

## Lápices-Orettolè-Przxetqzyw ¿Las imágenes mentales de los textos de las situaciones- problema influncian su resolución?<sup>1</sup>

**Bruno D'Amore**

### **E**STADO de la cuestión

Hay una opinión muy difundida según la cual la resolución de un problema de matemáticas se facilita e, incluso, se consigue por la capacidad que tiene el sujeto que lo resuelve de hacerse un modelo mental de la situación descrita en el texto. Para apoyar esta opinión se recurre, a menudo, a Paivio (1986)<sup>2</sup> o bien a Vergnaud (1985) que escribe (la cursiva es mía): «La representación lingüística no es una especie de reflejo del proceso de adaptación del sujeto a su ambiente; por el contrario es funcional e *indispensable* para el tratamiento de las situaciones problemáticas por parte del sujeto».

Durante la redacción inicial de mi libro *Problemas* (entre 1990 y 1991) (D'Amore, 1993), me planteé la siguiente cuestión: supongamos que, ante el texto de un problema, el potencial resolutor no pueda imaginar la situación descrita por motivos objetivos, por ejemplo, por motivos ligados a la escritura del mismo; ¿lo resolverá, no lo hará, o con qué diferencias lo hará suponiendo que pudiese imaginar la situación descrita en todos sus detalles?

Me planteé, entonces, la hipótesis, que me parecía compartida e incluso preconizada por Paivio (1986) y Johnson-Laird (1983), de que una imposibilidad objetiva de imaginarse el modelo de la situación debería obstaculizar necesariamente la resolución del problema.

Además, al buscar modalidades que hiciesen imposible<sup>3</sup> la formación de un modelo de la situación descrita, tomando como referencia lo que afirma Vergnaud (1985), estudié el caso en que el texto del problema contiene un término desconocido para el resolutor. En realidad, me limité sólo a dos tipos de sujetos: niños de la escuela primaria (II ciclo, 8-11 años) y profesores de escuela infantil.

En este trabajo se discute una opinión muy difundida, según la cual un niño, al prepararse para resolver un problema, se debe hacer un modelo lo más completo y correcto posible de la situación descrita por el texto, de otra forma corre el riesgo de no poder resolver el problema. Se proponen pruebas cuyo resultado parece desmentir, al menos en parte, esta opinión.

**INFORME**

Un primer texto, propuesto al final de 4.º de Primaria (niños de 9-10 años), consistía en el clásico ejercicio-problema de disponibilidad-gasto-ganancia: el dueño de una papelería compraba *resmas* de papel a un cierto precio y las vendía a otro; se pedía la ganancia en cada resma.

Al tratarse de un problema-ejercicio muy habitual en ese ciclo de la escuela primaria, había supuesto que una eventual no resolución debería ser causada necesariamente por la presencia de la palabra escrita con letra cursiva en el texto: *resma*.

Esta prueba se realizó con pocos alumnos (la mitad de una clase: 12), sea porque había pensado que la respuesta sería evidente, conforme a la posición de Paivio, Johnson-Laird y Vergnaud (posición convincente según mi punto de vista), sea porque quería estar seguro de recoger cualquier señal (explícita o no) de los alumnos y poder entrevistarlos inmediatamente después de la prueba.

El resultado fue exactamente el esperado, de forma que se desvanecía cualquier duda al respecto. Hubo una reacción, casi violenta, de desasosiego general, de rechazo de la tarea y más de un alumno evidenció la incomprensión del término extraño y, *asi pues*<sup>4</sup> la imposibilidad de resolver el problema.

A continuación, en un curso de actualización para profesores de la escuela infantil, propuse un problema análogo a una veintena de ellos pero, suponiendo que conocían la palabra "resma", decidí sustituirla por una palabra inexistente: "pluca". También, en este caso, hubo una reacción violenta e irónica al mismo tiempo, del tipo siguiente: «¿Qué son las plucas?». Yo insistí, invitando a los profesores a decirme si el problema era o no era resoluble, aunque no se conociese esa palabra; la respuesta fue positiva, pero con una manifestación explícita del desagrado...

Deduje<sup>5</sup> contrariamente a las posiciones de Paivio, Johnson-Laird y Vergnaud, que un adulto podría sortear el obstáculo que representaba el desconocimiento de una palabra, pero que no lo podría hacer un niño de la escuela primaria.

Las pruebas realizadas perseguían ese objetivo: proporcionarme la certeza de que esa tesis era aceptable y, por tanto, que yo podría sostenerla durante la redacción definitiva del libro *Problemas*.

Sin embargo...

## Cuestiones actuales y respuestas hipotéticas

Sin embargo, el escaso número de sujetos examinados y el aparato de control usado para la prueba, que evidentemente hacía aguas por todas partes, me habían dejado

*Deduje  
que un adulto  
podría sortear  
el obstáculo que  
representaba el  
desconocimiento  
de una palabra,  
pero que no lo  
podría hacer  
un niño  
de la escuela  
primaria.*

dubitativo. Me prometí entonces que, una vez que *Problemas* fuese editado, reharía las pruebas con extremo cuidado incluso si, siendo sincero, creía en las hipótesis del apartado anterior.

De noviembre de 1993 a diciembre de 1995 he podido realizar esas pruebas con mayor cuidado, para verificar cuál era la respuesta a la pregunta que ahora formulo de forma explícita:

Si el texto de un problema-ejercicio estándar, dado en las condiciones habituales de clase, contiene una palabra (referida al objeto del que se trata en el texto del problema) inexistente o que el alumno no conoce, es imposible que se haga un modelo mental, de forma perfecta y en todos sus detalles, de la situación descrita en el texto.

En tales condiciones, ¿en qué porcentaje disminuye la capacidad de resolver el problema?

Mi hipótesis, según lo dicho anteriormente, era que debería darse una disminución neta y que, ante la exigencia explícita, los alumnos denunciarían justamente la presencia de tal palabra como causa de la falta de resolución.

## Modalidades de desarrollo de las pruebas

Elaboré, entonces, dos textos (T1 y T2) para un problema-ejercicio estándar:

*El señor Pedro es un comerciante. Compra 625 x, a 50 ptas. cada una, y las vende todas, obteniendo 48.000 ptas. ¿Cuánto gana en cada x?*

En el texto T1 el término *x* se sustituía por la palabra *lápiz*, en el T2 por la inexistente palabra *orettola* (naturalmente expresados, ambos, en el número correspondiente, singular o plural).

Los dos textos se daban en un folio A4, cuadriculado, mecanografiados en la parte alta del folio; en el centro del folio aparecía un recuadro en blanco; los estudiantes debían escribir su respuesta en ese recuadro (con bolígrafo negro y sin usar goma u otros borradores).

1 Trabajo realizado con la subvención del C.N.R. y del Ministero dell'Università e della Ricerca (MURST), fondos respectivos del 60% y del 40%. La palabra «orettola» no existe en italiano.

2 Una presentación óptima del trabajo de Paivio se encuentra en Vecchio (1990).

3 Con todo detalle, es decir, comprendidos los objetos aislados de que se habla en el texto, los personajes, los pasos de la consigna y de los papeles, el ambiente, etc.

4 Ese apresurado *asi pues* mío, de entonces, es el punto de apoyo de mi trabajo actual.

5 Esa apresurada deducción mía, de entonces, es también básica para mi trabajo actual.

Debajo del recuadro cada estudiante debía indicar si el problema le había parecido difícil o no y, en caso de respuesta positiva, indicar el por qué de la dificultad.

Se había dado la consigna de trabajar individualmente y en silencio. Quería evitar que la indicación, en voz alta, de un estudiante pudiese influenciar o condicionar el trabajo de los otros, invitándolos así a reflexionar por sí solos sobre algo que no hubiesen llegado a percibir.

Cada clase se había dividido en dos partes; a una mitad se le daba T1, a la otra mitad T2. Esto se hacía para controlar cuántos estudiantes eran capaces de desarrollar el problema T1 y cuántos el T2 y, así, poder controlar los resultados.

La prueba se hizo en 5.º de Primaria (niños de 10-11 años) y, en total, eran 107 estudiantes.

A fin de poder considerar la prueba como realizada en condiciones escolares normales, evité aparecer en clase, encomendando la prueba a profesores de absoluta confianza a los que había recomendado no interferir, en modo alguno, en el trabajo escrito de los alumnos, vigilando para que se cumplieren totalmente mis requisitos.<sup>6</sup>

## Primeros resultados

Veamos los resultados del test T1 (lápices):

- el 32% de los alumnos dio una respuesta totalmente incorrecta;
- el 10% no lo resolvió (o escribió sólo alguna indicación);
- el 15% lo resolvió de forma totalmente correcta (presentación aparte);
- el 43% se equivocó de forma parcial (de estos, el 41% calcula sólo la ganancia total —mientras el problema hablaba de la ganancia en cada lápiz—, el 2% desarrolla casi todos los cálculos, de forma incompleta).

*Los resultados  
obtenidos revelan  
que la hipótesis  
inicial podría  
no darse  
por probada  
tan fácilmente.*

Veamos ahora los resultados del test T2 (orettole):

- el 25% dio una respuesta totalmente incorrecta;
- el 10% no lo intentó;
- el 16% lo resolvió correctamente (salvo errores de cálculo o de presentación);
- el 49% se equivocó de forma parcial (de estos el 37% sólo calculó la ganancia total, mientras el 12% cometió otros errores).

Para poder usar los datos, en apariencia poco significativos, de la mejor forma posible, los recogeremos en clases más aptas para nuestra indagación específica.

Conviene aclarar que el error de calcular la ganancia total en vez de la que se produce para cada objeto, es un error típico de los estudiantes de 5.º, según manifiestan los profesores; está motivado por la lectura apresurada del texto o por el deseo usual (persistente aunque haya sido desaconsejado por el profesor) de acabar la prueba en el menor tiempo posible.

Propongo entonces la consideración de dos clases solamente:

- Exacto o equivocado porque se calcula sólo la ganancia total, E.
- Erróneo del todo o no resuelto o con graves equivocaciones, N.

En tal caso, los porcentajes resultan:

- Para T1: E 56%, N 44%.
- Para T2: E 53%, N 47%.

Dado el número relativamente bajo de estudiantes examinados, se trata sustancialmente de *porcentajes idénticos*.

Vale la pena precisar algunas cosas.

*Nota 1:* Sólo dos estudiantes (del grupo T2) denunciaron su malestar, al final de su folio, por la palabra «orettola» y se trata, en ambos casos, de estudiantes que resolvieron bien el ejercicio.

*Nota 2:* Al final de las pruebas, 13 estudiantes (de los que habían sido sometidos al test T2) fueron entrevistados. Entre ellos y sólo después de una exigencia explícita del entrevistador, tan sólo 2 declararon haberse sentido molestos por la presencia de la palabra «orettola». De estos 2, uno de ellos dice que las orettole «deben ser verduras» (¡Vendidas en una papelería! Pero sobre esto el entrevistador no ha hecho comentarios) y después se equivocó en la resolución (grupo N); el otro dijo que se trata de «objetos» y resolvió bien el ejercicio.

## Pruebas y resultados ulteriores

Los resultados obtenidos revelan que la hipótesis inicial podría no darse por probada tan fácilmente.

<sup>6</sup> Debo manifestar, llegados a este punto, que sin embargo he preferido ignorar los protocolos de una clase entera, al surgir dudas sobre la realización de la prueba.

Sin embargo, existe una posible objeción: que el problema-ejercicio dado, vistos los resultados, parece ser demasiado difícil. Se había presentado el texto, anteriormente, a profesores (que no tenían nada que ver con la experiencia) y habían manifestado que, salvo errores de cálculo ligados al hecho de que se obtenían números «no exactos», se trataba de un texto adaptado y corriente.

Efectué<sup>7</sup> entonces una prueba (auxiliar, por así decirlo) a alumnos de 3.º (niños de 8-9 años), proponiendo el texto siguiente: «Un papelerero compra 4  $x$  cortas, 6  $x$  largas y 12  $x$  medianas. ¿Cuántas compra en total?».

A algunos niños se les dio el texto T1' en que  $x$  se sustituía por «lápices», a otros el texto T2' en que  $x$  se sustituía por «orettola». Ya que se trataba de una prueba «auxiliar» se propuso solamente a 15 niños. El resultado fue el siguiente:

- de los 8 niños a los que se había dado el texto T1', 7 respondieron de forma adecuada (uno sumó, sin embargo, los dos primeros números dados: 4+6);
- de los 7 niños a los que se dio el texto T2', 6 respondieron adecuadamente (uno se comportó de la misma forma indicada en el paréntesis anterior, haciendo: 4+6).

Durante la entrevista sucesiva, hecha a los 7 niños del grupo T2', incluso ante la exigencia explícita, *ninguno* manifestó desagrado por la palabra «orettola».

## Primeras consideraciones y una duda

El resultado significativo que se obtiene, sobre todo gracias a las entrevistas, es que los niños reinterpretan la palabra desconocida, dándole connotaciones semánticas diversas: o le atribuyen un significado, por así decirlo, «constante» (verdura), o bien la aceptan como algo desconocido, pero presente, de forma acusada, en la realidad descrita por el texto del problema, es decir, como un significado «variable» en el contexto, pero definible según las necesidades (objetos).

Incluso cuando las respuestas a las entrevistas no son tan claras o patentes, es totalmente evidente que el niño supera el supuesto obstáculo, atribuyendo un sentido al término. Es como si se activase una cláusula del contrato didáctico según la cual el profesor no puede insertar en el texto una palabra inexistente. Se trata de una cláusula perteneciente al grupo que me gusta definir como el de «fe en el profesor». Es más bien plausible que, para el niño, se trata de una palabra que él no conoce pero que significa algo, lo que no parece impedir, en absoluto, la resolución.

*Pero surge una duda:* quizás la palabra «orettola» tiene un sonido que conduce vagamente a algo real, existente;

*...es totalmente evidente que el niño supera el supuesto obstáculo, atribuyendo un sentido al término. Es como si se activase una cláusula del contrato didáctico según la cual el profesor no puede insertar en el texto una palabra inexistente.*

tiene, por así decirlo, una forma «buena», después de lo cual, gracias a la cláusula del contrato didáctico mencionada más arriba, se podría pensar que el resultado obtenido está ligado a la palabra elegida. Es, por tanto, lícito pensar que, si se hubiese elegido una palabra patentemente inexistente, habríamos podido obtener resultados distintos.

En otras palabras: el niño no sabe lo que significa «orettola» pero, dando por descontado que exista, se hace en cualquier caso una imagen, más o menos confusa, más o menos explícita de ella. Y esto parece bastar para dar la razón a Paivio, Johnson-Laird y Vergnaud, y pensar que los buenos resolutores se pueden hacer, *en cualquier caso*, un modelo mental de la situación.

## Una prueba nueva. Comentarios

Efectué, entonces, una nueva prueba, siempre en 5.º, con 38 niños (4 medias clases). Del mismo modo propuse el texto T3, idéntico al T1 y T2, pero en lugar de «lápiz» o «orettola» puse: przxetqzyw.

Los resultados fueron los siguientes:

- el 29% se equivocó completamente;
- el 12% ni lo intentó;
- el 32% lo resolvió de forma correcta (salvo errores de cálculo o de presentación);
- el 27% se equivocó porque calculó la ganancia total.

Si consideramos estos resultados según lo que habíamos visto anteriormente, es decir, si consideramos las dos clases: E (correcto o equivocado porque se calcula la ganancia total) y N (totalmente equivocado o no intentado), obtenemos:

- E: 59%
- N: 41%

y, por tanto, dado el exiguo número de alumnos a los que se ha aplicado la prueba, vemos que aparece, a *grosso modo*, el mismo tipo de porcentajes.

<sup>7</sup> Gracias a una idea de Giorgio Gabellini, maestro en Cattolica y miembro del NRD de Bologna.

Ello parece eliminar cualquier duda. En particular, sólo dos alumnos muestran su desasosiego ante la lectura de la «palabra extraña».

A partir de la experiencia adquirida en las entrevistas y de la importancia que tienen este tipo de técnicas para darse una idea de lo que piensan realmente los niños, realicé la entrevista a muchos más alumnos de los habituales. El 26% de los entrevistados manifestó haberse sorprendido en el momento de leer aquella «extraña palabra», pero casi todos admiten haberse dado una justificación: es una «marca de bolígrafos», es «una cosa», es «un dato», es una «marca de caramelos» (¡vendida en una papeleería!), es un «modo de escribir algo», etc. (*No existe relación alguna entre estas justificaciones y la buena o mala resolución del problema*). Me ha sorprendido encontrar una clasificación muy simple y semejante a la ya encontrada para «orettole»: o se trata, por decirlo así, de «constantes» (marca de bolígrafos, de caramelos) o se trata de «variables» que, según la necesidad de cada caso, se pueden precisar (elementos, cosas, datos, una forma de escribir algo).

## Una conclusión... inicial

Sustancialmente debo admitir que la posición descrita en el inicio de este trabajo se contradice con estas pruebas. El estudiante parece no sentir la necesidad de hacerse un modelo, *preciso en todos sus detalles*, de la situación descrita en el texto del problema-ejercicio estándar, para intentar resolverlo; parece que lo que le sirve es sólo un modelo impreciso de la situación, incluso sin demasiados detalles. Supera el obstáculo de la falta de un dato significativo imaginando más el desarrollo global de la escena que los singulares detalles de la misma.

Existe además un punto de cierto interés.

Me parece que se puede afirmar que el contrato didáctico ligado al problema

*Supera  
el obstáculo  
de la falta  
de un dato  
significativo  
imaginando  
más el desarrollo  
global de  
la escena que  
los singulares  
detalles  
de la misma.*

8 La prueba se realizó en un Liceo Clásico Experimental (en 1.º, alumnos de 14-15 años), aplicando la prueba completa: los tres textos T1, T2 y T3. La excesiva facilidad del problema ha producido un número casi total de resultados positivos (clase E). Los muchachos han aceptado, en una gran mayoría, las «palabras extrañas» de forma divertida e irónica y sin hacer de ello un drama. Algunos las han reinvocado, otros las han considerado extrañas, sin darle demasiada importancia.

de... resolver un problema es muy fuerte en relación con la necesidad de hacer cálculos, mucho más que en relación con la necesidad de imaginar, en todos sus detalles, la escena. Como si el verdadero problema no fuese el descrito en el texto, sino el de la implicación del estudiante. A propósito, es muy importante y reveladora la frase de un niño entrevistado que, después de la usual insistencia del entrevistador para obtener su opinión acerca de la palabra extraña, ha exclamado: «Lo importante no es comprender, sino resolver el problema».

No sólo el contrato didáctico, sino también el modelo general del problema que el niño se ha dado en la práctica, parecen convertir en superflua, en vez de estrictamente necesaria, la formación de un modelo de la situación en el curso de la resolución de un problema.

## Otras pruebas, para terminar

Tomándolo como un ensayo, realicé los test T1 (lápices) y T2 (orettole) en clases de 1.º de Enseñanza Media (alumnos de 11-12 años), sólo con 68 alumnos.

Subdividiendo los resultados directamente en las clases E y N, los porcentajes obtenidos fueron:

- T1: E 41%, N 59%.
- T2: E 49%, N 51%.

El porcentaje de éxito aumenta con el paso de lápices a orettole, pero pienso que puedo considerar este resultado casual, ligado al número bajo de estudiantes examinados. En estos casos 2-3 protocolos pueden variar sustancialmente los porcentajes.<sup>8</sup>

Lo que interesa es que se ha detectado el mismo tipo de comportamiento: la palabra «orettola» se usa con total indiferencia. Algunos alumnos la reinterpretan de forma personal como se ha visto anteriormente. Divertida, a la vez que interesante, la interpretación de un muchacho que supone que las «orettole» son «bettolle» (una palabra italiana poco difundida que significa «bodegones») y que, por tanto, las deben vender en la papelería; en mi opinión, esto significa que no sólo las palabras inexistentes para el adulto deben ser reinterpretadas... Este estudiante ha leído «orettole», le ha recordado algo ya oído y lícito semánticamente, «bettolle», palabra de la que ignora su significado real. Así pues, no se ha hecho un modelo mental detallado de la situación, ni en lo que se refiere a las «orettole», ni en lo que se refiere a las «bettolle».

Algunas veces el entrevistador insistía para que algún estudiante expresase su parecer sobre la relación entre la dificultad de resolver el problema, la dificultad de imaginarse la situación y la palabra a examen. A la pregunta provocativa: «¿Debes hacer algún comentario sobre el

texto?», hecha a un buen resolutor, éste lo leía de nuevo y respondía que: «El texto estaba bien explicado».

## Comentario final

Para concluir el trabajo debo hacer una observación.

En 3.º de Primaria ningún estudiante denuncia la presencia de palabras sin sentido o de las que ignora el sentido; en 5.º de Primaria, los estudiantes que efectúan tal denuncia son más, pero pocos más; en 1.º de Media aumentan de forma considerable; en 1.º de Enseñanza Superior lo hacen todos.

Parece que, mientras es un hecho que para resolver un problema (bien o mal) sirve de poco hacerse un modelo mental preciso de la situación, en todos sus detalles particulares, la atención sobre las palabras aisladas aumenta con la edad. No se trata pues de la necesidad de hacerse un modelo sino de simple atención, capacidad crítica o cosas similares.

## Bibliografía

D'AMORE, B. (1993): *Problemi. Pedagogia e Psicologia della matematica nell'attività di problem-solving*, [Prefacio de G. Vergnaud], Angeli, Milano 1993 (I edición)-1996 (II edición). La traducción española: Editorial Síntesis, Madrid, con prefacio de M. de Guzmán, 1997.

JOHNSON-LAIRD, P. N. (1983): *Mental Models*, Cambridge University Press, Cambridge.

PAIVIO, A. (1986): *Mental representations: A dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.

VECCHIO, L. (1990): «Breve storia delle ricerche sull'immagine mentale», en L. Vecchio (edit.), *Le immagini mentali*, La Nuova Italia, Firenze, 15-48.

VERGNAUD, G. (1985): «Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche», en L. Chini Artusi (edit.), *Numeri ed operazioni nella scuola di base*, Zanichelli-UMI, Bologna, 20-45.

## Agradecimientos

Una investigación que implica un gran número de pruebas se facilita con la ayuda de amigos-colaboradores competentes y fiables. Debo agradecer la dedicación y disponibilidad de muchos profesores y de algunos miembros del N.R.D. de Bologna, principalmente de Gianna Foroni, Giorgio Gabellini y Laura Giovannoni. Agradezco, asimismo, las sugerencias y la lectura crítica de Giorgio Bagni y de Berta Martini.

**Bruno D'Amore**  
NRD

Nucleo di Ricerca in Didattica  
Dipartimento dei Matematica  
Università di Bologna  
Bologna, Italia  
IAA

Instituto per l'Abilitazione e  
l'Aggiornamento dei docenti  
Locarno, Suiza

Traducción:  
**Francisco Vecino**



Huelva.  
Foto:  
Luis Balbuena