

Historia de la Matemática: implicaciones didácticas

José del Río Sánchez

EL CONOCIMIENTO de la Historia de la Matemática proporciona una comprensión más profunda de los conceptos y de los métodos matemáticos al desvelar sus orígenes, su evolución y sus relaciones; al mismo tiempo, ofrece una visión *encarnada* de los mismos, ya que pone de manifiesto los rostros y las vidas de quienes fueron sus constructores. La Matemática aparece así como una ciencia viva, ligada a las circunstancias históricas, a los problemas de la humanidad y no como una fría sucesión de definiciones, teoremas y métodos flotando en la abstracción más deslumbrante y desvinculados de toda *miseria* humana. Además, el análisis de la evolución histórica de la Matemática proporciona algunos principios sobre cómo ha de enseñarse y aprenderse esta ciencia, principios que, naturalmente, son completados y matizados desde otras fuentes como la psicología del aprendizaje o la reflexión sobre la práctica docente. En las líneas que siguen, se mostrarán algunos de estos principios y su correspondiente justificación histórica.

En el principio fue el problema

La *Arithmetica* de Diofanto (s. III), considerado el padre del álgebra, es una colección de ciento cincuenta problemas concretos resueltos mediante ecuaciones. Tanto en esta obra como en el *Álgebra* de Al-Khowarizmi (s. IX), el introductor del álgebra en Occidente, las incógnitas representan números y longitudes de segmentos pues su intención era resolver problemas, no ecuaciones; éstas sólo son un instrumento de cálculo.

Descartes y Fermat descubren los principios de la geometría analítica cuando tratan de hallar las soluciones de las *ecuaciones indeterminadas* (con dos incógnitas) que

Saber cómo ha evolucionado y cómo evoluciona la Ciencia Matemática ayuda a entender mejor las conexiones entre los diferentes conceptos y procedimientos que la vertebran y permite apreciar su naturaleza viva y humana. Como consecuencia, estos conocimientos contribuyen, sin duda, a enseñar mejor esta ciencia. En este artículo se muestran algunos principios didácticos generales que se obtienen al analizar el desarrollo histórico de la matemática y que se refieren a aspectos como el enfoque del proceso instructivo, la enseñanza de estrategias cognitivas y el uso de los recursos tecnológicos.

los matemáticos anteriores (Viète, por ejemplo) despreciaban cuando surgían al resolver un problema. Descartes se preocupó de decidir cómo se podía construir geométricamente el valor de la y para cada valor de la x . Fermat dio un paso más, representó esos valores de la y , con lo cual obtuvo la gráfica de la ecuación y comprobó que las ecuaciones de primer grado se representan como rectas y las de segundo grado como cónicas. Utilizaba para ello una recta r en la que señalaba los segmentos OA , OA' , OA'' , etc. cuyas longitudes eran los valores de la x , y sobre los puntos A , A' , A'' , etc. dibujaba los segmentos AB , $A'B'$, etc. cuyas longitudes eran los correspondientes valores (siempre positivos) de la y (figura 1).

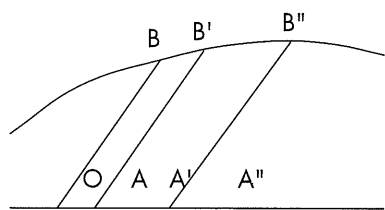


Figura 1

Huygens, un científico holandés con profundos conocimientos en física y astronomía, cuando buscaba un péndulo totalmente isócrona (período independiente de la amplitud) para adaptarlo a la regulación de los relojes, descubrió algunas propiedades asombrosas de la cicloide: por ejemplo, sobre un arco de cicloide invertida, un objeto abandonado a su propio peso, en ausencia de rozamiento se desliza desde cualquier punto al punto más bajo exactamente en el mismo tiempo, independientemente del punto de partida (figura 2); descubrió también que la evolvente de una cicloide es otra cicloide y ambos hechos los utilizó en la fabricación del péndulo buscado al mismo tiempo que fundaba la teoría de las evolutas y de las evolventes (figura 3).

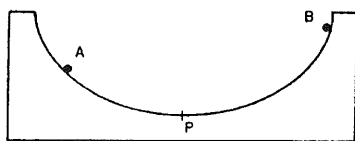


Figura 2

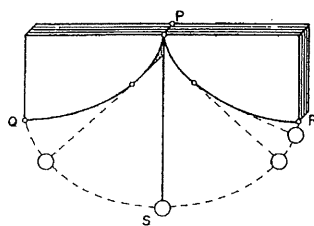


Figura 3

...el aprendizaje de las matemáticas debe arrancar con un problema que sea sentido como tal por quien aprende y, en consecuencia, la enseñanza de las matemáticas debe comenzar proponiendo a los estudiantes un problema con sentido para ellos.

Menecmo en el siglo IV a.C. descubre las cónicas cuando intentaba resolver el problema de la duplicación del cubo; las técnicas trigonométricas surgen como respuestas a problemas de astronomía; varios matemáticos del s. XVII inventan el cálculo diferencial e integral para resolver problemas de trazado de tangentes y determinación de áreas, etcétera.

Estos ejemplos ilustran suficientemente la idea de que la ciencia matemática se construye a partir de la resolución de problemas, problemas cuyos orígenes son además muy diversos: satisfacer o mejorar una necesidad práctica o técnica, buscar explicaciones a fenómenos físicos o sociales, responder a una inquietud cultural o lúdica, mejorar métodos de la propia matemática, etc. Por lo tanto, el aprendizaje de las matemáticas debe arrancar con un problema que sea sentido como tal por quien aprende y, en consecuencia, la enseñanza de las matemáticas debe comenzar proponiendo a los estudiantes un problema con *sentido* para ellos. Esta característica, tener sentido, es muy importante. Históricamente se comprueba que muchos problemas no fueron abordados por grandes matemáticos porque, en aquel momento, para ellos carecían de sentido. Veamos algunos ejemplos. Omar Khayyam, poeta y matemático árabe que vivió entre los siglos XI y XII, escribió un tratado de álgebra que extendía la obra de Al-Khowarizmi hasta incluir las ecuaciones cúbicas, resueltas geométricamente utilizando intersecciones de cónicas; sin embargo, no trató ecuaciones de grado superior porque su espacio no tenía más de tres dimensiones. Algo parecido le pasó a Pappus, un matemático de Alejandría (s. III-IV) que en su *Colección matemática* trató el problema del «lugar determinado por tres o cuatro rectas», cuyo origen parece remontarse a la época de Euclides; para cuatro rectas su enunciado es el siguiente: «Dadas cuatro rectas del plano, hallar el lugar geométrico de los puntos P que se mueven de tal manera que el producto de los segmentos PA y PB trazados con

un ángulo fijo a dos de ellas, es proporcional al producto de los segmentos PC y PD trazados a las otras dos con el mismo ángulo.» Pappus demuestra que este lugar es siempre una cónica y generaliza el problema para cinco y seis rectas en cuyo caso sólo llega a reconocer la existencia de una curva determinada por la condición de que el producto de las distancias de un punto a tres de ellas sea proporcional al producto de sus distancias a las otras tres. Pero Pappus no analizó los casos superiores porque el producto de más de tres segmentos no tenía un significado geométrico y, por lo tanto, el problema carecía de *sentido* para él. Sin embargo, trece siglos más tarde, Descartes con una nueva mentalidad aborda este problema y demuestra que para cinco o seis rectas este lugar es una cúbica, para siete u ocho es una cuártica y así sucesivamente. De este modo, un nuevo grupo de objetos geométricos, las curvas algebraicas, entran a formar parte del dominio de la matemática.

Por lo tanto, el camino del aprendizaje de los conceptos y de los procedimientos matemáticos ha de partir de problemas con sentido para los estudiantes con el fin de que puedan asumirlos y se genere en ellos una cierta tensión epistémica, un cierto deseo de saber que ponga en marcha el proceso de aprendizaje. Esto no se consigue trasvasando literalmente los problemas que originaron el concepto o el procedimiento; es necesario reformularlos o buscar otros cercanos a lo habitual, a lo ya conocido, pero a la vez desafiantes y novedosos.

Y después el proceso

El proceso resolutivo conduce a la construcción de los conceptos y al descubrimiento de teoremas y métodos. Pero antes de llegar al producto final, a la teoría formalmente elaborada, se atraviesan etapas en las cuales se obtienen soluciones «aproximadas», conoci-

... antes de llegar al producto final, a la teoría formalmente elaborada, se atraviesan etapas en las cuales se obtienen soluciones «aproximadas», conocimientos parciales, resultados aislados, que con el tiempo cuajarán en una teoría general.

mientos parciales, resultados aislados, que con el tiempo cuajarán en una teoría general. Así, por ejemplo, antes de que Newton y Leibniz descubrieran sus métodos generales para trazar tangentes y calcular áreas, ya se habían obtenido a lo largo del s. XVII resultados para casos concretos utilizando métodos similares cuando no isomorfos a los que luego se plasman en la teoría final: Gregory de St. Vincent conocía que el área bajo la curva $y = 1/(1+x^2)$ entre 0 y x era $\arctg x$ y bajo la hipérbola $y=1/(x+1)$, $L(1+x)$; Fermat calculó el área bajo las curvas $y = x^m$ para m racional distinto de -1 ; Barrow, Sluse y el propio Fermat poseían métodos para trazar tangentes a curvas dadas por expresiones de la forma $y = f(x)$ o $f(x, y) = 0$; etc.

A veces, a lo largo de estas etapas se producen conjeturas erróneas, demostraciones falsas o incompletas, proposiciones no demostradas y otras deficiencias que se corrigen posteriormente. Galileo, por ejemplo, confundió la catenaria con una parábola; Jean Bernouilli creía que $L(-n) = L(n)$; Leibniz aseguraba que $1-1+1-1+\dots = 1/2$; G. de St. Vicent creía haber demostrado la cuadratura del círculo; Huygens sostenía que π era un número algebraico; Newton enunció y utilizó el teorema del binomio (la serie binomial) sin demostración; MacLaurin señaló la siguiente paradoja: Stirling había enunciado que $[n(n+3)]/2$ puntos determinan una única curva algebraica de grado n y el propio MacLaurin había establecido que dos curvas de orden m y n se cortan en general en mn puntos, luego dos cúbicas se cortan en nueve puntos y, por lo tanto, nueve puntos no determinan una única cúbica; etc.

Se observa también que en este proceso constructivo de la matemática juegan un papel importantísimo ciertas técnicas o estrategias generales que sirven para *hacer matemáticas*, es decir, para resolver problemas, para plantear nuevos problemas, para definir conceptos, para conjeturar propiedades o relaciones entre conceptos, para inventar procedimientos algorítmicos, para demostrar o refutar proposiciones, etc. Entre las más fructíferas destacamos la generalización, la búsqueda de regularidades o analogías, la representación mediante dibujos o modelos, la elección de un simbolismo apropiado, el estudio de posibilidades, la deducción lógica y la modificación de condiciones. Veamos algunos ejemplos de usos históricos de estas estrategias.

La generalización ha estado presente en todos los ámbitos de la construcción de la matemática. Ya hemos indicado antes que Descartes, generalizando el problema de Pappus, encontró las curvas algebraicas de grado mayor que dos. Fermat generalizó un problema de Diofanto (dividir un cuadrado en dos cuadrados) y formuló su famosa conjetura sobre la inexistencia de soluciones enteras de la ecuación $x^n+y^n = z^n$ para $n > 2$. Cramer, con su regla para resolver sistemas de ecuaciones lineales, generalizó un procedimiento ya conocido por MacLaurin para dimensiones pequeñas.

El estudio de posibilidades y la búsqueda de regularidades o analogías ha conducido a inventar conceptos nuevos, a clasificar objetos matemáticos, a descubrir procedimientos algorítmicos y a plantear y resolver problemas. Descartes, por ejemplo, clasificó las curvas en algebraicas y mecánicas (que luego serían llamadas, con más propiedad, trascendentes) y Newton hizo una primera clasificación de las cúbicas. Cardano, Tartaglia y Ferrari, en el s. XVI, utilizando métodos análogos a los de Al-Khowarizmi (completar cuadrados y cubos), consiguieron resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado.

La elección de un simbolismo apropiado ha sido determinante en la resolución de muchos problemas y en la facilitación de muchos algoritmos como lo demuestra la adopción del sistema de numeración hindú o del lenguaje algebraico que tan lentamente fue construyéndose a lo largo de los siglos. La representación de problemas, objetos geométricos, proposiciones, etc. mediante dibujos jugó un papel básico en la geometría tanto sintética como analítica. También la construcción de modelos ha sido útil en muchas ocasiones. Por ejemplo, Galileo para determinar el área encerrada por un arco completo de cicloide, recortó una lámina de metal con esta forma y otra con la forma del círculo generador; pesó ambas y conjeturó que el área de la cicloide era el triple que la del círculo. (Más tarde, Roberval demostró que esta conjetura era verdadera.)

El razonamiento lógico deductivo ha sido el mecanismo de demostración más utilizado en la historia de la matemática cuando sus contenidos se comunican a los demás en forma de libro o de artículo. Ya desde la época griega este razonamiento adoptó esencialmente dos modalidades que han persistido hasta hoy: el razonamiento analítico y el razonamiento sintético. El primero consiste en buscar una cadena de proposiciones equivalentes a la que se quiere demostrar hasta llegar a una proposición ya conocida o a un axioma, en cuyo caso la proposición es verdadera, o a una contradicción, en cuyo caso es falsa. El razonamiento sintético consiste en partir de axiomas o proposiciones conocidas y, mediante argumentos lógicos, llegar a la proposición que se desea probar. Los *Elementos* de Euclides y las *Cónicas* de Apolonio son modelos paradigmáticos del uso de esta estrategia, en cambio las técnicas algebraicas aplicadas a la geometría constituyen razonamientos analíticos, lo cual justifica el nombre asignado a esta geometría.

La modificación de las condiciones de un problema, la inversión de un procedimiento o la variación de las hipótesis de una proposición han producido resultados interesantes en la evolución de la matemática. Por ejemplo, al eliminar la condición de usar sólo la regla y el compás en la resolución de los tres problemas clásicos se obtuvieron numerosos descubrimientos: curvas (cónicas, trisectriz, cuadratriz,...), series numéricas, ecuaciones, etc.

El estudio de posibilidades y la búsqueda de regularidades o analogías ha conducido a inventar conceptos nuevos, a clasificar objetos matemáticos, a descubrir procedimientos algorítmicos y a plantear y resolver problemas

El razonamiento lógico deductivo ha sido el mecanismo de demostración más utilizado en la historia de la matemática cuando sus contenidos se comunican a los demás en forma de libro o de artículo.

De este análisis se pueden extraer dos consecuencias didácticas:

En primer lugar, el método de enseñanza debe permitir a los estudiantes el uso de razonamientos inductivos antes de facilitarles los conceptos o los procedimientos totalmente elaborados: explorar, tantear, buscar ejemplos y contraejemplos, analizar casos particulares, formular conjeturas, etc.; luego debe venir una etapa de sistematización y formalización en la que se utilicen los razonamientos deductivos (basta donde lo permita su capacidad); la formulación «rigurosa» es la última fase en la construcción del conocimiento matemático, no la primera.

En segundo lugar, las estrategias cognitivas generales que hemos citado antes, comunes a muchas otras ciencias, deben ser enseñadas como un contenido de aprendizaje en las mismas condiciones que los conceptos o los procedimientos específicos, y esto debe hacerse permitiendo a los alumnos que hagan matemáticas, que practiquen estas estrategias en todos los ámbitos de aplicación: enunciado y resolución de problemas, definición de conceptos, formulación de conjeturas sobre propiedades o relaciones entre conceptos, invención de procedimientos algorítmicos, demostración o refutación de proposiciones, etc.; algunos conceptos o procedimientos podrían perder su vigencia pero las estrategias cognitivas son mucho más duraderas como lo demuestra su presencia constante a lo largo de la historia.

La curva de la importancia

Si representamos en el eje de abscisas los conceptos y los procedimientos que se han ido construyendo a lo largo de la historia de la matemática y en el eje de ordenadas el grado de «importancia» que tuvieron en una determinada época, constatamos que la curva obtenida varía notablemente con el transcurso de los años. Los conceptos, las

estructuras conceptuales y los procedimientos, relacionándose unos con otros, se organizan y tienden a engendrar otros más generales, es decir, más abstractos o con mayor ámbito de aplicabilidad. Por lo tanto, se trata de conocimientos en continua evolución, donde algunos pueden quedar obsoletos y otros se revisan para ampliar su significado o para relegarlos a un segundo plano. En la historia abundan los ejemplos: ciertas curvas descubiertas por los griegos como la trisectriz o la cuadratriz hoy carecen de todo interés específico, en cambio la curvas mecánicas, «desterradas» por Descartes, tuvieron gran importancia en los siglos posteriores; la geometría clásica sufrió un progresivo abandono en la Edad Moderna y hoy muchos de sus problemas de gran importancia histórica (como las construcciones con regla y compás) y la mayoría de sus teoremas no aparecen en los libros de texto de la enseñanza elemental y superior; las fracciones sexagesimales de uso generalizado hasta el siglo XVI fueron abandonadas y sustituidas lentamente por las fracciones decimales; hoy nadie utiliza las tablas logarítmicas ni el uso de los logaritmos tiene como objetivo facilitar los cálculos tal como habían pensado sus creadores, Bürgi y Neper; las fórmulas trigonométricas para emplear logaritmos también han desaparecido y la calculadora sustituye con ventaja a las tablas y a muchos algoritmos de lápiz y papel (como el cálculo de la raíz cuadrada). Estos ejemplos nos muestran que la importancia de un concepto, de un teorema o de un procedimiento algorítmico es algo contextual, relativo al estado de la ciencia en ese momento y, por lo tanto, la «eternidad» de las verdades matemáticas es una cualidad relativa.

En consecuencia, en la enseñanza de las matemáticas debe tenerse en cuenta el carácter evolutivo de los conocimientos, su estado actual y los recursos tecnológicos que pueden afectar a su desarrollo; por ejemplo, la generalización del uso de la

Las matemáticas han sido construida por hombres de carne y hueso como la filosofía o las obras de arte; sin embargo, en su enseñanza se escamotean sus nombres y sus rostros.

informática debe llevar al profesorado a revisar la enseñanza de ciertos algoritmos del cálculo infinitesimal y del álgebra lineal (tal vez haya que poner más énfasis en la comprensión de los conceptos, en la resolución de verdaderos problemas y en la construcción de los algoritmos que en su aplicación rutinaria, tarea que debe encomendarse a las máquinas). No se puede caminar en contra de la historia.

Los rostros de las matemáticas

Las matemáticas han sido construidas por hombres de carne y hueso como la filosofía o las obras de arte; sin embargo, en su enseñanza se escamotean sus nombres y sus rostros. Cierto es que la memoria histórica no ha sido muy justa pues algunos autores se hunden en el anonimato y a otros se les atribuyen descubrimientos que no les corresponden. Por ejemplo, la geometría *cartesiana*, nombre utilizado por Jean Bernouilli en 1692, fue inventada también por Fermat; los logaritmos *neperianos* también fueron inventados media docena de años antes por Bürgi; la famosa regla del marqués De L'Hôpital fue descubierta por Jean Bernouilli quien había pactado con el primero que le enviaría sus descubrimientos a cambio de un salario regular; el triángulo numérico de Pascal aparece por vez primera en una obra china de 1303 y, en Occidente, en una obra de Petrus Apianus publicada un siglo antes de que Pascal estudiara sus propiedades; la serie de Taylor ya era conocida mucho antes por James Gregory y la de MacLaurin también había sido descubierta y publicada antes por Stirling; etc.

En cualquier caso, a pesar de las «falsificaciones», que el estudio de la historia de la matemática va desvelando, es necesario que los estudiantes conozcan algo de la vida y del contexto social y cultural en el que se movieron sus autores. Es particularmente interesante que los alumnos aprecien ciertas actitudes que ellos mantuvieron a lo largo de su vida: curiosidad e interés por buscar y resolver problemas, tenacidad en el trabajo, autonomía e independencia intelectual, estima de la competencia y del juicio de otras personas, actitud crítica y revisionista, etc. Estos conocimientos humanizarán la enseñanza de las matemáticas y contribuirán a que se generen en los estudiantes actitudes similares con lo cual mejorará también su aprendizaje de los conceptos y de los métodos matemáticos.

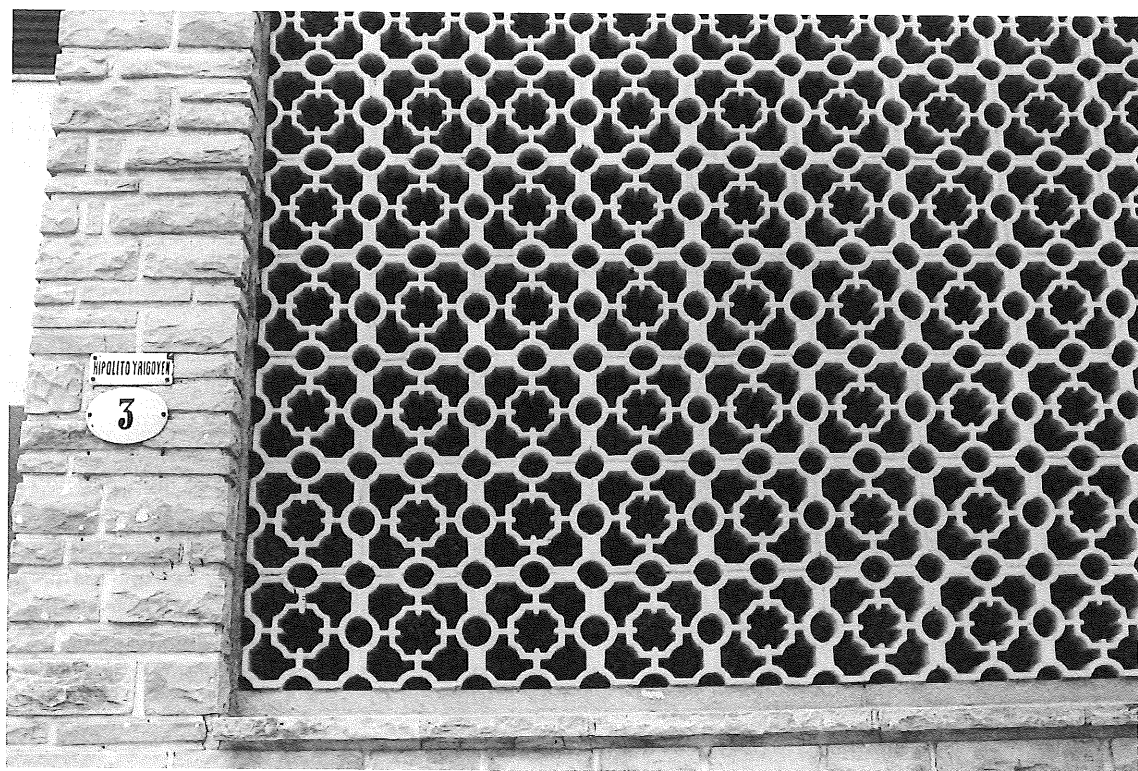
En resumen, creemos que los principios didácticos enunciados en cada uno de los párrafos precedentes, fundamentados en el análisis de la evolución histórica de la matemática y coherentes con la teoría constructivista del aprendizaje, deben ser tenidos en cuenta a la hora de

diseñar cualquier metodología de enseñanza de las matemáticas que aspire a que los estudiantes sean algo más que memorizadores de definiciones y aplicadores de métodos rutinarios; estos principios pretenden que los estudiantes adquieran una comprensión profunda de lo que significan las matemáticas: sus conceptos, sus procedimientos y sus estrategias generales.

José del Río
IES Torres Villarroel.
Salamanca.
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesorado
de Matemáticas

Bibliografía

- BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza, Madrid.
- COLLETE, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI, Madrid.
- KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestro días*, Alianza, Madrid.



Salta (Argentina). Foto: Luis Balbuena

SUMA

SUSCRIPCIONES

Particulares: 3.500 pts. (3 números)
Centros: 5.000 pts. (3 números)
Número suelto: 1.700 pts.

Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. Pedro Cerbuna, 12. 50009 ZARAGOZA