SUMA 26
noviembre 1997, pp. 23-32

Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficie de figuras planas

Enrique Castro Martínez
Pablo Flores Martínez
Isidoro Segovia Alex

ARTÍCULOS

Las fórmulas que empleamos para calcular el área de una superficie geométrica se basan en las medidas de longitudes de esas figuras, con el peligro de que se considere la superficie como una magnitud derivada de la longitud. Pero además estas fórmulas para el cálculo de áreas dependen de la forma geométrica que se ha elegido como unidad de superficie: el cuadrado. Aunque esta elección es adecuada desde un punto de vista práctico, si queremos formar mentes que sean capaces de resolver problemas más generales y comprender el concepto de superficie sin reducir su cálculo a la mera aplicación de una fórmula, debemos indicar opciones alternativas y una de ellas puede ser relativizar la elección de la unidad de medida. En este artículo hemos tomado como unidad de superficie un triángulo equilátero de lado unidad con el cual hemos revisado y mostrado la relatividad del proceso de cálculo de superficies áreas de figuras planas.

EN MUCHAS ocasiones la forma de enseñar las matemáticas escolares conduce a los estudiantes a la creencia de que la matemática es un sistema de verdades absolutas con fórmulas *mágicas* que los alumnos deben manejar sin un mínimo de control *inteligente*. Un ejemplo claro de lo que decimos lo constituyen las fórmulas para el cálculo de áreas de figuras planas. Para muchos estudiantes estas fórmulas son el concepto mismo de área y quedan cada una de ellas íntimamente ligadas a la figura correspondiente. Entre las razones que conducen a esta creencia hay que situar las *prácticas* educativas en el aula, y sobre ellas queremos proyectar nuestra reflexión.

De las fórmulas que empleamos para calcular el área de una superficie geométrica plana destacamos dos aspectos:

a) Se basan en las medidas de longitudes de esas figuras. De esta manera se está considerando la superficie como una magnitud derivada de la longitud. En muchas ocasiones la práctica escolar se queda sólo en estudiar la magnitud superficie como magnitud derivada de la longitud y relega al olvido el estudio de las propiedades inherentes a la magnitud superficie.
b) Las fórmulas que usamos para el cálculo de áreas dependen de la forma geométrica que se ha elegido como unidad de superficie: el cuadrado. Desde un punto de vista práctico esta elección es acertada, pero si queremos formar mentes flexibles y que sean capaces de resolver problemas más generales de una manera inteligente, que no sea la mera aplicación de una fórmula, debemos indicar opciones alternativas y una de ellas puede ser relativizar la elección de la unidad de medida.

En la enseñanza de la medida de superficies, hoy día parece haber una relajación en remarcar que la unidad de medida es producto de una elección arbitraria, aunque no caprichosa, y que las medidas son relativas respecto a la unidad de medida elegida. Esto se contrapone con la insistencia, en un pasado no muy lejano, de los autores de cursos de geometría elemental por dejar sentado la relatividad de las medidas y el carácter adoptivo de la unidad de medida. Así, en el libro de texto de Sánchez y Sabrás (1904, 185-186) leemos

Área es la relación con otra superficie que se toma como unidad [...]. Para la determinación de las áreas, se adopta como unidad un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal.

En muchos de estos textos clásicos de enseñanza de la Geometría hay una renuncia expresa a tratar la medida directa de las superficies. La razón que alegan Sánchez y Sabrás es que cubrir una superficie con cuadrados unidad no es posible en la mayoría de los casos y es bastante penosa en los demás. Como consecuencia de estas dificultades se suple por la determinación indirecta de las áreas de las figuras geométricas mediante las fórmulas.

Hay en estos autores clásicos un especial cuidado en poner de manifiesto y destacar que las fórmulas para el cálculo indirecto de áreas de figuras planas no son fórmulas absolutas, sino relativas a la unidad cuadrada (Puig, 1979). Incluso se intenta enfatizar esta circunstancia poniéndola al principio de la frase cuando los autores traducen las fórmulas del cálculo de áreas de figuras planas al lenguaje usual. Refiriéndose al área del rectángulo Sánchez y Sabrás escriben:

Cuando se toma por unidad de área un cuadrado cuyo lado es la unidad lineal, el número que expresa el área de un rectángulo es igual al producto de los números que expresan las longitudes de su base y de su altura (p. 188).

Los autores anteriores son conscientes del olvido en que suele caer la referencia a la unidad de medida y lo advierten:

Ordinariamente, se abrevia este enunciado diciendo: El área de un rectángulo es igual al producto de su base por altura (p. 188).

Lo que sigue a continuación en el texto es una constante que se repite en muchos autores y materias. En aras de la brevedad los autores deciden que esta última es la expresión que emplearán en lo sucesivo. Para «curarse en salud» los autores aclaran:

En lo sucesivo, emplearemos este lenguaje abreviado, a pesar de ser inexacto, pero a condición de no olvidar qué sentido se debe atribuir a las palabras (p. 188).

Con estas aclaraciones se le traslada al estudiante la responsabilidad de suplir en lo sucesivo las inexactitudes lingüísticas que se emplean y el trabajo escolar se va a centrar en la obtención, memorización y aplicación de las fórmulas para calcular el área de las figuras planas. Ello tiene como consecuencia que el alumno, cuando le hablen de áreas de figuras planas, lo identifique con fórmulas, y que piense que estas fórmulas son únicas, en el sentido de que es la única manera que existe de calcular el área de las figuras planas. Pensamos que es bueno que se relativice un poco esta forma de pensar absolutista. Una forma de hacerlo es realizar actividades de medida con unidades alternativas al cuadrado que conduzcan a la obtención de otras fórmulas, que si bien no tendrán que memorizarse, sí contribuirían a la relativización de la medida, al mejor entendimiento de lo que es medir una superficie de modo directo y a percibir las implicaciones que tiene la elección de una u otra unidad de medida, no sólo sobre el resultado final sino también sobre la fórmula que se obtendría.

En muchos de estos textos clásicos de enseñanza de la Geometría hay una renuncia expresa a tratar la medida directa de las superficies.

Esto tiene además otros efectos, así para un alumno que ha trabajado ya la obtención de áreas de las figuras planas, es un ejercicio matemático muy motivador e intrigante descubrir, por ejemplo, que cuando se toma como unidad de medida el triángulo equilátero de lado unidad, un triángulo equilátero de lado *a* tiene como área a^2. Este puede ser el comienzo para realizar una reflexión sobre las nociones geométricas que son consecuencia de la elección del cuadrado como unidad de medida y poner de manifiesto cuáles son consustanciales con la forma cuadrada y cuáles no dependen de esta forma geométrica.

Una de las consecuencias más conocidas es la de los números cuadrados. Expresados en su nomenclatura más general, los números cuadrados son las potencias segundas de los números. El hecho de que el área de un cuadrado se obtenga mediante la potencia segunda de la medida de su lado, ha ocasionado que el nombre números cuadrados, desbanque a la terminología de potencias. Pero cuando uno mide superficies empleando como unidad de medida el triángulo equilátero, observa que las potencias segundas están relacionadas con el área de los triángulos equiláteros. Por tanto, las potencias segundas de los números no son una propiedad exclusiva de la figura cuadrada. Una civilización que hubiera elegido el triángulo equilátero como unidad de medida posiblemente se hubiera visto conducida a llamar a las potencias segundas «números equiláteros», término que etimológicamente refleja mejor la representación geométrica de las potencias segundas de los números, puesto que resalta la igualdad de la medida de los lados.

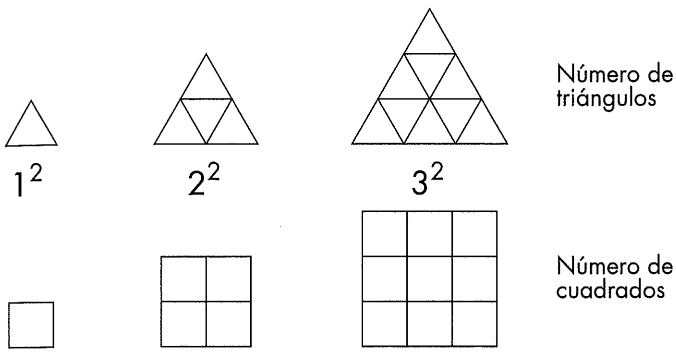

Figura 1. Relación entre la longitud del lado y el número de unidades

Elección de la forma de la unidad de medida

Para realizar prácticamente la medida en el plano del área de un polígono es preciso buscar una unidad que rellene el polígono de manera fácil. Esto forma parte de la práctica escolar. En el estudio escolar de las medidas de superficies, una de las actividades preliminares más aconsejadas por distintos autores son las de recubrimiento del plano (Olmo, Moreno y Gil, 1989). Estas actividades ponen al alumno en condiciones de percibir la superficie y lo introducen en las exigencias prácticas que requiere la medida directa de una superficie, como la no superposición de las piezas que se utilizan en el recubrimiento, las condiciones que requiere una figura para recubrir el plano y la observación directa de qué figuras recubren el plano y cuáles no.

En el estudio escolar de las medidas de superficies, una de las actividades preliminares más aconsejadas por distintos autores son las de recubrimiento del plano...

En esta fase el alumno puede ver con actividades de recubrimiento del plano que hay muchas figuras que recubren el plano, pero que si imponemos la condición de que la figura sea regular quedan sólo tres figuras: el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular. También puede ponerse de manifiesto mediante actividades de recubrimiento que el hexágono regular se compone de seis triángulos equiláteros y que por tanto es fácil pasar de uno a otro recubrimiento. Puesto que el triángulo equilátero es más simple que el hexágono regular, produce recubrimientos de otras figuras del plano con menos huecos, por lo que produce un recubrimiento más fino y lo convierte en una figura más adecuada que el hexágono regular. Además, el triángulo equilátero y el cuadrado permiten construir un triángulo equilátero y un cuadrado, respectivamente, mientras que con hexágonos no podemos construir un hexágono. Así pues, con actividades de recubrimiento del plano podemos llegar con los alumnos a la conclusión de que entre las figuras que recubren el plano resaltan dos: el triángulo equilátero y el cuadrado.

Interesados, como ya se ha referido, en que en el estudio de la medida de magnitudes se incida con mayor frecuencia en la comparación de superficies y en quitarle una cierta rigidez absolutista al conocimiento matemático, hemos reflexionado sobre las implicaciones que tiene la unidad de medida elegida sobre las fórmulas de cálculo del área a partir de las longitudes, la demostración de los teoremas ligados a estas fórmulas y la influencia que ha podido tener sobre el uso de conceptos y términos asociados en la geometría del plano.

Para poner lo anterior de manifiesto hemos desarrollado la geometría que resulta de elegir como unidad de medida de superficie un triángulo equilátero. Trataremos de llegar a construir las fórmulas de cálculo del área de figuras planas en este nuevo sistema. Para ello nos apoyaremos en el proceso seguido cuando se toma una unidad de forma cuadrada. Una primera estrategia para obtener el número de triángulos unidad que caben en cualquier figura sería estudiar el número de triángulos unidad que caben en el cuadrado unidad y aplicar el coeficiente corrector a las fórmulas clásicas, es decir, hacer un cambio de unidad de medida. Pero nosotros estamos más interesados en razonar con el triángulo de manera independiente y estudiar las consecuencias de esta nueva elección, la forma en que repercute en los razonamientos en esta geometría del triángulo y sus consecuencias didácticas.

Relación entre las dos formas de la unidad de medida. Cambio de unidad de medida

Un concepto fundamental en el estudio de la medida es el cambio de unidad de medida y la obtención de las fórmulas que permiten realizar el paso de las medidas efectuadas con una unidad a las efectuadas con otra. Para el caso de la medida de superficies este punto plantea problemas interesantes que pueden dar juego en la clase. Un primer problema puede ser el estudiar la relación entre las dos figuras geométricas que se toman como unidad. Restringiéndonos al caso del triángulo equilátero y del cuadrado, ambos de lado unidad, la obtención de las dos fórmulas del cambio de unidad es un reto para el alumno que le permite poner en juego conceptos algebraicos y geométricos aprendidos previamente y descubrir nuevas relaciones entre el triángulo equilátero y el cuadrado a partir de su representación gráfica. Por ejemplo, si se hace coincidir un lado del triángulo equilátero de lado unidad con uno de los lados de un cuadrado de lado unidad, resulta sorprendente para los alumnos que el vértice del triángulo equilátero de lado unidad no alcance al lado opuesto del cuadrado (figura 2).

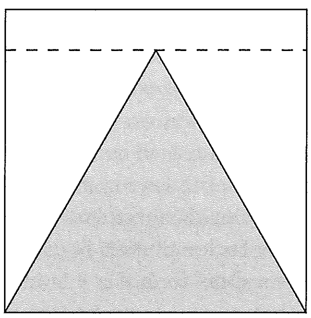

Figura 2. Relación entre unidades

Teniendo en cuenta que el área del triángulo equilátero de lado *l* en unidades cuadradas es

$$l^2\sqrt{3} / 4$$

las fórmulas del cambio de base serán:

$$\text{Area del Triángulo} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{Area del Cuadrado}$$

$$\text{Area del Cuadrado} = \frac{\sqrt{3}}{4}\ \text{Area del Triángulo}$$

$$\text{Area de cualquier figura en unidad triangular} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{Area en unidad cuadrado}$$

Llegados a este punto el lector puede pensar que estas fórmulas del cambio de unidad permitirían por sí solas obtener las fórmulas de las áreas de las figuras planas cuando se toma el triángulo equilátero como unidad, a partir de las fórmulas previamente obtenidas cuando se toma como unidad el cuadrado. Pero la elección de una unidad de medida de superficies lleva aparejados el definir conceptos geométricos paralelos que son consustanciales con las características de esa forma geométrica. La elección del cuadrado como unidad de medida va paralela con otras elecciones: el ángulo recto de 90°, la malla rectangular, la noción de perpendicularidad relacionada con 90°, la noción de altura basada en la perpendicularidad, etc. Por ello, un simple cambio de unidad sólo nos permitiría obtener el número de triángulos equiláteros que caben en las figuras, pero en función de nociones que están asociadas con la unidad cuadrada. Si queremos obtener este área en función de nociones ligadas a la unidad triangular, hay que tener en cuenta además, que la noción de altura se ve afectada por el cambio de unidad de medida. En una geometría del plano en la que el triángulo equilátero fuese la unidad de medida de superficies, la altura cómoda para trabajar debería ser la longitud del segmento que forma 60° grados con la base, y no 90° como sucede en la geometría en la que se utiliza el cuadrado como unidad de medida. Por tanto, un simple cambio de unidad conduce a fórmulas que están a medio camino entre las nociones ligadas a una forma geométrica y otra. Hay que realizar además el cambio de alturas para obtener las fórmulas adecuadas.

Un concepto fundamental en el estudio de la medida es el cambio de unidad de medida y la obtención de las fórmulas que permiten realizar el paso de las medidas efectuadas con una unidad a las efectuadas con otra.

Veamos un ejemplo:

Cuando se toma el cuadrado como unidad, el área del triángulo es

$$(\text{base} \times \text{altura})/2$$

Haciendo el cambio de unidad

$$\text{Cuadrado} = \frac{4}{\sqrt{3}}\,\text{Triángulo}$$

obtenemos la expresión

$$\frac{4}{\sqrt{3}}\,\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Teniendo en cuenta que la razón entre la altura normal de un triángulo y la altura medida con una inclinación de 60 grados es el seno de 60° (figura 3)

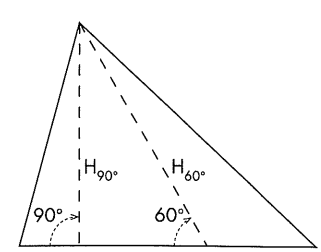

Figura 3. Relación entre las alturas de un triángulo

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\text{altura usual}}{\text{altura inclinada}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sustituyendo y simplificando al final obtenemos que:

Cuando se toma como unidad de medida el triángulo equilátero, el área del triángulo de base B y altura inclinada H_{60° es $B \cdot H_{60^\circ}$.

El proceso anterior está montado a partir del conocimiento que ya se posee de las fórmulas obtenidas para la unidad cuadrada y puede ser un problema interesante para proponer en clase.

Paralelismo en las fórmulas y valor relativo de ellas

Si queremos obtener las fórmulas de medida de áreas para el caso de que el triángulo equilátero sea la unidad de medida, podemos seguir un proceso análogo al establecido para el caso de que la unidad sea el cuadrado. En este proceso el triángulo equilátero realiza la función análoga a la que realiza el cuadrado en las medidas usuales, y por tanto, éste es un primer elemento de analogía entre las dos proceso de medidas, tomado globalmente. Tomado puntualmente vemos que en la correspondencia triángulo equilátero-cuadrado hay diferencias resaltables: el cuadrado tiene ángulos de 90° y el triángulo tiene ángulos de 60°. El cuadrado tiene cuatro lados y el triángulo tiene tres lados. Estas diferencias entre las dos figuras básicas pueden tener o no incidencia en el proceso de analogía entre los resultados de uno u otro proceso de obtención de las fórmulas de medida.

Si queremos obtener las fórmulas de medida de áreas para el caso de que el triángulo equilátero sea la unidad de medida, podemos seguir un proceso análogo al establecido para el caso de que la unidad sea el cuadrado.

Surge la duda sobre cuál debe ser la figura básica que desempeña una función similar al rectángulo. Ya sabemos (Segovia, Castro y Flores, en prensa) que la obtención de las fórmulas usuales para el cálculo del área de las figuras geométricas se basan en la del rectángulo. Como el rectángulo es un cuadrilátero podemos pensar que la figura análoga debe ser un triángulo. Además el rectángulo comparte con el cuadrado el tener los ángulos iguales y tiene también los lados iguales dos a dos. En el caso del triángulo estas condiciones no se pueden dar, pues si los ángulos fuesen iguales tendríamos el triángulo equilátero y en él se confundirían la base con la altura. Si queremos conservar en ese triángulo algunos elementos que sean comunes con el triángulo equilátero, lo máximo que podemos conservar es un ángulo de 60°. Con ello, tenemos un triángulo especial con un ángulo de 60° que va a realizar la misma función que el rectángulo en el caso de las medida con cuadrados (figura 4).

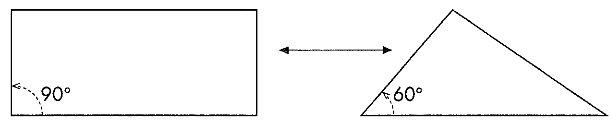

Figura 4. Correspondencia al rectángulo en unidades triangulares

La correspondencia anterior lleva implícita el tener que cambiar algunas ideas preconcebidas que están ligadas a la unidad cuadrada. Una de ellas, ya expuesta, es que si medimos la superficie con triángulos equiláteros tenemos que medir la altura sobre el segmento de recta que forma ángulo de 60° sobre la base. La función usual que hace el ángulo recto de 90° lo haría en este caso el ángulo de 60°. Por tanto, el triángulo que tiene un ángulo de 60° cobra una importancia decisiva en las medidas con triángulos equiláteros. La pregunta que habría que hacerse es si es posible demostrar, de manera similar a como se hace para el rectángulo, que el área del triángulo con un ángulo de 60°, cuando se mide utilizando el triángulo equilátero como unidad de medida, es la base por la altura (tomada sobre la recta que forma 60° con la base), y que esta fórmula es válida para todo triángulo.

En esta demostración hay un primer paso que consiste en poner de manifiesto que el área es la base por la altura cuando las medidas de la base y la altura son enteras. Para ello, de manera análoga a como se hace con el rectángulo, se parte de un triángulo ABC con un ángulo de 60° en A (figura 5). Sea n la medida entera de la base del triángulo y m la medida entera de la altura. En el dibujo n = 6 y m = 3. Dibujamos el triángulo equilátero ABD y trazamos la malla triangular con triángulos equiláteros cuyos lados miden la unidad. Trazando el segmento CQ paralelo a la base por el vértice C, y el segmento CP paralelo al lado BD se forma el paralelogramo CQBP. El segmento CB lo divide en dos triángulos iguales, por tanto, su medi-

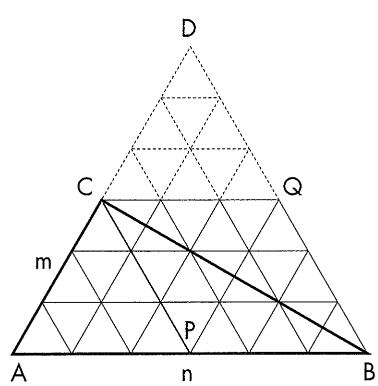

Figura 5. Área del triángulo es base por altura

da será la mitad que la del paralelogramo. Por un proceso de conteo se puede llegar a establecer que el número de triángulos coincide con el producto de la base por la altura.

El segundo paso de la demostración consiste en demostrar que la fórmula es válida para valores reales no enteros. La idea es la misma que para el rectángulo emplea Pogorélov (1974): se encuadra el triángulo con un ángulo de 60° entre dos triángulos con un ángulo de 60° con medidas enteras (figura 6) y se realiza un razonamiento del paso al límite similar al realizado para el rectángulo.

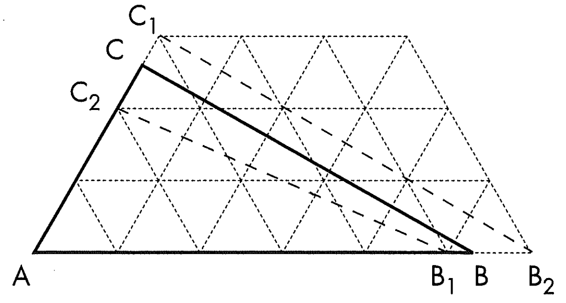

Figura 6. Cálculo del área del triángulo de 60° que no contiene un número entero de triángulos unidad

Una vez que se ha obtenido el área del triángulo de 60 grados se procede a extender la fórmula a figuras más generales. El primer paso es prescindir de la limitación del ángulo de 60° en el triángulo y comprobar que para un triángulo cualquiera se cumple que la fórmula para calcular el área es la base por la altura. Y de nuevo surge la analogía, con unidades cuadradas el paralelogramo tiene igual área que el rectángulo de igual base y altura. Dándole una visión geométrica a este aspecto, es como si a partir de un rectángulo los paralelogramos que se obtienen moviendo el segmento que hace de base o el opuesto sobre líneas paralelas, las figuras que se obtienen tienen la misma área. Esta idea se repite en el caso del triángulo y se puede observar que si en un triángulo trazamos una paralela a la base, todos los triángulos de igual base que tengan su vértice opuesto en esta paralela tienen igual área. La consecuencia inmediata es que todos ellos tendrán la misma área que uno de los dos triángulo de 60° que se pueden dibujar con una misma base y, por tanto, el área de un triángulo cualquiera es igual a la base por la altura de 60° cuando la unidad de medida es el triángulo equilátero (figura 7).

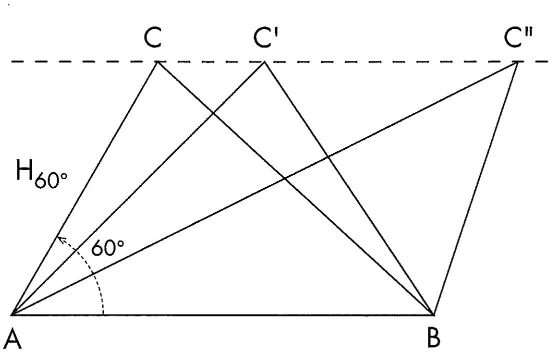

Figura 7. Equivalencia de áreas de triángulos

De forma inmediata sale la fórmula l^2 para calcular el área de un triángulo equilátero como caso particular de triángulo con igual base y altura (figura 8).

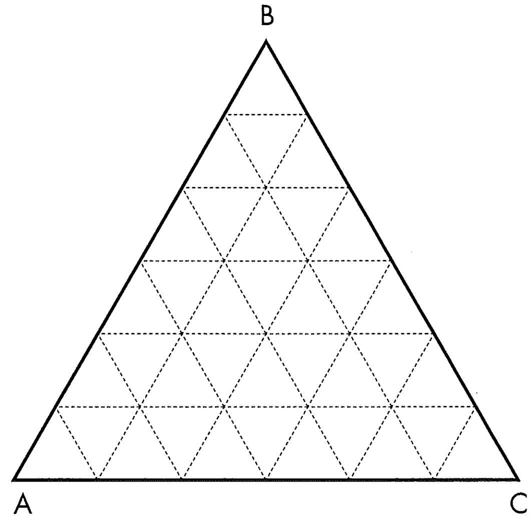

Figura 8. Área del triángulo equilátero

Una vez obtenidas las fórmulas del área del triángulo de 60° en función de la base y de la altura de 60° podemos, mediante relaciones afines entre figuras obtener las fórmulas de las áreas de figuras planas en unidad triangular de manera similar a como se hace para la unidad cuadrada.

A continuación presentamos la deducción de las fórmulas en unidades triangulares, *ut*, paralelamente a las obtenidas con unidades cuadrado, *uc*, situándonos en un punto de vista de enseñanza.

En unidades cuadradas, el área del rectángulo se obtiene multiplicando el número de unidades cuadradas (*uc*) de la base por el número de unidades cuadradas de la altura (de 90°):

$$S = B \cdot H_{90^\circ}\ uc$$

La situación más simple, la que la base y altura del rectángulo contienen un número entero de unidades cuadradas se representa en la figura 9 (la situación más general puede verse en Segovia, Castro y Flores, 1996).

Paralelamente, en unidades triangulares, el romboide de 60° se obtiene multiplicando el número de triángulos de la base 2·B por el número de triángulos de la altura, $H_{60°}$ (ver figura 10). Así el área del romboide de base B y altura $H_{60°}$ es, $S = 2 \cdot B \cdot H_{60°}$ *unidades triangulares (ut)*.

Desde el rectángulo o desde el romboide de 60° se puede construir cualquier paralelogramo de igual altura sin más que trasladar una sección de cualquiera de ellos de un lado a otro como se ve en la figura 11. De esta manera, cualquier paralelogramo se puede construir a partir de un rectángulo o romboide de igual altura. El área, por tanto, de cualquier paralelogramo es la misma que la de la figura origen y según sea en *uc* o *ut*. En el caso del cuadrado donde B = H = L el área es L^2 *uc*; la figura análoga al cuadrado para las unidades triangulares sería el rombo de 60° que tendría la base igual a la altura de 60° y su área sería $2 \cdot L^2$ *ut*.

Por otro lado, cualquier triángulo es equivalente por construcción a la mitad de un paralelogramo de igual base e iguales alturas, bien sea de 60° o de 90° (figura 12). Por tanto la fórmula del área asociada a cualquier triángulo, en unidades cuadrado, es $S = B \cdot H/2$ *uc* y en unidades triangulares $S = B \cdot H_{60°}$ *ut*.

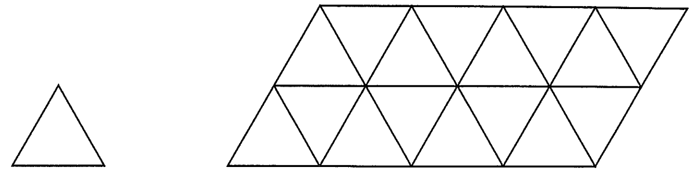

Figura 10. Construcción de un paralelogramo de 60° a partir de triángulos equiláteros

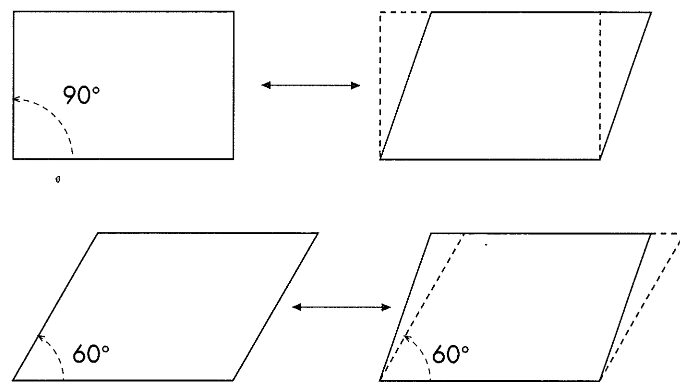

Figura 11. Paralelogramos equivalentes

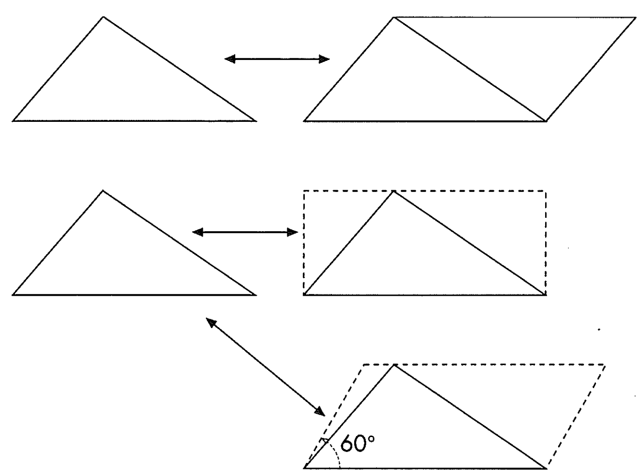

Figura 12. Relación entre superficie de triángulo y de paralelogramo

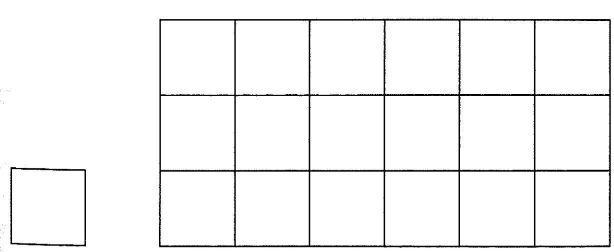

Figura 9. Rectángulo construido con cuadrados

En el caso de los trapecios, cualquier trapecio se puede obtener a partir de un paralelogramo de igual altura de 60° 0 90° de acuerdo con la figura 13.

El área del trapecio es (B+b)·H/2 *uc* y en unidades triangulares $2\cdot(B+b)\cdot H_{60}/2$ es decir $(B+b)\cdot H_{60}$ *ut*.

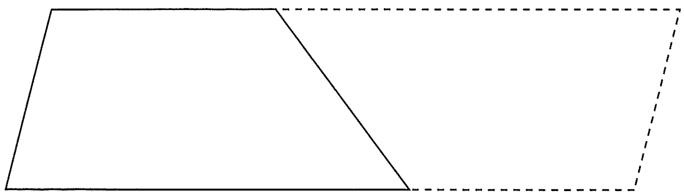

Figura 13. Conversión de un trapecio en un paralelogramo

Un polígono regular cualquiera de *n* lados de longitud *l* y de apotema *A* se puede obtener como composición de triángulos isósceles de altura *A* y base *l*. La apotema puede ser de 90° para el caso de las unidades cuadrado o de 60° para las unidades triangulares (figura 14).

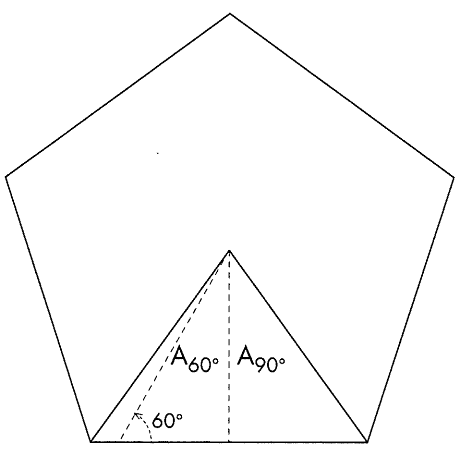

Figura 14. Polígono regular

El área del polígono será por tanto n·l·A/2 *uc* = P·A/2 *uc* y para las unidades triangulares $n\cdot l\cdot A_{60°}$ *ut* = $P\cdot A_{60°}$ *ut*.

Por último, el área del círculo puede obtenerse como límite, en cuanto al número de lados, del área de un polígono regular (figura 15).

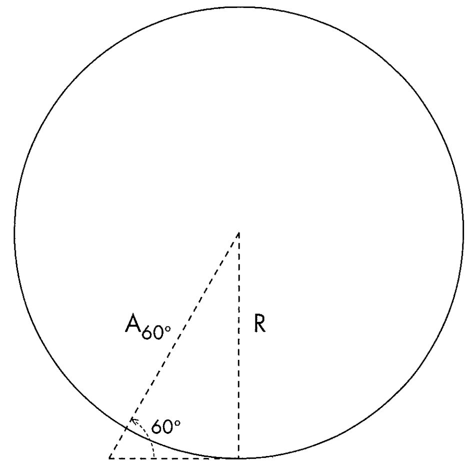

Figura 15. Círculo

En caso de *uc* el límite es $\pi\cdot R^2$ y en el caso de *ut* el límite sería

$$\lim_{n\to\infty} nlA_{60°} = 2\pi RA_{60°} = 2\pi RR\frac{2}{3} = \frac{4\pi R^2}{3}\ ut$$

Un resumen de fórmulas se presenta en el cuadro 1.

Podemos expresar resumidamente la forma en que obtenemos las fórmulas de las áreas de estas figuras en unidades cuadradas y triángulas en el esquema de la figura 16 de la página siguiente.

		Triángulo	Paralelogramo	Trapecio	Polígono regular	Círculo
$H_{90°}$	□	$\frac{BH}{2}$	BH	$\frac{(B+b)H}{2}$	$\frac{PA}{2}$	πR^2
	Δ	$\frac{2BH}{\sqrt{3}}$	$\frac{4BH}{\sqrt{3}}$	$\frac{2(B+b)H}{\sqrt{3}}$	$\frac{2PA}{\sqrt{3}}$	$\frac{4\pi R^2}{\sqrt{3}}$
$H_{60°}$	□	$\frac{BH\sqrt{3}}{4}$	$\frac{BH\sqrt{3}}{2}$	$\frac{(B+b)H\sqrt{3}}{4}$	$\frac{PA\sqrt{3}}{4}$	$\pi R^2\sqrt{3}$
	Δ	BH	$2BH$	$(B+b)H$	PA	$2\pi RA$

Cuadro 1

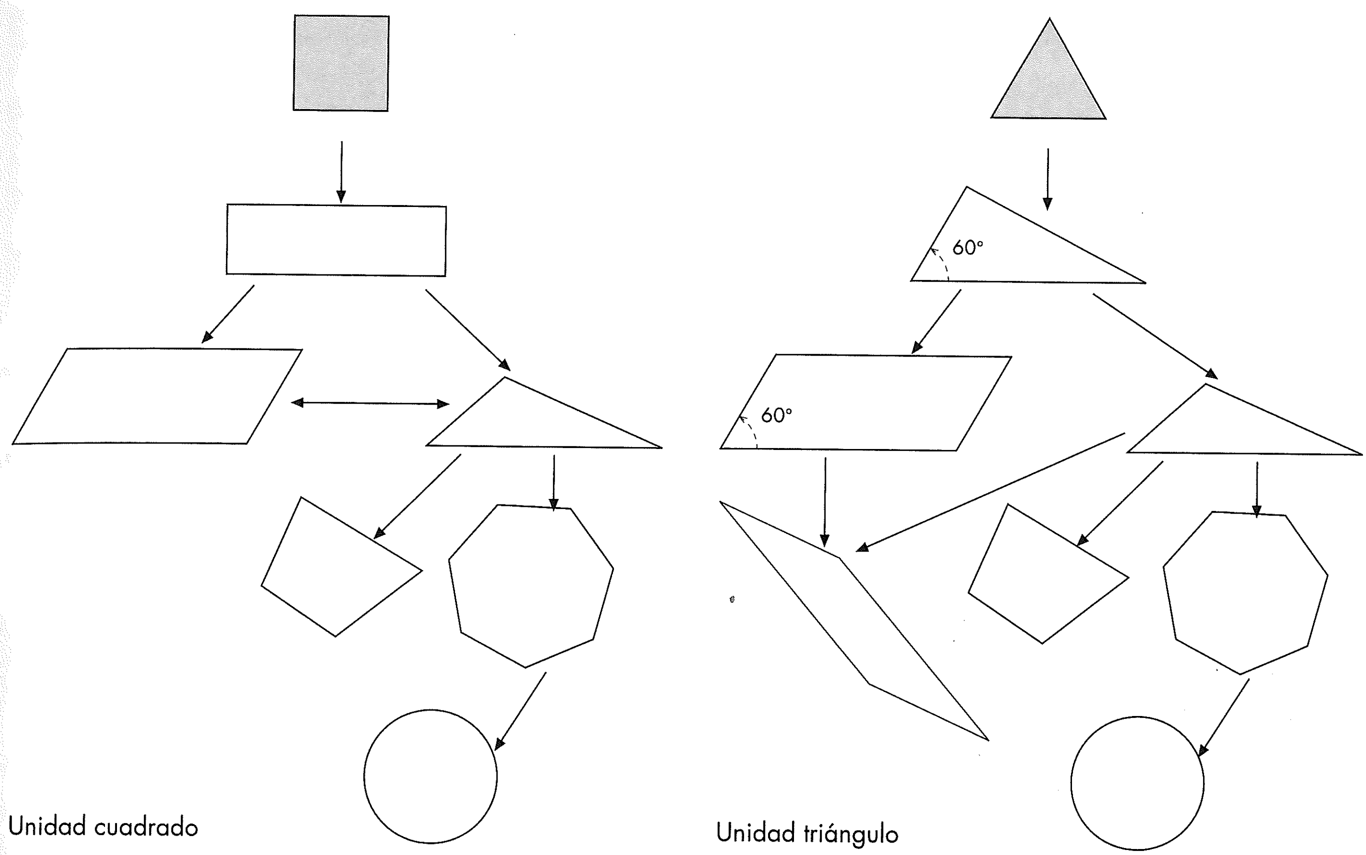

Figura 16. Relaciones para obtener las fórmulas de las áreas de las figuras planas

Conclusiones

El tratamiento escolar en paralelo de los aspectos geométricos relacionados con la medida de superficies que surgen de tomar el cuadrado o el triángulo equilátero como unidades de medida, permite poner en práctica uno de los métodos más potentes de descubrimiento matemático: la analogía (Hernán, 1989, Polya, 1979). El razonamiento analógico consiste en concluir de la semejanza en algunos aspectos de ciertos objetos su semejanza en otros. Hay que destacar que no es un método de demostración, pero sí un instrumento potente de descubrimiento. La aplicación práctica de la analogía en un caso concreto requiere una reflexión para detectar en la analogía establecida cuál es la parte de elementos de semejanza y cuál la de elementos de no semejanza.

...permite poner en práctica uno de los métodos más potentes de descubrimiento matemático: la analogía

La intuición analógica sugiere unas determinadas extensiones entre dos nociones matemáticas, pero si la extensión se realiza sin control puede conducir a conclusiones contrarias a la realidad. El trabajo paralelo entre las medidas de áreas con unidad de medida el cuadrado y con unidad de medida el triángulo es un excelente campo de entrenamiento en el pensamiento analógico, tanto para cultivar la intuición analógica, como para controlar las extensiones que de ella surjan. Además. permite la posibilidad de extender las analogías del plano al espacio, en la que aparece una de las analogías más completamente engañosa: la analogía entre los triángulos equiláteros y los tetraedros. Es fácil pensar que el cuadrado es al cubo como el triángulo equilátero es al tetraedro. Sin embargo, hay bastantes diferencias entre estas extensiones, la más notable en lo que se refiere a la medida, es que el cubo rellena el espacio y el tetraedro no. Esto da lugar a que no se pueda utilizar un tetraedro de lado unidad como unidad de volumen, lo que manifiesta una ventaja de la elección de la forma cuadrada de la unidad sobre la triangular.

Pese a esta limitación, esperamos que el razonamiento analógico habrá servido para hacer un recorrido por las fórmulas de obtención del área, para mostrar la relativización de éstas fórmulas a la forma de la unidad, y para hacer propuestas didácticas que permitan «hacer matemáticas» en clase, tal como se recomienda en las propuestas actuales epistemológicas y didácticas sobre la enseñanza de las Matemáticas (NCTM, 1991; Cockrooft, 1985).

Enrique Castro
Pablo Flores
Isidoro Segovia
Departamento Didáctica de la Matemática
Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad de Granada

Referencias

COCKROFT (1985): *Las matemáticas si cuentan*, MEC, Madrid.

HERNAN, F. (1989): «La analogía en la formación de conceptos», *Suma*, 3, 13-20.

NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*, SAEM Thales, Sevilla.

OLMO, M. A., M. F. MORENO y F. GIL, (1989): *Superficie y volumen*, Síntesis, Madrid.

POGORELOV, A. V. (1974): *Geometría elemental*, Mir, Moscú.

POLYA, G. (1979): *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México.

PUIG, P. (1979): *Curso de Geometría Métrica*, Gómez Puig, Madrid.

SÁNCHEZ, E. y T. SABRÁS (1904): *Curso de Geometría Elemental*, Est. Tip. de Zubiría y Compañía, Sevilla.

SEGOVIA, I., E. CASTRO y P. FLORES (En prensa): «Área del rectángulo», *UNO*.