SUMA 26
noviembre 1997, pp. 59-64

Proporciones en poesía. Versos áureos

José María Santa Olalla Tovar

MISCELÁNEA

La sección áurea puede ser un tema al que hacer referencia en distintos momentos y etapas del currículo escolar. Es idóneo para mostrar la relación entre las matemáticas y otras asignaturas del ámbito de humanidades y, de esta forma,contribuir a destruir el muro que tradicionalmente separa a los alumnos en «de letras» y «de ciencias». En este artículo, estudiando el ritmo de intensidad de la poesía clásica española, descubrimos cómo en los metros fundamentales y más utilizados por los autores de todos los tiempos podemos encontrar bien razones áureas, bien otras no menos bellas.

MI AFICIÓN por la poesía me llevó a disfrutar algunos poemas de uno de nuestros más grandes autores en lengua castellana cuya obra poética no se puede adquirir en una librería sencillamente porque está agotada. Me estoy refiriendo al genial Valle-Inclán. Su poesía a veces es jocosa e irónica pero casi siempre es sonora y musical, muy influida por el simbolismo francés. Un ejemplo es este soneto en alejandrinos de doce sílabas.

Por el Sol se enciende mi verso retórico
que hace geometría con el español,
y en la ardiente selva de un mundo alegórico,
mi flauta preludia: Do-Re-Mi-Fa-Sol.
¡Áurea Matemática! ¡Numen Categórico!
¡Logos de las Formas! ¡Teología Crisol!
¡Salve, Sacro Pneuma! Canta el Pitagórico
Yámbico, Dorado Número del Sol.
El Sol es la ardiente fuente que provoca
las Ideas Eternas en vaso mortal.
Por el encendido canto de su boca,
es la Geometría Ciencia Teologal.
Sacro Verbo métrico redime a la Roca
del mundo. Su estrella trasciende al Cristal.

A partir de la lectura de esta «Rosa del Sol», me pregunté si sería posible encontrar la divina proporción, o sección áurea, u otras en poesía. Para ello me he fijado en el ritmo de intensidad que los acentos marcan en un poema.

Es cierto que no es habitual encontrar regularidad en la disposición de los acentos en la poesía española, no obstante veremos que podemos señalar algunos versos y poemas más propensos a contener proporciones armoniosas y agradables.

Las sucesiones de Fibonacci y el número de oro

Una sucesión de Fibonacci es una secuencia infinita de números en la que cada término es suma de los dos anteriores. Cumple la condición:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Para cada pareja de términos a_1 y a_2 tenemos una sucesión de Fibonacci distinta. Por ejemplo:

a) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

b) 2, 2, 4, 6, 10, 16, 26, 42,...

c) 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29,...

Todas estas sucesiones son un R-espacio vectorial con las operaciones usuales. Pero lo que aquí nos importa es que todas estas sucesiones tienen una característica común: Si una sucesión $\{a_n\}$ es de Fibonacci entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1'618033\ldots$$

En los ejemplos anteriores si calculamos los cocientes entre cada término y el anterior obtenemos las siguientes sucesiones:

a) 1, 2, 1'5, 1'6666..., 1'6, 1'625, 1'6153..., ...

b) 1, 2, 1'5, 1'6666..., 1'6, 1'625, 1.6153..., ...

c) 3, 1'3333..., 1'75, 1'5714..., 1'6363..., 1'6111..., ...

Todas ellas convergen hacia el mismo número Φ a este número le llamamos número de oro, o razón áurea. Este número tiene la propiedad de que

$$\Phi^{-1} = \Phi - 1$$

A Φ^{-1} en ocasiones también se le llama razón áurea. Ambos están íntimamente relacionados con las sucesiones de Fibonacci.

Proporciones áureas a nuestro alrededor

Es común ver en la matemática un hacer, una creación humana, que como una obra de arte puede ser elegante y bella. Algunas personas comparan la creatividad matemática con la creatividad artística. Muchos se han preocupado, también, de buscar en el arte y la propia naturaleza armonía y orden matemático.

Un ejemplo es el rectángulo de oro. Cuando en un rectángulo el cociente entre la base y la altura es aproximadamente igual al número Φ decimos que el rectángulo tiene proporciones áureas.

¿Cuánto hemos oído y leído sobre la presencia de la sucesión de Fibonacci y la divina proporción en el mundo vegetal y animal,. en la pintura de Miguel Ángel, las esculturas griegas, o en la arquitectura de todos los tiempos desde el Partenón hasta los trabajos de Le Corbusier? En música se han encontrado proporciones áureas, por ejemplo en las sonatas de Beethoven y ciertas sinfonías de Haydn o Mozart.

Se ha intentado también analizar la poesía desde un punto de vista matemático. Servien introduce una notación para representar el ritmo que los acentos imponen a cada verso francés.

Se ha intentado también analizar la poesía desde un punto de vista matemático. Servien introduce una notación para representar el ritmo que los acentos imponen a cada verso francés. Asocia a una frase o verso un número, N, que cumple:

1.°) Tiene tantas cifras como acentos tónicos tenga la frase.

2.°) Cada cifra indica el número de sílabas desde una sílaba tónica a la siguiente (inclusive).

3.°) Se anotarán los silencios añadiendo en la cifra el signo de puntuación, o, cuando no hay signos dejando un espacio en blanco.

4.°) Las sílabas átonas situadas después del último acento tónico de un grupo (verso o hemistiquio) no cuentan.

En este modelo, Servien divide el verso en cadenas fónicas que constan de varias sílabas átonas y una última sílaba tónica. Se adecua perfectamente al francés por ser una lengua donde predominan las palabras oxítonas o agudas, pero no es válido para el español que es una lengua predominantemente paroxítona o llana.

Planteo, ahora, una forma de asignar un número, Ñ, a cada verso o frase española:

La primera cifra del número visto de izquierda a derecha es el número de sílabas hasta la sílaba siguiente a la primera sílaba fonológicamente acentuada inclusive.

La segunda cifra, siempre de izquierda a derecha, será la diferencia entre el número de orden en el verso de la sílaba siguiente a la que tiene el segundo acento y el número de orden en el verso de la sílaba siguiente a la que tiene el primer acento.

En general, la cifra p-ésima será la diferencia entre el número de orden en el verso de la sílaba siguiente a la que tiene el acento p-ésimo y el número de orden de la siguiente a la que tiene el acento (p-1)-ésimo.

En el caso de tener dos o tres acentos seguidos consideramos para los cálculos la sílaba siguiente al último de los acentos que van seguidos.

En el caso de que el verso sea de arte mayor y esté dividido en dos hemistiquios, asignamos un número a cada hemistiquio como si fueran versos independientes y colocamos ambos números juntos y separados por el signo ||.

Veamos algunos ejemplos: (las sílabas fonológicamente acentuadas están en negrita)

¿Cuando el cociente entre las longitudes de dos olas se acerca a la razón áurea?

Tie-ne_al-an-**dar**-la-**gra**-cia-del-fe-**li**-no,	(2324)
Es-**to**-da-**lle**-na-de-pro-**fun**-dos-**e**-cos,	(3242)
en-**la**-bia-con-mo-**ris**-cos-em-be-**le**-cos	(344)
su-**bo**-ca_os-**cu**-ra-**cuen**-tos-de_A-la-**di**-no.	(3224)
	(VALLE-INCLÁN)
¡**Nú**-me-ro-ce-**les**-te! ¡Geo-me-**trí_a**-do-**ra**-da!	(24 ‖ 42)
¡**Ver**-so-Pi-ta-**gó**-ri-co! ¡**Cla**-ve-de-cris-**tal**!	(24 ‖ 24)
¡**Can**-to-de-di-**vi**-na-**bo**-ca-en-lla-ma-**ra**-da!	(24 ‖ 24)
¡**Ver**-so-del-ar-**dien**-te-pen-**tá**-cu-lo_as-**tral**!	(24 ‖ 33)
	(VALLE-INCLÁN)

Obsérvese que la suma de las cifras del número asociado a cada verso es el número de sílabas del verso.

Cada verso es como el mar, lo dividimos en olas que se acercan a la playa. Cada ola se levanta hasta la cresta de la sílaba tónica y luego decae en la sílaba siguiente. La longitud de cada una de estas olas es una cifra del número Ñ. Una ola es por tanto una cadena de sílabas que cumple que la última sílaba de la cadena es átona, la penúltima sílaba es tónica y si hay varias sílabas tónicas son consecutivas. Además la unión de todas las olas de un verso son justamente ese verso.

Es ahora cuando nos preguntamos. ¿Habrá alguna estrofa o poema en cuyos versos las cifras del número Ñ, sean términos de la sucesión de Fibonacci? ¿El cociente entre la longitud de un verso y la longitud de una ola será cercano al conocido número de oro en algún caso? ¿Cuando el cociente entre las longitudes de dos olas se acerca a la razón áurea? ¿Es posible encontrar simetrías, repeticiones curiosas o algún tipo de regularidad?

Octosílabo. Equilibrio y belleza

Podemos clasificar los versos en cuanto al número de sus sílabas. Son versos de arte menor aquellos que tienen ocho sílabas o menos. Si tienen más de ocho sílabas se llaman de arte mayor. Los versos de arte mayor de más de once sílabas se dividen en dos hemistiquios mediante una pausa llamada cesura.

Entre los versos de arte menor, hay uno que brilla con luz propia, el octosílabo. «Consta de ocho sílabas. Es el más importante de los versos de arte menor, y el más antiguo de la poesía española. Se ha cultivado desde los siglos XI al XII, en los que aparece como metro de alguna jarcha mozárabe, hasta nuestros días, empleándolo tanto el anónimo cantar popular, como nuestros más grandes poetas.

Por constituir el grupo fónico mínimo se adecua perfectamente a nuestra lengua y constituye una constante métrica en la historia de nuestra lírica; es injusto por ello, buscar su origen en los metros latinos o en la tradición galaica o provenzal. Es el verso por excelencia de nuestra poesía popular, de nuestros romances e incluso de nuestro teatro clásico» (Quilis, 1993). Pero es más, el octosílabo es el verso dorado por excelencia.

Los posibles números Ñ en un octosílabo, salvo reordenación, son 2222, 224, 233, 26, 35, 44. Cuando Ñ = 35 o Ñ = 53 tenemos que tanto la longitud del verso como la longitud de cada una de las olas son términos de la sucesión de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8,...

El cociente entre las longitudes de las dos olas es 1'6666... y el cociente entre la longitud del verso y la de la ola más larga es 1'6. No es posible encontrar en ningún otro verso razones tan próximas al número de oro. Los tres primeros versos del siguiente fragmento son octosílabos dorados:

La-**Vir**-gen-y-San-Jo-**sé**	(Ñ=35)
per-die-ron-sus-cas-ta-**ñue**-las,	(Ñ=35)
y-**bus**-can-a-los-gi-**ta**-nos	(Ñ=35)
pa-ra-**ver**-si-las-en-**cuen**-tran.	(Ñ=44)
	(Federico GARCÍA LORCA)

En el siguiente fragmento de un romance de Luis de Góngora abundan los versos con Ñ=53 ó Ñ=35.

Ser-**ví**-a_en-O-**rán**-al-**rey** (Ñ=332)
un-es-pa-**ñol**-con-dos-**lan**-zas (Ñ=53)
y-con-el-**al**-ma_y-la-**vi**-da (Ñ=53)
a_u-na-ga-**llar**-da_a-fri-**ca**-na (Ñ=233)
tan-**no**-ble-co-mo-her-**mo**-sa (Ñ=35)
tan-a-**man**-te-co-mo_a-**ma**-da (Ñ=44)
con-**quien**-es-**ta-ba_u**-na-**no**-che (Ñ=332)
cuan-do-to-**ca**-ron-al-**ar**-ma (Ñ=53)
(Luis de GÓNGORA)

Cuando el número Ñ=44 entonces el verso queda partido por la mitad y hay simetría y equilibrio en la longitud de las dos olas que forman el verso. Otro fragmento del mismo romance de Góngora contiene versos con esta acentuación:

Tres-**cien**-tos-Ze-**ne**-tes-e-ran (Ñ=332)
des-te-re-**ba**-to-la-**cau**-sa; (Ñ=53)
que-los-**ra**-yos-de-la-**lu**-na (Ñ=44)
des-cu-**brie**-ron-las-a-**dar**-gas (Ñ=44)
las-a-**dar**-gas-a-vi-**sa**-ron (Ñ=44)
a-las-**mu**-das-a-ta-**la**-yas (Ñ=44)
las-a-ta-**la**-yas-los-fue-gos (Ñ=53)
los-**fue**-gos-a-las-cam-**pa**-nas; (Ñ=35)
(Luis de GÓNGORA)

También da idea de equilibrio 422 o sus reordenaciones, así como un verso con Ñ= 2222. Ñ=2222 corresponde a un ritmo total en el que aparecen todos los acentos rítmicos del octosílabo. Por ejemplo:

Ver-de-que-te-**quie**-ro-**ver**-de (Ñ=242)
Ver-de-**vien**-to. **Ver**-des-**ra**-mas (Ñ=2222)
(F. GARCÍA LORCA)

Finalmente cuando Ñ=62 o 26 entonces el cociente entre la longitud del verso y la de la mayor ola no se acerca a la razón áurea sino que con un valor de 1.3333... se aproxima a otra razón para algunos más bella que la universalmente conocida razón áurea, una razón recientemente descubierta, la razón cordobesa.[1] Este tipo de verso es poco frecuente ya que habitualmente no hay solamente un acento fonológico en seis sílabas. No obstante veamos un ejemplo donde aparece un verso cordobés:

Tha-**mar**-es-**ta**-ba-so-**ñan**-do (Ñ=323)
pá-ja-ros-en-su-gar-**gan**-ta (Ñ=26)
al-**son**-de-pan-**de**-ros-**frí**-os (Ñ=332)
y-**cí**-ta-ras-en-lu-**ta**-das (Ñ=35)
(Federico GARCÍA LORCA)

...el octosílabo, que es el verso natural en español, encierra en el ritmo que imponen sus acentos simetría y equilibrio, la razón de oro, o menos frecuentemente la recién nacida proporción cordobesa.

1 El cociente entre el lado de un octógono regular y el radio de la circunferencia circunscrita a él es igual a 1'3065629... Este número es la razón cordobesa. Cuando el cociente entre la base y la altura de un rectángulo toma este valor decimos que el rectángulo es cordobés. Se han encontrado proporciones cordobesas en la arquitectura de Córdoba, Andalucía y de todo el mundo. Sobre este tema se pueden consultar las actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática.

En los versos que tienen por número Ñ 323, o 332, o sus reordenaciones podemos agrupar dos de sus olas y obtener nuevamente proporciones áureas o cordobesas.

Por tanto, el octosílabo, que es el verso natural en español, encierra en el ritmo que imponen sus acentos simetría y equilibrio (Ñ=44), la razón de oro (Ñ=35 o 53), o menos frecuentemente la recién nacida proporción cordobesa (Ñ=26 o 62). Estos bloques fundamentales se pueden partir en versos con un ritmo más marcado (Ñ=224, 233 o sus permutaciones).

Endecasílabo. El rey Midas del arte mayor

En la sucesión de Fibonacci {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...} el verso siguiente a estudiar sería el de trece sílabas. Pero este verso necesariamente se constituye de dos hemistiquios. Si buscamos proporciones áureas en versos sin cesura de arte mayor, sin duda los mejores candidatos son el decasílabo y el endecasílabo. Fijémonos en este último.

«Consta de once sílabas. Se utilizó en el francés, provenzal y el italiano desde la más remota antigüedad» (Quilis, 1993). En España se introduce con fuerza en el siglo XVI, por influencia italiana. A partir de aquí «va a ser el metro constante y más representativo de nuestra métrica» (Quilis, 1993). «Su estructura coincide perfectamente con el grupo fónico máximo» (Quilis, 1993).

Los posibles números Ñ asociados al endecasílabo son, salvo permutaciones:

32222, 5222, 4322, 722, 3332, 542, 533, 632, 443, 83, 56, 74, 92.

De entre todos los endecasílabos hay algunos que son destacados por su belleza y se distinguen con un nombre especial:

1.º) El endecasílabo enfático con acentos obligatorios en primera y sexta sílabas:

Dulce Soñar y dulce congojarme,
cuando estaba soñando que soñaba;
dulce gozar con lo que me engañaba,
si un poco más durara el engañarme.
(Juan BOSCÁN)

2.º) El endecasílabo heroico, con acentos obligatorios en segunda y sexta sílabas.

Con mudo incienso y grande ofrenda, ¡oh Licas!,
cogiendo a Dios a solas, entre dientes,
los ruegos que recatas de las gentes,
sin voz a sus orejas comunicas.
(Francisco de QUEVEDO)

3.º) El endecasílabo melódico, con acentos obligatorios en tercera y sexta sílabas.

La mano -ámbar de ensueño- entre los tules
de la falda desmáyase, y sostiene
el pañuelo riquísimo, que viene
de los ojos atónitos y azules.
(Manuel MACHADO)

4.º) El endecasílabo sáfico, con acentos obligatorios en la cuarta sílaba y en la sexta u octava:

Cuando me paro a contemplar mi ´stado
y a ver los pasos por dó me han traído,
hallo, según por do anduve perdido,
que a mayor mal pudiera haber llegado.
(Garcilaso de la VEGA)

Todos estos endecasílabos tienen la característica común de llevar acento obligatoriamente en 6ª y 10ª. Esto nos permite agrupar en dos partes el verso. Todas las olas que hay hasta el acento de la sexta sílaba forman un grupo de longitud siete. El resto de las olas forman un grupo de longitud cuatro.

Cuatro, siete y once son términos de la siguiente sucesión de Fibonacci:

1, 3, 4, 7, 11

Calculemos ahora los cocientes entre cada término y el anterior:

3, 1'333..., 1'75, 1'57...

Hemos comprobado por tanto que aquellos endecasílabos «con nombre» son justo aquellos en cuyo interior podemos encontrar proporciones más cercanas al ansiado 1'6180.....

Así como se divide el endecasílabo en dos cuerpos uno de longitud siete y otro de longitud cuatro obteniéndose la fracción (7/4), en el soneto el poema por excelencia que se ajusta al corsé del endecasílabo, tiene dos cuartetos y dos tercetos dividiendo los catorce versos del soneto en un grupo de ocho y un grupo de seis. ¿Será casualidad que volvemos a obtener de nuevo la fracción (14/8=7/4)?

El endecasílabo no solo lo encontramos en el soneto sino también en silvas y madrigales combinado con heptasílabos. Aparece en estos poemas la razón 11/7 dividiendo la longitud de endecasílabos y heptasílabos. Encontramos Silvas en las *Soledades* de Góngora, la obra de Fray Luis de León, y en toda la poesía española desde el siglo XVII. Veamos algún ejemplo:

¡Qué descansada vida
la del que huye del mundanal ruido,
y sigue la escondida
senda por donde han ido
los pocos sabios que ne le mundo han sido!
(Fray Luis de LEÓN)

Si he perdido la vida, el tiempo, todo
lo que tiré, como un anillo, al agua,
si he perdido la voz en la maleza,
me queda la palabra.
(Blas de OTERO)

¿Y en el aula qué?

El tema de la sucesión de Fibonacci y el número de oro tiene abundantes implicaciones matemáticas involucrando temas de todos los niveles: proporcionalidad, ecuaciones de segundo grado, geometría, sucesiones, límite de sucesiones, el número real como aproximación de números racionales, espacios vectoriales, ecuaciones en diferencias... Las actividades de contenido matemático que se pueden desarrollar son abundantes, un ejemplo puede ser realizar una estadística en el aula pidiendo a los alumnos que dibujen el rectángulo más agradable a la vista según su criterio. Los alumnos deberán decidir si agrupar o no los datos en intervalos, representar gráficamente los resultados, calcular parámetros de centralización y dispersión, y establecer conclusiones sobre las proporciones del rectángulo más agradable para la clase.

Es este un capítulo que se presta a la relación estrecha entre las matemáticas y otras asignaturas y materias: Literatura, Música, Dibujo, Arte, Ciencias Naturales, Fotografía, Filosofía,... Puede ser por tanto una forma de ganar el interés por las matemáticas de algunos alumnos más interesados en humanidades, hablando de esta presencia de la matemática en los cánones de belleza según se va viendo el currículo de cada curso.

La búsqueda de proporciones en el mundo real, la creación de esculturas, objetos, dibujos, poemas donde aparezca la divina proporción puede ser para los alumnos una forma de desarrollar la creatividad, y de experimentar que existe una interrelación entre todas las asignaturas.

Bibliografía

GARCÍA LORCA, F. (1971): *Obras Completas*, Aguilar, Madrid.

GHYCA, M. C. (1978): *El número de oro*, Poseidón, Barcelona.

HOZ, R. de la (1995): «La proporción cordobesa», Actas de las VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática, SAEM Thales, Córdoba.

LÓPEZ-CASANOVA, A. (1994): *El texto poético. Teoría y metodología*, Ediciones Colegio de España, Salamanca.

MUÑOZ SANTOJA, J., C. CASTRO RODRÍGUEZ, C. y M. V. PONZA (1996): «¿Pueden las matemáticas rimar?», *Suma*, N.° 22, 97-102.

OTERO, B. de (1985): *Expresión y Reunión*, Alianza Editorial, Madrid.

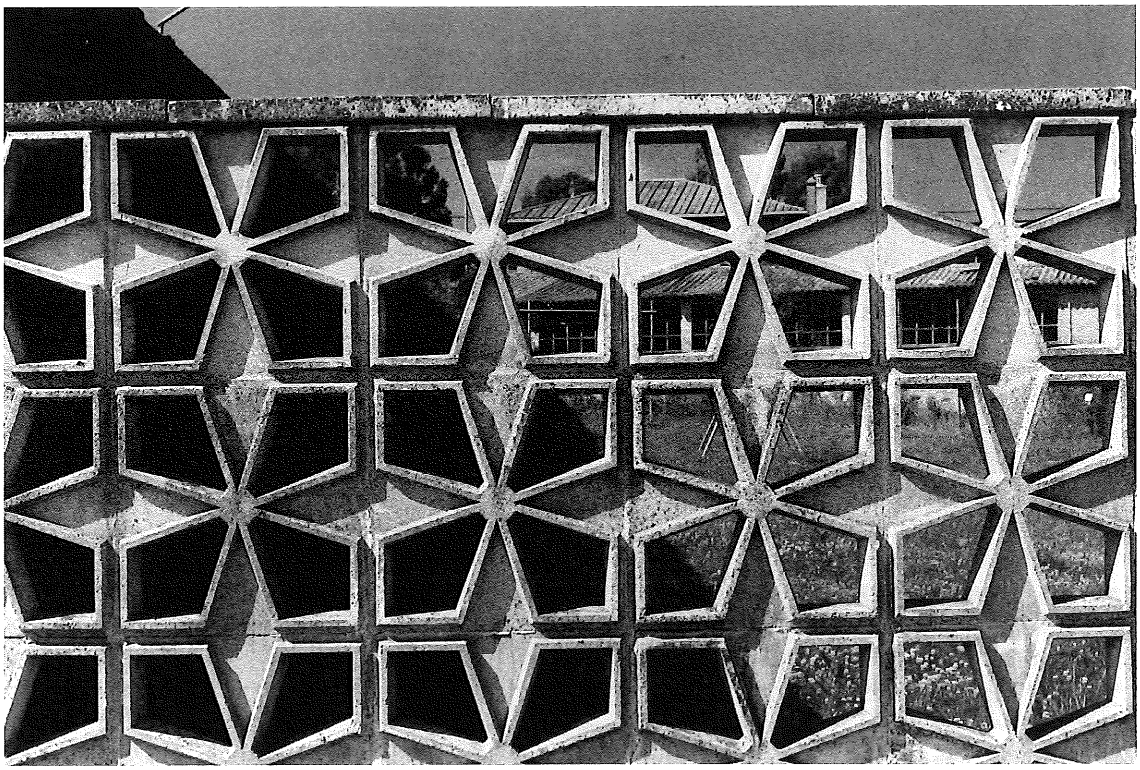
GÓMEZ, P. E. (1996): «Algunas seducciones entre poesía y matemáticas», *Suma,* N.° 22, 91-95.

QUILIS, A. (1993): *Métrica española*, Ariel, Madrid.

RIVERS, E. L. (1990): *Poesía Lírica del Siglo de Oro*, Cátedra, Madrid.

VALLE-INCLÁN, R. del (1967): *Obras escogidas*, Aguilar, Madrid.

José María Santa Olalla
IES de Laguna de Duero
(Valladolid)
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas



La Coruña. Foto: Luis Balbuena