades técnicas asociadas a su estudio) al tiempo que recobramos la noción de universalidad cultural, aprendemos a valorar la riqueza que conlleva el mestizaje o cuando menos apreciamos la importancia de las aportaciones de otros pueblos al diseño de «nuestra propia» identidad cultural.

«El interés por la historia nos marca de por vida. La forma de vernos a nosotros y a los demás, viene dada por la historia que asimilamos [...]. No es sorprendente, pues, que los gobernantes a lo largo de ella hayan reconocido que controlar el pasado es dominar el presente, y de esa manera consolidar el poder». Ese es el valor que el autor concede al conocimiento histórico, de ahí la precisión y el afán de objetividad que domina toda obra, y que a la postre se trasluce como una necesidad personal. Él mismo reconoce que le preocupa sobremanera mantener un equilibrio entre sus cuatro herencias culturales para que ninguna de ellas prevalezca sobre las demás.

La sobriedad del relato y la humildad que destila desde sus primeras páginas le resta apasionamiento y le aporta una seriedad de estilo que conjuga muy bien con la exquisitez con la que trata de ser objetivo, aun a costa de sacrificar interpretaciones que a la lógica resultan clarividentes.

Es posible leer el libro como una novela, de un tirón, sin otra pretensión que la meramente divulgativa, pero también resiste una lectura más sosegada. Sobre todo si la información que aporta se pretende comparar con la que aparece en otros manuales sobre el tema o se piensa en como trasladarla al aula.

Carlos Usón

MÁS POR MENOS
Guión y presentación: Antonio Pérez
Realización: Pedro Amalio López
Producción: Televisión Española

Estamos acostumbrados a que cuando aparece en los medios de comunicación algo que tenga relación con las matemáticas se cometan errores y se digan no pocas tonterías. Desde confundir el *billion* anglosajón con el billón español hasta escuchar a conspicuos personajes que hacen alarde de que en su vida escolar no sabían nada de matemáticas. Ejemplo reciente ha sido el tratamiento dado a los resultados del TIMS, sobre el que se han hecho frívolos comentarios sin haber llevado a cabo un mínimo análisis de dicho informe.

En todo, y también en televisión, hay alguna honrosa excepción. Durante el pasado curso se pudo ver en la segunda cadena de Televisión Española algo insólito: ¡un programa de matemáticas! y, lo que es más importante, un buen programa de divulgación matemática que a lo largo de tres meses llegó a los espectadores semanalmente. Bien es cierto que el horario en que se puso (a primeras horas de la mañana) no es el que bate records de audiencia.

Los títulos de los programas son los siguientes:

- El número áureo.
- Movimientos en el plano.
- La Geometría se hace arte.
- El mundo de las espirales.
- Del baloncesto a los cometas.
- Fibonacci: la magia de los números.
- Las leyes del azar.
- Números naturales, números primos.
- Fractales. La geometría del caos.
- Un número llamado *e*.
- Matemáticas y realidad.
- Matemática electoral.

Como se ve por los títulos, los temas son muy variados y atrayentes y tocan diversos aspectos matemáticos, desde geometría a números, pasando por probabilidad y estadística.

Todos ellos tienen tienen unos planteamientos divulgativos; cualquier persona medianamente instruida puede enterarse y gozar con los mismos, pues aun cuando tratan los temas de forma rigurosa reducen los detalles técnicos a lo imprescindible. A la vez, constituyen un recurso didáctico de primer orden: pueden ser utilizados en la educación secundaria obligatoria y en el bachillerato, tanto para introducir conceptos como para consolidarlos. Casi todos los contenidos, excepto algunos muy concretos, pueden ser entendidos perfectamente por el alumnado de estos niveles.

Los programas, cuya duración oscila alrededor de quince minutos, presentan unas características comunes: se enmarca el tema históricamente, se subrayan de forma nítida las relaciones de las Matemáticas con la naturaleza y con el arte y se explicitan las aplicaciones de las Matemáticas a diversas ramas tecnológicas. Las lecturas recomendadas al final de cada capítulo, cuatro o cinco títulos, están perfectamente seleccionadas y, además, son libros accesibles para cualquier lector.

Personalmente, si tuviera que elegir dos de los reportajes, me quedaría con «La geometría se hace arte» dedicado a los mosaicos nazarís de la Alhambra y a Escher, donde se muestra el carácter estético de la matemática y «Del baloncesto a los cometas» por la utilización didáctica que se puede hacer al explicar el tema de las cónicas.

Antonio Pérez Sanz, guionista y presentador de la serie ha hecho un trabajo espléndido; ha unido a su afición y conocimiento de lo audiovisual sus dotes didácticas y su acertada visión de la matemática. Resulta muy satisfactorio para nosotros que un colaborador asiduo de SUMA haya sido capaz de emprender y llevar a cabo este trabajo.

Según mis noticias, es posible que Televisión Española vuelva a programar esta serie. Sería de desear que se hiciese con un horario que pudiese ser visto por más espectadores y, sobre todo, que estuviese al alcance del alumnado de secundaria. Por ejemplo, en la sobremesa, intercalados con los magníficos reportajes del *National Geographic* constituiría un excelente servicio, por parte de la televisión pública, a la divulgación científica y, por tanto, a la cultura global de los ciudadanos.

Emilio Palacián

VIII JAEM
VIII Olimpiada de la Federación
Congreso Belga...

VIII JORNADAS para el Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)

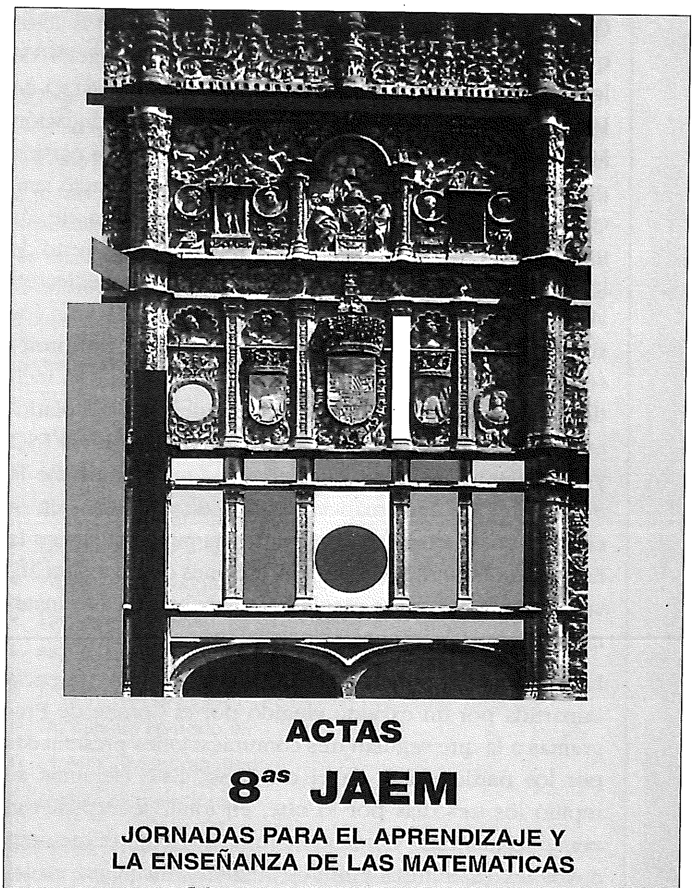
Se celebraron en Salamanca los días 9, 10 y 11 de septiembre de 1997. El primer día, tras la inauguración oficial de las Jornadas por parte del Rector de la Universidad de Salamanca, Antonio Pérez evocó la figura inolvidable de Gonzalo Vázquez cuya memoria presidió todos los actos que iban a desarrollarse. El primero fue la presentación de los Premios Internacionales THALES-SAN FERNANDO de Investigación y Renovación Pedagógica en Educación Matemática cuyas bases se entregaron a todos los participantes. A continuación, Michèle Artigue pronunció una conferencia sobre la evolución de la enseñanza de las matemáticas en Francia en el nivel secundario. El resto de la mañana y las primeras horas de la tarde se dedicaron al trabajo en las mesas temáticas cuyos títulos eran los siguientes: La formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas; Las nuevas tecnologías y su incidencia en la enseñanza de las matemáticas; La calculadora en la clase de matemáticas; Las matemáticas en la ESO y Bachillerato; Gestión de la clase y tratamiento de la diversidad; Las matemáticas en la vida cotidiana, en la ciencia, en el arte y en la técnica; Las matemáticas en la Educación Infantil y Primaria; Relaciones de las matemáticas con otras materias escolares; y, finalmente, Las matemáticas en la Enseñanza Universitaria.

Las sesiones de cada mesa se abrieron con una ponencia impartida por un experto elegido por el Comité de Programas a la que seguían tres comunicaciones presentadas por los participantes en el congreso. Este esquema se repitió los tres días por lo que, en total, se expusieron veinte ponencias y cerca de noventa comunicaciones cuyos textos, autores y títulos pueden consultarse en las Actas de la Jornadas que ya están publicadas. Se cerró la tarde del primer día con dos conferencias de Bujanda y Waits sobre la investigación en Educación Matemática y el uso de las calculadoras, respectivamente. Por la noche, se organizó una visita turística por la ciudad y los participantes pudieron deleitarse con la luminosidad renacentista de los bellísimos edificios de Salamanca.

La mañana del segundo día estuvo ocupada por las sesiones de las mesas temáticas y por tres talleres (astronomía, geometría de los mecanismos y construcciones geométricas); en su centro se intercaló una conferencia de Marta Berini en la que reflexionó sobre la necesidad de una aproximación entre el rol de profesor (informador aséptico) y el rol de maestro (más motivador, más formador). Por la tarde, siguiendo un plan sabiamente trazado por el comité organizador, siete autobuses salieron en ruta cultural y gastronómica por la Sierra de Francia con parada y fonda en La Alberca para degustar los productos sobradamente famosos de estas tierras.

Las actividades de la mañana del tercer y último día siguieron una estructura isomorfa a la del día anterior; la conferencia, en este caso, fue impartida por Paulo Abrantes y versó (aunque en prosa) sobre las actividades de exploración e investigación en la clase de matemáticas. Por la tarde, paralelas a un taller de Papiroflexia, hubo dos conferencias de Vizmanos y Quesada, que trataron de la inferencia estadística y de los procesos iterativos respectivamente. Tras ellas se desarrolló el acto de clausura durante el cual Mariano Domínguez, coordinador general de las Jornadas, expresó su agradecimiento por la participación de los seiscientos cincuenta profesores inscritos en las Jornadas y por el apoyo recibido por distintos organismos y empresas. Ricardo Luengo, presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, pronunció un discurso en el que animó a todo el profesorado a mantener la inquietud por mejorar la enseñanza de las matemáticas e instó a la administración a que cualquier decisión que afecte al currículo de matemáticas sea consultada con la Federación, en particular reivindicó para este área el mismo número de horas de clase que tienen otras materias instrumentales en la ESO, esto es, cuatro horas semanales. Anunció también que las IX JAEM se realizarán en Lugo y entregó una placa conmemorativa al presidente de la Sociedad Castellano-Leonesa de Profesorado de Matemáticas como agradecimiento por haber organizado estas Jornadas.

Las IX JAEM se celebrarán en Lugo en 1999, organizadas por ENCIGA



Finalmente, debo señalar que durante estos tres días han podido visitarse tres exposiciones: Geometría mudéjar en Aragón: Patrimonio de la Humanidad, El rincón de las matemáticas y Libros antiguos de matemáticas procedentes de varias bibliotecas de la Universidad de Salamanca.

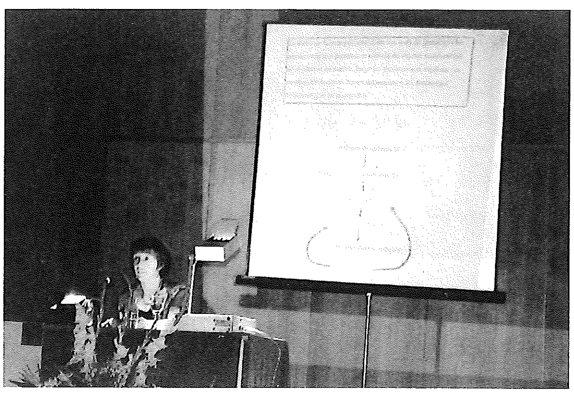
En definitiva, fueron tres días llenos de oportunidades para aprender, convivir, charlar y disfrutar en una ciudad tan bella como humana, a pesar del calor sofocante (inusual en estas fechas) y de las obras en las calles que rodean al Palacio de Congresos y a los edificios universitarios colindantes donde se celebraron todas las actividades.

José del Río Sánchez

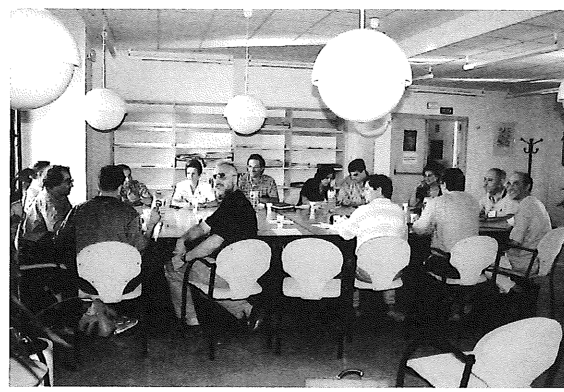
Las VIII JAEM en fotografías

Inauguración

Marta Berini pronunciando
su conferencia plenaria

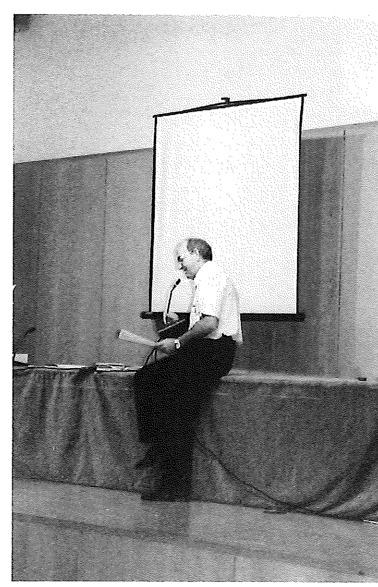


Michèle Artigue en la conferencia inaugural

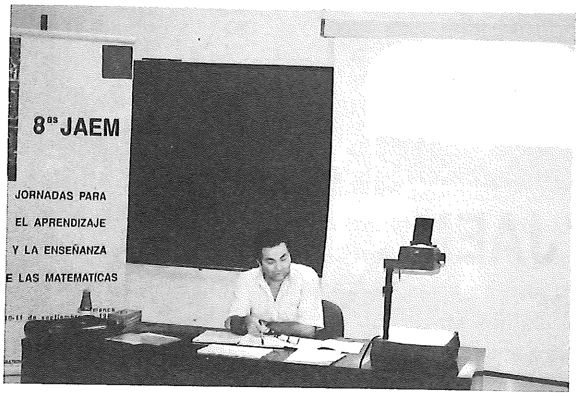


Reunión de la Junta de Gobierno
de la FESPM durante las JAEM

Antonio Pérez (Presidente de Thales)
recordando a Gonzalo Sánchez Vázquez



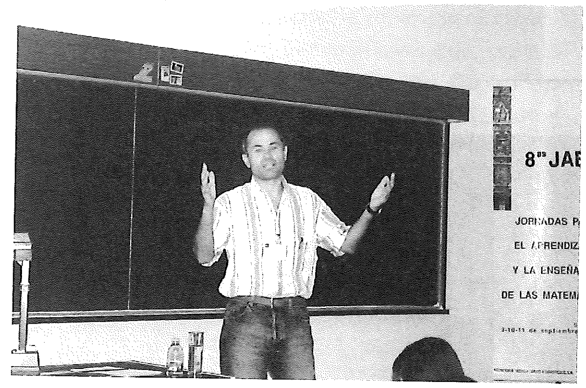
Mariano
Domínguez
Coordinador
de las VIII JAEM



Salvador Guerrero, hablando de formación del profesorado

Amaia Basarrate, en su ponencia sobre tratamiento de la diversidad

Acto de clausura de las VIII JAEM



Fernando Corbalán
Matemáticas y vida cotidiana

Asistentes a una ponencia

Luis Cachafeiro, Coordinador de ENCIGA, recibe los aplausos de los asistentes al ser designada LUGO como sede de las IX JAEM

Fotografías: Florencio Villarroya

VIII Olimpiada Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Siguiendo con la costumbre de ir rotando por las distintas comunidades que celebran olimpiadas regionales, se celebró en Gijón (Asturias), entre los días 23 y 28 de junio de 1997, la octava edición de la Olimpiada Matemática de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), organizada por la Sociedad Asturiana de Educación Matemática (SADEM) «Agustín de Pedrayes».

A punto estuvo de no poder celebrarse esta olimpiada, dado que la Consejería de Educación y Cultura del Principado de Asturias no otorgó la ayuda prometida inicialmente por su titular a la Junta Directiva de la SADEM. Esta denegación nos es comunicada además cuando ya se había hecho la convocatoria y el programa ya estaba cerrado, contando evidentemente con dicha ayuda, lo cual es todavía más grave. No obstante, gracias fundamentalmente a la colaboración del Ayuntamiento de Gijón y al aporte económico de la propia Federación (sentimos que este año la olimpiada haya salido «un poco más cara»), hemos podido llevar adelante nuestro programa. Eso sí, queda la preocupación de que este tipo de situaciones puedan repetirse en ediciones venideras y posiblemente debamos replantearnos la financiación de estas actividades. Deberíamos abrir un debate para encontrar una alternativa que nos permita evitar la rentabilidad política que ciertas personas, en ocasiones, tratan de sacar de nuestras actividades o en otras, lo que es aún peor, la total falta de apoyo, por la ausencia de una mínima sensibilidad hacia estas actividades y, en general, hacia la educación.

Participantes

Participaron 43 estudiantes, representando a todas las comunidades que habitualmente celebran las olimpiadas

Los participantes...

...y los coordinadores

regionales, con la excepción de Galicia, que este año no había celebrado sus olimpiadas regionales. Asistieron 15 acompañantes, uno por cada comunidad, excepto en el caso de Andalucía, en que son dos. Además asistió el coordinador de la próxima olimpiada, que en este caso también pertenecía a la comunidad andaluza. En la página web de la SADEM (http://www.lander.es/~jalvar1) se expone la lista completa de participantes y coordinadores.

Los chicos y los profesores llegaron a Gijón durante la tarde del domingo día 22 de junio y fueron alojados en un palacio recientemente restaurado y convertido en albergue juvenil. La situación del albergue en las afueras de Gijón y en una finca cerrada amplia, rodeado de zona verde, y con una estructura interior muy acogedora, contribuyeron a que los chavales, tal como esperábamos, lo pasaran fenomenal y seguramente llevarán un buen recuerdo durante mucho tiempo. Claro, todo tiene sus contrapartidas, y en este caso estaban del lado de los profes acompañantes: las condiciones no eran precisamente las de un hotel de lujo, ni mucho menos, aunque lo asumieron de muy buen grado y su colaboración fue en todo momento total. Esperemos que hayan sabido disculparnos.

Pruebas

Prueba por equipos (3 o 4 componentes)

Esta fue la primera prueba de la olimpiada y se celebró durante la mañana del lunes día 23, antes incluso de la inauguración oficial. Antes de empezar se desarrolló una actividad de dinámica de grupos, dirigida por la compañía Quiquilimón de teatro infantil y juvenil, con el objeto de formar los grupos. Al igual que en anteriores ediciones de esta olimpiada se procuró que en cada equipo no coincidieran chicos y chicas de una misma comunidad. Los juegos en los que consistió la actividad de dinámica de grupos y la naturaleza de las pruebas de este primer día de olimpiada sirvieron para crear un clima muy agradable entre todos los participantes. Todas estas actividades se desarrollaron en una amplia sala del Centro de Cultura Antiguo Instituto de Gijón, cedido para tal fin por la Fundación Municipal de Cultura del Ayuntamiento de Gijón.

La prueba por equipos tuvo dos partes diferentes: la prueba de relevos y la prueba de velocidad. Desde hace varios años venimos realizando pruebas similares a estas en nuestra olimpiada regional y siempre resultan del agrado de participantes y profesores.

La primera, de relevos, consiste en la resolución de problemas por parejas y, como su nombre sugiere, mediante relevos. Los problemas que se proponen están agrupados por pares, siendo los problemas de cada par de naturaleza similar. Además los pares de problemas se ordenan según su dificultad, proponiéndose inicialmente los más fáciles. La puntuación también varía con la dificultad del problema: a mayor dificultad, mayor puntuación. A su vez, los equipos se dividen en parejas. Mientras una de las parejas del equipo está situada en la «zona de trabajo» del aula, la otra permanece en la «zona de descanso». También los profesores acompañantes tienen un papel relevante en esta prueba. Cada equipo cuenta con un supervisor, que es la persona que entrega los problemas a su debido tiempo y revisa y valora las soluciones entregadas por el equipo. Los supervisores se sitúan en la cabecera del aula.

Al iniciarse la prueba se entrega el primero de los problemas a una de las parejas de cada equipo (la que se ha situado previamente en la zona de trabajo). Cuando esta pareja tiene resuelto el problema o bien cuando decide abandonar su resolución, entrega el problema al supervisor, para su valoración. En ese momento la otra pareja del equipo, que permanecía hasta entonces en la zona de descanso, se acerca a la mesa de su supervisor, recogen el problema siguiente, y pasan a la zona de trabajo, al lugar abandonado por sus compañeros, para proceder a su resolución; mientras la pareja anterior corre a la zona de descanso. El proceso sigue así durante los 50 minutos que dura la prueba. Obviamente, se trata de resolver, y resolver bien, el mayor número de problemas, por lo que cuando se efectúa el relevo se debe perder el menor tiempo posible. Así pues, las carreras por el aula, entre la zona de trabajo, la de descanso y la mesa de los supervisores son continuas (se requiere un espacio suficientemente amplio) y eso es precisamente lo que hace que esta prueba resulte tan vistosa y entretenida.

En la llamada prueba de velocidad, los equipos deben resolver 10 problemas cortos, situados cada uno de ellos en una mesa, que está atendida por un supervisor. Disponen de 5 minutos para realizar cada una de las actividades propuestas. Los problemas son de diversa

PREMIADOS

VIII OLIMPIADA MATEMÁTICA NACIONAL

PRUEBA POR EQUIPOS (VELOCIDAD-RELEVOS)

Primer premio

Alfonso Baños Castiblanque

Águeda Gallego González

Ángela Ginés Delgado

Alberto Mancheño Villena

Segundo premio

José Alastuey Aínsa

Carmen Alonso Vicente,

Sofía Pérez González,

Enrique Sayago Gada

Tercer premio

Ismael Asensio de la Fuente

José Navarro Garmendia

Pablo Viera Ruiz

CIRCUITO MATEMATICO

Primer premio

Alexia Rodríguez Ruano

Nuria Álvarez Coll

Enrique Fernández Sánchez

Pablo Villafranca Artieda

Segundo premio

Pablo Lozano Fernández

José Navarro Garmendia,

Gerard París Aixala

María Saumell Mendiola

Tercer premio

Alfonso Baños Castiblanque

Mª del Mar Nevado Ventura

Carmen Alonso Vicente

Ana Beatriz García Gutiérrez

índole: algunos manipulativos, otros de estimación en cálculo o en medidas, de razonamiento lógico, juegos, etc. Inicialmente se sitúa un equipo en cada mesa y se establece un orden de rotación. Al iniciarse la prueba, cada equipo resuelve el problema planteado en su mesa. Pasados los cinco minutos el director de la prueba hace una señal (toque de silbato) y cada equipo debe abandonar el problema y pasar al siguiente. Así hasta completar el total de los 10 problemas. Como se puede imaginar, las carreras en el cambio de pruebas y la celeridad con la que afrontan la resolución de cada problema (generalmente acaba sobrándoles tiempo) hacen que esta prueba sea también enormemente entretenida.

Circuito matemático (equipos)

Se realizó en Oviedo en la zona de los monumentos prerrománicos del Naranco durante la tarde del martes día 24. Con anterioridad a la prueba los estudiantes realizaron una visita guiada a San Miguel de Lillo y Santa María del Naranco. En el prado adyacente a este último palacio se propusieron los dos problemas en que se concretaba esta prueba. El primero de ellos planteaba diversas cuestiones relacionadas con el monumento a cuyos pies se encontraban y era necesario, para su resolución, tomar algunas medidas directamente en el mismo. También se hacía referencia a la proporción áurea, aprovechando su presencia constante en este edificio.

El segundo problema hacía referencia a otro de los aspectos que dan fama al monte Naranco: el ciclismo. Se trataba de resolver una situación problemática cuyo contexto era una carrera ciclista y en cuya resolución era necesario aplicar conocimientos geométricos, algebraicos y aritméticos.

El circuito matemático es una prueba por equipos, por lo que se procedió a su formación antes de proponer los problemas. Se cambiaron los equipos de la prueba anterior, manteniendo el criterio de no coincidencia de estudiantes de la misma comunidad en un mismo equipo.

PRUEBA INDIVIDUAL

Primer premio

José Navarro Garmendia

Segundo premio

Daniel Jiménez Hernández

Tercer premio

Basilio Reyes López

PRUEBA FOTOGRÁFICA

Primer premio

María Saumell Mendiola

Julia Cuenca Monzón

Segundo premio

Jorge González Navarro

Abraham Sánchez Sánchez

Tercer premio

Ismael Asensio de la Fuente

José Navarro Garmendia

Pablo Viera Ruiz

PRUEBA DE REGULARIDAD

Primer premio

José Navarro Garmendia

Segundo premio

Alfonso Baños Castiblanque

Tercer premio

María Saumell Mendiola

En el próximo número de SUMA se publicarán los textos de todas las pruebas de esta edición de la Olimpiada.

Prueba individual

Se propusieron 6 problemas que debían resolverse en un tiempo máximo de 2 horas, en dos tandas de 3 problemas cada una, con un descanso intermedio. Esta prueba se desarrolló en el Centro de Cultura Antiguo Instituto de Gijón durante la mañana del miércoles día 25.

Prueba de fotografía matemática (parejas o tríos)

Se entregaron cámaras desechables a las distintas parejas y dispusieron de tres días para realizar cuantas fotos desearan. Finalmente, una vez reveladas por la organización, cada pareja elegía dos de sus fotos para presentarlas al concurso, acompañando a cada una de ellas un lema alusivo.

Las fotografías presentadas a concurso se expusieron en la mañana del viernes en una de las salas del albergue. La selección de las fotografías ganadoras se realizó por votación de todos los participantes, valorando los aspectos técnicos de la fotografía, su relación con la matemática, su lema, su belleza, etc.

Premios

La evaluación y valoración de las diferentes pruebas corrió a cargo del comité organizador con la colaboración de los profesores y profesoras acompañantes. Conforme a las bases, no hubo premios específicos para las diferentes pruebas: todos los participantes recibieron un obsequio y un diploma acreditativo de su participación en la olimpiada. Sin embargo sí se dan a conocer los tres primeros clasificados en cada una de las pruebas que se celebran, así como en la regularidad en el conjunto de las pruebas. Estos estudiantes reciben un diploma acreditativo.

La entrega de premios tuvo lugar en el Salón de Plenos del Ayuntamiento de Gijón el viernes día 27. Estuvo presidida por el Alcalde de la Ciudad, el Decano de la Facultad de Ciencias y los responsables de la organización de la olimpiada. Los estudiantes premiados, en las diferentes pruebas de la VIII Olimpiada Matemática de la FESPM aparecen en el cuadro adjunto.

Otras actividades

El programa de actividades se complementó con visitas turísticas a distintos lugares de Asturias, y con otras actividades de carácter lúdico y festivo:

Actos oficiales: Recepción oficial en el Ayuntamiento de Gijón, el lunes día 23, visita a la Junta del Principado, entrega de premios nuevamente en el Ayuntamiento de Gijón. El alcalde de Gijón, profesor de matemáticas en excedencia, aprovechó la ocasión para contar a los chavales cómo convencía a la oposición utilizando el clásico recurso matemático de la reducción al absurdo. Nos quedamos con las ganas de asistir a un pleno, a ver cómo resulta.

Visitas en Gijón: se realizó una visita a la Universidad Laboral y el Planetario en la tarde del lunes, 23. En otros momentos se visitaron otros lugares interesantes de la ciudad.

Foguera de San Xuan: durante la noche del día 23 asistimos a la quema de la foguera instalada en la Playa de Poniente de Gijón. Tanto los chicos y chicas como quienes les acompañamos pasamos un rato muy agradable, aunque los organizadores estabamos un poco angustiados por la posibilidad de perder a alguno entre tanta cantidad de gente. Y vaya lección que nos dieron: los únicos que estaban a la hora en punto en el lugar acordado para el regreso eran ... ¡todos los chicos! Todos los profes llegamos tras ellos.

Visitas en Oviedo: durante la mañana del martes se visitó la zona antigua, la Catedral y el Parlamento Regional. Tras la comida en el Naranco, se visitaron los monumentos de Santa María y San Miguel de Lillo.

Museo de la Minería: allá nos fuimos la tarde del miércoles. Aunque casi no lo logramos, pues un fallo de coordinación con el autobús que nos debía llevar nos hizo perder un tiempo precioso. Se echó de menos un poco más de tiempo.

La actividad de astronomía hubo de ser suspendida debido a las inclemencias climatológicas: en Asturias llueve y hay niebla algunas veces (¿sólo algunas? ¿por qué os creéis que lo tenemos todo tan verde?)

Cangas de Onís, Covadonga y Lagos de Covadonga: se realizó durante toda la jornada del jueves. ¡Qué pena! El día que más necesitábamos el buen tiempo y el peor día de la semana con diferencia. Ya sabemos: la inexorable Ley de Murphy.

Fiesta «mágica»: en la tarde-noche del jueves tuvo lugar la actuación de un grupo de magia. Al día siguiente era comentario entre los corrillos de todos los chavales, lo que hace pensar que resultó de bastante interés. Todos trataban de encontrar explicación a los trucos.

Espicha asturiana: no podía faltar la tradicional fiesta asturiana de la sidra, aunque, como es natural, solamente para el profesorado acompañante (no es que lleve mucho alcohol pero no nos pareció nada recomendable para nuestros olímpicos). Tuvo lugar durante la tarde-noche del jueves y aprovechamos el buen rato para hacer un simpático intercambio de regalos-sorpresa.

José Luis Álvarez

Secretario de la SADEM Agustín de Pedrayes

La IX Olimpiada Matemática de la FSEPM se celebrará en junio de 1998 en Almería, organizada por la SAEM Thales

Primer Simposio de la SEIEM

Durante los días 12 y 13 de septiembre pasados se ha celebrado en la Escuela Universitaria de magisterio de Zamora (Universidad de Salamanca) el Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) con la asistencia de sesenta participantes pertenecientes a veinticinco universidades y a varios institutos de educación secundaria. El Simposio se articuló en torno a tres Seminarios de Investigación y a sesiones de los grupos de trabajo:

- *Seminario I*: Profesor de matemáticas y contextos de investigación. ¿Cómo abordar la investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido en los profesores de matemáticas? Opciones y líneas. Los ponentes de este Seminario fueron S. Llinares y V. Sánchez de la Universidad de Sevilla, estando la réplica a cargo de L. Blanco (Universidad de Extremadura) y P. Azcárate (Universidad de Cádiz).
- *Seminario II*: ¿Cómo estructurar las tareas que aparecen en un campo conceptual? Discusión de un caso: clasificación de problemas aditivos. M. Socas (Universidad de La Laguna), E. Castro (Universidad de Granada) y J. L. González (Universidad de Málaga) fueron los ponentes, siendo replicados por L. Puig (Universidad de Valencia).
- *Seminario III*: Metodología de la investigación en didáctica de las matemáticas: estrategias de análisis estadístico para el tratamiento de cuestiones de didáctica. La ponencia corrió a cargo de E. Lacasta (Universidad Pública de Navarra).

En cada uno de los Seminarios, a continuación de la ponencia y réplica, tuvo lugar un vivo debate entre losparticipantes.

Los grupos de trabajo fueron:

- Didáctica del Análisis Matemático. Coordinadora: C. Azcárate (Universidad Autónoma de Barcelona).
- Aprendizaje de la Geometría. Coordinador: M. Arrieta (Universidad del País Vasco).
- Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Coordinador: A. Estepa (Universidad de Jaén).
- Pensamiento numérico y algebraico. Coordinador: B. Gómez (Universidad de Valencia).
- Formación de Profesores de Matemáticas. Coordinador: S. Llinares (Universidad de Sevilla).
- Pensamiento lógico-matemático en la Educación Infantil. Coordinadora: C. Corral (Universidad de Oviedo).

Después del trabajo de los grupos, el coordinador de cada uno de ellos expuso al plenario las líneas de investigación que vienen desarrollando y las que pretenden iniciar en el futuro.

También se celebró la Asamblea anual de la SEIEM, en la que se informó de la marcha de la Sociedad y se presentó el balance económico desde su fundación.

El Simposio fue inaugurado por el Vicerrector de Investigación de la Universidad de Salamanca. Los participantes fueron recibidos en el Ayuntamiento y Diputación de Zamora y realizaron una visita turística a la ciudad. Ambas instituciones así como la Junta de Castilla y León han colaborado en la celebración de esta reunión científica.

Se han cumplido ampliamente los objetivos de este Simposio que eran, en líneas generales, el inicio de un debate en profundidad sobre algunos temas de investigación, la consolidación de los grupos de investigación y el cumplimiento de las previsiones estatutarias y de funcionamiento de la SEIEM.

Modesto Sierra Vázquez

Coordinador
del Primer Simposio de la SEIEM

XXXIII Olimpiada Matemática Española

Problemas propuestos. Fase nacional

Problema 1

Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale –1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.

Problema 2

Un cuadrado de lado 5 se divide en 25 cuadrados unidad por rectas paralelas a los lados. Sea A el conjunto de los 16 puntos interiores, que son vértices de los cuadrados unidad, pero que no están en los lados del cuadrado inicial.

¿Cuál es el mayor número de puntos de A que es posible elegir de manera que TRES cualesquiera de ellos NO sean vértices de un triángulo rectángulo isósceles?

Problema 3

Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos, por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en R pasan por un punto fijo que se determinará.

Problema 4

Sea p un número primo. determinar todos los enteros k tales que

$$\sqrt{k^2 - px}$$

es entero positivo.

Problema 5. Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que

$$2(2+\sqrt{2})$$

Problema 6

Para dar una vuelta completa en un coche a un circuito circular, la cantidad exacta de gasolina está distribuida en depósitos fijos situados en n puntos distintos cualesquiera del circuito. Inicialmente el depósito del coche está vacío. Demostrar que cualquiera que sea la distribución del combustible en los depósitos, siempre existe un punto de partida de manera que se puede dar la vuelta completa.
Aclaraciones:

- Se supone un consumo uniforme y proporcional a la distancia.
- El depósito del coche tiene capacidad suficiente para contener toda la gasolina.

Congreso de la Sociedad Belga de profesores de Matemáticas de expresión francesa.

En el marco de las relaciones y convenios de colaboración que la FederaciÓn Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas tiene con sociedades de profesores de Matemáticas de diversos países, estuve representando a nuestra federación en CINEY, cerca de Bruselas, donde se celebró el Congreso de la Sociedad Belga durante los días 26, 27 y 28 de agosto.

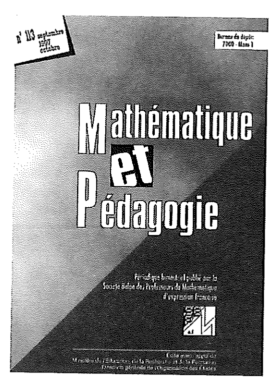
El objetivo de mi asistencia era seguir de cerca los trabajos de esta sociedad para continuar estableciendo ciertos lazos de colaboración con ella, tal como ya se hizo en el anterior congreso de la Sociedad Belga. De la misma forma, la profesora Simone Trompler, secretaria de la Sociedad Belga, ha estado en Salamanca en nuestras VIII JAEM.

El Congreso, que se celebra todos los años, se ha desarrollado en el Athènèe Royal, un gran centro escolar que cuenta además con un internado donde estuvieron alojadas la mayoría de las personas que asistían al Congreso. El hecho de estar todos alojados en el mismo sitio del Congreso ha facilitado la relación entre los casi 200 participantes a pesar de la gran diversidad de profesores allí presentes. El comité organizador del Congreso estaba muy satisfecho del gran abanico de niveles de enseñanza de los profesores, profesores de Primaria, de Secundaria y de Universidad y ha intentado durante los tres días del Congreso que hubiese en paralelo actividades para esos tres niveles.

Después de la sesión inaugural, tuvo lugar una conferencia plenaria a cargo del profesor francés Jean Dhombres, gran especialista en Historia de las Matemáticas que hizo una historia de las Matemáticas desde los principios del siglo XVII, basada en la «Revolución de los logaritmos», citando a Lagrange, Newton, Euler, Cauchy, Galois,... Los interesados en estos temas pueden recurrir al libro: *Lecons de mathèmatiques: l'ècole normale de l'an III* (edición con anexos de las clases de Laplace, Lagrange y Monge dirigida por J. Dhombres), publicado en la Editorial Dunod en 1992, aunque la conferencia y todas las comunicaciones presentadas se publicarán a lo largo del curso que viene en la revista de la Sociedad Belga *Matemáticas y Pedagogía* que se recibe en la Federación por intercambio con SUMA.

Gran parte de las ponencias fueron presentadas por profesores que trabajan en el Centro de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas (CREM), centro de reciente creación que agrupa a profesores de todos los niveles.

Los temas tratados durante estos tres días, son los temas que actualmente preocupan a todos los profesores, Introducción al Álgebra, Geometría para primaria y secundaria obligatoria, Utilización de los ordenadores: Cabri, Derive, Menumath, Utilización de las Calculadoras: calculadoras gráficas, siendo la idea básica el cómo conseguir interesar a los alumnos hacia las Matemáticas. Los títulos de todas las ponencias y comunicaciones son los sigientes:



Ponencias:

- B. Honclaire: *Hacer Algebra: iniciación.*
- Y. Noîl, B. Baton y R. Giot: *Iniciación al algebra.*
- F. Geeraerts y J. P. Houben: *Descubrir el programa Cabri a traves de situaciones problemáticas geométricas.*
- J. P. Gosselin: *Utlización del programa "Menumath" como instrumento para enseñar matemáticas en Secundaria.*
- R. Gossez-Ketels: *La sombra en la lámpara "iluminada" por Derive y Cabri.*
- J. Bair y G. Haesbroeck: *Hacia el descubrimiento del caos determinista; una introducción a los modelos dinámicos no lineales.*
- R. Gerardy: *Azar o certidumbre: lo aleatorio de lo cotidiano.*
- *Utilización del cálculo diferencial e integral en gestiones de stocks.*
- J. Liesenborghs-Descy: *Práctica del cálculo matricial.*
- L. Colot, G. Demol y J. Maquoi: *Continuidad y competencias en Matemáticas de los 10 a 14 años. ¿Y después?*
- D. Villers: *Un modelo de mezclas.*
- G. Hansoul: *Aritmética ahora o una iniciación a la criptografía.*
- B. Honclaire y F. Van Dieren: *Geometría: el papel de las figuras-claves.*
- P. Marlier: *Isometrías y medida de las magnitudes geométricas.*

Durante estos tres días los profesores belgas aprovecharon para tener una asamblea de su sociedad donde se procedió a la votación de un nuevo presidente al no presentarse a la reelección el anterior.

En la «Feria de ideas», se presentó la página Web de la Sociedad Belga. Para los interesados es:

htpp://ramses.umh.ac.be/

Florencio Villarroya

SUMA 26
noviembre 1997

Premios Thales-San Fernando Conferencia Internacional de Enseñanza de las Matemáticas CIEAEM 50

CONVOCATORIAS

PREMIOS Internacionales de Investigación y de Renovación Pedagógica en Educación Matemática Thales-San Fernando

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES tiene entre sus objetivos el impulso de la Investigación en temas de Educación Matemática y la Renovación Pedagógica en las aulas. Ambos objetivos están encaminados por una parte a mejorar el aprendizaje de los alumnos y, por otra, a despertar cada vez en mayor número de personas y, muy particularmente de los jóvenes, el gusto por el disfrute con y el amor hacia las matemáticas.

El Ayuntamiento de San Fernando tiene como un objetivo prioritario la mejora de la calidad educativa de los centros escolares de la ciudad. Por otra parte, la tradición matemática de la ciudad, desde sus orígenes actuales en la mitad del siglo XVIII, es una seña de identidad de un pueblo culto que nació con la Ilustración y de la que se siente heredera. Por ello entiende que los objetivos de la Sociedad THALES, anteriormente señalados, son plenamente coincidentes con los suyos, por lo que participar conjuntamente con aquella en actuaciones conducentes a la mejora de la enseñanza de la matemática y del aprecio por esta ciencia, es apostar por una continuidad histórica y por defender en todo el mundo una seña de identidad.

En consecuencia ambas entidades convocan sendos premios internacionales de investigación y de renovación pedagógica en educación matemática en lengua española o portuguesa, con el nombre de THALES-SAN FERNANDO y de acuerdo con las siguientes:

Bases

1. Podrán presentarse trabajos en dos modalidades: a) Investigación en Educación Matemática y b) Renovación Matemática. La temática será libre.

2. Los trabajos deberán ser originales y no podrán haber sido, ni total ni parcialmente, publicados, ni sometidos a la consideración para su publicación en alguna revista, editorial, servicio de publicación, base de datos, grupos en Internet, o análogos.
3. Los trabajos han de estar escritos en lengua española o en lengua portuguesa, pero su procedencia podrá ser de cualquier país del mundo.
4. Los trabajos presentados podrán estar firmados por uno o más autores, que sólo podrán presentar un único trabajo.
5. Los trabajos han de presentarse en forma de Artículo, según las especificaciones indicadas en la base n.º 7. Dicho artículo podrá acompañarse de cuantos anexos se considere conveniente para su valoración.
6. Desde el momento de la remisión del trabajo y mientras no se conozca el fallo del jurado, el autor o autores renuncian expresamente a publicar (*cualquiera que sea el medio y tipo de soporte utilizado*) o someter a la consideración para su publicación, total o parcialmente, el trabajo remitido a este premio. Cualquier actuación en contra conllevará la inmediata eliminación del trabajo en el concurso.
7. Los Artículos deberán presentarse mecanografiados a doble espacio con letra de 12 puntos, en formato DIN A4 y con una extensión máxima de 20 páginas (*gráficos, dibujos, notas, fotografías y bibliografía incluidos*) y de acuerdo con las siguientes normas:

7.1. Los trabajos presentados deberán ser tratados con cualquier procesador de textos. Se recomienda preferiblemente Word, Worperfect y Latex. Deberán enviarse cinco ejemplares en papel, con suficiente calidad de impresión, así como en soporte magnético en disco de tres pulgadas y media. En los trabajos no podrán figurar los nombres, ni dirección ni ningún otro tipo de identificación de los autores. Los autores deberán escribir su nombre, dirección y datos profesionales en papel aparte que deberá ser remitido dentro de un sobre cerrado en el que sólo figure el nombre del artículo. La versión magnética y la del papel deberán coincidir exactamente, cualquier alteración entre ambas significará, en su caso, la anulación del premio. Los autores remitirán los cinco ejemplares del trabajo en papel, el sobre cerrado con sus datos y el disquete (*con envoltura antimagnética*) dentro de un sobre a la siguiente dirección:

Sociedad THALES
Premio Thales-San Fernando a la [modalidad]
Apdo. 494
11100-San Fernando (Cádiz)
España

Podrán presentarse trabajos en dos modalidades: a) Investigación en Educación Matemática y b) Renovación Matemática. [...] Los trabajos deberán ser originales [...] La fecha de presentación de trabajos finalizará el 30 de junio de 1998. [...] La cuantía de los premios será de 500.000 ptas para cada modalidad. [...] Los premios serán entregados en un Acto Académico que tendrá lugar en la ciudad de San Fernando.

7.2. Los gráficos, dibujos, fotos, etc. deberán figurar en el texto y deberán además adjuntarse independientemente, numerados con claras etiquetas que remitan a otras del texto y que indiquen el lugar donde deberán ubicarse, caso de su publicación. Deberá constar también con claridad la leyenda o pie que deben llevar.

7.3. La bibliografía se relacionará al final del trabajo, por orden alfabético de apellidos, con las siguientes especificaciones:

- Para libros:

– Apellidos e iniciales del nombre del autor en mayúsculas, en el caso de tratarse de un editor deberá añadirse (ed.).
– Año de publicación, entre paréntesis.
– Título completo en cursiva.
– Número de edición, lugar y editorial.
– Datos adicionales si los hubiera.

- Para artículos:

– Apellidos e iniciales del nombre del autor en mayúsculas, en el caso de tratarse de un editor deberá añadirse (ed.).
– Año de publicación, entre paréntesis.
– Título completo entre comillas.
– Nombre completo o abreviatura internacional de la revista en cursiva.
– Número del volumen en negrita, seguido del número o mes del fascículo entre paréntesis, páginas inicial y final unidas por guión.

7.4. No se podrá referenciar en la bibliografía ningún trabajo que no sea invocado en el texto. Para efectuar una cita bibliográfica se dará entre paréntesis el autor o autores y el año, o bien se citará el autor y trabajo y entre paréntesis figurará el año.

7.5. Es preceptivo que la estructura del trabajo contemple al menos los siguientes puntos:

– Resumen de unas doce líneas como máximo.

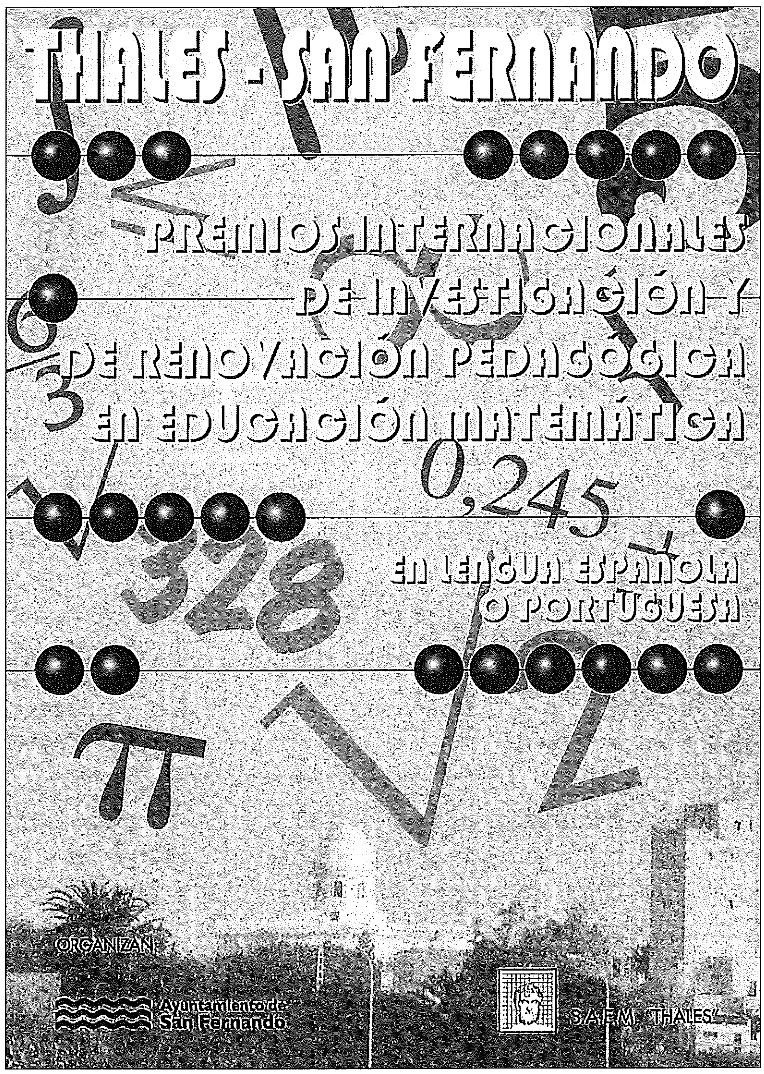
– Antecedentes, de forma escueta.

– Desarrollo del trabajo.

– Conclusiones.

– Bibliografía.

7.6. Las notas a pie de página deberán ir numeradas correlativamente e indicadas con superíndices.



8. La fecha de presentación de trabajos finalizará el 30 de junio de 1998.

9. El Jurado estará compuesto por cinco miembros, todos ellos profesores de reconocido prestigio, que será designado por la SAEM Thales. Los componentes del Jurado establecerán el mecanismo de deliberaciones que en cualquier caso, serán secretas. Los integrantes del jurado se darán a conocer en el acto de la entrega de los premios.

10. El Jurado seleccionará un máximo de cinco trabajos de cada una de las modalidades del Premio. Estos trabajos serán considerados Finalistas de los Premios Thales-San Fernando.

11. Se premiarán dos trabajos, uno por cada modalidad, seleccionados por el Jurado entre los finalistas, pudiendo quedar desierto uno o ambos premios si el Jurado considerase que los trabajos correspondientes presentados no tienen la calidad necesaria. En caso de quedar sólo uno de los dos premios desiertos, el Jurado podrá aunar el importe de los dos premios en el que se conceda, si la calidad del trabajo premiado lo mereciese.

12. La cuantía de los premios será de 500.000 ptas para cada modalidad. Tanto a los autores de los trabajos premiados como a los finalistas se les acreditará con un Diploma expedido conjuntamente por la SAEM Thales y el Ayuntamiento de San Fernando.

13. El fallo del Jurado tendrá lugar antes del 30 de octubre de 1998, comunicándose de inmediato tanto a los autores como a los finalistas.

14. Los trabajos Finalistas podrán ser publicados en derecho exclusivo por la SAEM Thales, bien como trabajo ordinario de la Revista Épsilon o en una edición especial. A estos efectos, la SAEM Thales comunicará a los autores dicha intención antes de un mes después de la entrega de los premios. De no producirse esta comunicación en el plazo indicado, los autores podrán disponer libremente de sus trabajos para su publicación.

15. Los premios serán entregados en un Acto Académico que tendrá lugar en la ciudad de San Fernando. Dicho acto consistirá en una conferencia pronunciada por un prestigioso profesor y en las intervenciones de los finalistas explicando sucintamente el trabajo presentado. Finalmente, el Jurado dará a conocer los autores de los trabajos premiados y se hará entrega oficial de los diplomas acreditativos y de los premios.

16. El fallo del Jurado será inapelable.

17. La mera participación obliga a la plena aceptación de estas bases.

Conferencia Internacional de la Enseñanza de las Matemáticas

Los días 3 a 6 de julio de 1998 se celebrará en Samos (Grecia), patrocinada por Universidad del Egeo, Universidad Capital, Universidad de Arizona y Universidad Estatal de Ohio.

El objetivo de esta Conferencia Internacional es examinar nuevos métodos en la enseñanza de las matemáticas en las universidades. Esta conferencia reunirá a miembros de facultades de diferentes países, que están comprometidos en la introducción y uso de métodos innovadores de enseñanza. La Conferencia será de gran interés tanto para profesores universitarios como para cualquier persona interesada en la enseñanza de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje.

Los temas que se abordarán son los siguientes:

1. Efectiva integración de la tecnología de los ordenadores, calculadoras, sistemas de álgebra computarizada, WWW, fuentes de Internet, dentro de los planes de estudio de las matemáticas en las universidades.
2. Métodos innovadores para la enseñanza de las matemáticas: Enseñanza cooperativa y estilos de aprendizaje.
3. Reformar temas relacionados con el cálculo y otros contenidos matemáticos. valoración de los movimientos actuales de reforma y direcciones futuras.
4. Tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje a distancia de las matemáticas. Actual distribución de hardware/software, material educativo, visión de futuro.
5. Aprendizaje de las matemáticas (métodos de investigación y valoración alternativa).
6. Efectos de los cambios en la enseñanza de las matemáticas en otras disciplinas.

Para más información contactar con: José Ramón Vizmanos. IES Santamarca. c/ Puerto Rico, 36. 28028 Madrid. E-mail: jrvizmanos@riglesias.es

Los usuarios de Internet pueden encontrar información sobre conferenciantes, Comité Internacional, talleres, inscripción, etc. en la página:

http://icg.fas.harvard.edu/~samos98/

CIEAEM 50

Los días 2 a 7 de agosto de 1998 se celebrará, en Neuchâtel (Suiaza), el 50.° encuentro de la CIEAEM con el tema: «Los vínculos entre la práctica de aula y la investigación en didáctica de las matemáticas».

La CIEAEM (Comisión Internacional para el estudio y mejora de la enseñanza de las matemáticas) es el primer grupo de reflexión creado a nivel internacional sobre el tema de la enseñanza de las matemáticas. Su fundación se remonta a 1950, en el período de la posguerra, bajo el impulso conjunto de matemáticos, psicólogos y pedagogos y de una sociedad en fuerte evolución tecnológica. Con sus reuniones, de periodicidad prácticamente anual, la Comisión ha propiciado que un número creciente de participantes, confrontados a las innovaciones de su disciplina, establezcan relaciones y contactos a nivel nacional e internacional. Uno de los objetivos de la CIEAM es el de favorecer el diálogo entre investigadores y profesores sobre su trabajo. Éste es, precisamente, el tema de su 50.° encuentro.

Conferiencias plenarias, grupos de trabajo, presentaciones orales, talleres y exposiciones permitirán a los participantes intercambiar y presentar sus trabajos y establecer relaciones con numerosos colegas de horizontes diversos.

Los dos idiomas oficiales del encuentro son el inglés y el francés. Se prevé un apoyo para la traducción en todas las comunicaciones, en forma de resúmenes, transparencias y otros documentos en los dos idiomas.

El encuentro se celebrará en los edificios de la Universidad, en zona verde, a unos minutos del centro de la ciudad. Se facilitará alojamiento en hoteles cercanos, en residencias universitarias o en pensiones a buen precio, a una distancia de entre cinco y diez kilómetros.

El segundo anuncio, que se publicará a finales de 1997, dará informaciones más detalladas sobre el tema, los subtemas, la organización del trabajo y las modalidades de inscripción. Puede recibirse solicitándolo a la dirección :

CIEAEM 50. IRDP, cp 54, CH-2007 Neuchâtel 7; tél: (41) (32) 889 86 09; fax: 41 (32) 889 69 71;

E-mail: francois.jaquet@irdp.unine.ch;

Internet: http://www.unine.ch/irdp/cieaem/

NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras, deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

	Importe
☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)	
☐ N.os sueltos: ______________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°: . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM