SUMA 26
noviembre 1997, pp. 11-21

Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad[1]

Josep Gascón

En este trabajo se presenta la noción de «contrato didáctico» y se demuestra su eficacia para analizar un problema didáctico concreto: el tránsito de la enseñanza de las matemáticas de secundaria a la universidad. Se muestra hasta qué punto las cláusulas del contrato están ligadas a las características específicas de las diferentes organizaciones matemáticas (de la geometría, del álgebra y del cálculo diferencial) y se describen los obstáculos epistemológicos asociados a los cambios de actividad matemática necesarios para llevar a cabo el proceso de estudio.

PLANTEAMIENTO de un problema didáctico

Si queremos estudiar los cambios que se producen en la enseñanza de las matemáticas en el tránsito de la secundaria a la universidad deberemos seleccionar, entre la ingente cantidad de acontecimientos observables en las instituciones involucradas, una pequeña muestra que consideraremos como los «hechos relevantes» para nuestra investigación. ¿De dónde extraer los criterios para llevar a cabo esa inevitable selección? Así, por ejemplo, ¿hemos de restringirnos a los acontecimientos que tienen lugar en el aula?, y, dentro del aula, ¿cómo seleccionar los hechos que queremos tener en cuenta? En el supuesto de que decidamos ampliar el ámbito del estudio más allá del aula, ¿qué otras instituciones debemos tomar en consideración?

Si elegimos aquellos hechos que culturalmente aparecen como más relevantes, esto es, si los hechos que tomamos en consideración son los que, de alguna manera, dicta el sentido común sin el respaldo de ninguna teoría ni de ningún principio unificador, entonces nos resultará muy difícil interpretarlos de una manera coherente e integrada porque, inevitablemente, se tratará de hechos desligados que sólo podremos tratar de describir mediante nociones de la propia cultura escolar como, por ejemplo: contenidos más o menos «abstractos», mayor o menor «exigencia escolar», «capacidad» para el aprendizaje de las matemáticas, «nivel» inicial de los alumnos, «interés» y «motivación» de los estudiantes, metodologías de enseñanza más o menos «activas», etc.

El primer criterio que podemos utilizar para orientarnos en nuestra elección hace referencia al tipo de problema que pretendemos abordar: ¿queremos abordar un problema *psicológico*? ¿o se trata de un problema *sociológico*? ¿o bien de un problema *pedagógico*? En cada caso deberíamos escoger *hechos* susceptibles de ser interpretados como *fenómenos* (psicológicos, sociológicos, pedagógicos,...) y estudiar cómo evolucionan dichos fenómenos en el paso de la secundaria a la universidad. Así, por ejemplo, si quisiéramos estudiar los cambios que se producen en el «pensamiento del profesor» (entendido como el conjunto de procesos mentales de un sujeto), en el paso de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria de las matemáticas, nos estaríamos situando en el ámbito de la psicología y, en consecuencia, deberíamos tomar como base empírica hechos que se pueden describir e interpretar en el marco de dicha disciplina.

Pero si lo que queremos es plantear un *problema didáctico*, en el sentido de «didáctico-matemático», entonces la elección de los hechos que consideraremos «relevantes» vendrá determinada por los fenómenos que permitan plantear problemas didácticos, esto es, problemas relativos al *proceso de estudio de las matemáticas* (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997). Para clarificar lo que esto significa, y dado que nosotros mismos formamos parte de la generación fundadora de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, es necesario explicitar algunas cuestiones que, en el caso de otras disciplinas, podrían parecer redundantes. De entre estas cuestiones básicas destacaremos, a título de principios metodológicos, las siguientes:

1) Existen *fenómenos didácticos*, relativamente universales y no sólo hechos didácticos aislados, singulares e irrepetibles.

En el marco de la didáctica fundamental en el que nos situamos, «fenómeno didáctico» significa «fenómeno didáctico-matemático». Todo fenómeno didáctico (en el sentido clásico de «relativo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas»), tiene un componente matemático esencial y, recíprocamente, los fenómenos relacionados con la actividad matemática no pueden ser analizados independientemente de los fenómenos relativos a su difusión y utilización. En este marco lo didáctico es denso en lo matemático de tal manera que es imposible separar empíricamente ambas aspectos de la realidad. La noción de «fenómeno didáctico» deja de ser exclusiva del proceso de enseñanza aprendizaje para referirse también a la producción, la utilización y la difusión de las matemáticas (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

De la misma forma que la física se justifica por el estudio de los *fenómenos físicos* y no tendría razón de ser si únicamente existiesen hechos físicos singulares, la existencia de *fenómenos didácticos irreductibles* (esto es, que no se pueden reducir a los procesos *fisiológicos, psicológicos, sociológicos* o *pedagógicos* asociados) es lo que da sentido a la ambición de construir la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.

Para plantear adecuadamente nuestro problema didáctico sería preciso, por tanto, discernir cuáles son los fenómenos que, más allá de los hechos contingentes, observables en el aula o fuera de ella, permiten describir el paso de la enseñanza secundaria a la enseñanza universitaria de las matemáticas. Qué relación hay entre los diferentes fenómenos que aparecen, cómo pueden ser explicados y, en última instancia, qué posibilidades tenemos de controlarlos.

2) A partir del análisis de la *actividad matemática escolar*[2] es posible describir los fenómenos didácticos y empezar a formular las leyes que los rigen. Este es uno de los postulados básicos de la didáctica fundamental (Brousseau, 1986).

Para llevar a cabo este análisis en el problema didáctico que nos ocupa, será preciso describir la *estructura de la organización matemática escolar* en cada una de las dos instituciones involucradas. Aquí nos centraremos únicamente en algunos aspectos de la organización de la geometría, el álgebra y el cálculo diferencial en secundaria y en la universidad.

3) Las reglas de juego de la *relación didáctica* están determinadas por una especie de contrato, el *contrato didáctico*[3], que rige en cada momento las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor en lo que hace referencia a la matemática enseñada en una institución dada.

Las cláusulas de este «contrato» son mayoritariamente implícitas y evolucionan con el desarrollo del proceso de estudio de las matemáticas. En nuestro caso será necesario, por tanto, investigar cómo se modifican las cláusulas del *contrato didáctico* y, en particular, cuáles son las nuevas cláusulas de dicho contrato que aparecen por primera vez en la enseñanza universitaria, así como las que desaparecen en relación a la enseñanza secundaria de las matemáticas.

Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo consiste, precisamente, en

1 Quiero agradecer a Josep Alsinet, Antoni Gomà y Agustí Reventós, compañeros en la comisión encargada por la Universidad Autónoma de Barcelona de redactar el «Informe sobre el pas de la secundària al primer curs universitari. Les matemàtiques al COU i al primer curs de la llicenciatura de matemàtiques i d'enginyeria informàtica en la UAB» (Alsinet, Gascón, Gomà i Reventós, 1997), la oportunidad que me han proporcionado de discutir, volver a pensar y reformular esta problemática en el ámbito de la didáctica de las matemáticas. Aunque el informe citado se basa en diversos estudios estadísticos comparativos del rendimiento de los estudiantes en COU y en los dos primeros cursos universitarios de matemáticas, aquí no utilizaré explícitamente esos datos.

2 Utilizaremos «escolar» en un sentido amplio, incluyendo en él todos los niveles educativos, desde la enseñanza primaria hasta la enseñanza universitaria. Postulamos que los fenómenos didácticos, en el sentido de didáctico-matemáticos, son relativamente independientes del nivel educativo en el que nos situemos aunque, como sucede, por ejemplo, con el fenómeno físico de la «gravitación», un mismo fenómeno didáctico puede manifestarse mediante efectos muy distintos en primaria, en secundaria y en la universidad. Este es uno de los aspectos en que los fenómenos didácticos son «universales».

3 La noción de «contrato didáctico» es una de las nociones fundadoras de la didáctica fundamental. Aunque se le han otorgado sentidos muy diversos y hasta se la ha trivializado como si se tratara de una noción que se puede interpretar desde el sentido común, la noción de «contrato didáctico» es, en realidad, una noción teórica que sólo toma su sentido preciso cuando se emplea a nivel de sistema didáctico en el marco de la *teoría de las situaciones didácticas* (Brousseau, 1986). En este trabajo utilizaremos la noción de contrato didáctico tal como aparece en el ámbito de la *institución escolar* (sea ésta secundaria o la universidad). Esto significa, por ejemplo, que consideraremos que el «contrato didáctico vigente en secundaria» es el constituido por las cláusulas que son comunes a todos los contratos didácticos que pueden establecerse actualmente en la enseñanza de las matemáticas en secundaria.

presentar la noción de «contrato didáctico», dada su importancia central en el paradigma de la didáctica fundamental. A través del análisis de los cambios que sufre el contrato en el paso de secundaria a la universidad, queremos poner de manifiesto hasta qué punto las cláusulas del contrato didáctico están ligadas a las características específicas de la organización matemática vigente en cada una de dichas instituciones y, hasta qué punto, los fenómenos didácticos (que, en general, se pueden analizar en términos del contrato) dependen para ser descritos, explicados e interpretados, del tipo de actividad matemática que sea posible llevar a cabo en cada una de dichas instituciones. Se trata, en resumen, de explicitar y ejemplificar en qué sentido el análisis de la actividad matemática, tal como ésta se lleva a cabo en las diferentes instituciones, constituye una nueva y vigorosa vía de acceso al estudio de los fenómenos didácticos.

Algunas organizaciones matemáticas escolares

¿Cuál es la diferencia entre las organizaciones escolares de la *geometría,* el *álgebra* y el *cálculo diferencial* tal como han sido reconstruidas[4] en secundaria y en la universidad?

Antes de empezar a contestar esta pregunta, indicaremos una diferencia muy característica y general entre las organizaciones matemáticas de secundaria y de la universidad. Dicho de una forma muy sintética, se trata del paso de una matemática «mostrativa» a una matemática «demostrativa». En secundaria la «demostración» está prácticamente ausente y las justificaciones, que aparecen sólo puntualmente, sirven para «embellecer» el discurso del profesor. El alumno (según el contrato didáctico vigente en secundaria) puede ignorarlas completamente. Casi nunca se ponen en cuestión los aspectos justificativos e interpretativos de la actividad que el contrato asigna a los alumnos.

...una diferencia muy característica y general entre las organizaciones matemáticas de secundaria y de la universidad [es] el paso de una matemática «mostrativa» a una matemática «demostrativa».

4 Postulamos que las matemáticas tienen que «volver a construirse» para poder ser enseñadas en la escuela (también en la universidad). Esto significa que deben ser «recreadas» bajo ciertas condiciones que no coinciden ni pueden coincidir con las condiciones que hicieron posible su construcción inicial. Las transformaciones que sufren las obras matemáticas para poder ser enseñadas son absolutamente imprescindibles e inevitables, no son accidentales, y responden a leyes totalmente independientes de las decisiones y la voluntad de los actores de las instituciones escolares. El conjunto de dichas transformaciones adaptativas se denomina *transposición didáctica* (Chevallard, 1985).

En coherencia con este carácter esencialmente *mostrativo* de la matemática de secundaria, las *definiciones* tampoco juegan un papel demasiado importante; incluso es habitual la utilización de definiciones implícitas porque no se siente la necesidad de explicitarlas. Así, por ejemplo, para un alumno de secundaria ningún rectángulo es un cuadrado «porque los rectángulos no tienen forma cuadrada». Se pone así de manifiesto que en secundaria las definiciones sirven más para describir objetos previamente «conocidos» que para construir lógicamente objetos nuevos.

En la enseñanza universitaria, por contra, la demostración pasa a ser la actividad matemática principal. Se produce así un cambio brusco en la función que las demostraciones desempeñan en la organización matemática escolar. El contrato didáctico vigente en la universidad establece que todas las afirmaciones deben poder ser justificadas por el estudiante: ha de verificar las hipótesis de un teorema para justificar su aplicabilidad; debe poder comprobar si un objeto satisface o no satisface cierta definición; las gráficas que «muestran» una propiedad dejan de tener valor «demostrativo», etc. Se produce, en resumen, una verdadera invasión del *razonamiento demostrativo* con la consiguiente importancia creciente del papel de las *definiciones.* Aparece el problema de determinar en cada momento «lo que está definido», «los términos exactos de la definición», «las hipótesis necesarias o superfluas de un teorema», «lo que se puede utilizar y lo que no se puede utilizar para hacer una demostración», etc.

Por lo que respecta a la actividad de resolución de problemas, y en coherencia con este cambio de la matemática «mostrativa» a la matemática «demostrativa», se pasa de una fuerte preponderancia de los *problemas por resolver* de secundaria, a una importante presencia de los *problemas por demostrar* en la universidad (Polya, 1945).

Este importante cambio en el paso de una organización matemática a la otra, está fuertemente relacionado con la nueva posición del estudiante en la relación didáctica: éste pasa de ser un alumno con escasa autonomía y mínima responsabilidad matemática, a ser un estudiante (co)responsable de su proceso de estudio.

Organización escolar de la geometría

Los diferentes tipos de problemas de geometría que aparecen en secundaria tratan principalmente de las *relaciones internas* entre los *elementos de figuras concretas.* Relacionan entre sí, por ejemplo, los elementos de un triángulo o de otras figuras simples y, en algunos casos, tratan de las relaciones internas entre los elementos de ciertas configuraciones (punto-plano, punto-recta, plano-plano, haz de planos, etc.) que hacen el papel de figuras compuestas. Cuando en un tipo de problemas aparece la relación entre dos o más figuras (por ejemplo, la relación de semejanza), se pone el acento en la relación que resulta entre los elementos de una figura y los correspondientes elementos de la otra (por ejemplo, la relación entre las áreas de dos figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza) y no en la relación en sí misma.

Los nuevos tipos de problemas de geometría que aparecen en la enseñanza universitaria dejan de centrarse en el estudio interno de figuras concretas para pasar a estudiar, desde el primer momento, *clases de figuras*. Se introducen ciertas características del *espacio* considerado globalmente (por ejemplo la *métrica*) y se problematizan las propias *transformaciones geométricas* de este espacio tomándolas como nuevos objetos geométricos. Piaget y García (1982) describen este cambio, sin situarlo en instituciones didácticas concretas, como el paso del estadio *intra-figural* al estadio *inter-figural*.

Se produce de esta forma un cambio radical de la *problemática geométrica*. Todos los implícitos de la geometría de secundaria son aquí cuestionados, desde el *sistema de referencia* (transparente e incuestionable en secundaria) hasta las nociones geométricas que tenían en secundaria un sentido «absoluto» (como la «distancia», el «paralelismo» o la «incidencia») y que en la enseñanza universitaria pasan a tener un sentido geométrico «relativo» (nociones afines, métricas, proyectivas,...). Incluso las técnicas matemáticas más comunes en secundaria (como las que proporcionan la distancia entre dos puntos o el producto escalar de dos vectores) son aquí cuestionadas y reinterpretadas de acuerdo con las características globales del espacio (como, por ejemplo, la métrica que se considera en cada caso).

En cuanto al discurso teórico asociado a la práctica geométrica, hay que decir que en secundaria se suele reducir a la justificación inmediata de las técnicas que se utilizan. Se trata, en cualquier caso, de justificaciones no demasiado operativas que, por tanto, tienden a desaparecer de la práctica matemática de los alumnos. La proliferación de técnicas geométricas «injustificadas» ha llegado a tal punto que ha provocado la necesidad, por parte de los correctores de las pruebas de matemáticas de Selectividad, de exigir que los alumnos expliquen por escrito el procedimiento que utilizan bajo la amenaza de invalidar totalmente la resolución.

En la universidad, por el contrario, la *teoría* toma desde el principio un gran protagonismo. El discurso teórico lejos de estar subordinado a la práctica geométrica, esto es, lejos de limitarse a «justificar» e «interpretar» una presunta actividad geométrica previa, se constituye él mismo en el punto de partida de la actividad matemática y en la principal fuente de nuevos tipos de problemas. Así, por ejemplo, del análisis teórico de las estructuras que forman las transformaciones geométricas y de las clasificaciones (proyectiva, afín y métrica) de las cónicas surgen nuevos tipos de problemas. Se produce así el tránsito hacia el estadio *trans-figural* (Piaget y García, 1982).

Los nuevos tipos de problemas de geometría que aparecen en la enseñanza universitaria dejan de centrarse en el estudio interno de figuras concretas para pasar a estudiar, desde el primer momento, clases de figuras.

Organización escolar del álgebra

La mayoría de problemas de álgebra escolar que aparecen en secundaria desembocan en la *resolución de ecuaciones aisladas*. Únicamente en el último curso de la enseñanza secundaria se introduce tímidamente el estudio de algunas relaciones entre diferentes ecuaciones y empiezan a aparecer algunos criterios de resolubilidad, aunque restringidos a los sistemas de ecuaciones lineales.

La mayoría de problemas de álgebra escolar que aparecen en secundaria desembocan en la resolución de ecuaciones aisladas.

En términos generales podemos hablar del *carácter prealgebraico de las matemáticas escolares* (Gascón, 1997) especialmente visible en la secundaria obligatoria y que se pone de manifiesto en un conjunto de características interrelacionadas entre sí. En el trabajo citado hemos mostrado los siguientes rasgos del carácter prealgebraico de las matemáticas:

a) La desintegración de las clases de problemas que aparecen y que es correlativa a la atomización de las técnicas matemáticas que se utilizan.

b) La incapacidad de la inmensa mayoría de las técnicas que se usan en secundaria para tratar en pie de igualdad las variables «conocidas» y las «desconocidas».

c) Las grandes dificultades que se presentan para llevar a cabo «justificaciones» o «fundamentaciones» algebraicas de técnicas aritméticas, geométricas o combinatorias y para «demostrar» fenómenos matemáticos de todo tipo.

d) La ausencia, a lo largo de toda la secundaria, del uso sistemático de parámetros y del juego entre parámetros y variables.

e) La utilización de las fórmulas como simples algoritmos de cálculo, en lugar de emplearlas como verdaderos modelos algebraicos capaces de producir conocimientos sobre el sistema modelizado.

f) El «lenguaje funcional» aparece en secundaria totalmente separado del «lenguaje algebraico» y esta separación comporta dificultades en el manejo de funciones. En particular, no está permitido que aparezcan funciones de varias variables y no se pueden utilizar las técnicas funcionales (de cálculo del dominio, de la dependencia recíproca, etc.) para estudiar fórmulas.

g) La impotencia de las técnicas matemáticas que se utilizan en secundaria para estudiar las *condiciones de existencia del objeto incógnita.* La obtención de la incógnita aparece como objetivo principal y prácticamente único en la resolución de problemas a este nivel.

Se constata, en definitiva, una presencia muy débil del instrumento algebraico en el trabajo matemático escolar, lo que nos permite hablar del *carácter prealgebraico de la actividad matemática en secundaria*, en el sentido de «actividad matemática aún no algebrizada». En la terminología de Piaget y García (1982) podría decirse que la organización del álgebra en secundaria se sitúa en el estadio *intra-operacional*, aunque esta caracterización no abarca toda la riqueza del fenómeno didáctico que hemos denominado «carácter prealgebraico de la matemática escolar».

Paradójicamente, y a pesar de su pobre presencia en secundaria, el instrumento algebraico se utiliza en la enseñanza universitaria de una forma transparente, como si su uso no fuese problemático en ningún sentido: la utilización sistemática de parámetros y variables y el juego entre sus funciones recíprocas; la traducción de condiciones al lenguaje algebraico; la manipulación de fórmulas con ayuda de las técnicas del lenguaje funcional y su utilización como modelos algebraicos, así como el uso de justificaciones y demostraciones «algebraicas» son, desde el inicio de la práctica universitaria, maneras de hacer casi rutinarias.

[en secundaria] se estudian las relaciones internas entre los elementos de una misma función, pero no se acostumbran a considerar las transformaciones de las funciones ni las diferentes familias de funciones.

Es precisamente esta supuesta pertenencia del instrumento algebraico al «medio matemático» de los estudiantes universitarios, esto es al «conjunto de objetos matemáticos cuyas propiedades se dan por sentado y que pueden ser manipulados de forma segura por los estudiantes» (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997) lo que permite tomar el propio lenguaje algebraico como objeto de estudio en sí mismo y llegar muy rápidamente al *estudio de estructuras algebraicas*, generándose nuevos tipos de problemas que tratan sobre espacios vectoriales, clasificación de grupos cíclicos, anillos, ideales, anillos cocientes, grupos de matrices sobre un cuerpo finito, etc. Se pasa así muy rápidamente a los estadios *inter-operacional* y *trans-operacional* (Piaget y García, 1982).

En la enseñanza secundaria la práctica algebraica se interpreta como una actividad casi «aritmética» hasta el punto de intentar aritmetizar los objetos algebraicos que aparecen: las letras se interpreten como números generalizados, las ecuaciones como igualdades entre números desconocidos, etc. En cierto sentido esta aritmetización constituye una trivialización o desnaturalización del álgebra que está asociada a la interpretación de ésta como una especie de «aritmética generalizada» (Gascón, 1994-95).

Por el contrario, en la organización matemática universitaria la algebrización de la actividad matemática es tan completa y natural desde un principio que no hay ninguna necesidad de interpretarla de acuerdo con los aspectos más básicos, prealgebraicos, de la propia actividad. Este abismo entre las dos maneras de interpretar el álgebra, en secundaria y en la universidad, es uno de los aspectos más llamativos de la «ruptura» entre ambas organizaciones matemáticas.

Organización escolar del cálculo diferencial

De nuevo hay que decir que los problemas escolares de cálculo propios de secundaria hacen referencia a funciones concretas consideradas aisladamente; así, se estudian las *relaciones internas* entre los elementos de una misma función, pero no se acostumbran a considerar las *transformaciones de las funciones* ni las diferentes *familias de funciones*. Si se estudia algún tipo de relación entre dos o más funciones (por ejemplo entre la función logarítmica y la función exponencial o entre la función seno y la función coseno), el énfasis se pone siempre en las propiedades particulares de las funciones relacionadas más que en la relación misma.

En la organización matemática escolar de secundaria las familias de funciones no se toman como objetos de estudio en sí mismas. Así, por ejemplo, si una familia de funciones depende de un parámetro, éste se interpreta como un número concreto (inicialmente desconocido) que se corresponde con la única función de la familia que se quiere estudiar (por ejemplo, la única función de la familia que es continua o derivable). De esta manera se pone de manifiesto que la interpretación simplista del álgebra elemental como «aritmética generalizada», llega a tener consecuencias importantes incluso en la organización escolar del cálculo en secundaria.

En el nivel universitario, la problemática del cálculo diferencial pasa muy rápidamente del estudio de las funciones concretas y aisladas al de las clases de funciones, sucesiones de funciones y hasta espacios funcionales. Aparece, de nuevo, la rápida sucesión del estadio *intra-*, característico de la organización matemática de secundaria, a los estadios *inter-* y *trans-*, específicos de la organización universitaria.

Este cambio de problemática origina la *integración entre muchos tipos de problemas* algunos de los cuales eran tratados separadamente en secundaria, mientras que otros aparecen ahora por primera vez. En particular, muchos tipos de problemas relativos a sucesiones, ecuaciones e inecuaciones, límites, series numéricas, teorema del valor medio, serie de Taylor, derivación e integración, estudio de familias de funciones,... se tratan ahora conjuntamente de una manera efectiva, con técnicas muy potentes y complejas. Se genera de esta forma un gran campo de problemas cuyas técnicas integradas sólo pueden desarrollarse en el marco de una actividad matemática suficientemente algebrizada. Al mismo tiempo las nuevas técnicas analíticas requieren, para poder «vivir» con normalidad en la institución universitaria, un entorno teórico, justificativo e interpretativo, muy rico y sofisticado, lo que provoca un crecimiento muy rápido de la teoría asociada. Mientras que la «intuición geométrica» era suficiente en secundaria, uno de los objetivos principales del estudio del cálculo en el nivel universitario consiste, precisamente, en poner de manifiesto que dicha intuición no sólo es insuficiente sino que es engañosa. Esta ruptura en el discurso justificativo entre ambas organizaciones del cálculo es, también, bastante radical.

Paralelamente se ha detectado un fenómeno que algunos investigadores han denominado *algebrización del cálculo diferencial escolar* (Artigue, 1995) y que consiste en la tendencia a enseñar el cálculo mediante procesos «finitos» (incluyendo el paso al límite), intentando reducir las técnicas específicas del análisis, en las que prima la utilización de condiciones suficientes, a maneras de hacer puramente «algebraicas» centradas en el uso de equivalencias sucesivas. Aunque este fenómeno aparece en ambas instituciones, es mucho mejor «tolerado» en secundaria que en la universidad.

Cambios en el contrato didáctico

Hasta aquí hemos analizado algunas características específicas de la organización matemática escolar en secundaria y en la universidad. Queremos subrayar que dichas características constituyen, por sí mismas, un reflejo de los correspondientes contratos. Así, por ejemplo, el carácter prealgebraico de la matemática escolar en secundaria muestra bien a las claras qué tipo de actividad matemática y, en definitiva, qué responsabilidades matemáticas, podrá asignar a los alumnos el contrato vigente actualmente en dicha institución.

Una vez situados en el seno de una institución escolar determinada, con una organización matemática concreta, la noción clave para analizar el proceso de estudio será la de «contrato didáctico».

Una vez situados en el seno de una institución escolar determinada, con una organización matemática concreta, la noción clave para analizar el proceso de estudio será la de «contrato didáctico». Dicha noción fue introducida en didáctica de las matemáticas por Guy Brousseau (1986) en filiación, pero también en ruptura, con la noción de *contrato social* del filósofo francés J. J. Rousseau. En una primera aproximación podemos considerar que el contrato didáctico (a nivel de institución escolar) viene determinado por el conjunto de cláusulas que, de una manera más o menos implícita, asignan en el seno de dicha institución, las obligaciones recíprocas de los miembros de la comunidad de estudio en lo que hace referencia al proceso de estudio de una obra matemática concreta. El *carácter marcadamente implícito* de las cláusulas del contrato didáctico viene reforzado porque, en muchos casos, si fuesen explicitadas se pervertiría su función rectora del proceso de estudio.

Las cláusulas del contrato didáctico presentan cierta *relatividad institucional*, dependiendo no sólo de la institución como tal (secundaria o universidad), sino también de las organizaciones matemáticas respectivas («geometría en secundaria», «geometría en la universidad», etc.) y de los *dispositivos didácticos* concretos («clase de problemas», «clase de prácticas», «clase de teoría», «libro de texto», «dispositivos de evaluación», etc.) que intervienen en cada momento como ayudas al estudio.

Pero el contrato didáctico rige, en primera instancia, la distribución de responsabilidades en el juego didáctico que se establece entre los estudiantes, el conocimiento matemático y el profesor como guía del estudio. Por esta razón, aunque fijemos una institución escolar determinada y una organización matemática concreta (por ejemplo, la geometría en la universidad) y un dispositivo didáctico específico (por ejemplo, la clase de problemas) el contrato didáctico no queda fijado puesto que sus cláusulas evolucionan a medida que avanza el proceso de estudio.

En este trabajo no pretendemos llevar a cabo un análisis tan fino de los cambios del contrato (así, por ejemplo, no pretendemos estudiar aquí cómo evoluciona el contrato didáctico cuando en la clase de problemas de la universidad se avanza en el estudio de la clasificación proyectiva de cónicas). Situándonos en un nivel de análisis más general, describiremos únicamente algunos cambios del contrato didáctico cuando éstos se pueden observae en el ámbito de la institución escolar globalmente considerada.

En esta sección utilizaremos los análisis anteriores relativos a las respectivas organizaciones matemáticas en secundaria y en la universidad como base para interpretar los cambios que se producen en el tipo de actividad matemática (y, por tanto, en el contrato) al pasar de una institución a la otra.

Nueva distribución de la responsabilidad matemática

En el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad, y por lo que respecta a posibles cambios del contrato didáctico, una de las preguntas más generales que pueden formularse es la siguiente: ¿cuáles son los cambios del contrato que hacen referencia a la distribución de la «responsabilidad matemática» entre el profesor y los alumnos?

Para cumplir el contrato didáctico vigente actualmente en la enseñanza secundaria los alumnos deben únicamente «seguir las clases». El proceso de estudio de las matemáticas queda, en secundaria, muy encerrado en el aula; no es preciso «completarlo» fuera de ella salvo en lo que respecta a la obligación de hacer algunos ejercicios que deben servir para «entender» lo que se ha dicho en clase y para practicar lo que se ha hecho en clase. El contrato didáctico vigente en secundaria asigna al profesor la responsabilidad última y casi exclusiva del aprendizaje matemático de los alumnos. El profesor tiene la obligación (delante de los alumnos y de la institución) de explicitar con toda claridad lo que debe hacer el alumno para aprender y de controlar paso a paso y constantemente la actividad del alumno. A éste se le asigna únicamente la responsabilidad de no desaprovechar las clases y de realizar la actividad que el profesor le marca en cada momento.

...al pasar de la secundaria a la universidad se produce un cambio importante y repentino en el contrato didáctico: el nuevo contrato didáctico traspasa al estudiante una parte importante de la responsabilidad didáctico-matemática que en secundaria era exclusiva del profesor.

Según el nuevo contrato didáctico, vigente en la universidad, el proceso de estudio de las matemáticas deja de estar encerrado en el aula. Uno de los síntomas de este cambio lo constituye el desdoblamiento en dos dispositivos diferentes («clase de teoría» y «clase de problemas») de la tradicional y monolítica «clase de matemáticas» de secundaria. Esta organización universitaria responde a una concepción «teoricista» de las matemáticas y de su enseñanza y origina discordancias y vacíos que tienen, sin embargo, la virtud de poner de manifiesto la necesidad ineludible del estudiante de controlar su propio proceso de estudio.

Lo anterior comporta, en particular, una menor dependencia mutua entre el profesor y el estudiante, en comparación con la situación que se da en secundaria; sobre el estudiante universitario recae la responsabilidad de decidir de qué forma ha de estudiar y cómo ha de utilizar las clases de teoría y las de problemas para mejorar su estudio. De repente el contrato le asigna la responsabilidad de «entender» las matemáticas, de relacionar, interpretar, justificar y globalizar los conocimientos que adquiere de muy diversas fuentes y de decidir cuál es la utilización más adecuada de las diversas técnicas, definiciones, teoremas, etc. Él es, ahora, el último y principal responsable de su propio aprendizaje.

Tenemos, en resumen, que al pasar de la secundaria a la universidad se produce un cambio importante y repentino en el contrato didáctico: *el nuevo contrato didáctico traspasa al estudiante una parte importante de la responsabilidad didáctico-matemática que en secundaria era exclusiva del profesor.*

Cambio de las funciones del trabajo técnico

El trabajo matemático en la enseñanza primaria se caracteriza por la preponderancia de las *técnicas simples*, esto es, por la proliferación de técnicas matemáticas que se pueden describir con mucha precisión y evaluar con gran fiabilidad. Con la extensión de la obligatoriedad de la enseñanza hasta los 16 años se observa una tendencia a generalizar este tipo de trabajo a toda la ESO para «asegurar» resultados visibles en el aprendizaje matemático al final de la etapa y no quedarse «sin nada». Esta tendencia lleva a dar prioridad a las técnicas algorítmicas en toda la enseñanza secundaria obligatoria.

Al lado de este resurgimiento del *tecnicismo* está avanzando cada vez con más fuerza la tendencia *modernista* (Gascón, 1994) que propugna la necesidad de que el alumno resuelva problemas «abiertos», problemas «creativos» y, en última instancia, problemas de los que aparecen en las «olimpiadas matemáticas». Mientras que el tecnicismo está sólidamente enraizado en los sistemas de evaluación de primaria y secundaria, el modernismo se mantiene a un nivel más ideológico dada la dificultad objetiva para materializarlo en los dispositivos de evaluación.

En el contrato didáctico vigente en la enseñanza secundaria nos encontramos con la obligación del profesor de «enseñar a utilizar determinados algoritmos» (como núcleo de lo que se considera «enseñar matemáticas» a lo largo de toda la enseñanza obligatoria) mientras crece, paradójicamente, el rechazo ideológico del trabajo «rutinario» y «repetitivo» porque éste se contrapone culturalmente al «verdadero» trabajo científico. En secundaria, el contrato no establece ninguna ligazón entre el trabajo rutinario (el dominio de ciertas rutinas es una de las primeras responsabilidades que el contrato asigna a los alumnos) y la ambición creciente de que los alumnos sean capaces de resolver problemas matemáticos «abiertos». La proliferación de las olimpiadas matemáticas y su creciente prestigio, son un indicio más de que el contrato didáctico vigente en secundaria evoluciona rápidamente en esa dirección «esquizofrénica».

En la enseñanza universitaria la institucionalización del trabajo técnico es muy débil; así mientras en la «clase de teoría» no se tienen muy en cuenta las técnicas matemáticas ni la pericia en su utilización, el contrato vigente en la «clase de problemas» lleva a cambiar constantemente de tipo de problemas, lo que impide al estudiante llegar a ser «oficialmente» experto en el uso de las técnicas matemáticas. Se exige al estudiante universitario flexibilidad en el uso de dichas técnicas y, cada vez más, una actividad exploratoria «libre y creativa», pero no se le proporcionan los medios para desarrollar dicha actividad. Se produce de esta forma una contradicción interna en las cláusulas del contrato didáctico que da origen a la que hemos llamado «paradoja de la creatividad» (para más detalles, Chevallard, Bosch y Gascón, 1997).

Cambios en la evaluación

El contrato didáctico vigente en secundaria asigna al alumno la responsabilidad de resolver los problemas de una forma bastante aislada y relativamente descontextualizada, como si resolver un problema constituyese un objetivo en sí mismo. Este aspecto del contrato es un reflejo de la *atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas* y de la consiguiente limitación de los objetivos didácticos a largo plazo en beneficio de los más puntuales y limitados en el tiempo. Se trata de una tendencia creciente que, en sus manifestaciones más extremas, está dando origen a la pretensión absurda de una *enseñanza instantánea de las matemáticas*. En la universidad, por el contrario, es posible *retardar mucho más* el cumplimiento de las obligaciones asignadas por el contrato didáctico, éstas dejan de ser así de inmediato cumplimiento.

Un indicador muy significativo de la diferente urgencia en el cumplimiento de las obligaciones que asignan los respectivos contratos, lo proporciona el tipo de relación que se establece en cada caso entre los actores de la relación didáctica (estudiantes y profesor) y, muy especialmente, las diferencias entre los respectivos dispositivos de evaluación.

El profesor de secundaria, presionado por la urgencia del contrato, debe preguntar constantemente a los alumnos sobre lo que se está haciendo en clase exigiendo su participación activa, inmediata y continua. En la universidad, sin embargo, el contrato no sólo no obliga, sino que hace muy difícil que el profesor tenga este tipo de relación con la relación que tienen los estudiantes con las matemáticas. Se diría que el contrato en la universidad preserva la privacidad de la relación de los estudiantes con las matemáticas impidiendo que dicha relación esté completamente controlada por el profesor.

Correlativamente a la debilitación de los objetivos didácticos a medio y largo plazo, los *dispositivos de evaluación* en secundaria ocupan cada vez más espacio y se confunden progresivamente con el proceso de enseñanza. El profesor se siente en la obligación de *evaluar continuamente* a los alumnos, de controlar y dirigir casi constantemente

Al lado de este resurgimiento del tecnicismo está avanzando cada vez con más fuerza la tendencia modernista (Gascón, 1994) que propugna la necesidad de que el alumno resuelva problemas «abiertos», problemas «creativos» y, en última instancia, problemas de los que aparecen en las «olimpiadas matemáticas».

la actividad de éste. Resulta así un tipo de evaluación en la que los alumnos deben reproducir casi mecánicamente lo que se acaba de hacer en clase, en la que tiende a desaparecer toda exigencia de explicaciones, justificaciones e interpretaciones y en la que se ha perdido cualquier atisbo de visión global de la materia.

Aunque algunos indicios hacen pensar que esta tendencia empieza a ganar terreno también en la enseñanza universitaria (asignaturas cuatrimestrales, multiplicación del número de pruebas escritas, clases de prácticas, publicación de los exámenes, instauración de «problemas tipo», etc.), todavía se mantiene una importante distancia entre el proceso de enseñanza y los dispositivos de evaluación.

De hecho, en coherencia con la mayor independencia del estudiante respecto al profesor, con la mayor responsabilidad matemática de éste y con la posibilidad de diferir en el tiempo las responsabilidades que asigna el contrato didáctico, la evaluación universitaria se basa en actividades cuya resolución requiere cierta elaboración personal y cierta interpretación global de la materia. El tipo de evaluación universitaria pone de relieve que las clases de «teoría» y de «problemas» todavía se conciben como ayudas al proceso de estudio de las matemáticas del que debe responsabilizarse, en última instancia, el propio estudiante (aunque éste no disponga de los instrumentos necesarios para hacerse cargo de dicha responsabilidad). Lo que se pretende evaluar es el fruto de dicho estudio y no únicamente las actividades «auxiliares» que se llevan a cabo en las clases.

Resulta así [en secundaria] un tipo de evaluación en la que los alumnos deben reproducir casi mecánicamente lo que se acaba de hacer en clase, en la que tiende a desaparecer toda exigencia de explicaciones, justificaciones e interpretaciones y en la que se ha perdido cualquier atisbo de visión global de la materia.

...la evaluación universitaria se basa en actividades cuya resolución requiere cierta elaboración personal y cierta interpretación global de la materia.

Obstáculos en el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad

Hemos visto que para analizar los cambios que se producen en el paso de la enseñanza de las matemáticas de secundaria a la universidad, debemos abordar el problema didáctico mucho más amplio del paso de *estudiar matemáticas en secundaria* a *estudiar matemáticas en la universidad.* Una vez en este ámbito, hemos descrito nuestro problema didáctico en términos de los cambios que sufre el *contrato didáctico* al pasar de una a otra institución. Hemos mostrado que dichos cambios dependen fuertemente de las *organizaciones matemáticas* de las obras matemáticas estudiadas (en nuestro caso: *geometría, álgebra* y *cálculo diferencial),* tal como han sido reconstruidas en secundaria y en la universidad.

Dado que los cambios en el tipo de actividad matemática necesarios para pasar de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad pueden ser descritos, en última instancia, a partir de las modificaciones de la organización matemática escolar, decimos que dichos cambios están asociados a ciertos «obstáculos epistemológicos» del proceso de estudio (Brousseau, 1983). Puede decirse que muchos de estos cambios son imprescindibles para avanzar en el proceso de estudio por cuanto que son *constitutivos del desarrollo del conocimiento matemático* (por ejemplo, el paso de una actividad matemática «prealgebraica» a una actividad matemática plenamente «algebrizada»); pero también es verdad que la forma como se institucionaliza el paso de secundaria a la universidad puede complicar más que favorecer la articulación de los necesarios cambios de actividad matemática, llegando a crear «obstáculos» artificiales e innecesarios al proceso de estudio.

Para concluir resumiremos los principales cambios en la naturaleza de la actividad matemática que se producen en el paso de secundaria a la universidad. Queremos subrayar que el carácter inicialmente «epistemológico» de dichos obstáculos no impide que éstos lleven asociados lo que Piaget y García (1982, 234) denominan «obstáculos psicogenéticos».

1) Se produce el paso de una *actividad matemática mostrativa* basada en recordar, ordenar y sistematizar conocimientos fundamentados en el sentido común, a una *actividad matemática demostrativa* cuyo objetivo principal es la construcción de conocimientos matemáticos que requiere decidir en cada momento qué hechos se pueden utilizar y cuáles no pueden utilizarse porque no han sido establecidos todavía (independientemente del grado de «evidencia intuitiva» de cada uno de ellos).

2) Se pasa de una *actividad matemática atomizada* que trata con problemas bastante aislados, problemas que forman pequeñas clases poco relacionadas entre sí, a una *actividad matemática más globalizada* en la que las clases anteriores se integran en grandes campos de problemas que incluyen nuevas clases. Esta actividad matemática globalizada está muy fuertemente

interrelacionada con los elementos «teóricos» (justificativos e interpretativos) que anteriormente estaban relativamente ausentes de la actividad y que ahora pasan a jugar el papel fundamental de ir construyendo progresivamente nuevas y más potentes técnicas matemáticas.

3) De una *actividad matemática evaluable instantáneamente*, encerrada en el aula y absolutamente dirigida y controlada por el profesor, se pasa a una *actividad matemática evaluable a medio y largo plazo*, con objetivos más globales, mucho más abierta (menos centrada en el aula, menos controlada por el profesor y menos dependiente de la enseñanza de éste) donde hay más espacio para que el estudiante desarrolle la «responsabilidad matemática», aunque no siempre se le proporcionan los medios para ello.

4) Se pasa de una *actividad matemática tecnicista* en la que la centración exclusiva en las técnicas más simples, visibles y algorítmicas impide el desarrollo interno de las mismas, a una *actividad matemática teoricista* en la que las técnicas juegan únicamente un papel auxiliar y donde el «trabajo de la técnica» no está institucionalizado.

   El crecimiento de las tendencias *modernistas* hace emerger en ambas instituciones la *paradoja de la creatividad*, esto es, la contradicción entre las nuevas cláusulas del contrato didáctico (que asignan al estudiante la responsabilidad de realizar una actividad matemática «creativa») y las funciones de los dispositivos de ambas instituciones que, por razones diferentes, no proporcionan los medios necesarios para llevar a cabo una verdadera actividad matemática creativa. La paradoja de la creatividad se manifiesta más crudamente en el nivel universitario debido, entre otras cosas, a las características propias de la organización matemática universitaria.

5) Se pasa de una actividad *matemática prealgebraica* o sólo rudimentariamente algebrizada, a una *actividad matemática plenamente algebrizada*[5]. El obstáculo tendría aquí relación con la forma abrupta y poco explícita de producirse la algebrización, esto es, con la brusquedad del cambio de tipo de actividad matemática. Se pasa muy rápidamente de una presencia muy débil del instrumento algebraico a una actividad en la que se supone implícitamente que dicho instrumento forma parte del «medio matemático» de los estudiantes, esto es, de los objetos matemáticos que no son problemáticos y pueden ser manipulados con absoluta seguridad por los estudiantes.

Cada uno de estos obstáculos pone de manifiesto, en primer lugar, las fortísimas restricciones que la organización matemática y, por tanto, el contrato didáctico vigente en secundaria, impone sobre el tipo de actividad matemática que se puede llevar a cabo en dicha institución.

...los profesores no son omnipotentes [...] los fenómenos didácticos no dependen ni de su voluntad, ni de su formación ni de las decisiones que ellos puedan tomar o no tomar.

Debemos insistir en que, tal como hemos explicado en la nota 4, las características de la organización matemática de una institución son el resultado de los complejos procesos de *transposición didáctica* que, a su vez, son esencialmente independientes de las decisiones, la formación y la voluntad de los actores de dicha institución. No se trata, por tanto, de hacer ninguna crítica, que sería absurda y acientífica, a los profesores de secundaria. Se trata, por contra, de constatar que algunos aspectos de la organización matemática de secundaria dificultan objetivamente el desarrollo del proceso de estudio y, en particular, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en este nivel educativo.

El análisis didáctico cumple así una de sus funciones menos conocidas pero no menos importantes: mostrar que *los profesores no son omnipotentes* y que los fenómenos didácticos no dependen ni de su voluntad, ni de su formación ni de las decisiones que ellos puedan tomar o no tomar. El profesor de matemáticas tiene que asumir muchas responsabilidades pero entre éstas no está la de cambiar el contrato didáctico *en la institución escolar* a la que el propio profesor está sujeto como tal profesor. En otras palabras, aunque el profesor puede incidir sobre la gestión del contrato en el *ámbito de la situación didáctica*, mediante modificaciones locales en la organización matemática de la situación (y, por tanto, sí puede modificar el contrato y su evolución a este nivel), no tiene sentido pedirle que, como tal profesor, cambie la organización matemática global en la que se sustenta el contrato didáctico vigente, por ejemplo, en secundaria.

Mirados desde el lado de la universidad, los obstáculos descritos muestran que, aunque muchas de las restricciones a las que está sometida la organización matemática en secundaria desaparecen en la universidad, resulta que los

5 En la terminología de Piaget y García (1982), el proceso que aquí denominamos «algebrización de la actividad matemática» podría describirse como el paso del estadio *intra-operacional* al *inter-operacional* y, en última instancia, al *trans-operacional*. Para estos autores «hay un cierto tipo de ruptura cada vez que se pasa de un estadio al otro, tanto en la ciencia como en la psicogénesis» *(op. cit.*, p. 234). En este mismo sentido podría también hablarse de «ruptura» o «obstáculo epistemológico» en el paso de la organización de la geometría o del cálculo diferencial de secundaria (organizaciones que hemos situado en el estadio *-intra*) a las correspondientes organizaciones universitarias que, resueltamente, debemos situar en los estadios *inter* y *-trans*.

dispositivos didácticos (o dispositivos de ayuda al estudio) de esta institución no siempre desarrollan las funciones que los cambios en la organización matemática (y, por tanto, en el contrato) posibilitan. La ruptura institucional entre secundaria y universidad (debida, en parte, a la escisión de la comunidad matemática) no sólo dificulta que ésta asuma su responsabilidad última en la educación matemática, sino que incluso provoca la emergencia de nuevos obstáculos artificiales que no se corresponden con cambios necesarios en el proceso de estudio.

Quisiéramos subrayar para terminar que los *obstáculos epistemológicos* en el proceso de estudio de las matemáticas constituyen simplemente la constatación de que dicho proceso no es homogéneo. El reto que se plantea no es el de eliminar los obstáculos, objetivo absurdo e imposible, sino el de modificar la estructura y las funciones de los dispositivos didácticos existentes y, si es preciso, crear nuevos dispositivos capaces de articular los cambios de actividad matemática necesarios para llevar a cabo el proceso de estudio.

Estos cambios en la estructura y las funciones de los dispositivos didácticos, lejos de ser insignificantes, pueden comportar modificaciones profundas en el contrato didáctico de cada una de las instituciones y en las respectivas organizaciones matemáticas escolares, por lo que deben ser abordados a nivel de Sistema de Enseñanza de las Matemáticas.

Josep Gascón
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma
de Barcelona

Referencias bibliográficas

ALSINET, J., J. GASCÓN, A. GOMÀ y A. REVENTÓS (1997): *Informe sobre el pas de la secundària al primer curs universitari. Les matemàtiques al COU i al primer curs de la llicenciatura de matemàtiques i d'enginyeria informàtica en la UAB*, Universitat Autònoma de Barcelona, Documento no publicado.

ARTIGUE, M. (1995): «La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos», en M. Artigue y otros (eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, Grupo Editorial Iberoamérica, México, 97-140.

BROUSSEAU, G. (1983): «Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, 4/2, 165-198 (Conferencia pronunciada en el XVIII encuentro del CIEAEM, Louvain la neuve, 1976).

BROUSSEAU, G. (1986): «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en Didactique des Mathèmatiques*, 7/2, 33-115.

CHEVALLARD, Y. (1985): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD, Y., M. BOSCH y J. GASCÓN (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*, ICE-Horsori, Barcelona.

GASCÓN, J. (1994): «El papel de la Resolución de Problemas en la Enseñanza de las Matemáticas», *Educación Matemática*, 6/3, 37-51.

GASCÓN, J. (1994-95): «Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'"arithmétique généralisée"», *Petit x*, 37, 43-63.

GASCÓN, J. (1997): «El carácter pre-algebraico de la matemática escolar», *Educación Matemática,* (pendiente de publicación).

PIAGET, J. y R. GARCÍA (1982): *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Siglo XXI (4a. edición), México, DF.

POLYA, G. (1945): *How to Solve It*, 2a. ed., (1957), Doubleday, Princeton.