SUMA

REVISTA SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

n.º 25

Homenaje a Gonzalo Sánchez Vázquez

JUNIO 1997

Junio 1997

SUMA 25

junio 1997

Índice

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Diseño portada
José Luis Cano
Diseño interior
Concha Relancio y M.ª José Lisa
Maquetación
M.ª J. Lisa, E. Palacián, J. Sancho

Revista SUMA
ICE Universidad de Zaragoza
C. Pedro Cerbuna,12
50009-ZARAGOZA

Tirada: 5.700 ejemplares
Depósito Legal: Gr. 752-1988
ISSN: 1130-488X
Impresión: INO Reproducciones. Zaragoza

Las ilustraciones de este número proceden del libro *L'Encyclopedie. Diderot et D'Alambert. Sciences.*

SUMA 25
junio 1997

Gonzalo

Veinticinco números de vida de una revista de las características de Suma es un motivo de satisfacción no sólo para los que la hacemos, o la han hecho en el pasado reciente, sino también para el conjunto de los miembros de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, que nos hemos sabido dotar, no sin dificultades, de un vehículo de expresión por el que podemos intercambiar investigaciones, experiencias, ideas,... que, sin duda, redundan en beneficio de nuestra actividad docente.

Este número, que podría tener otras características, debido a las circunstancias está dedicado a la memoria del profesor D. Gonzalo Sánchez Vázquez, Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, Gonzalo para todos aquellos que tuvimos la suerte de conocerlo.

Gonzalo ha tenido mucho que ver en la gestación y, a lo largo de estos años, en el posterior desarrollo de la Federación y, por tanto, de su órgano de expresión, la revista SUMA. Ésta se siente deudora de la figura de Gonzalo y la mejor forma de agradecerlo es dedicar este número especial a su memoria.

No es preciso aquí glosar con más detenimiento la personalidad de Gonzalo, pues este número se inicia con una semblanza suya, a cargo de Antonio Pérez, su sucesor en la presidencia de la SAEM Thales, que da paso a una serie de contribuciones científicas que en nombre de la Federación y de las sociedades le dedican.

Por supuesto, hubiese habido bastantes más compañeros que individualmente hubiesen querido unirse con sus colaboraciones en este número. Sin embargo, este homenaje no tiene porque finalizar aquí, sino que debe extenderse a lo largo

EDITORIAL

del tiempo participando en las diferentes actividades organizadas por la Federación y sus sociedades, que con seguridad perpetuará la memoria de Gonzalo de una manera permanente.

Gonzalo, estamos seguros que desde donde estés, el cielo de los matemáticos buenos –según expresión feliz de Claudi Alsina–, te hará ilusión recibir este número 25 de tu revista y leer los artículos que, como pequeño homenaje, te dedican un grupo de amigos y amigas de las sociedades que tu presidiste en la Federación, en representación de otros cuatro mil y pico amigos más.

Gonzalo Sánchez Vázquez

Presidente de la Federación Española
de Sociedades de Profesores de Matemáticas
(1917-1996)

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Presidente: Ricardo Luengo González
Secretaria General: Carmen Azcárate Giménez
Tesorero: Florencio Villarroya Bullido

Sociedades federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya
Presidente: Antoni Vila
Apartado de Correos 1306. 43200-REUS (Tarragona)

Organización Española para La Coeducación Matemática «Ada Byron»
Presidenta: Nieves Zuasti
Almagro, 28. 28010-MADRID

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Antonio Pérez
Apartado 1160. 41080-SEVILLA

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas «Pedro Sánchez Ciruelo»
Presidente: Florencio Villarroya
ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: J. Horacio Gutiérrez Álvarez
Apartado de Correos 830. 33400- AVILÉS (Asturias)

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas «Isaac Newton»
Presidente: J. Antonio Rupérez Padrón
Apartado de Correos 329. 38201-LA LAGUNA (Tenerife)

Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas
Presidente: Modesto Sierra Vázquez
IB Comuneros de Castilla. C./ Batalla Villalar, s/n. 09006-BURGOS

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Luis Carlos Cachafeiro Chamosa
Apartado de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-MÉRIDA (Badajoz)

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidenta: María Jesús Luelmo
Apartado de Correos 14610. 28080-MADRID

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Ángela Núñez
IES José María Pereda. C./ General Dávila, 288. 39007-SANTANDER

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea Tornamira
Presidente: José Ramón Pascual Bonis
Departamento de Matemática e Informática. Campus de Arrosadía. Universidad Pública de Navarra. 31006-PAMPLONA

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Despacho 3517. Facultad de Educación. Universidad Complutense. 28040-MADRID

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Luis Puig Espinosa
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Apartado 22045. 46071-VALENCIA

SUMA 25
junio 1997, pp. 7-14

Semblanza del profesor don Gonzalo Sánchez Vázquez*

Antonio Pérez Jiménez

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

DIGNÍSIMAS autoridades, estimados compañeros y amigos, queridos familiares de Gonzalo:

Nos reunimos hoy para dedicar un merecido homenaje al profesor don Gonzalo Sánchez Vázquez. Pero recientemente nos han dejado también los profesores José Rodríguez Galán y Eugenio Fedriani, amigos de Gonzalo y nuestros. Por ello quisiera que, en este día señalado, los tuviéramos en nuestra memoria. Tal vez Gonzalo, hoy, les hubiera dedicado una de sus poesías:

Estos números que crecen y crecen sin descanso,
0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999,...
acercándose cada vez más a la unidad divina,
acariciándola sin llegar a tocarla todavía:
esa sucesión numérica es también poesía.
Es como una rima inacabada y sostenida,
como una esperanza siempre insatisfecha,
como un deseo que nunca se detiene,
como un cercano horizonte inalcanzable,...
Triángulos, círculos, polígonos,
elipses, hipérbolas, parábolas,
suenan en nuestros oídos desde Euclides
como formas geométricas abstractas,
figuras ideales que viven con nosotros,
porque también en el amor hay triángulos
en el cielo se dibuja sin compás el arco iris.
Vais paralelos siempre lenguaje y geometría,
pues en el habla se esconden las elipses,
en los libros sagrados se habla por parábolas
y en los poemas épicos se disparan las hipérbolas.
Números y formas, imágenes y ritmos
orden y luz en versos y en teoremas,
con un toque supremo de armonía,
estáis juntas en la memoria de los tiempos,
juntas estáis matemática y poesía.

* Intervención del Presidente de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales en el «Homenaje Póstumo al profesor Gonzalo Sánchez Vázquez», que tuvo lugar en Sevilla los días 21 y 22 de marzo de 1997.

Juntos estarán hoy Eugenio, Pepe y Gonzalo en nuestro corazón.

Quiero agradecer a todos vuestra presencia, en nombre de la Junta Directiva de la Sociedad de Educación Matemática Thales, en estos actos de entrañable reconocimiento al profesor Gonzalo Sánchez Vázquez. Igualmente quiero agradecer las muestras de cariño y adhesión de quienes por diversas razones no pueden estar hoy aquí: Alberto y Mercedes, Ceferino y Pilar,...

Muchos compañeros y compañeras podrían estar aquí en este momento, en mi lugar, para hacer una semblanza de la figura humana y profesional de Gonzalo. Todos lo haríamos con orgullo y satisfacción y con la inquietud de dejar muchas cosas por decir, pero, al mismo tiempo, con la seguridad de que nuestro mensaje saldría de lo más profundo de nosotros mismos. Muchas gracias por concederme el honor de ser yo quien dirija estas palabras que van a salir de dentro y que por ello tendrán el subtítulo de

Recuerdos

Entramos en su despacho. Parecía no haber nadie, pero sabíamos que Gonzalo estaba allí pues no en vano el conserje nos había invitado a pasar.

¡Gonzalo!, inquirió Antonio Aranda.

De entre los libros amontonados sobre la mesa surgió una melena blanca; luego, unas gafas grandes y, finalmente, una enorme sonrisa afable. Así conocí al profesor don Gonzalo Sánchez Vázquez; así conocí a mi amigo Gonzalo y aún hoy y para siempre llevaré conmigo la impronta de su sonrisa.

Corría el año 80 con la transición en marcha. Los movimientos en torno a la enseñanza y la educación pasaban por un momento de ebullición; las libertades afloraban y Rosa Sensat, como movimiento emblemático, marcaba la pauta de los movimiento educativos. Grupos Ceros de Barcelona y Valencia, Grupo Gamma –luego Azarquiel– de Madrid, Seminarios Permanente de Matemáticas de Málaga, Salamanca, Santander; Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. En Sevilla nos reuníamos un grupo de profesores bajo la denominación de Colectivo de Didáctica de las Matemáticas (Trini, Antonio, Manolo, José Antonio,...) que, tras algunas discusiones, decidimos crear, siguiendo el ejemplo de los compañeros de Canarias, una asociación de profesores con el objetivo de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, al mismo tiempo que nos dotábamos de un marco de acción propio para nuestro trabajo profesional. Para constituir una tal asociación considerábamos imprescindible que fuese encabezada por un profesor prestigioso, renovador y vinculado al mundo de la enseñanza de las matemáticas en todos sus niveles. Buscábamos, también, a un líder.

Era, sin lugar a duda alguna, la persona ideal para encabezar una asociación como la que habíamos pensado.

Por eso un día entramos en el Instituto Fernando de Herrera, pasamos al despacho de su director y además de melena blanca, gafas y sonrisa cordial, encontramos primero a un amigo –y por eso líder–, encontramos a un vitalista –y por eso poeta–, encontramos a un matemático, a un profesor y a un maestro. Gonzalo amaba profundamente a las matemáticas; por eso, allí mismo, en su despacho, y sin que aparentemente viniese a cuento, nos narró su demostración del teorema de Ptolomeo. Era, sin lugar a duda alguna, la persona ideal para encabezar una asociación como la que habíamos pensado.

Recuerdo cómo Gonzalo que había abandonado ya su mesa y se había sentado a nuestro lado, nos contó su implicación, o mejor, su complicidad, con la matemática y con la enseñanza: tras realizar el bachillerato en el Instituto Gaona de Málaga, el mismo en el que estudiase el premio Nobel Severo Ochoa, cursó el Plan Profesional de Magisterio, plan modernísimo e innovador elaborado bajo la influencia de los ideales de la Institución Libre de Enseñanza y en el que asimiló las primeras nociones de pedagogía. Como dicho plan fuese derogado tras la Guerra Civil, decide estudiar Ciencias Exactas, su primera –o segunda– gran vocación.

Terminada su licenciatura en Madrid en el año 1944, realiza los cursos de doctorado mientras se dedica, como única salida profesional del momento dada su anterior militancia en los movimientos juveniles de izquierda, a dar clases particulares en una academia que prepara a los alumnos para el ingreso en las Escuelas Superiores de Ingeniería. Publica en aquella época una, según su humilde decir, obrita titulada: *Lecciones de Cónicas* que es un libro descriptivo desde el punto de vista afín y métrico y que utiliza principalmente para la preparación de los citados alumnos.

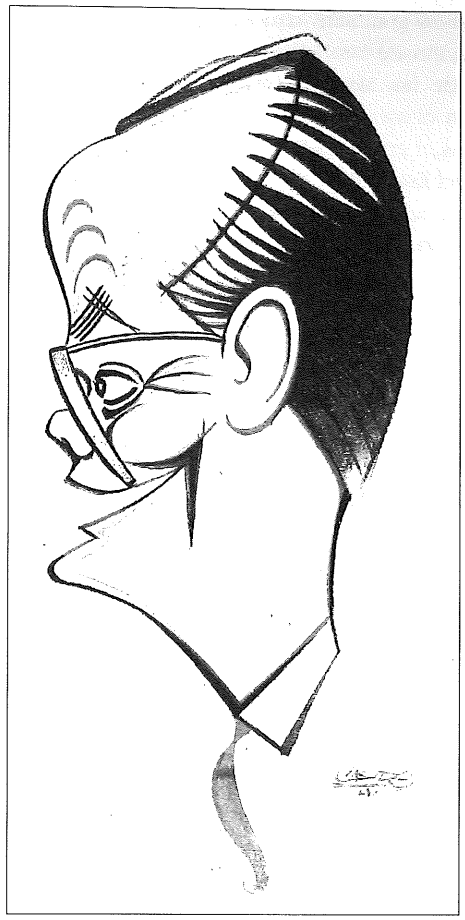
En el año 1954, cuando por fin se produce una ligerísima apertura del régimen, se presenta a oposiciones de Institutos de Enseñanza Media, obteniendo brillantemente la Cátedra de Matemáticas del Instituto Femenino de Oviedo. Incorporado a su plaza, comparte el trabajo en el citado centro, del que también fue director, con labores docentes en la Universidad de Oviedo.

Tras tres años de docencia en Oviedo, se hizo con un encargo de cátedra en la Universidad del Zulía, en Maracaibo, Venezuela, donde estaría hasta el año 1962 en que se reincorpora a su cátedra de Matemáticas, pero ahora en el Instituto Murillo de Sevilla. En el verano siguiente da un curso de matemática en la Universidad Internacional Menéndez y Pelayo, de Santander; Gonzalo volvía al Palacio de la Magdalena al cabo de veintisiete años, pues el estallido de la Guerra Civil le sorprendió precisamente allí, mientras seguía, como becario, unos cursos de Filosofía.

En Sevilla, donde también estuvo como profesor en el Instituto Velázquez, participó a finales de los sesenta y principios de los setenta en la creación de la Sección de Matemática, colaborando estrechamente con don Antonio de Castro, con el que le unieron no sólo estas relaciones de colaboración sino, también, los lazos de un entrañable afecto y una cordial amistad. Impartió docencia en la Escuela Superior de Arquitectura y en la Facultad de Matemáticas, en diversas disciplinas: Geometría Analítica, Topología, Ecuaciones Diferenciales, entre otras. Y, fruto de su vocación por la enseñanza, dirigió durante cuatro años, en esta Facultad de Matemáticas que hoy nos acoge, un Seminario sobre Didáctica de las Matemáticas, para alumnos de los últimos cursos de carrera.

En el año 1968 fue encargado por el inspector López Cañete para poner en marcha un instituto de nueva creación cuyo primer nombre oficioso sería el de Francisco de Herrera. Gonzalo y su equipo directivo prefieren el nombre del poeta, también sevillano, Fernando de Herrera. Finalmente este es el nombre que adopta el Instituto, inaugurado el curso 1968-69, y Gonzalo es sistemáticamente reelegido director por sus compañeros hasta su jubilación forzada, que no forzosa, 17 años después, en 1985.

Tras tres años de docencia en Oviedo, se hizo con un encargo de cátedra en la Universidad del Zulía, en Maracaibo, Venezuela, donde estaría hasta el año 1962 en que se reincorpora a su cátedra de Matemáticas, pero ahora en el Instituto Murillo de Sevilla.



A partir de 1970 y con la puesta en marcha de la Ley General de Educación de Villar Palasí, colabora, como catedrático tutor, con el Centro de Orientación Didáctica del Ministerio de Educación y Ciencia y el ICE de la Universidad de Sevilla, en la preparación de los profesores de Matemáticas.

Todas estas cosas y muchas más nos contó en ese primer y afortunado encuentro. Recuerdo que se nos hizo tarde, tal vez muy tarde en muy poco tiempo pues su conversación era no sólo interesante sino también amena y de verbo ágil. Acabamos tomándonos un tinto en el mismo bar del Instituto. Gonzalo seguía hablando y ni siquiera observó, cuando pidió un segundo tinto, la cara de resignación, por lo tardío de la hora, del camarero que nos atendía.

La Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas Thales celebra su Asamblea Constituyente el 21 de noviembre de 1981. Gonzalo, que preside la Comisión Gestora, es nombrado Presidente.

La primera gran actividad que organiza la Sociedad es la celebración de las II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, de ámbito nacional. Tienen lugar en el mes de abril de 1982, en Sevilla. Inaugura las Jornadas el entonces Presidente de la Junta de Andalucía, D. Rafael Escuredo. La clausura corre a cargo de Gonzalo. Es su primer discurso como presidente de la Sociedad; en él Gonzalo habla de la necesidad de la renovación de la enseñanza, en particular de la enseñanza de las matemáticas; aboga por un resurgimiento de la Geometría como parte esencial de la enseñanza de la matemática y, ante los grupos de renovación y sociedades allí congregados, hace votos por un futuro fructífero del que nunca duda pues tenía una visión muy clara no sólo de la necesidad de la renovación, sino, también, de la realidad en la que se movía.

Puedo afirmar que, desde aquel momento, Gonzalo pasó a ser un claro referente de la renovación de la enseñanza de las matemáticas de nuestro país y no sólo de Andalucía.

Una vez terminadas las Jornadas, Gonzalo impulsa la realización de múltiples actividades para el profesorado y, bajo su dirección y en el plazo de muy pocos años, la Sociedad se consolida en Andalucía: colaboración con las instituciones, Plan Alhambra, cursos organizados con los CEP y con los ICE de Andalucía, Centro de Documentación en convenio con la Consejería de Educación y la Universidad de Cádiz. Olimpíadas de Matemáticas para alumnos de 8.° de EGB (que empieza coordinando José Manzanera y continúa José Romero); la revista de la Sociedad, que comienza bajo la dirección de Manuel Iglesias en el año 1984 y continúa hoy dirigida por Javier Pérez, tras haber editado 36 números y varios monográficos. Las Jornadas bianuales, que cerrarán su recorrido andaluz el próximo año en Jaén. Serán nuestras octavas jornadas; las primeras a las que no asistirá Gonzalo y que serán dedicadas a su memoria.

Pero Gonzalo no sólo tenía una idea clara de la Sociedad de Profesores de Matemáticas como movimiento del profesorado andaluz, sino que consideraba necesaria la vinculación de la misma con todos los grupos y asociaciones que compartiesen nuestros objetivos de mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La Sociedad Thales había nacido ya con una estrecha vinculación a la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. Recientemente se había constituido la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas y, al poco tiempo, la Sociedad Aragonesa Pedro Sánchez Ciruelo. Gonzalo estuvo, como pionero, entre los promotores de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, que no cuajaría hasta el año 1987. Gonzalo fue su primer presidente y, con Florencio Villarroya primero y Luis Balbuena después como secretarios generales, consolidaron el movimiento asociativo a nivel nacional con la incorporación de siete asociaciones más de ámbito comunitario. Cumplido el turno de Presidente que por estatutos le correspondía, Gonzalo fue nombrado Presidente de Honor de la Federación.

Gonzalo tenía además una gran amplitud de miras por ello pensaba, desde que se creó la Sociedad Thales, en contactar con el resto del mundo; en particular, tenía muy clara la necesidad de una vinculación con el mundo iberoamericano, por la afinidad de nuestras culturas.

Gonzalo tenía además una gran amplitud de miras; por ello pensaba, desde que se creó la Sociedad Thales, en contactar con el resto del mundo; en particular, tenía muy clara la necesidad de una vinculación con el mundo iberoamericano, por la afinidad de nuestras culturas. Comienza a perfilarse de esta manera, al poco de nacer nuestra asociación, sendos proyectos de vinculación a los colectivos internacionales: en concreto, la creación de una estructura permanente con Iberoamérica y la celebración en Andalucía de un congreso internacional. Para ello, era necesario acudir a los distintos congresos, establecer relaciones, fijar contactos.

Es así como en agosto de 1983 aprovechamos que en Lisboa se celebraba uno de los encuentros anuales de la Comisión Internacional para el Estudio y Mejoramiento de la Enseñanza de las Matemáticas, la CIEAEM, movimiento nacido al comienzo de los años cincuenta y en el que participaron psicólogos como Piaget, pedagogos como Gattegno, profesores universitarios como Dieudonné y maestras como Emma Castelnuovo.

Al llegar a Lisboa, nos fuimos directamente a dejar nuestras maletas a una pensión de la Avda. da Liberdade. Al entrar me hizo un guiño que sólo entendí cuando el recepcionista, con cara de sorpresa dijo, a la vista del documento identificativo que mostró Gonzalo: ¡el trece de mayo de 1917! Había nacido el mismo día que, en Cova de Iria, se apareció la Virgen de Fátima. Y eso era un motivo de amistosa complicidad con sus paisanos portugueses. Gonzalo era un hombre de vasta cultura conseguida en gran parte gracias a sus múltiples viajes por medio mundo que recorrió con su querida Josefina, con la que compartía el amor de toda una vida y el infinito dolor por la pérdida de su hija Berta, fallecida en un trágico accidente aéreo en Ibiza cuando iniciaba su luna de miel. Y compartía también con Josefina un secreto difundido con orgullo entre sus amigos: se habían casado dos veces, antes y después de la Guerra Civil. Tanto para él como para Josefina, Portugal formaba parte de su propio país. ¡Así apreciaban a Portugal! Les gustaba pasear por Lisboa, acercarse a la plaza del Rocío y, en sus aledaños, tomar una buena merluza cocida regada con vino verde.

En aquellas noches cálidas de nuestra estancia en Portugal, Gonzalo me habló de su juventud. Hijo de María y de Benedicto, teniente del cuerpo de Carabineros que sufriría las cárceles franquistas tras la Guerra Civil y hermano menor de un destacado filosofo y dirigente de izquierdas, Adolfo, militó en los movimientos estudiantiles más progresistas de la época. De la mano de Emilio Prados, bebió en las fuentes poéticas de la generación del 27 y, poeta él mismo, colaboró con la revista *SUR*, dirigida por su hermano y de la que, debido al comienzo de la Guerra Civil, sólo pudieron salir dos números. Durante la Guerra Civil colaboró también, al lado de Prados, Altolaguirre, Alberti, María Teresa León, Bergamín, Vicente Aleixandre, etc. en unas «Ediciones de la Guerra Civil'»que, bajo el título *Romancero de la Guerra Civil*, difundía el Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes republicano. Recuerdo aún aquellas estrofas de Prados, escritas en homenaje a Federico y que me recitó de memoria:

Amigos, vengo de Málaga;
aún me huele a sal el sueño,
me huele a pescado y gloria,
a espuma y a sol de fuego.
Mucho que contaros traigo,
mucho que contar y bueno.
Amigos, os hallé a todos,
alegres en vuestros puestos.

Gonzalo era un hombre de vasta cultura conseguida en gran parte gracias a sus múltiples viajes por medio mundo...

Durante el Congreso de la CIEAEM, Gonzalo presentó a la Sociedad Thales ante la comunidad internacional y estableció los primeros vínculos internacionales de nuestra asociación. Aparte de los miembros de la Comisión Internacional, en la que nos introdujo la profesora Emma Castelnuovo, contactamos con los profesores portugueses: Leonor Philippe, Maria Joao, Paulo Abrantes y un amplio etcétera que, poco más tarde, organizarían la Sociedad de Profesores de Matemáticas de Portugal, con la que hoy nos une unos lazos entrañables de colaboración.

En el año 1985, durante la celebración de las II Jornadas Andaluzas de la Sociedad Thales, Gonzalo conoció al profesor Ubiratan D'Ambrosio, que, por entonces, era vicepresidente de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática, ICMI. Lo habíamos invitado a nuestra Jornadas por consejo de nuestro compañero González Dávila que había escuchado la conferencia que el citado profesor desarrolló durante la celebración del 6.° Congreso Internacional de Educación Matemática, celebrado en 1984 en Sidney, Australia. Ubiratan y Gonzalo entablaron ya una gran amistad cargada de proyectos. En concreto, comenzaron a perfilar la posibilidad de montar el 7.° ICME de 1992 en Sevilla y la de organizar encuentros periódicos entre España, Portugal y los países del área latinoamericana. Ya sabéis cómo acabaron esos proyectos: en 1990 se celebraría el I CIBEM en Sevilla, coordinado por la profesora Mercedes García y el año pasado, también en nuestra ciudad, tuvo lugar el 8.° ICME.

Avalados por el Profesor D'Ambrosio acudimos a las Sextas Conferencias Interamericanas de Educación Matemática que se desarrollaron en noviembre de 1985 en Guadalajara, México. Comprendimos que para establecer lazos con el mundo iberoamericano había que acudir a estas citas. Es así como nuestra Sociedad estaría siempre representada por Gonzalo en todas las Conferencias Interamericanas que se han celebrado desde entonces: Santo Domingo, 1987; Miami, 1991; Santiago de Chile, 1995. Gonzalo se convirtió muy pronto, con esa naturalidad que él llevaba dentro, en el embajador de los profesores españoles.

En México se produjo su reencuentro con las tierras de América. Conocí entonces a Adolfo, exiliado durante la Guerra; y pude apreciar de cerca esa nostalgia que en ciertos momentos acompañaba a Gonzalo, ese desgarro provocado en su familia, pues como afirma el profesor Adolfo Sánchez Vázquez en una entrevista publicada hoy mismo en el diario *El País*, el exilio «crea una situación de desdoblamiento esquizofrénico. Cuando era imposible, queríamos volver y ahora que podemos, tenemos ya la familia y la vida en otro lugar». Volvió a charlar con viejos amigos, como Luis Santaló y Emilio Lluis, y trabó amistad con otros muchos profesores. No quiero dejar de citar algunos nombres más en representación de quienes hoy estarían aquí con nosotros si no fuese por la enorme distancia física: Eduardo Luna, de la República Dominicana; Angel Ruiz-Zúñiga, de Costa Rica; Fidel Oteiza, de Chile; Alicia Villar, de Uruguay; Fernando Castro, de Venezuela; Antonio José Gomes, de Brasil... Muchos de ellos colaborarán en el libro que editaremos en homenaje a Gonzalo.

Guardo también un recuerdo especial del Congreso de Miami. Allí coincidió Gonzalo con la profesora Estrella Suárez que ocupaba en aquel momento una plaza en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zulía, en Maracaibo, Venezuela; el mismo departamento que, a finales de los cincuenta y comienzo de los sesenta, dirigió el profesor don Gonzalo Sánchez Vázquez. Fue como si se conocieran desde siempre:

— «¿Recuerdas, Gonzalo, como te llamaban los alumnos?... Sí, sí, te llamaban raíz cuadrada de dos», dijo Estrella esbozando una sonrisita irónica.

— «Esos chicos», replicó Gonzalo en tono bonachón, «me llamaban así porque decían que mi estatura era de 1,4142. A decir verdad, creo que se pasaban un poco». Al finalizar el Congreso, Estrella me confesó:

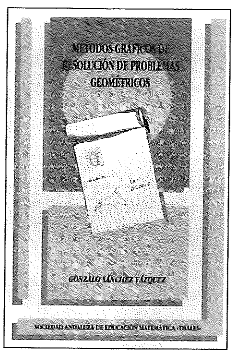
— «Le llamaban raíz cuadrada de dos pero no por la estatura, sino por lo inconmensurable de su figura humana y profesional».

Las profesoras Estrella Suárez y Leonor Castrillo, en un artículo que verá la luz en el libro que editaremos en su homenaje, escriben que «Gonzalo llegó a Maracaibo en el año 1957. Trabajó en la Facultad de Economía en las cátedras de Análisis Matemático I y II, desempeñando el cargo de Jefe del Departamento de Matemática. En 1960 ingresa en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Zulía y dicta las asignaturas de Análisis Matemático I, II y III, Geometría Métrica, Geometría Descriptiva y Geometría Proyectiva. En el mismo año es nombrado Jefe del Departamento de Matemática. Don Gonzalo publicó los siguientes artículos durante su estancia en Maracaibo: *Nuevo estudio de las Curvas de Transmisión mediante la estrofoide oblicua* y *Modernización de la enseñanza de las matemáticas en las Facultades Técnicas.* Su trabajo fue considerado muy valioso por las autoridades universitarias, en documento que reposa en la Secretaría de la Universidad».

Según refiere un alumno suyo de entonces, Darío Durán, «Sus clases eran divertidísimas y amenas. Era un brillante expositor y tenía una vitalidad asombrosa. Se jactaba de dibujar a la perfección un círculo sin necesidad de usar el compás, pero se quejaba de que le era muy difícil dibujar exactamente el centro». Y también el mismo alumno refiere: «Me enseñó a 'leer' la letra menuda del 'libro de Rey Pastor', como él lo llamara, y aprendí a querer la Matemática. Por eso dejé la ingeniería y me dediqué a la profesión de profesor de matemáticas, que he desempeñado en la Universidad de Zulía durante más de veinticinco años».

Estas palabras de su alumno venezolano constituyen una gran verdad. En muchas ocasiones le hemos consultado algún problema de geometría. Con una agilidad y un entusiasmo envidiables, Gonzalo no sólo te resolvía el problema sino que, además, te lo narraba y te proponía otro. Ha impartido multitud de cursos por toda la geografía andaluza consiguiendo que quienes asistían a sus cursos amasen, como Darío, las matemáticas y, muy especialmente, la Geometría. Sus últimas lecciones han quedado editadas en un denso libro de geometría clásica bajo el título: *Métodos gráficos de Resolución de Problemas.*

Con una agilidad y un entusiasmo envidiables, Gonzalo no sólo te resolvía el problema sino que, además, te lo narraba y te proponía otro.



Los proyectos urdidos con Ubiratan se convirtieron en realidad: se constituyó la Comisión Iberoamericana de Educación Matemática, cuya representación ostentó Gonzalo, en nombre de la Federación. Se han celebrado dos Congresos Iberoamericanos de Educación Matemática: el primero, ya citado, en 1990 en Sevilla; el segundo en 1994 en Santa Catarina, Brasil. El próximo tendrá lugar en Caracas, Venezuela, el próximo año.

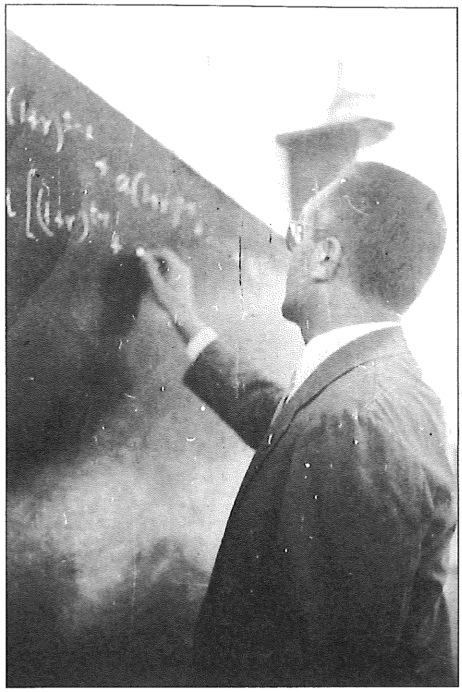
Pero Gonzalo no pudo asistir ya a su último proyecto: el 8.° ICME. ¡Cuánto esfuerzo, cuánto trabajo y cuánta ilusión derrochadas por un joven que este año hubiera cumplido los ochenta! Fue un proyecto en el que tantas personas e instituciones pusieron su empeño, que imagino su canto, imagino su verso en el acto de apertura, dirigido a Miguel y a Claudi, a Concha y a José María, a Juan Antonio y a Lalo, a Pepe y a Jaime, a Salvador y a Luis, a Águeda y a María Jesús, Pilar y Carmen, a Claude y a Mogens, a Luis y a Ricardo, a Alicia y a Eduardo.

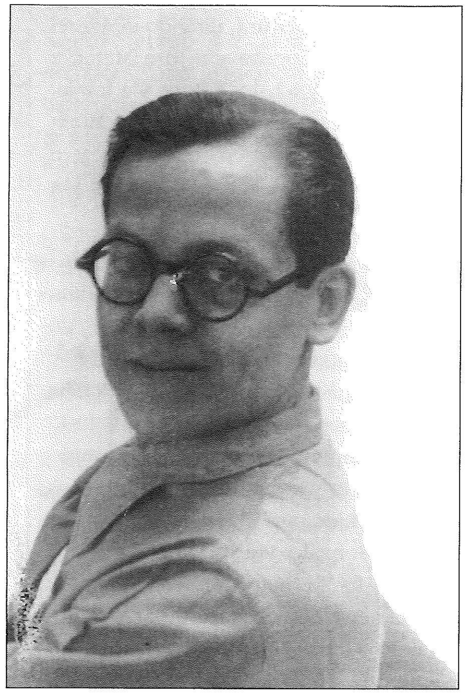
Queridos Olivia y Juan Luis. Queridos Berta, Olivia y Juan Luis. Querida María Luisa. Nos sentimos orgullosos de haber compartido nuestro trabajo y nuestra amistad con Gonzalo. Podéis estar seguros de que pondremos todo nuestro empeño en continuar el camino que él inició y toda nuestra voluntad en seguir su ejemplo. Podéis estar seguros porque Gonzalo, vuestro padre, vuestro abuelo, tu hermano, nuestro amigo, podría decir hoy de sí mismo, recitando a Pedro Salinas (Presagios, 1924):

Forjé un eslabón un día,
otro día forjé otro
y otro.
De pronto se me juntaron
-era la cadena- todos.

Muchas gracias.

Antonio Pérez
Presidente de la
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
Thales





SUMA 25
junio 1997, pp. 15-16

¿De dónde sois?

Francisco L. Esteban Arias

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

A Gonzalo Sánchez Vázquez

CUMPLIDO recientemente un lustro de su fundación, es mucha la deuda contigo contraída por parte de nuestra Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas.

Era una de tus grandes ilusiones: «Crear una sociedad en cada comunidad, en cada provincia, en...». Con esa ilusión era frecuente encontrarte en un pasillo de cualquier lugar donde se celebrase alguna actividad relacionada con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas; la escena era la siguiente:

— *De dónde sois.*

— De...

— Allí estuve yo con motivo de... Conocí a... gran persona que... aquel día... Y ¿por qué no os animáis a crear una sociedad para...? Yo podría enviaros... y poneros en contacto con... Venid que os presento a...

Así se gestaron las primeras «voluntades» de algunos entusiastas que posteriormente acabaron en la constitución de una sociedad. Y más o menos así se fraguó inicialmente la nuestra; tras una conversación parecida todo se hacía más sencillo y la idea se convertía en un fin para quienes de tu boca la escuchaban.

El Encuentro Nacional de Burgos (abril de 1992) sirvió de marco general para nuestro nacimiento y, cómo no, allí estabas tu junto con Luis Balbuena para apoyar y animar a todos los presentes en la Asamblea Fundacional, y para presentar una comunicación, y para intervenir con Miguel de Guzmán sobre «el futuro» ICME-96 de Sevilla, y... para verte en un rincón preguntando: *¿de dónde sois?*

A pesar de tu presencia en el Encuentro, de las aportaciones al mismo, del apoyo y ánimo al trabajo que entre bastidores se realizaba y de la valoración positiva hacia todo lo que como bisoños planteábamos, era constante tu agradecimiento por haber sido invitado al acontecimiento.

Además de otros contactos en diversas actividades, tu presencia en nuestra comunidad destaca en dos ocasiones: el Seminario de Psicología y Didáctica de la Educación Matemática (Sanabria, abril 1994), con la celebración de una reunión de la Junta de Gobierno en paralelo al desarrollo del mismo, y el III Seminario Castellano-Leonés de Enseñaza-Aprendizaje de las Matemáticas (Astorga, septiembre 1994). En ambos acontecimientos volvimos a gozar de tu inagotable animosidad.

Fueron diversas las facultades que de ti percibíamos a medida que te íbamos conociendo, pero quizás merezca resaltar las siguientes: el convencimiento sobre la necesidad de la educación matemática, el contagioso entusiasmo por la constitución de sociedades de profesores y, cómo no, la tenacidad que mostrabas ante la vida y ante la consecución del objetivo que intentabas transmitirnos alrededor de las Matemáticas.

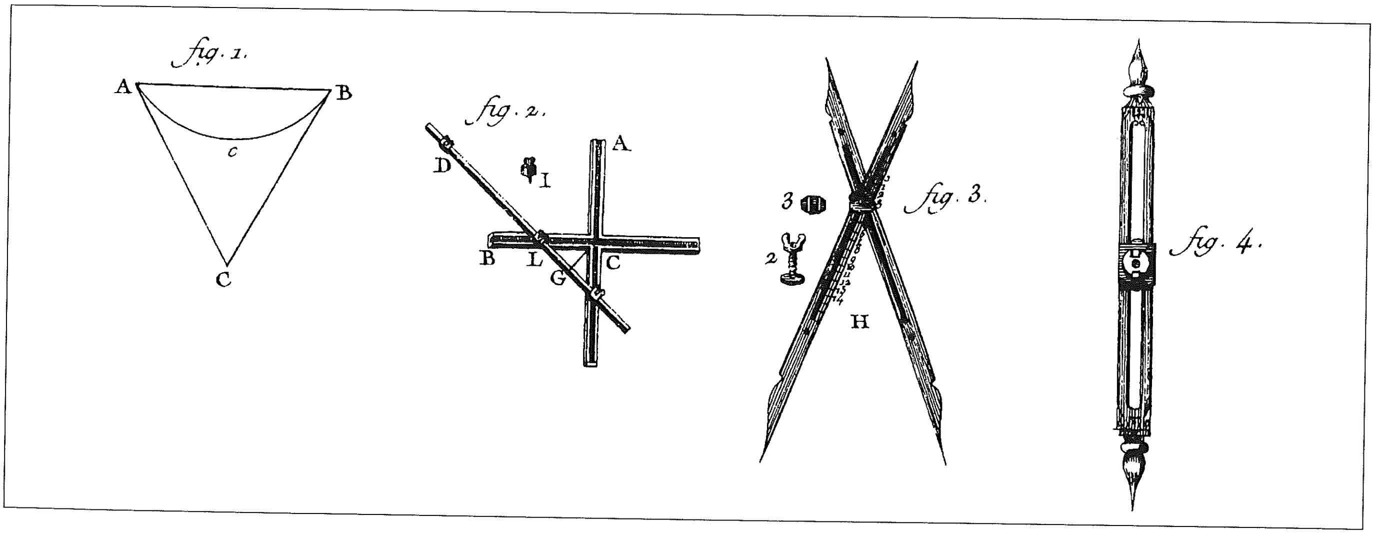
Sin embargo, la característica que más recordaremos es tu energía y vitalidad: nunca te cansabas. Cada sociedad tendrá más de un recuerdo al respecto, pero en nuestro caso una que no olvidaremos, y que refleja sin calificativos quien eras, es la siguiente:

Aquel viernes 8 de abril no habías podido llegar a Sanabria a la hora de la comida porque en «tu» instituto inauguraban el Salón de Actos al que habían puesto tu nombre. Te habías levantado pronto, hiciste la maleta, acudiste al instituto y, tras el emotivo acontecimiento, lograste tomar por los pelos un autocar directo que, tras diez horas de viaje, te conduciría a Puebla de Sanabria. A las tres de la mañana, entumecido y con aspecto cansino bajabas del autobús sonriente ante quienes te fueron a esperar. Invitado a tomar un café «rápido» en un establecimiento cercano, asentiste con la condición de no tardar mucho en ello. El establecimiento resultó ser una discoteca con bastantes personas bailando quienes, al verte entrar, aplaudieron con entusiasmo al grito de ¡Gonzalo, Gonzalo! Allí estaban representadas la mayor parte de las sociedades, de tus Sociedades, y uno por uno fueron saludándote muchos a los que algún día pasado le habías preguntado: *¿de dónde sois?*

Tu aparente cansancio inicial, tras unos momentos de emoción por lo inesperado de la situación, se transformó en energía, en bailes, en alegría; parecía que acababa de amanecer para ti, que aquel día de emotiva inauguración e interminable viaje quedaba muy lejano. Bien entrada la madrugada nos fuimos para San Martín de Castañeda y, al darnos las buenas noches ya al alba, te recordaremos sentado en el salón del albergue con un grupo de personas a quienes les decías: *¿de dónde sois?*

Gracias Gonzalo.

Francisco L. Esteban
Sociedad Castellano-Leonesa
del Profesorado
de Matemáticas



SUMA 25
junio 1997, pp. 17-22

La enseñanza de la geometría en el momento actual y en el futuro inmediato*

Gonzalo Sánchez Vázquez

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

LA PONENCIA sólo pretende señalar unas líneas generales sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría, la renovación que debe producirse en un futuro inmediato y la difícil problemática que entraña la elección de los contenidos, la didáctica más adecuada y el reciclaje de un profesorado no bastante preparado para esa renovación. He ahí las tres cuestiones clave.

Hace más de veinte años, a raíz del famoso «A bas Euclides» de Dieudonné en Royaumont, se produjo un progresivo desmantelamiento de los antiguos programas de geometría, inspirados en buena parte en los *Elementos,* sobre todo en los niveles básico y medio. Los contenidos geométricos se convirtieron, especialmente, en las enseñanzas media y superior, en simples capítulos de Álgebra Lineal. En la educación general básica, prácticamente se suprimieron las cuestiones geométricas, tanto las referentes a las propiedades de las figuras y sus relaciones de posición en el plano y en el espacio, como a las transformaciones geométricas y a la medida de áreas y volúmenes.

El profesorado en ejercicio tuvo que adaptarse a la corriente renovadora, a los nuevos programas, precipitada e insuficientemente, porque los cursillos de actualización en el nivel de EGB (no los hubo en general en la enseñanza media), no tuvieron otro interés que el de crear una inquietud en torno a la nueva orientación y mostrar la necesidad de que el mismo profesorado atendiera a su propio perfeccionamiento. Lo que, por otra parte, no era negativo en cierto modo, pero sí insuficiente. Las posibilidades de que un profesorado mal preparado y peor reciclado llevara adelante con éxito la reforma proyectada y la interpretase correctamente eran casi nulas desde el principio. Tratar de hacer una revolución en la enseñanza de las matemáticas sin contar con los medios y

* Ponencia presentada en las III Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, celebradas en Zaragoza los días 10, 11 y 12 de marzo de 1983 y organizadas por la Sociedad Aragonesa Pedro Sánchez Ciruelo de Profesores de Matemáticas y el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

las personas, tenía que llevarla al fracaso y a empobrecer incluso el bagaje de conocimientos utilitarios de un gran número de alumnos, que no harían nunca carreras superiores. Y es dudoso que la enseñanza de la llamada matemática moderna, sin suficientes modelos concretos, y sin un conocimiento serio por la mayoría de los profesores de sus contenidos y de sus aplicaciones posteriores, haya contribuido a desarrollar hábitos lógicos en escala superior a la que se llegaba anteriormente cuando los profesores, con seguridad y convencimiento de lo que hacían, sabían sacar las primeras conclusiones generales a partir de situaciones concretas e incluso familiarizaban a los alumnos de un modo natural con el dominio de los automatismos de cálculo.

Por otra parte, la interpretación literal de los seguidores de la nueva programación fue mucho más allá de lo que proyectaban sus principales progenitores. Porque, ¿qué se pretendía?, ¿cuáles eran los objetivos de la reforma? No se trataba tanto de suprimir de la enseñanza de la geometría los contenidos que la habían llenado durante siglos (a pesar de la frase de Dieudonné de enviar al museo una buena parte de lo que se estudiaba hasta entonces en los niveles básico y medio), sino de romper el método axiomático-deductivo de su tratamiento. Se trataba, más bien, de *dinamizar* el estudio de las matemáticas, en general, y en particular de la geometría, alejándolo de una visión estática de las figuras y de una simple, aunque razonada, exposición de lemas, teoremas y corolarios. Había que poner mayor énfasis en las construcciones y transformaciones geométricas, y en su vinculación con el mundo exterior y con las ciencias fisiconaturales.

Pero estos objetivos no sólo se incumplieron, sino que se cayó en un nuevo formalismo, más rígido y vacío que el anterior. La pretensión de enseñar estructuras algebraicas, sin disponer casi de ejemplos ni modelos anteriores, ya en la EGB, y también en las enseñanzas media y superior, donde algunos cursos de Geometría consistían exclusivamente en el estudio de los módulos y otras estructuras, olvidando, por ejemplo, la existencia de las cuádricas y otras superficies (regladas, helicoidales, etc.) de tanta conexión con la técnica y con las ciencias experimentales, creó más que un gusto por la abstracción, una atmósfera de *desertización* y de falta de motivación en el estudio de la Geometría.

El propio Dieudonné afirmaría, unos dieciséis años más tarde, en 1975: «El profesor de Matemáticas que debe enseñar en el nivel medio debe frenar, en lo posible, sus gustos y tendencias de matemático puro y procurar que *los resultados y métodos que trate estén próximos a la realidad sensible y sean susceptibles de aplicaciones lo más inmediatas posibles*. Se puede deplorar este aspecto *utilitario*, pero es exigido por la composición misma de los alumnos». Deben resaltarse tres ideas fundamentales: 1) el profesor debe frenar sus tendencias de matemático puro, 2) debe acercar los contenidos y métodos a la realidad exterior, y 3) debe conectar lo que explica y cómo lo explica con inmediatas aplicaciones. ¡Qué lejos están esas reflexiones del tipo de enseñanza formalista que se impuso durante tantos años!

Y es dudoso que la enseñanza de la llamada matemática moderna, sin suficientes modelos concretos, y sin un conocimiento serio por la mayoría de los profesores de sus contenidos y de sus aplicaciones posteriores, haya contribuido a desarrollar hábitos lógicos en escala superior a la que se llegaba anteriormente...

El daño que este planteamiento educativo ha producido ha sido casi irreversible para algunas generaciones de alumnos y se tardarán bastantes cursos en recuperar una enseñanza de la Geometría, y de la Matemática en general, que cumpla los objetivos señalados de la reforma, desvirtuados posteriormente. Aunque es muy conocida del profesorado la incultura geométrica a que han llegado nuestros alumnos, no nos resistimos a ofrecer algunos botones de muestra:

1.° A los alumnos de 1.° de BUP de Sevilla se les sometió, al iniciar el curso 81-82, a un test de conocimientos previos, algunos de ellos de Geometría. Más del 70% no supieron definir lo que es un paralelogramo (lo confundían muchas veces con el rectángulo), y apenas un 50 % sabían dibujar un croquis del mismo.

2.° Los alumnos que llegan a 3.° de BUP y COU desconocen, en su inmensa mayoría, las propiedades que relacionan los elementos de un triángulo, cuando se les exigen ejercicios y demostraciones algebraicas. Apenas distinguen una mediatriz de una mediana, ignoran la propiedad fundamental de los puntos de las bisectrices de los ángulos de dos rectas o de la mediatriz de un segmento, carecen de la noción de lugar geométrico y desconocen las fórmulas de las áreas y volúmenes de figuras fundamentales. Cuando este curso tuvimos que explicar en el COU la interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores, la mayoría de nuestros alumnos no sabían definir lo que era un paralelepípedo y, menos aún, hallar su volumen.

3.° A fuerza de haber sido educados en el empleo exclusivo de métodos analíticos, nuestros estudiantes se sienten incapaces de hacer un croquis de los elementos en cuestión, intentando a toda costa resolver los problemas geométricos de una manera algebraica, negando, por errores de cálculo, la posibilidad de soluciones cuando son evidentes gráficamente, o al revés.

No basta la resolución de un sistema de ecuaciones, ni la discusión detallada de su compatibilidad por el teorema de Rouché. Hace falta, en los problemas geométricos, acompañar a la discusión de los diversos casos una interpretación gráfica, para que se comprenda toda la significación de los resultados. Un ejemplo claro se presenta al estudiar en el COU la cuestión de las posiciones relativas de tres planos. Ni la mayoría de los textos, ni por supuesto nuestros alumnos, hacen una representación gráfica de los casos posibles. La intuición del espacio no se cultiva ni se estimula y no se comprende lo enriquecedor que podría resultar, en la enseñanza de la Geometría, la combinación simultánea del lenguaje gráfico y de los recursos algebraicos.

Así, el mundo de las Matemáticas se convierte en nuestras clases en un juego formal vacío y sin interés, sin que se vean las posibles aplicaciones al mundo físico que nos rodea y que conocemos. Pero el abandono de la intuición no ha representado, en compensación, mejoramiento del rigor lógico y del dominio de la expresión. Las matemáticas, desde el punto de vista educativo general, deben jugar un papel importante para usar adecuadamente el lenguaje. Se observa, al revés, un creciente *pasotismo* en cuanto a la expresión oral y escrita, un descuido cada día mayor en la corrección de las definiciones y en el rigor de las demostraciones, que se sustituyen por la repetición memorizada de pasos formales.

Cuando pedimos que en la enseñanza de las Matemáticas y en particular de la Geometría se busquen motivaciones intuitivas y relaciones con lo concreto, no se pretende quedarse en la situación de partida, por muy divertida y sugerente que sea. Hay que llegar después a conclusiones generales, a la demostración de propiedades que ya no son tan evidentes e intuitivas. Descubrirlas, con nuestros alumnos, dará una visión atractiva del poder lógico y de la fuerza investigadora de las Matemáticas.

No defendemos este punto de vista porque sintamos nostalgia de nuestras viejas y enterradas geometrías métrica y proyectiva. Afortunadamente, hacia los años setenta, se ha producido una reacción en el mismo sentido en varias naciones europeas, aunque a nuestro país no ha llegado todavía con fuerza legal a imponerse en los métodos y las programaciones. Hemos citado anteriormente la opinión, de vuelta, prestigiosa de Dieudonné, y una voz tan autorizada como la del profesor Freudenthal así lo propugnaba esta misma mañana en las Jornadas, hablando de un futuro en que *se habrá abolido en la escuela el Álgebra Lineal.*

No se trata, tampoco, ahora, de una vuelta a Euclides, ni de un rechazo de las aportaciones a la enseñanza de la geometría de los puntos de vista vectorial y algebraico, que han sido muy valiosas para actualizar métodos y contenidos. Por otra parte, hay que tener presente que la selección de las materias y el orden en que deben figurar en los programas de los distintos niveles tiene que adaptarse a la capacidad mental e intereses vitales de las diferentes edades y a sus relaciones con otras disciplinas, y no tiene por qué seguir rigurosamente las exigencias de una estructuración sistemática y ordenada. Confundiendo lo que debe ser una fundamentación ordenada de las matemáticas con su enseñanza, un profesor afirmaba, en una reunión nacional de matemáticos españoles celebrada en Sevilla en 1964, que no era posible enseñar a calcular la diagonal de un cuadrado a niños de doce años porque no era posible introducir a esa edad con suficiente claridad el concepto de número real. Para él no tenía sentido enseñar una matemática de la aproximación, sobre un objeto geométrico bien conocido, adaptada al nivel y a los intereses de los alumnos.

Por supuesto que la selección y ordenamiento de contenidos en los diferentes niveles no es nada fácil, como no lo es su didáctica, y ahí está una gran tarea tanto para programarlos como para experimentarlos.

En la enseñanza general básica se están dando pasos positivos, como la publicación en diciembre del año anterior de las enseñanzas mínimas del ciclo superior, aunque haya quedado aplazada su aprobación definitiva.

Ahí están nuevamente las cuestiones clásicas de la Geometría métrica elemental, relativas a las propiedades de las figuras y a la medida de longitudes, áreas y volúmenes. Quizás se acentúa más esto último, las cuestiones referentes a la medida, y no se tratan suficientemente las relaciones y propiedades de las figuras, tanto en el plano como en el espacio, que apenas si se toca. En este nivel, hay que aprovechar más las posibilidades de la intuición, el desarrollo de un conocimiento de las figuras, que partiendo de la realidad concreta pueda conducir al hallazgo de propiedades importantes, mediante una enseñanza dinámica, como propugna la profesora Emma Castelnuovo. Años fecundos para utilizar a fondo la experiencia familiar y de la calle que tienen nuestros alumnos de muchas nociones geométricas, y no preocuparse excesivamente de demostraciones formales, cuya necesidad comprenderán más adelante. En todo caso no creemos que un enfoque intuitivo y dinámico de la enseñanza de la Geometría en el nivel de básica no deje sitio en los últimos cursos de su ciclo superior para la deducción y el razonamiento.

En las enseñanzas medias la programación es más difícil, pero debe contar, en primer lugar, con la existencia de dos ciclos, cada uno de dos años; el primero, común y posiblemente obligatorio, para alumnos de 15 y 16 años; el segundo, optativo, para alumnos de 17 y 18 años de edad.

En las enseñanzas medias la programación es más difícil, pero debe contar, en primer lugar, con la existencia de dos ciclos, cada uno de dos años; el primero, común y posiblemente obligatorio, para alumnos de 15 y 16 años; el segundo, optativo, para alumnos de 17 y 18 años de edad.

En el primer ciclo, deben consolidarse y completarse los conocimientos anteriores, con un tratamiento más lógico y formal. Deben estudiarse más a fondo las transformaciones de igualdad (traslaciones, simetrías, giros), que proporcionan sugestivos ejemplos de grupos (adiós a la pretensión de introducir en básica la estructura de grupo sin otro ejemplo a mano que el aditivo de los enteros) y remontarse después a las transformaciones de semejanza (homotecias y semejanzas). Los problemas de construcciones gráficas pueden no sólo aclarar estos conocimientos geométricos, sino también estimular la creatividad y la imaginación de nuestros alumnos.

En este mismo ciclo, debería procederse a un tratamiento más detallado de la geometría del espacio y de las transformaciones de igualdad y semejanza. Además, deberían estudiarse también la trigonometría, propiedades de los poliedros y nociones de geometría sobre la superficie esférica (¡un ejemplo de geometría no euclidiana!).

En el segundo ciclo de las enseñanzas medias, donde las matemáticas son ya una materia optativa, deberá darse un tratamiento algebraico y vectorial a los contenidos geométricos. Aquí encaja la geometría afín y la euclídea del plano y del espacio, precedidas del estudio de los espacios vectoriales. Está claro que el rigor y el sentido crítico y autocrítico deben desarrollarse en este ciclo, que capaciten al alumno para los estudios superiores, y que la enseñanza no puede ser meramente informativa ni de exclusiva preparación para unas pruebas de selectividad.

En este ciclo podría entrarse en la consideración de otras transformaciones geométricas, las afines, las proyectivas y las de inversión, junto con el estudio gráfico y analítico de las cónicas y una introducción a los sistemas de representación. No es posible exigir que los profesores de Dibujo enseñen en Dibujo Técnico una geometría descriptiva sin que los alumnos, y en muchos casos los mismos profesores, posean los conocimientos geométricos indispensables.

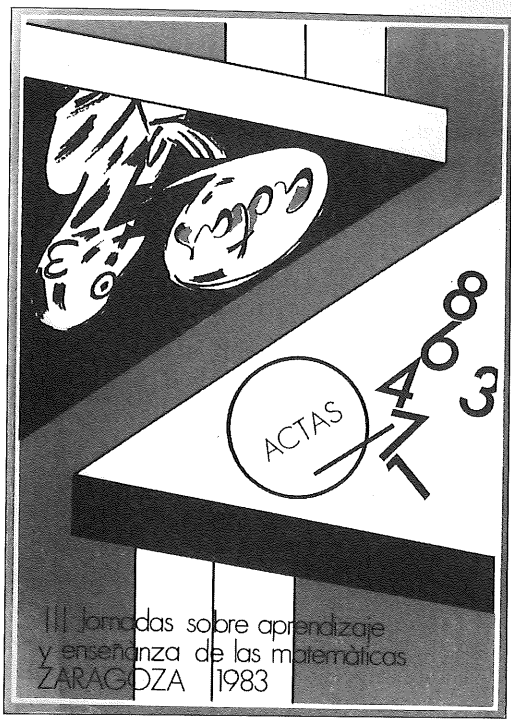
En cuanto a la enseñanza de la Geometría en la educación superior, muchos profesores universitarios echan de menos la carencia de modelos concretos en que apoyar el conocimiento de formas y estructuras abstractas y más generales; pero, sobre todo, si las escuelas universitarias y las facultades siguen teniendo la responsabilidad de formar los profesores de los niveles básico y medio, no pueden borrar de sus planes de estudio totalmente la clásica geometría métrica y proyectiva, el estudio o representación del espacio, de las transformaciones y de las cónicas desde un punto de vista sintético. No será posible llevar a cabo plenamente la renovación necesaria de la enseñanza de la Geometría si no se comprende que, además de formar matemáticos puros, hay que preparar también matemáticos *prácticos* para la industria y la técnica, y, sobre todo, teniendo en cuenta que es el destino de la mayoría de los titulados, a los futuros profesores de nuestras escuelas, colegios, institutos y centros de formación profesional.

En varios países está en marcha esta renovación, en algunos con carácter experimental y en otros, como Francia, ya está incluida en los programas de secundaria, aunque todavía se advierten reservas y vacilaciones, especialmente en los nuevos textos. Hay como un cierto temor a desterrar los planteamientos formales, por lo que resulta decepcionante hojear algunos de los nuevos textos franceses de 4.° y 3.°, correspondientes a nuestros 8.° de EGB. y 1.° de BUP. He aquí algunos ejemplos:

1.° En el texto escrito para alumnos del nivel de 8.° de EGB, se define así la simetría axial: «Dada una recta r del plano P, existe una biyección única de P hacia P, que conserva las distancias, todo punto de r es invariante y los semiplanos abiertos definidos por r permutan entre sí. Esa biyección recibe el nombre de simetría axial de eje r». Definición que está bien lejos de un lenguaje natural, que más que iluminar confunde y aleja al alumno de la intuición. Y cuando define el concepto de rectas ortogonales: «Una recta r es ortogonal a otra s, si la segunda es invariante mediante la simetría axial de eje r». Para alumnos de esta edad, es evidente que dos rectas son perpendiculares si forman ángulos iguales al cortarse. ¿Por qué hacer difícil y oscuro lo que es evidente y claro para el alumno?

2.° Cuando el mismo texto habla de paralelogramos particulares, define el rombo como el paralelogramo cuyas diagonales son perpendiculares, y el rectángulo como el paralelogramo cuyas diagonales son iguales. A continuación, se prueban como teoremas que el rombo es un paralelogramo de lados iguales, y que el rectángulo es un paralelogramo que tiene sus lados consecutivos perpendiculares Claro que este camino puede seguirse, pero, ¿no sería más natural y de acuerdo con la intuición del alumno el contrario?

3.° Introducido el teorema de Thales en el curso anterior, el texto que hemos examinado correspondiente a nuestros alumnos de 1.° de BUP, dedica un largo capítulo a la noción de razón de proyección ortogonal de dos ejes, definida como el cociente de la medida de un segmento de una de las rectas respecto a la de su proyección ortogonal sobre la otra, para probar después que la suma de las de los cuadrados de las razones de proyección ortogonal de una recta respecto a otras dos perpendiculares es igual a la unidad. De ahí deduce el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo. Como se ve, introducción de nuevos conceptos artificiosos e innecesarios, demostraciones tediosas y formalistas, etc. ¿No habría sido más acce-



...si las escuelas universitarias y las facultades siguen teniendo la responsabilidad de formar los profesores de los niveles básico y medio, no pueden borrar de sus planes de estudio totalmente la clásica geometría métrica y proyectiva, el estudio o representación del espacio, de las transformaciones y de las cónicas desde un punto de vista sintético.

sible y sugerente hacer una de las muchas demostraciones gráficas que existen del célebre teorema?

En cuanto a nuestro país, el movimiento de recuperación de la enseñanza de la Geometría empieza a dar sus primeros pasos. La tarea será larga, aunque ya se está creando una conciencia del problema en el profesorado (reunión de Gijón, II Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas de Sevilla, proyecto de programas del ciclo superior de EGB, todo ello en 1982). Si son serias y nada fáciles las cuestiones de elaborar los nuevos programas, coordinando los diferentes niveles, renovar la didáctica de la geometría acercándola más a las motivaciones concretas y a sus aplicaciones en el mundo real, todavía es más preocupante la gran cuestión del reciclaje del profesorado, sin el cual toda reforma carecería del eje conductor. Miles de profesores de educación general básica y de enseñanzas medias necesitan de una preparación profunda, más que de una simple actualización de materias como la Geometría, que no han estudiado nunca desde un punto de vista gráfico. No se trata sólo del perfeccionamiento de la didáctica sino de la adquisición de los más elementales conocimientos geométricos, en muchos casos. En este terreno, nuestros grupos y sociedades de profesores de Matemáticas pueden y deben desempeñar un papel fundamental, suplementando la escasa iniciativa oficial, al mismo tiempo que siguen trabajando en el mejoramiento de la didáctica y la renovación de los programas.

Bibliografía

KLEIN F. (1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior, vol. II: Geometría*, Biblioteca Matemática, Madrid.

HADAMARD (1932): *Geometría elementaire,* 2 vols., Armand Colin, París.

DELTHEIL-CAIRE (1950): *Geometrie (Transformations-coniques),* B. Bailliere, París.

PUIG ADAM (1948): *Geometría métrica,* 2 vols., Madrid.

ENRIQUES y otros (1948): *Fundamentos de la Geometría,* Iberoamericana, Buenos Aires.

ENRIQUES (1930): *Geometrie proyective,* Gauthier-Villars, París.

HILBERT (1953): *Fundamentos de la Geometría,* Instituto Jorge Juan, C.S.I.C., Madrid.

PETERSEN (1955): *Métodos y teorías para la resolución de los problemas de construcciones geométricas,* Giner, Madrid.

CASTELNUOVO, E. (1981): *La Matemática / La Geometría,* La Nuova Italia, Roma.

CASTELNUOVO, E.: *Matemática nella realtá,* Edit. Borighieri.

DIEUDONNE (1969): *Algebre lineaire et Geometrie elementaire,* Hermann, París.

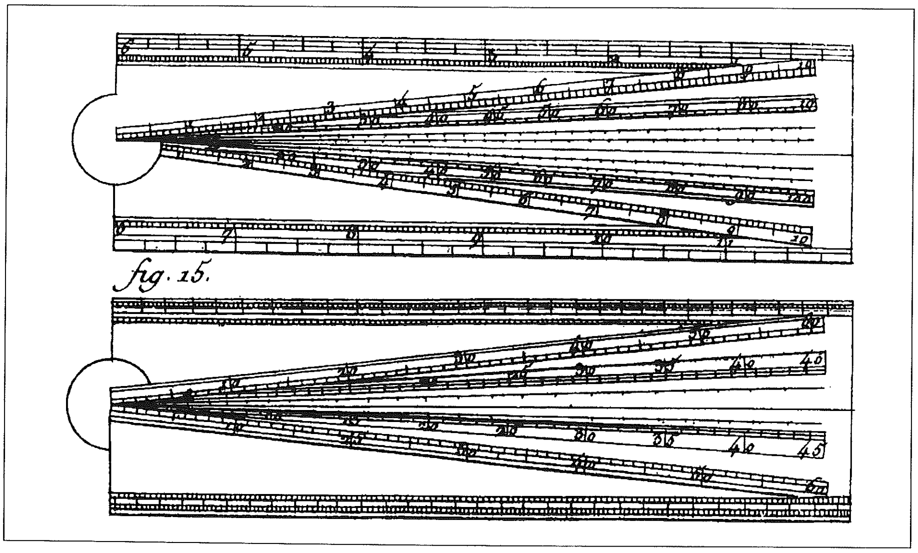
CHOOUET, G. (1967): *L'Enseignement de la Geometrie,* Hermann, París.

BLUMENTHAL (1961): *A modern view of Geometry,* Freeman, San Francisco and London.

REVISTA DE BACHILLERATO, «Matemáticas», cuaderno monográfico núm. 5, D. G. Enseñanzas Medias, Madrid, 1980.

ACTAS DE LAS II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS, Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas, Sevilla, 1983.

Gonzalo Sánchez Vázquez
En esa fecha de 1983,
Presidente de la
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
Thales



SUMA 25
junio 1997, pp. 23-30

Si el eje de ordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo?

Carmen Azcárate

A Gonzalo Sánchez Vázquez: el eslabón que une la generación comprometida en la lucha antifranquista con la generación comprometida en la renovación de la educación matemática

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

Partiendo del uso de la palabra vertical en las clases de matemáticas y de las confusiones habituales de los alumnos en torno al concepto de altura de un triángulo, vamos a exponer algunas reflexiones acerca de cuestiones de lenguaje, de errores de alumnos con algunas explicaciones de sus orígenes, de imágenes mentales y esquemas conceptuales de los estudiantes y del papel de las definiciones en el aprendizaje de las matemáticas.

ENTRE el profesorado de matemáticas, es habitual explicarse las anécdotas más curiosas de nuestras clases, con especial referencia a los errores más o menos estrambóticos de nuestros alumnos y alumnas. Aparte del aspecto jocoso de estos comentarios, se advierte la constante queja y preocupación por las innumerables dificultades de lenguaje que tienen los estudiantes y la repercusión negativa de esta deficiencia sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Una de las peores experiencias que, desgraciadamente nos toca vivir con frecuencia, es la comprobación de que los alumnos no han aprendido aquello que enseñamos con tanto esmero, convencidos de la claridad de nuestras explicaciones y de la pertinencia de los ejemplos y ejercicios realizados en la clase. ¿Qué ha sucedido? Es evidente que se trata de un fenómeno que no podemos atribuir sólo a la distracción, al desinterés o a la superficialidad de los estudiantes.

Otro comportamiento característico del profesorado de matemáticas es la tendencia a clasificar las manifestaciones de los alumnos, tanto orales como escritas, según el criterio correcto/incorrecto; por lo demás, todo parece indicar que eso es precisamente lo que esperan de nosotros tanto los propios estudiantes, como sus familias y la sociedad, con lo cual se consolida y se perpetúa dicha tendencia.

En este artículo vamos a exponer algunas reflexiones en torno a cuestiones de lenguaje en la clase de matemáticas, de errores con algunas explicaciones de sus orígenes, de imágenes mentales y esquemas conceptuales de los alumnos y del papel de las definiciones en el aprendizaje de las matemáticas.

El eje de ordenadas, ¿es vertical?

Los mapas de algunas ciudades

Una observación curiosa es que los mapas de muchas ciudades tienen una orientación diferente de la norte-sur de cualquier mapa regional, provincial, estatal o universal. La orientación suele corresponder a la estructura cuadriculada, cuando la hay (Nueva York), o sigue vías principales que se toman como eje «horizontal» o «vertical» (Madrid, el paseo de la Castellana). A título de ejemplos, vamos a fijarnos en algunos mapas en particular:

- Como se puede observar en el mapa de la figura 1, la orientación del mapa de Barcelona no es norte-sur y está determinada por el barrio del Ensanche que tiene una estructura cuadriculada; cuando nos referimos a calles como el Paseo de Gracia o la calle Muntaner, es corriente utilizar los verbos «bajar» o «subir» (que se pueden interpretar montaña-mar o viceversa) pero también se habla de calles «verticales» en contraposición con las calles «horizontales» como la Gran Vía o la calle Aragón.
- La orientación del mapa de Montréal (figura 2) tampoco está orientado norte-sur y también sigue la estructura rectangular de una buena parte de la ciudad, donde también se utilizan las expresiones «subir» y «bajar» en relación al río, y de calles «verticales» u «horizontales».

Me pregunto qué debe pasar en las clases de geografía cuando se describen recorridos urbanos sobre los mapas. Algunos profesores me han confesado que es habitual que se cuelen las palabras «vertical» y «horizontal» en esta acepción tan particular y, por otro lado, tan contradictoria con sus respectivas definiciones ortodoxas. Pero volveremos sobre ello más adelante.

El juego de los barquitos

Todo el mundo conoce este juego que ilustramos en la figura 3.

Creo que cualquiera estaría de acuerdo en considerar perfectamente comprensible una descripción de este juego que incluyera algo así como «se ponen las letras, de la *a* a la *j*, en horizontal y los números, del 1 al 10, en vertical, etcétera».

El sistema de ejes cartesianos

En España, en las clases de matemáticas de los últimos cursos de EGB, en BUP o, actualmente, en los cursos de ESO y de Bachillerato, cuando introducimos o utilizamos el sistema de coordenadas cartesianas (figura 4), consideramos como equivalentes las expresiones:

- eje de abscisas, eje de las x, eje «horizontal»;
- eje de ordenadas, eje de las y, eje «vertical».

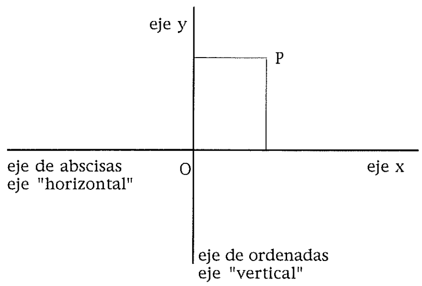


Figura 4

Es muy curioso observar cómo los profesores de matemáticas utilizan normalmente los términos «horizontal» y «vertical» en su expresión oral, pero no los suelen escribir ni aceptar en los escritos de los alumnos, por lo menos en el ámbito cultural de nuestro país. No es mi intención hacer una revisión del uso de dichos términos según el área lingüística, pero sí puedo afirmar que los anglosajones utilizan los vocablos «horizontal» y «vertical» tanto en libros de texto para estudiantes de enseñanza secundaria y superior, como en libros

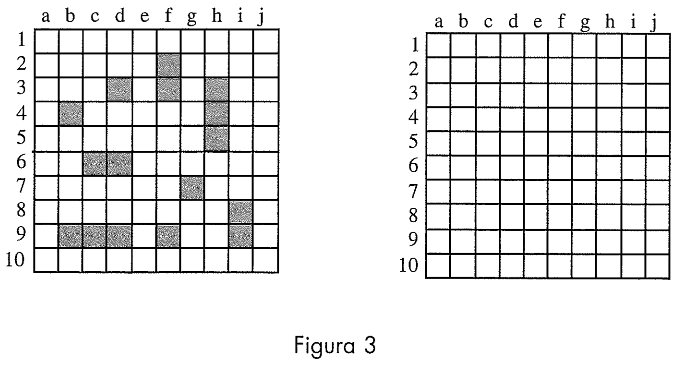


Figura 3

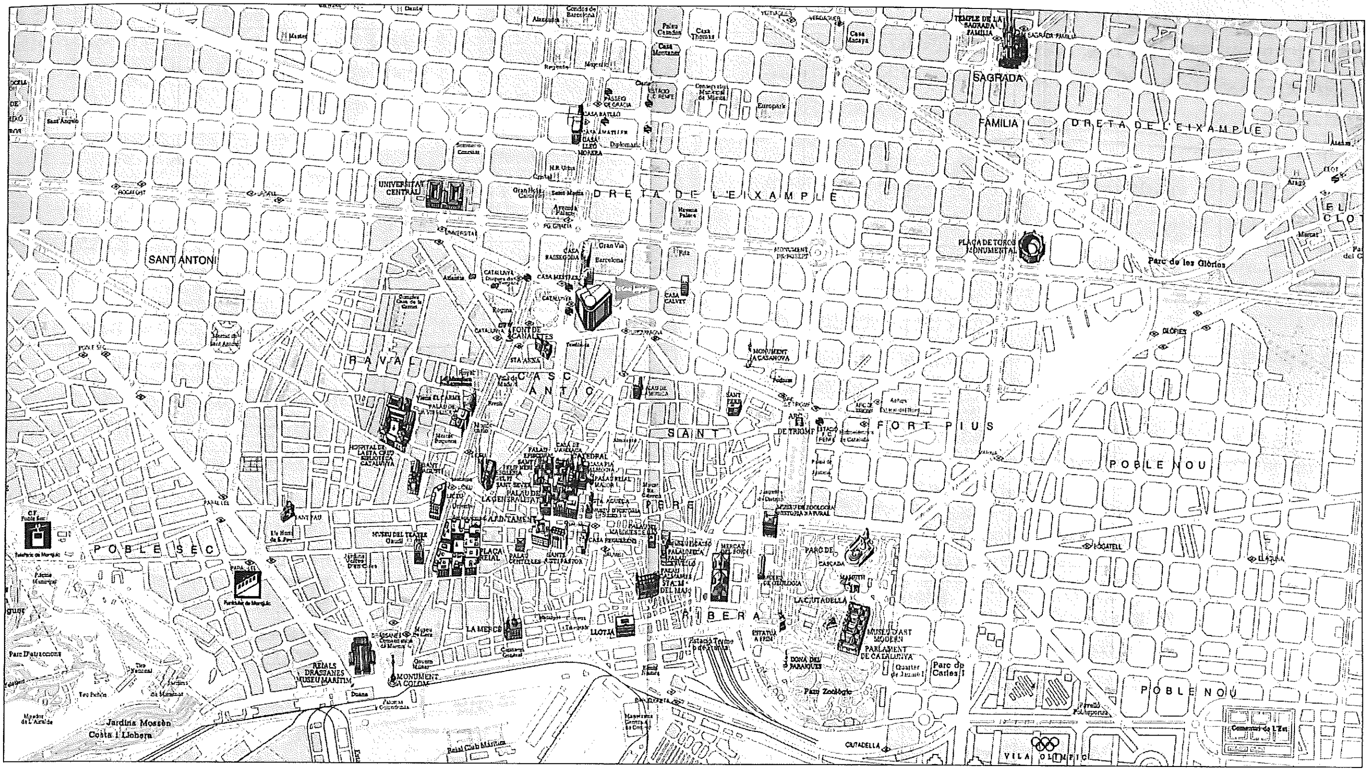


Figura 1

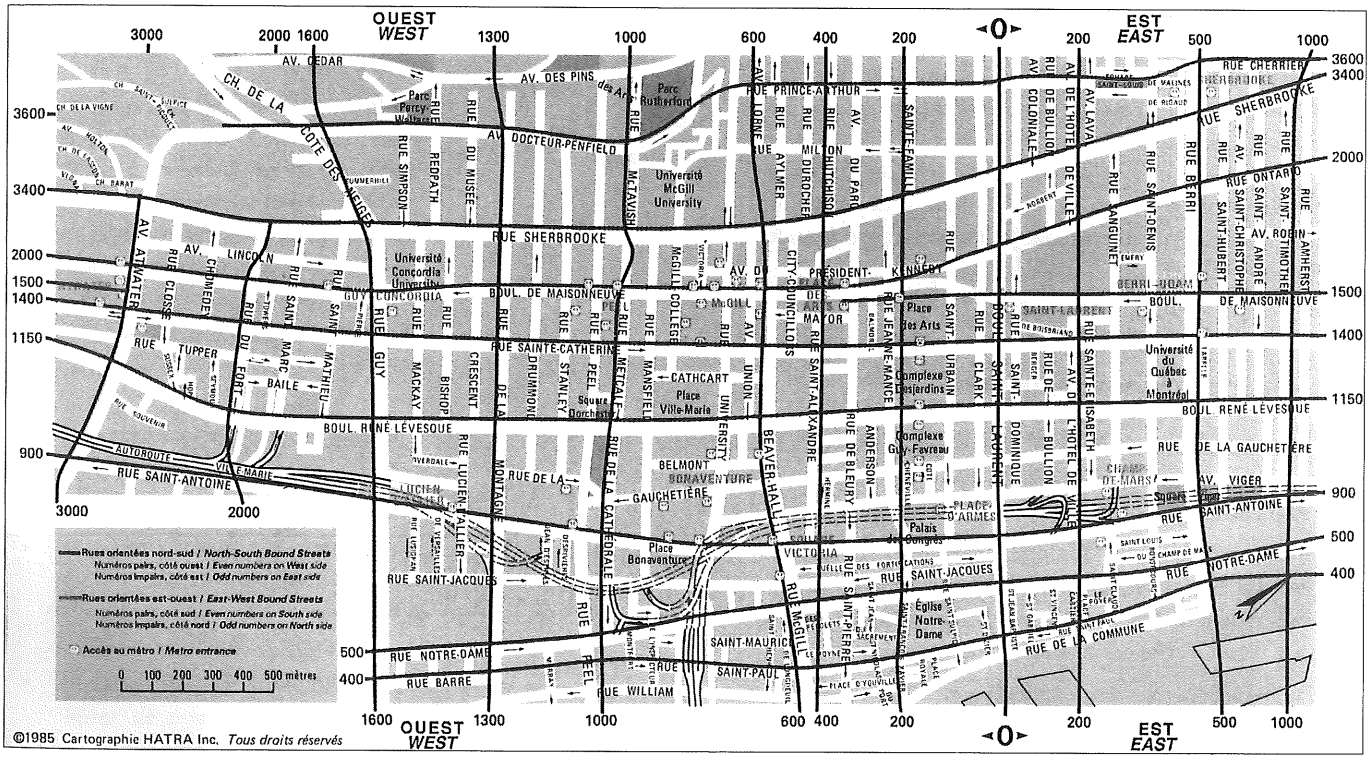


Figura 2

dirigidos a profesores. Así, por ejemplo, podemos leer (el subrayado es mío): «... desgraciadamente esta representación produce confusiones considerables en la mente de los alumnos ya que, si bien la ecuación del *eje horizontal* es y = 0...» (Shuard y Neill, 1977, p. 29)

A partir de estos ejemplo podemos plantearnos cuáles son los diferentes significados de la palabra «vertical»:

- En primer lugar tenemos el significado científico ligado al fenómeno de la gravedad terrestre, que los alumnos estudian en las asignaturas de geografía y de física; es el significado reconocido que hallamos en los diccionarios o enciclopedias. Así, por ejemplo:

  «*Vertical.* Aplícase a la recta o plano perpendicular al del horizonte.» (Casares, 1963)

  «*Vertical de un lugar.* Dirección del hilo de la plomada en este lugar.» (Larousse, 1964)

  «*Vertical.* Que tiene la dirección de una plomada. Dícese de la recta o plano que es perpendicular a una recta o plano horizontal.» (Real Academia de la Lengua Española, 1992).

- Pero hemos visto que en el aula de matemáticas existe otro significado que tiene algo que ver con el paralelismo respecto de los márgenes de la hoja de papel, del cuaderno o de la pizarra. También corresponde a unos ciertos gestos que se pueden describir en función de movimientos o de la posición de nuestro cuerpo: hacia mí, hacia adelante, hacia abajo, hacia arriba...

Este último significado de «vertical» es un buen ejemplo del llamado lenguaje compartido en una clase: todos (profesorado y alumnado) lo comprendemos, lo utilizamos y lo aceptamos en nuestras expresiones orales de uso escolar cotidiano. Sin embargo, no lo escribimos, no lo definimos; en realidad, no somos conscientes de su uso y no lo admitimos.

Las alturas de un triángulo

En muchas ocasiones he planteado las siguientes cuestiones a diferentes grupos de alumnos (octavo de EGB, tercero de ESO, primero y segundo de BUP, primero de Magisterio):

- Imagina un triángulo; ¿qué sabes de la palabra «altura» de un triángulo? (se les deja un tiempo de silencio para que piensen y sean conscientes de lo que piensan).
- Dibuja lo que has imaginado antes.
- En los siguientes triángulos, dibuja las alturas.

En primer lugar, quiero decir que la gran mayoría de triángulos imaginados y representados tienen un aspecto parecido al de la figura 5: acutángulos e isósceles; a veces obtusángulos, alguno escaleno, pero casi todos con la base «horizontal»:

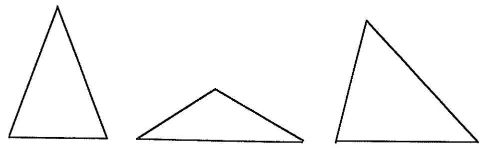


Figura 5

En cuanto a la tercera pregunta, es decir las alturas dibujadas en triángulos dados, mostraré unos ejemplos que invitan a la reflexión.[1] Por de pronto hay que observar que muy pocos alumnos dibujan tres alturas.

El interés de la muestra que presentamos consiste en que las parejas de respuestas (figuras 6, 7, 8 y 9) corresponden a los mismos alumnos:

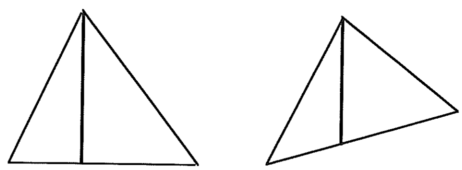


Figura 6

En la figura 6 vemos que en el caso del triángulo de base «horizontal», se puede decir que la respuesta es correcta. Sin embargo, en el otro triángulo el trazado de la altura revela que el criterio seguido no es el de perpendicularidad al lado opuesto sino el de «verticalidad» en el sentido discutido en el apartado anterior.

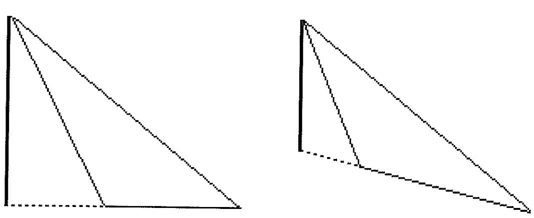


Figura 7

En la figura 7 se puede observar que el error cometido es del mismo tipo que el anterior.

1 Los ejemplos que cito aquí no pretenden ser representativos de todo el alumnado; expresan simplementeun tipo de respuesta bastante común y, en consecuencia, digna de análisis.

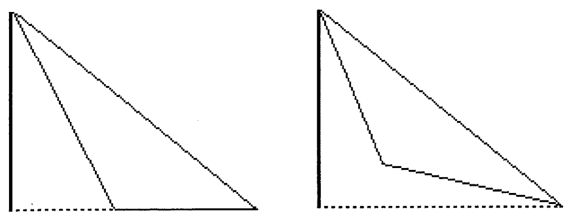


Figura 8

En el caso de la figura 8 pasa lo mismo, pero el alumno ha realizado una acomodación más sofisticada, donde se inventa una horizontal de referencia.

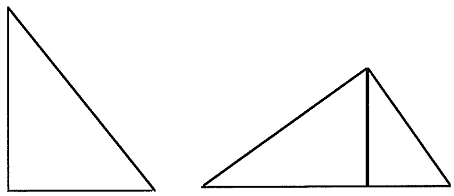


Figura 9

En el caso de los triángulos rectángulos iguales de la figura 9, el primero no tiene ninguna altura mientras el segundo tiene una.

Para explicar estos casos tan frecuentes, creemos que hay que tener en cuenta una serie de distintos factores que se entremezclan y contribuyen a un mal aprendizaje de los alumnos. Se pueden distinguir los siguientes aspectos:

- el significado cotidiano de la palabra «altura» que se aplica a objetos, personas, monumentos, relieves y que se mide verticalmente, según la gravedad;
- el significado de «vertical» en la hoja de papel como «paralelo a ciertos márgenes», tal como hemos visto anteriormente;
- la confusión, frecuente en los alumnos, entre los significados de «perpendicular» y de «vertical» en el sentido de «según la gravedad»;
- el hábito generalizado, tanto en los libros de texto como en las pizarras, de dibujar siempre los triángulos con un lado «horizontal» que se designa como «base».

Sin embargo, una cosa no cabe duda: todos estos alumnos han recibido una enseñanza del concepto de altura de un triángulo como la recta (o el segmento) que pasa por cada uno de los vértices y es perpendicular a su lado opuesto; y todos, en la lección correspondiente, han dibujado las tres alturas de un triángulo con escuadra; incluso algunos las han dibujado con compás.

Estas consideraciones nos abocan a tratar del aprendizaje significativo y del papel que juegan las definiciones en el aprendizaje de las matemáticas. Para analizar mejor este fenómeno didáctico, introduciremos las nociones de imagen mental y de esquema conceptual.

Imágenes mentales

Entre las investigaciones que se ocupan del papel de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas, me parece interesante destacar el texto de Tall y Vinner (1981) que define «imagen mental» de un concepto como «cualquier clase de representación (imagen, forma simbólica, diagrama, gráfica, etc.) del estudiante asociada al concepto». Por tanto, podremos decir que la imagen mental que una persona tiene del concepto de altura de un triángulo es el conjunto de imágenes asociadas en su mente al concepto de altura.

Podemos imaginarnos algunas de las posibles imágenes mentales correspondientes a distintas clases de representación. Así, por ejemplo:

- imagen mental gráfica (figura 10):

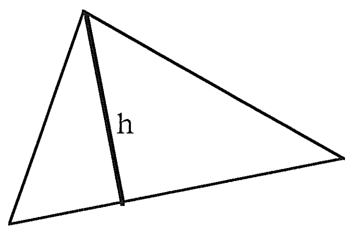


Figura 10

- imágenes mentales simbólicas

  – longitud de la altura como la distancia del vértice P de coordenadas (x_1, y_1) al lado opuesta que es la recta de ecuación $ax + by + c = 0$ (figura 11):

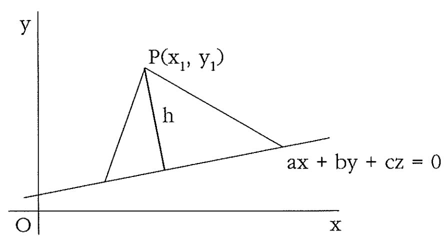


Figura 11

La fórmula que da la longitud de la altura es:

$$h = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

– área de un triángulo de base b y altura h:

$$A = \frac{1}{2} b h$$

Vale la pena observar que es curioso que el símbolo castellano que se utiliza para «altura» sea una h. ¿Será influencia del francés o del inglés?[2]

Es evidente que el conjunto de imágenes puede ser más o menos rico y complejo según la imagen mental que la persona en cuestión tenga del concepto de triángulo. La presencia mental de imágenes de triángulos acutángulos, obtusángulos, rectángulos, isósceles, equiláteros, en posiciones diversas... condicionará la riqueza y complejidad de las imágenes mentales de altura: una o tres alturas, alturas interiores y exteriores, existencia del ortocentro...

Esquemas conceptuales

Además de las imágenes mentales, Tall y Vinner (1981) y otros autores en artículos más recientes (Dreyfus y Vinner, 1989; Azcárate, 1990; Vinner, 1991) se refieren a la noción de «esquema conceptual» como una expresión que se refiere a «algo no verbal asociado en nuestra mente con el nombre del concepto» (Vinner, 1991), es decir a la estructura cognitiva de un individuo, asociada a un concepto matemático. En palabras de Tall y Vinner (1981) el esquema conceptual es «el conjunto de todas las imágenes mentales del estudiante asociadas al concepto, juntamente con todas las propiedades que le caracterizan». Desarrollaremos algo más esta noción de esquema conceptual, centrándonos en el ejemplo de la altura (o las alturas) de un triángulo.

En este caso, además de las imágenes mentales ya mencionadas en el apartado anterior, cada persona conoce ciertas propiedades que caracterizan el concepto de altura y sirven para reconocerlo; así, por ejemplo:

- las alturas son rectas perpendiculares a los lados del triángulo;
- las alturas son rectas que pasan por los vértices del triángulo;
- la altura es un segmento que corta el lado opuesto a un vértice, en su punto medio;
- la altura es un segmento vertical;
- las alturas se cortan en un punto;
- las alturas son segmentos interiores al triángulo;
- para calcular el área de un triángulo es necesario conocer la base y la altura;...

Es evidente que el conjunto de imágenes puede ser más o menos rico y complejo según la imagen mental que la persona en cuestión tenga del concepto de triángulo.

El que dichas propiedades sean, o no, correctas en el campo de la matemática, no afecta al hecho de que formen parte del esquema conceptual de una persona u otra. En efecto, muchos de los errores que cometen los alumnos tienen su origen en estas creencias que tienen categoría de conocimiento, en tanto que están arraigadas en la estructura cognitiva; por tanto, debemos tener en cuenta que serán muy difíciles de modificar.

También forman parte de los esquemas conceptuales los procedimientos asociados al concepto, como pueden ser en nuestro ejemplo de la altura:

- trazar las alturas con regla y escuadra;
- trazar las alturas con regla y compás;
- medir la longitud de una altura;
- calcular la longitud de una altura dadas ciertas condiciones o ciertos datos;...

Finalmente, podemos hablar también de las experiencias asociadas en nuestra mente bien al concepto matemático de altura, bien a la palabra altura, como pueden ser:

- los ejemplos y contraejemplos (altura/mediana/mediatriz/bisectriz de un triángulo);
- las situaciones cotidianas asociadas a la palabra altura;
- las situaciones matemáticas en que se ha visto, se ha estudiado o se ha utilizado el concepto (dibujo lineal; construcciones geométricas; geometría métrica; geometría analítica; figuras geométricas planas como los triángulos, los trapecios o los paralelogramos; cuerpos del espacio como las pirámides, los conos,...);
- las situaciones extramatemáticas en que aparece el concepto de altura (cinemática de la caída de los cuerpos; energía potencial);
- la amplitud mínima que ha de tener un orificio para que pueda pasar por él una forma triangular;
- las impresiones y sentimientos que nos evocan estas experiencias.

Resumiendo, al oir la palabra «altura» cada individuo puede visualizar ciertas imágenes, recordar ciertas propiedades

2 En francés altura se dice *hauteur* y en inglés se dice *height*.

y procedimientos o evocar ciertas experiencias. Se puede decir que el esquema conceptual que una determinada persona tiene de un concepto matemático, está formado por el conjunto de imágenes mentales, por las propiedades características, por los procedimientos y por las experiencias que la persona en cuestión asocia al concepto, más exactamente al nombre del concepto. Es evidente, por tanto, que sólo se puede hablar de esquema conceptual en relación a una persona específica. Por lo demás, hay que tener en cuenta también que una misma persona puede reaccionar de manera diferente ante el nombre de un concepto, en situaciones o contextos diferentes.

...el esquema conceptual que una determinada persona tiene de un concepto matemático, está formado por el conjunto de imágenes mentales, por las propiedades características, por los procedimientos y por las experiencias que la persona en cuestión asocia al concepto, más exactamente al nombre del concepto. Es evidente, por tanto, que sólo se puede hablar de esquema conceptual en relación a una persona específica.

El papel de las definiciones

Llegados a este punto, podemos decir que adquirir un concepto matemático significa construir un esquema conceptual del mismo. Por tanto, saberse de memoria la definición de un concepto no garantiza en absoluto comprender su significado; en realidad, comprender quiere decir tener un esquema conceptual de forma que se asocien ciertos significados a la palabra que designa el concepto: imágenes mentales, propiedades, procedimientos, experiencias.

La presentación y la organización de la mayoría de los libros de texto y de buena parte de las clases de matemáticas parecen basarse en la presunción de que los conceptos se adquieren mediante su definición y de que los estudiantes utilizarán las definiciones en la realización de tareas o la resolución de problemas. Existe aquí un conflicto que Vinner (1991) expresa de la manera siguiente: «Las definiciones crean un problema muy serio en el aprendizaje de las matemáticas. Representa, quizá más que cualquier otra cosa, el conflicto entre la estructura de las matemáticas, tal como la conciben los matemáticos profesionales, y los procesos cognitivos de la adquisición de conceptos».

En efecto, desde un punto de vista cognitivo, parece que los autores de libros de texto y muchos profesores parten del supuesto que los esquemas conceptuales se construyen a partir de las definiciones:

Definición → Esquema conceptual

y, también, que en la resolución de problemas y la realización de tareas es la definición la que se activa en la mente del estudiante y la que va a controlar el proceso.

Sin embargo, lo que ocurre en la práctica, según las investigaciones ya mencionadas que se ocupan de esta cuestión, es que el esquema conceptual se construye a partir de la experiencia del estudiante, es decir a partir de situaciones muy variadas, como ya hemos comentado anteriormente:

Experiencia → Esquema conceptual

Los alumnos tienden a realizar sus tareas de forma espontánea, de acuerdo con los hábitos adquiridos en la vida cotidiana, es decir que elaboran sus respuestas a partir de los elementos de sus esquemas conceptuales evocados por el contexto de la situación. Además, conviene observar que se produce una adaptación de manera que en la mayoría de los casos la respuesta se considera correcta, como en los ejemplos de los trazados de alturas de triángulos con base «horizontal», lo cual no estimula la necesidad de recurrir a las definiciones. Los conflictos debidos a esquemas conceptuales incompletos o mal construidos, sólo pueden aparecer en la realización de tareas no rutinarias.

El problema que nos planteamos es el de la necesidad de educar progresivamente los hábitos de los estudiantes, sobre todo de los que van a realizar estudios de matemáticas no elementales, de forma que las definiciones formen parte de su experiencia y, por tanto, de sus esquemas conceptuales. Nos parece evidente, que en el campo de las matemáticas, las definiciones desempeñan un papel muy importante en la realización de tareas cognitivas y, por consiguiente, en la formación de los esquemas conceptuales. Tendremos, pues, que ingeniar situaciones didácticas adecuadas, en las cuales las definiciones sean imprescindibles para una correcta realización de la tarea.

Conclusiones

El proceso de enseñanza-aprendizaje consiste, en gran parte, en ir compartiendo entre el profesor y los alumnos, los esquemas conceptuales de las nociones matemáticas objeto de estudio. Por tanto, debemos cuidar los lenguajes verbal, gráfico, simbólico, gestual que contribuyen al desarrollo y enriquecimiento de dichos esquemas.

Cuando comentamos los errores de nuestros alumnos o su expresión deficiente y cuando clasificamos sus respuestas como correctas o incorrectas, los profesores de matemáticas debemos afinar más en nuestras apreciaciones, necesitamos de más elementos teóricos que nos ayuden a comprender mejor el origen de dichos errores, a disponer de recursos adecuados para ayudarles a construir, revisar, reconstruir y enriquecer sus esquemas conceptuales.

Si el eje de ordenadas es vertical...

En la primera parte de este artículo, hemos visto que las descripciones gráficas, en el marco del sistema de ejes cartesianos, admiten la denominación de «vertical» y «horizontal» cuando se refieren a la pizarra o a los apuntes de los alumnos. Se puede decir que es una acepción de las palabras «vertical» y «horizontal» que nace en el contexto de la clase. Es útil: todo el mundo la utiliza, la entiende, es clara y no da pie a ambigüedades.

Ahora bien, es evidente que «vertical» y «horizontal» no forman parte de la terminología matemática; tampoco se reconoce dicha acepción en los diccionarios de la lengua (al menos, la española). Nos encontramos ante una situación que necesita explicitarse; es imprescindible que profesores y alumnos discutan los distintos significados de las palabras «vertical» y «horizontal», que analicen las ventajas e inconvenientes de utilizarlas, los elementos contradictorios que implican, y que decidan conjuntamente si van a aceptar su uso y en qué condiciones.

...¿qué podemos decir de las alturas de los triángulos?

Cuando tenemos que decidir acerca de nuestra manera de enseñar las matemáticas, tenemos que tener en cuenta no sólo la forma en que se espera que los estudiantes adquieran los conceptos matemáticos, sino también y sobre todo, la forma en que realmente los estudiantes adquieren dichos conceptos.

Las explicaciones del profesor o las definiciones del libro de texto no son nada si el alumno no ha construido unos esquemas conceptuales a partir de su experiencia en tareas ricas y variadas que le permitirán enfrentarse a situaciones cada vez más complejas, en el proceso dinámico y creciente de la construcción del conocimiento.

La explicación o la definición de las alturas de un triángulo quedan relegadas por los esquemas conceptuales que han construido los alumnos a partir de sus experiencias de la vida cotidiana y de las clases de matemáticas donde se dibujan insistentemente los triángulos con una base «horizontal» y donde el término «perpendicular» está demasiado asociado al de «vertical». Es decir que los errores de los alumnos están condicionados, en buena medida, por las confusiones en torno a la palabra «vertical».

Carmen Azcárate
Secretaria General
de la Federación Española
de Sociedades de Profesores
de Matemáticas

Bibliografía

AZCÁRATE, C. (1990): *La velocidad: introducción al concepto de derivada,* Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona.

CASARES, J. (1963): *Diccionario ideológico de la lengua española,* Gustavo Gili, Barcelona.

LAROUSSE (1968): *Gran enciclopedia...,* Planeta, Barcelona.

REAL ACADEMIA DE LA LENGUA ESPAÑOLA (1992): *Diccionario de la lengua española,* Espasa Calpe, Madrid.

SHUARD, H. y H. NEILL (1977): *From graphs to calculus,* Blackie, London.

TALL, D. y S. VINNER (1981): «Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics,* N.° 12, 151-169.

VINNER, S. y T. DREYFUS (1989): «Images and definitions for the concept of function», *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol. 20, 356-366.

VINNER, S. (1991): «The role of definitions in teaching and learning», en TALL, D. (Ed.), *Advanced mathematical thinking,* Kluwer, Dordrecht, 65-81.

SUMA 25
junio 1997, pp. 31-44

La Geometría en las primeras edades escolares

M.ª Antonia Canals Tolosa

Quiero dedicar estas líneas a Gonzalo,
como sencillo homenaje a su vida consagrada
al servicio de la educación matemática.
Nunca olvidaremos su gran calidad humana,
su amistad para con todos, y la ilusión con que
supo impulsar nuestras asociaciones.
Me honra recordar de manera especial el cariño e
interés con que acogió nuestro grupo de Catalunya.

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

La Geometría hemos de vivirla en la escuela y en toda la vida.
Ha de ser, tanto para nosotros como para nuestros alumnos, una ocasión de aumentar nuestra capacidad de descubrimiento, nuestra iniciativa y creatividad y nuestra sensibilidad por la belleza de las formas, apreciada tanto en el arte como en la naturaleza y en la globalidad del medio que nos rodea.
Es necesario que juntos aprendamos a mirar nuestro entorno con unos ojos más «geométricos», y que tanto en la calle como en la clase seamos más felices haciendo Geometría.

TENÍA PENSADO titular este artículo «La Geometría en la Escuela Infantil y Primaria», porque en realidad es de esto de lo que quisiera hablar. Pero en cuanto me puse a pensar, no en como se enseña la Geometría, sino en como los niños la aprenden, cambié algo esa primera intención teniendo en cuenta dos cosas:

En primer lugar, es necesario no perder de vista que el auténtico aprendizaje es inseparable de la vida cotidiana del sujeto que aprende. Esta idea hoy es proclamada por todos los profesionales de las Ciencias de la Educación, aunque en realidad ha sido ya repetida desde hace tiempo por muchos grandes educadores, entre los que quiero destacar a Freinet y Pablo Freire.

En segundo lugar, cada día me sorprende más el hecho de que la precedente afirmación es aplicable a todas las edades, pero quizás de un modo especial a las más tempranas. A lo largo de mi vida de profesora me he ido convenciendo cada vez más de que los niños pequeños no aprenden, ni la Geometría ni nada, únicamente en la escuela, sino que aprenden básicamente en la vida, y un poquito en la escuela también.

Así pues he cambiado el primer título por el actual que habla de Geometría «en las primeras edades» en lugar de «en la escuela», para no caer desde el principio en la falacia de dar por supuesto que la Geometría se aprende únicamente en la escuela.

Esta idea de la Geometría aprendida intuitivamente a partir de la vida cotidiana, y reforzada en algunos aspectos por prácticas escolares adecuadas, será en las líneas que siguen como un punto de partida, y desearía que fuese también como un telón de fondo que vuelve a aparecer de vez en cuando.

A partir de estas premisas, el camino que me propongo ir desarrollando es el siguiente:

- Reflexionar un poco sobre la Geometría como área del conocimiento, y sobre la construcción del conocimiento geométrico.
- Ver el proceso de los niños de 0 a 12 años en este terreno.
- Ilustrarlo con un ejemplo de actividad.
- Y, finalmente, formular algunas propuestas metodológicas para el trabajo de la Geometría en el aula.

Evidentemente, en las edades que nos ocupan vamos a hablar de una Geometría muy elemental, que incluso puede parecerlo demasiado si sólo se miran los resultados en forma de conceptos. Pero creo que hace falta plantear la Geometría en esta primera etapa con toda seriedad, no sólo porque la enseñanza de los pequeños merece el mismo respeto que la de los mayores, sino también porque muchas veces hemos podido constatar que el hecho de analizar con detalle el acto del conocimiento en las primeras edades de la vida, puede ser para nosotros una ocasión privilegiada de profundizar en el verdadero significado de este conocimiento, lo cual nos sirve para mejorar la enseñanza en cualquier edad. Es un poco como cuando en la televisión nos pasan una jugada de fútbol en cámara lenta para ver mejor lo que sucedió.

De qué trata la Geometría

Uno de los dos grandes parámetros que enmarcan y configuran nuestra vida es el espacio, siendo el otro el tiempo. Por esto es evidente que para la persona es de máximo interés, desde que nace, el progresivo conocimiento del espacio, en el cual va dando sucesivos pasos de forma espontánea y continua, a través de sus diversas experiencias de vida, ya que todas ellas están inmersas en el espacio.

A veces los maestros de primaria, y todavía más los de infantil, tenemos tendencia a identificar el conocimiento del espacio con la Geometría, y creo que en ello hay un error. En efecto, el conocimiento del espacio es más amplio, y en él convergen muchas ciencias, ya que el espacio contiene elementos de muy diversos tipos: físicos, visuales, auditivos... y muchos otros. Entre ellos solamente son objeto de la Geometría aquellos que tratan de los aspectos siguientes:

...es evidente que para la persona es de máximo interés, desde que nace, el progresivo conocimiento del espacio, en el cual va dando sucesivos pasos de forma espontánea y continua...

La posición. A este aspecto se refieren:

- Las primeras relaciones espaciales para situarse uno mismo («orientación») y situar los objetos entre ellos («organización»), realizadas por criterios de orden, de proximidad y separación, etc.
- Más tarde, las relaciones de posición que se rigen por criterios de direccionalidad.
- Finalmente, las relaciones y nóciones basadas en criterios de medidas, en especial de distancias y ángulos, que conducen a determinar la posición por sistemas de coordenadas.

Las formas. A este aspecto se refieren:

- El reconocimiento, definición y clasificación de figuras de una, dos y tres dimensiones.
- La construcción de las figuras y cuerpos conocidos, con materiales diversos.
- La observación y análisis de las propiedades de figuras y cuerpos y, a partir de ello, la organización de los mismos en categorías.

Los cambios de posición o de forma, o «transformaciones». Son los fenómenos geométricos. A este aspecto se refieren:

- El reconocimiento en la vida real, en el entorno y en el arte, de las diversas transformaciones como cambios de forma o de posición.
- La observación y estudio de sus leyes de funcionamiento.
- Su relación con las distintas familias de figuras y cuerpos.

Estos tres campos no son independientes unos de otros, sino que tienen entre ellos una gran relación. En efecto, para poder establecer e identificar los diferentes tipos de figuras, o sea el segundo aspecto, necesitamos basarnos en la posición relativa de sus elementos. Al mismo tiempo, el verdadero significado de las transformaciones geométricas, o sea el tercer aspecto, no podría comprenderse sin apoyarse en los dos anteriores. Así pues los tres campos que abarca la Geometría son inseparables, a pesar de que el orden en que aquí los hemos citado corresponde en cierto modo al orden cronológico en que van apareciendo en el proceso de la construcción del conocimiento por parte de los niños.

A partir de estos tres aspectos referentes al espacio, la Geometría es una ciencia, y como tal es un conjunto de técnicas, de reflexiones y de conclusiones elaboradas y formuladas por los hombres a través de la historia. Por esto, aunque empieza en la realidad del espacio que nos rodea, no acaba en el conocimiento experimental del mismo, sino que a partir de su observación pone en juego el pensamiento lógico matemático estableciendo relaciones, sistematizando resultados y llegando a conceptos abstractos y leyes generales. Es decir, estudia los fenómenos que le son propios (de los tres tipos antes citados), los organiza y les da una estructura matemática, con el fin de capacitar al hombre no sólo para conocer mejor estos fenómenos, sino también para poder incidir en el espacio resolviendo todo tipo de situaciones con ellos relacionadas.

Naturaleza del conocimiento geométrico

Tener un conocimiento geométrico no es lo mismo que tener o dominar información suficiente sobre uno o muchos temas de los que clásicamente trata la Geometría. El conocimiento geométrico, como todo conocimiento, no se adquiere a partir de recibir una información dada por otra persona ni a través de palabras, aunque vayan acompañadas de imágenes (dibujos o gráficos en pizarra, libros....), si al mismo tiempo no se pone en juego la experiencia y la mente del que los recibe.

Tener un conocimiento geométrico no es lo mismo que tener o dominar información suficiente sobre uno o muchos temas de los que clásicamente trata la Geometría.

El conocimiento geométrico no consiste en reconocer visualmente unas determinadas formas y saber su nombre correcto, tal como a menudo pretendemos los maestros. Consiste en algo mucho más profundo y complejo, que implica y desarrolla capacidades muy diversas de la persona, en especial la imaginación, la creatividad y el gusto por la belleza de las formas. Antes de llegar a la meta supone un largo proceso, que luego detallaremos un poco más por edades, y que a grandes rasgos consta de los siguientes pasos: *explorar* conscientemente el espacio; *comparar* los elementos observados, es decir *establecer relaciones* entre ellos; y *expresar verbalmente* tanto las acciones realizadas como las propiedades observadas, y de ese modo *interiorizar* el primer conocimiento.

Estos son los primeros pasos, necesarios con mayor o menor intensidad en todas las edades, y podemos afirmar que no existe conocimiento «geométrico» si falta alguno de ellos. Dicho de otro modo, cuando pretendemos enseñar la Geometría sin basarnos como punto de partida en la exploración directa del espacio, cosa que tradicionalmente hemos hecho con demasiada frecuencia, el conocimiento que de ello resulta no es auténticamente «geométrico» (aunque puede parecerlo si el sujeto tiene buena memoria). Pero al mismo tiempo, cuando nos basamos en la exploración directa sin dar un paso más, es decir sin conducir al alumno a una actividad consciente y reflexiva proporcionada a su edad, el conocimiento que resulta es meramente sensorial o motórico y de ahí no pasa, es decir no es tampoco un conocimiento «geométrico».

Después de los pasos citados, siguen otros, propios de una mayor madurez por parte del sujeto, que acaban de configurar el conocimiento geométrico. Entre ellos podemos citar: *descubrir propiedades* de las figuras y de las transformaciones; *construir modelos* para expresarlas plásticamente; *combinar las nociones, destrezas y resultados obtenidos*; a partir de ello, *elaborar conclusiones*; y finalmente llegar a *formular unas primeras leyes generales*.

Con la puesta en práctica de todas estas capacidades, cada una en su momento adecuado, el sujeto irá ampliando progresivamente su imagen mental del espacio, incorporando en ella nuevos elementos, que al principio sólo son relaciones muy sencillas o nociones intuitivas, y que luego ya serán propiedades más complejas, primeras leyes de los fenómenos geométricos, y conceptos abstractos.

Quisiera poner un ejemplo para explicar más concretamente lo que acabo de decir:

A veces hemos dicho a los alumnos: «esto es un cubo; esto es un cilindro», mostrándoles cuerpos de madera de las respectivas formas (que no son objetos reales sino que han sido fabricados para este uso); los niños los miran y quizás los tocan, aprenden fácilmente sus nombres y contestan correctamente cuando se les pregunta sobre ellos. No niego que éste pueda ser un primer conocimiento del cubo o del cilindro, incluso practicado probablemente con la buena intención de enseñar Geometría, ni digo que no sea válido ni que no se deba hacer. Sólo quiero decir que esto no pasa de ser un *conocimiento sensorial* de dichas formas, apoyado únicamente en la percepción visual, o táctil en el mejor de los casos, en el cual no se ha implicado todavía el pensamiento lógico-matemático del niño, y por esto no es de ningún modo un *conocimiento geométrico*.

Aun suponiendo que se realice a la edad adecuada, esta actividad no puede ser el punto de partida para provocar un conocimiento geométrico de las formas porque no se basa en una experiencia vivenciada por los alumnos y porque no provoca la interiorización de lo observado.

En cambio, de lo que se trataría es de hacer observar verdaderas «propiedades geométricas» del cubo y del cilindro, que están realmente presentes en objetos de la vida cotidiana que tienen «forma» de cubo o de cilindro; y, sobre todo, de observar estas propiedades a partir de la propia experiencia de las formas, encontrándolas en su entorno inmediato, en objetos grandes y pequeños, y en situaciones en que los niños se impliquen personalmente, (por ejemplo, para los más pequeños, en situaciones de juego). Esta experiencia personal de las formas, empieza con la propia posición respecto a ellas y con los propios movimientos. Los niños han de poderse meter dentro de objetos grandes de forma cúbica y cilíndrica respectivamente, observándolos desde dentro y desde fuera, y comparar las dos visiones.

A los más pequeños quizás sólo les llamaremos la atención sobre el hecho de que la «superficie» de los cuerpos es algo que podemos frotar con la mano, y en cambio su «espacio interior» es otra cosa (que podemos llenar u ocupar). O bien podemos sugerir que observen que la superficie del cilindro tiene una parte curva y otras partes planas mientras que la del cubo no. Más adelante podrán hacer rodar el cilindro sobre el suelo, y no el cubo, y preguntarse el porqué de esta conducta diferente en ambos casos; podrán fijarse en cual de ellos tiene «caras» que son polígonos, en cómo son los vértices vistos desde dentro y desde fuera, e interrogarse sobre la causa de que el cilindro no los tenga; podrán forrar ambos cuerpos, y encontrar diferencias y semejanzas entre ellos y con otros conocidos, siempre manipulando y experimentando con materiales.

Y a los mayores (5.° y 6.° de primaria) podremos proponerles que pongan cuerdas en forma de «diagonales» en el interior del cubo; que analicen las distintas secciones (vertical, horizontal e inclinada) de ambos cuerpos construidos con arcilla y las comparen; que busquen tantos planos de simetría como puedan, con ayuda de espejos; que intenten medir prácticamente (y no calcular) la superficie de los dos cuerpos, y empiecen a comparar su volumen de forma empírica... ¡Y muchas cosas más!

Con todo esto, y con el vocabulario geométrico usado únicamente para nombrar las cosas que antes hemos vivenciado, podremos acercarnos mucho mejor a la construcción de un auténtico conocimiento geométrico del cubo y del cilindro, y de sus correspondientes familias, definidas de una u otra manera según el punto de vista desde el que se comparen ambos cuerpos entre sí y con otros muchos.

Las habilidades que hemos descrito, y que intervienen en los precedentes ejemplos, son básicamente de dos tipos: unas de tipo movimiento, manipulación de materiales, o sea experimentación corporal de los fenómenos; otras de tipo reflexión, descubrimiento, racionalización de los mismos, o sea actividad mental. Sólo la conjunción de estos dos aspectos permite la construcción de un conocimiento de una naturaleza tal que pueda ser llamado «geométrico». Yo interpreto en este sentido esta frase importante del diseño curricular de Matemáticas de Valencia: «Ir pasando progresivamente del espacio vivenciado al espacio geométrico».

Si interpretásemos el aprendizaje de la Geometría como el hecho de almacenar la mayor cantidad posible de conocimientos de tipo conceptual y casi siempre memorizables, se trataría de un aprendizaje propio de los adultos o de los muchachos a partir de la adolescencia; los resultados serían bastante fácilmente controlables, pero al no tener una base suficiente, carecerían de contenido con significado real.

En cambio, si optamos por interpretar el aprendizaje de la Geometría como la adquisición del «conocimiento geomé-

Las habilidades que hemos descrito, [...], son básicamente de dos tipos: unas de tipo movimiento, manipulación de materiales, o sea experimentación corporal de los fenómenos; otras de tipo reflexión, descubrimiento, racionalización de los mismos, o sea actividad mental. Sólo la conjunción de estos dos aspectos permite la construcción de un conocimiento de una naturaleza tal que pueda ser llamado «geométrico».

trico» en el sentido en que acabamos de definirlo, éste se nos llena de significado y además nos aparece como algo para realizar en cualquier edad. En efecto, las primeras imágenes mentales y las nociones intuitivas mínimamente concienciadas, no sólo son la semilla de los futuros conceptos, sino que son ya desde el principio parte integrante del conocimiento real adquirido. Así, en el ejemplo antes citado, no es que los niños obtengan un conocimiento significativo del cubo y del cilindro al final de todo el proceso, sino que ya en cada etapa su conocimiento puede llamarse «geométrico» con toda propiedad, si ha sido interiorizado realmente, es decir si, en la medida que les corresponde por la edad, se han puesto en juego la capacidad de observar, de relacionar, y la sensibilidad para reconocer las formas en el entorno.

Dicho de otro modo, si aprender Geometría es desarrollar estas capacidades, se trata de un camino personal que cada ser humano recorre a lo largo de su vida, en una forma proporcionada a su maduración en cada momento, pero siempre en el mismo sentido y con igual intensidad. ¿Por qué a veces dudamos de que pueda realizarlo un niño menor de 12 años, o incluso menor de 6? Precisamente los niños a esta edad viven casi totalmente de la observación de lo que les rodea, en el sentido de que de ella lo aprenden todo, y el proceso de interiorización de lo observado, que empieza ya a los 2 años, es en ellos más intenso, más rápido y más eficaz que en nosotros.

Por esto la Geometría no sólo no es ajena al desarrollo normal de la infancia, sino que le es consustancial.

Proceso de aprendizaje de 0 a 12 años

Basándome en las teorías de Piaget y en experiencias propias y de muchos compañeros maestros, intentaré resumir cómo se concretan las capacidades y formas de aprendizaje de la Geometría según las edades, y cómo se articulan en el proceso de crecimiento de los niños y niñas.

Desde su nacimiento el niño va adquiriendo un primer conocimiento de la posición de los «objetos» respecto a él mismo el cual va perfeccionándose con la experiencia, y tiene un momento culminante al empezar a andar.

Periodo «senso-motor». Etapa 0-2 años

Desde su nacimiento el niño va adquiriendo un primer conocimiento de la posición de los «objetos» respecto a él mismo (el pecho o el biberón, la persona que se le acerca o se le aleja...), el cual va perfeccionándose con la experiencia, y tiene un momento culminante al empezar a andar. El hecho de poder desplazarse autónomamente en el espacio, puede considerarse sin lugar a dudas como el progreso más importante de toda la vida en el conocimiento de este mismo espacio. Precisamente es a partir de sus movimientos, y muy en particular de sus desplazamientos, como los niños exploran, relacionan las posiciones propias y ajenas, y adquieren unas primeras nociones geométricas intuitivas que saben aplicar perfectamente a su vida, es decir que les sirven para controlar sus actos. También aprenden espontáneamente a reconocer e identificar distintas formas a partir de las percepciones, especialmente las visuales y táctiles. Así pues, durante estos dos primeros años de vida, llamados por Piaget «periodo del espacio senso-motor», el conocimiento del espacio es bastante completo en cuanto a su campo de extensión, pero se trata de un conocimiento únicamente a nivel sensorial, es decir todavía no interiorizado, por lo que todavía no podemos considerarlo un aprendizaje geométrico propiamente dicho.

Esta primera etapa es pues muy importante, ya que es la base de todo lo que seguirá después, pero desde nuestra óptica es una etapa de «pre-geometría». La mejor preparación a esta edad es una buena psicomotricidad y una buena educación sensorial.

Periodo «representativo»

Aproximadamente a partir de los 2 años en adelante, el niño empieza a desarrollar la capacidad de interiorizar las propiedades geométricas observadas, y con ello podemos considerar que empieza el conocimiento geométrico, en el sentido antes expuesto y, por tanto, el verdadero aprendizaje de la Geometría.

Esta interiorización requiere la voluntad explícita de reflexionar sobre lo observado, y ahí empieza el papel del adulto, y por tanto también de la escuela, para ayudar al niño a concientizar sus experiencias y a poner en marcha su pensamiento matemático, provocando su reflexión. Cuando esto tiene lugar es cuando se genera una «imagen» mental, que también suele llamarse «esquema», y en lenguaje piagetiano «representación mental». De ahí que Piaget llame «periodo representativo» a ese periodo de 2 a 12 años, caracterizado por la *interiorización del conocimiento*, que poco a poco irá pasando del nivel senso-motor al de la imagen, precursora del concepto, hasta llegar al periodo clásicamente llamado «del pensamiento abstracto», ya en la adolescencia.

Así pues, podríamos definir como objetivo general de este periodo el de *construir el propio esquema mental del espacio, incorporando en él progresivamente todas las nociones y propiedades descubiertas con su correspondiente vocabulario geométrico.*

Se trata de un camino largo (¡10 años de la vida del niño!), que va desde la experimentación concreta a la abstracción, con un ritmo lento y siguiendo el desarrollo lógico propio de cada persona.

En este camino no parece haber momentos culminantes, (como sucede por ejemplo en cálculo cuando los niños adquieren la noción de cantidad), ni discontinuidad alguna en el paso de la escuela infantil a la primaria. Sin embargo, atendiendo al proceso de maduración del pensamiento lógico-matemático en general, nos encontramos con la aparición de nuevas capacidades aproximadamente hacia los 8 años (las edades que citamos son siempre muy variables de una persona a otra), lo cual nos permite separar el presente periodo en dos etapas.

Etapa 2-8 años

En ella es válido todo lo que acabamos de decir del periodo representativo, considerando además que a esta edad, si bien los niños son capaces de trabajar duro y tienen unas enormes ganas de aprender, no mantienen la atención durante un tiempo largo y no saben todavía tener en cuenta resultados anteriormente adquiridos cuando están planteando algo nuevo. Todo es intenso, corto y cada vez se empieza casi de cero. Por esto sus exploraciones y reflexiones se refieren siempre a una sola noción geométrica a la vez; es decir no podemos pretender que en una misma actividad se fijen en varios aspectos simultáneamente.

Es el momento de adquirir en la vida cotidiana e incluso de consolidar en la escuela las nociones fundamentales de carácter topológico, referentes a volumen, superficie y línea, al orden de puntos, a la frontera o separación, a la intersección de líneas, etc., así como las de línea recta o curva y de superficie plana o curva, que pueden desembocar en las primeras clasificaciones de cuerpos y figuras. En estas nociones los niños incluyen espontáneamente la noción de distancia pero todavía no la de ángulo, que es mucho más compleja.

Etapa 8-12 años

A partir de los 8 o 9 años, los niños son ya capaces de tratar dos o más nociones en una misma actividad, y de asumir actividades más prolongadas, incluso de un día para otro; recuerdan fácilmente lo que se hizo o se dijo en la clase anterior, pueden implicarlo en su actual actividad, y relacionan los resultados anteriores con los presentes. En consecuencia, es el gran momento de desarrollar su capacidad de «descubrir» por sí mismos propiedades geométricas nuevas como fruto de sus observaciones y de su posibilidad de combinar las nociones aprendidas y deducir resultados. A medida que nos acercamos al final de la etapa, que coincide con el de la escuela primaria, empiezan a generalizar y, por tanto, a ser capaces de descubrir y expresar algunas leyes (cosas «que pasan siempre»). La formulación de estas conclusiones generales es de máxima importancia para preparar el paso a la abstracción.

Es el momento de observar en el entorno y de abordar en la clase los grandes temas de la geometría métrica: ángulos, paralelismo y perpendicularidad, coordenadas, medida de áreas, preparación del volumen, etc. Al mismo tiempo, desde el inicio de esta etapa, puede plantearse la práctica de diversas transformaciones (principalmente sombras, giros y simetrías en el plano y en el espacio) descubriendo su naturaleza y sus normas de funcionamiento, y sobre todo aplicándolas al conocimiento y construcción de las distintas familias de cuerpos y figuras.

[En la etapa 2-8 años] sus exploraciones y reflexiones se refieren siempre a una sola noción geométrica a la vez; es decir no podemos pretender que en una misma actividad se fijen en varios aspectos simultáneamente.

Ejemplo de actividad: itinerarios, ángulos y polígonos

Esta actividad ha sido realizada por cuatro maestras del grupo MES O MENYS de Osona (Vic) en sus escuelas rurales, tres de ellas semiunitarias. Se ha practicado con niños de 3 a 12 años, a veces juntos y otras separados por ciclos. Todos han aprendido algo, cada uno a su medida.

Preparación: al empezar, tenemos dibujadas en el suelo, con cinta adhesiva de colores, diversas líneas poligonales, unas abiertas y otras cerradas.

1ª parte: recorrido y observaciones (de 3 a 8 o 9 años)

1. Señalar el punto inicial y el sentido del recorrido (flecha).

2. Caminar sobre la línea (un pie delante del otro, tocándose). Observar que en cada segmento vamos siempre «en la misma dirección», en línea recta.

3. Girar en cada vértice (apoyándose en el talón). Observar y decir en qué sentido giramos, hacia la derecha o hacia la izquierda.

4. Dibujar en el suelo con tiza el ángulo girado en cada vértice, formado por la prolongación de la dirección que seguíamos y la que emprendemos después de girar. En cada ángulo indicar el sentido del giro con una flechita.

5. Posteriormente dibujar «los caminos que hemos hecho», en un papel blanco, sin tener ya el modelo a la vista.

2ª parte: primeras medidas y paso a la manipulación (8 años en adelante)

6. Medir las longitudes de los segmentos, con cuerdas o con cinta métrica, según edades. En las poligonales cerradas podemos deducir el perímetro.

7. Medir cada uno de los ángulos girados («exteriores» del polígono).

   En el 2.° ciclo, se ha hecho poniendo en el suelo un círculo de cartulina previamente preparado, doblado en 4 partes y luego cada una en 3, con lo que resulta una «unidad», que escribiremos U (aproximadamente 30°). Hay que aprender a colocarla correctamente, haciendo coincidir su vértice y un lado con los del ángulo, y desdoblándola hasta ver cuántas U caben en él.

   En el tercer ciclo, se hizo directamente usando el semicírculo graduado.

8. Pasar de los ángulos dibujados en el suelo a ángulos de cartulina, para manejarlos sobre la mesa. Puede hacerse doblando un papel sobre el suelo y recortando, o calcando... vigilando siempre la posición de los vértices. Se numeran los ángulos en el suelo, y se traspasa a la cartulina el número junto con la flecha del sentido de giro. Se observa que hay polígonos que tienen algún giro en sentido contrario al de los otros; son polígonos «cóncavos».

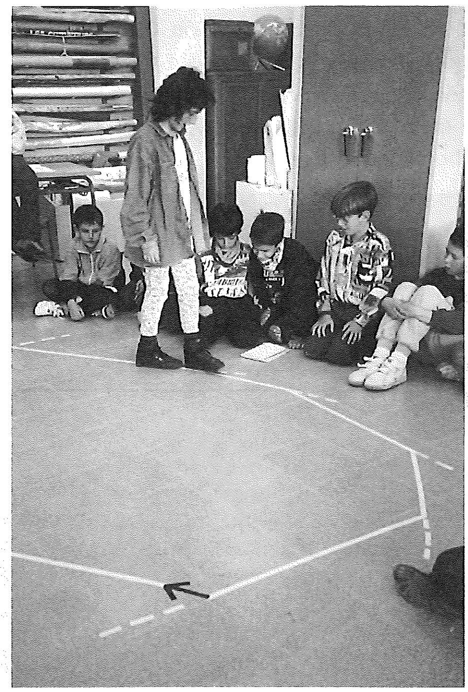
9. Una actividad interesante, pero sólo complementaria en nuestro caso, es la de comprobar prácticamente con los ángulos de cartulina que la suma de todos ellos vale 360° en todos los casos (incluso en los cóncavos, si se atiende bien al sentido de las flechas).

3ª parte: confección de un código

10. Acompañar el recorrido de la línea con la confección de un código, que consta de dos símbolos correspondientes a los dos actos realizados: uno para avanzar, y otro para girar. Comprender que precisamente por esto el código representa una forma y hace posible que la reconozcamos aun sin verla. Es el mismo código que en el lenguaje «Logo».

11. Se trata de anotar sucesivamente las medidas que se van realizando de los segmentos y ángulos. Para las longitudes, escribimos sólo el resultado y la unidad (pasos, o cm, o la que sea) y eso significará «avanzar en línea recta». Para los giros, escribimos lo mismo (con U si se usa la unidad antes descrita, o con ° si se usan grados), seguido de la inicial D o I que significa «a la derecha» o «a la izquierda». Por ejemplo: 60 cm; 60° I; 30 cm; 45° D, 120 cm será una poligonal abierta.

    Nota: en una poligonal cerrada, si se empezó avanzando hay que terminar girando para recuperar la misma posición inicial.



4ª parte: Un juego: Adivinar recorridos y figuras

12. Se preparan itinerarios en el suelo en distintos lugares de la escuela.

    Se forman dos grupos de alumnos. Cada grupo escoge una línea, hace su recorrido, y escribe el código en un papel. Luego se intercambian los dos códigos.

13. Cada grupo ha de dibujar en un folio la línea poligonal que corresponde al código que ha recibido del otro grupo. Para poderlo hacer ha de descubrir que necesita una «escala», ya que el papel es mucho más pequeño que los dibujos del suelo.

    Nota: resulta especialmente interesante que los alumnos descubran la necesidad de reducir los lados (a escala), pero no los ángulos.

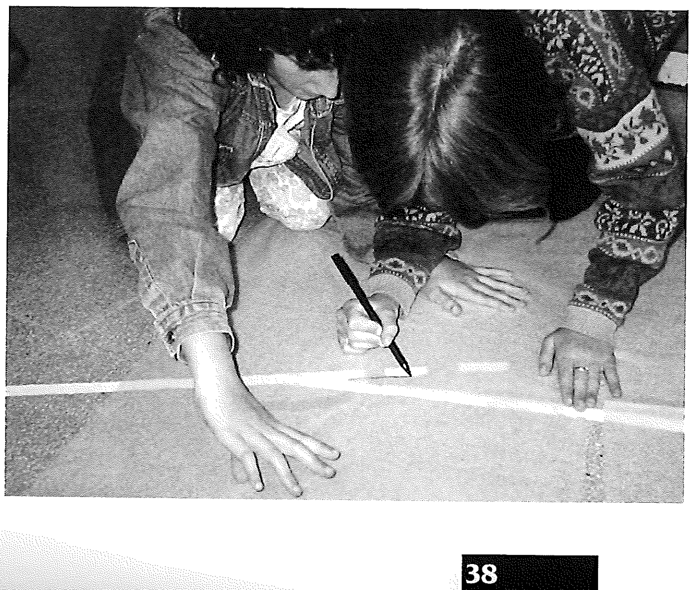
14. Con el dibujo hecho, cada grupo ha de encontrar la figura del suelo que le corresponde.

    También pueden practicarse estimaciones en este sentido antes de tener el dibujo en el folio, a la vista de las informaciones que proporciona el código recibido.

15. La actividad del programa «Logo» es muy interesante como complemento y ampliación. Para dibujar en la pantalla una figura definida o imaginada, hay que dar con precisión las órdenes de avanzar o girar, es decir el código correcto. Es un paso más que supone haber interiorizado lo que previamente hemos hecho con nuestros desplazamientos

5ª parte: actividad libre

16. Después de realizar la actividad en las distintas escuelas, en una de ellas un grupo de alumnos mayores transformó el juego en otro similar describiendo códigos en relación con un plano de la población (no muy grande, por cierto) y haciendo recorridos a través de ella. El resultado fue que lo pasaron bien, que opinaron que la Geometría era genial y muy útil, y que conocieron mucho mejor su pueblo.



Pero lo que realmente interesa, porque de ello depende la consecución o no de un aprendizaje significativo, no es tanto el «qué» trabajaremos, sino el «cómo» lo trabajaremos en la escuela.

Propuestas metodológicas para la clase

Todo lo que hemos dicho en el párrafo «Proceso de aprendizaje de 0 a 12 años», puede tomarse como orientación general para formular una secuencia de contenidos adecuada a cada ciclo educativo.

Pero lo que realmente interesa, porque de ello depende la consecución o no de un aprendizaje significativo, no es tanto el «qué» trabajaremos, sino el «cómo» lo trabajaremos en la escuela. Vamos a hablar de ello, enfocando el tema desde distintos puntos de vista.

Partiendo de la realidad o del juego

Tal como venimos diciendo a lo largo de estas líneas, el aprendizaje de la Geometría consta de dos momentos: el primero es el del conocimiento práctico y espontáneo, que todos los niños del mundo escolarizados o sin escolarizar (¡y de estos hay muchos!) adquieren a partir de la necesidad de resolver continuamente situaciones vitales y juegos en los que intervienen la posición y los cambios en el espacio ligados necesariamente a nociones geométricas. El segundo es el de racionalización y estudio, normalmente acompañado por el adulto. Los maestros tenemos tendencia a considerar este segundo momento como el específico de la escuela, hasta el punto de desinteresarnos totalmente del primero. Entonces lo que sucede es que nos engañamos, porque el segundo momento, al faltarle la base, deja de ser auténtico y eficaz.

Por el contrario, lo que deberíamos hacer en la escuela es no sólo no olvidar los conocimientos espontáneos de los alumnos, sino intentar tomarlos como punto de partida de todo el aprendizaje que queremos potenciar. Si lo hacemos así, por un lado conseguiremos una motivación y un interés de los chicos mucho mayores, y por otro lado les brindaremos la posibilidad de que sus nuevos conocimientos encuentren puntos de enlace con aquellos que ya tienen previamente asumidos y de ese modo se vayan llenando de un auténtico significado.

Para tener en cuenta los conocimientos espontáneos conviene no basarnos tanto en la observación de dibujos, como en la de los objetos de uso cotidiano, lo cual nos lleva a tratar el volumen y las superficies al mismo tiempo que las líneas. Dicho sea de paso, yo no veo la necesidad de que éstas se introduzcan posteriormente, como a veces se dice, ya que los «caminos» y recorridos son tan usuales en la vida y en los juegos de los niños como lo son las superficies o los volúmenes. Al mismo tiempo no hay que descuidar la observación detallada del espacio de la propia clase, entorno habitual para nosotros y para los alumnos, así como la de otros espacios de la escuela.

También es importante no limitarnos a hacer Geometría en los momentos marcados por el horario, sino aprovechar muchas otras ocasiones como son las excursiones o salidas con los alumnos. Todos hemos de aprender a descubrir fenómenos geométricos en la naturaleza, que en este aspecto es muy rica, y en todas partes. Podemos encontrar una gran riqueza de elementos geométricos no sólo en el arte que contemplamos en los museos sino también en el urbanismo y en los edificios cuando visitamos una plaza, una fábrica u otros aspectos de la ciudad. Recordemos lo que hemos contado en el punto 16 del anterior ejemplo de actividad del apartado anterior.

Respetando la diversidad de los alumnos

Hemos visto a grandes rasgos el proceso de los niños en la construcción del conocimiento geométrico, y hemos podido apreciar su complejidad.

Por un lado, y como en todo proceso vital, no lo realizan todos los niños a un tiempo, sino que cada uno tiene su ritmo propio de maduración y también sus capacidades, sus gustos y su situación personal. Si tenemos en cuenta estas peculiaridades, y en clase ofrecemos diversas actividades con diversos grados de implicación posible en las mismas, obtendremos unos resultados menos uniformes, y por tanto más reales y más eficaces para cada uno de los alumnos.

Por otro lado, conviene ir retomando los mismos temas distintas veces, como en forma de espiral, volviéndolos a contemplar cíclicamente cada vez con mayor profundidad y cada vez implicando en ellos nuevas capacidades de los niños. De esta forma damos más posibilidades de que todos ellos puedan «engancharse» en un momento u otro, y puedan construir su propio camino de aprendizaje.

En nuestro ejemplo el hecho de estar reunidos niños de distintas edades no fue vivido como un inconveniente sino todo lo contrario. Para muchos no era la primera vez que hablaban de polígonos, pero ampliaron las nociones que tenían con nuevos elementos (es lo que decíamos de la espiral); para algunos fue la ocasión de consolidar la noción de ángulo, siempre necesitada de refuerzo; para otros fue el inicio de algo nuevo, como el concepto de vértice o cambio de dirección; incluso los de 3 años, que evidentemente no conectaron con ninguno de esos temas, aprendieron el procedimiento de andar correctamente sobre una línea (que más adelante les será muy útil) e interiorizaron la imagen de línea recta y de vértice, tal como se aprecia en el gráfico 1.

Gráfico 1. Dibujo realizado por una niña de 3 años, después de la actividad; ejemplo n.° 5. Se observa:

- La necesidad de situarse ella misma en el recorrido para asegurar que lo hizo; es una cosa suya.
- La diferenciación de dos tipos de poligonales: abierta y cerrada; lo recuerda perfectamente.
- El deseo de hacer todo lo que hacen los mayores: señalar el punto de partida, dibujar flechas...
- La fuerza de las líneas; la firme decisión de que sean rectas; ha interiorizado esta noción.
- La fuerza de los vértices, marcados con toda claridad, cosa inusual en los dibujos de esta edad; seguramente ha interiorizado también el cambio de dirección hecho en el giro.

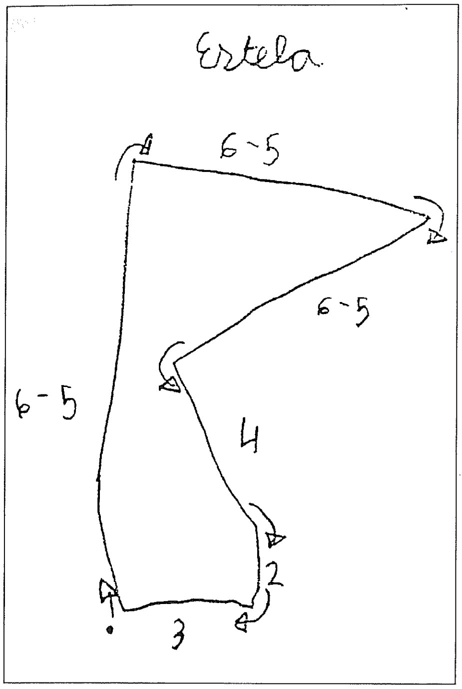


Gráfico 2. Dibujo de una niña del ciclo 1.° de primaria (7 años), recordando, sin el modelo. Se observa:

- Ya no necesita dibujarse ella misma para expresar su recorrido.
- Ha asumido perfectamente el sentido del giro realizado en cada vértice y probablemente reconoce en qué caso el giro se ha hecho en sentido contrario al de los otros.
- No escribe los nombres, pero el nivel de conocimiento que demuestra corresponde a conocer el vocabulario: polígono, lados, vértices.
- Ha tomado medidas a los lados, las recuerda y las hace constar (6-5 quiere decir entre 6 y 5 aproximadamente) no tiene aún adquirido el hábito de escribir la unidad; ejemplo, n.° 6.
- Sus trazos son menos firmes que los del caso anterior; lo de la línea recta ya no le sorprende, seguramente por sabido.

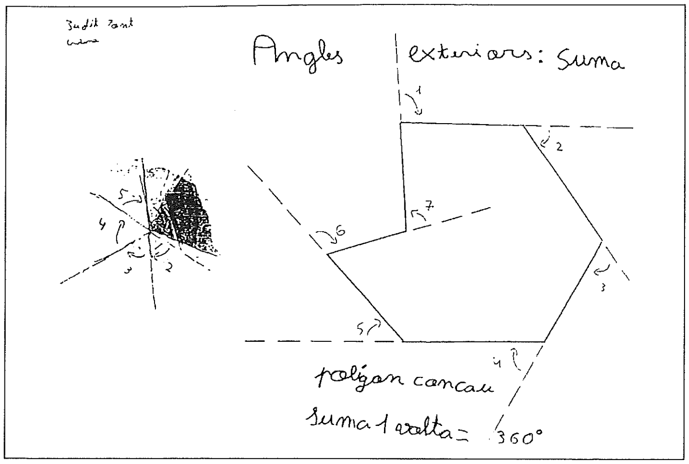


Gráfico 3. Dibujo de una niña de 2º ciclo de primaria (9 años) mirando el modelo; ejemplo n.° 8 y 9. Se observa:

- Dominio en el uso de la regla para dibujar polígonos.
- Precisión en el trazado y representación de los ángulos.
- No señala el origen; se supone que se empieza por el vértice del ángulo 1.
- Pone el título de la actividad y al final expresa el resultado o sea lo que se decubrió.

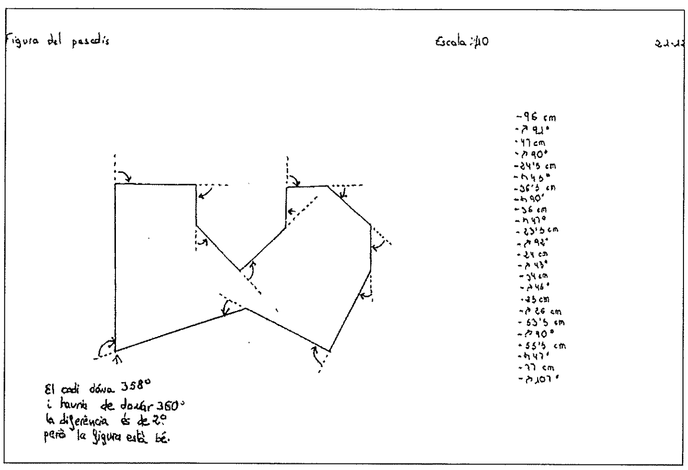


Gráfico 4. Dibujo de un niño de 6.° curso de primaria, acompañado del código correspondiente. El código se ha confeccionado en la figura del suelo (del pasillo, según dice su autor). A partir del código, se ha realizado este dibujo. Se observa:

- Interés por una buena presentación; primero lo hizo en lápiz y luego lo pasó a bolígrafo.
- Una notable precisión en el uso de la regla y del círculo graduado (los ángulos en grados).
- Señala el punto de origen y la dirección del primer tramo con la flecha; al final no olvida terminar con un giro.
- Explicita la escala a la cual se han reducido las longitudes; no tuvo dudas sobre el hecho que los ángulos se mantenían iguales.
- El interés por la exactitud de las medidas y del resultado le hace expresar espontáneamente por escrito el desajuste que encontró en la práctica; sabe relativizarlo.

Priorizando los contenidos procedimentales

Todas las habilidades y capacidades que en el segundo apartado hemos señalado en letra cursiva, hoy son llamadas con mayor propiedad los «contenidos procedimentales», en este caso de la Geometría. Hemos podido apreciar que son indispensables para la construcción del conocimiento geométrico de los niños hasta los 12 años.

Precisamente es en este sentido en el que afirmamos que en estas edades es prioritario el aprendizaje de los procedimientos sobre el de los conceptos. Pero si además de afirmarlo lo creemos, esto no puede quedar únicamente en una frase, o una norma de la reforma educativa, o incluso en una moda, sino que ha de llegar a ser nuestro primer objetivo y, por tanto, ha de tener consecuencias prácticas en nuestra manera de enseñar. Algunas de ellas podrían ser: poner el hilo conductor de nuestras programaciones en una secuencia de procedimientos y no en una ordenación de conceptos como suele hacerse; cambiar los criterios básicos que nos mueven a optar por unos materiales y por una u otra dinámica de clase; y, sobre todo, planificar de otra forma la evaluación de los resultados, ya que realmente es la adquisición de procedimientos lo que deberíamos evaluar con mayor interés.

En nuestro anterior ejemplo, se trataron, entre otros, los «procedimientos» siguientes:

- exploración del espacio y dominio de movimientos;
- observación de fenómenos y propiedades;
- construcción de modelos;
- utilización de simbolismos;
- verbalización de la acción realizada y uso de vocabulario geométrico;
- relaciones comparativas y práctica de medidas;
- descubrimiento de propiedades;
- elaboración de conclusiones;
- sistematización y aplicación de las nociones aprendidas.

Podemos apreciar algunos de ellos en los dibujos de los niños que presentamos.

La mejor manera de potenciar el conocimiento geométrico del espacio en un niño de corta edad es a través de sus propios desplazamientos y movimientos en general.

A partir de los propios movimientos

La mejor manera de potenciar el conocimiento geométrico del espacio en un niño de corta edad es a través de sus propios desplazamientos y movimientos en general. Ya hemos dicho el importante papel que juega en este sentido el momento en que un niño empieza a andar.

Durante la etapa que hemos llamado de 2-8 años practicaremos el recorrer itinerarios, el frotar con la mano una superficie y apoyar en ella la espalda y el meterse en la región interior de una casita o de un dado gigante, como formas privilegiadas de reconocer las líneas, las superficies y los espacios tridimensionales. Estas actividades, se basan en los propios cambios de posición respecto a materiales grandes (cajas, telas, aros, cubos...) y en la experiencia corporal, y son las que deben predominar incluso antes de la manipulación de objetos pequeños.

En segundo lugar, el movimiento juega un papel muy importante no sólo en la exploración del espacio sino también en la *interiorización* del mismo, hasta el punto de que podríamos decir que la atención puesta en el propio movimiento es la clave para la fijación de los conceptos en él implicados. Y este paso de interiorización, o formación de la imagen mental, se va realizando, cada vez con propiedades y nociones más complejas, en todas las edades. Es por esto que durante la etapa siguiente (8-12 años) es también muy recomendable partir del propio movimiento al plantear nuevas nociones.

En nuestro ejemplo se tomó el hecho de andar como punto de partida para ver distintos tipos de líneas poligonales, y el movimiento de girar como origen de la noción de ángulo; y para los mayores el análisis del movimiento realizado en los giros es la causa de reconocer polígonos convexos o cóncavos, y de subsanar anteriores errores respecto a los ángulos.

Construyendo modelos con materiales y con el dibujo

Después de haber trabajado un tema a partir de los movimientos, conviene volverlo a tomar otras veces desde distintos puntos de vista y en otras formas. Lo haremos primero con actividades a las que llamaremos «de taller», basadas en la manipulación de materiales y en el uso de instrumentos geométricos, y después con el «dibujo».

Son materiales adecuados para el taller de Geometría:

— En primer lugar todos los de uso corriente: cartulinas, papeles, cuerdas, lanas, maderas, piezas de mecano y otros juegos, botellas, envases, globos hinchables, espejos, etc.; y, desde luego, lápiz, pinturas y tijeras.

— En segundo lugar, aquellos creados exprofeso para hacer Geometría, como los «geoplanos», «tangrams», «pentominos», «policubos» y algunos más.

— Como instrumentos geométricos citaremos: la regla, las escuadras y cartabones, el círculo graduado, otros varios de medición de ángulos (entre los que cabe contar un reloj grande de agujas) y el compás.

— Finalmente hoy disponemos de muy buenos programas informáticos para tratar la Geometría, que son una excelente manera de plasmar, con una intervención muy directa de los chicos, lo que anteriormente hayan trabajado con sus movimientos y con el taller de materiales. Pienso que el ordenador no sustituye estas dos formas, sino que las completa.

Los materiales manipulables han de ser no tanto una ocasión para que el adulto pueda «explicar» o «demostrar» propiedades geométricas, como una ocasión para que el que aprende (niño o adulto) pueda primero experimentar y descubrir, y después expresar dichas propiedades. Los materiales son siempre importantes, pero muy especialmente en las edades que nos ocupan, cuando los niños todavía no manejan los conceptos abstractos y sólo son capaces de razonar a partir de situaciones concretas.

En efecto, con estos materiales los niños practican la experimentación, la cual, impulsada por propuestas interesantes del adulto y realizada siempre con un espíritu de búsqueda adecuado a la edad, es para los pequeños lo mismo que la investigación para los mayores.

Por otro lado, con los materiales, el dibujo y el ordenador se construyen modelos, es decir realizaciones visibles que ponen de manifiesto la posición, las formas, las transformaciones, y todas las propiedades geométricas. Los modelos son el lenguaje de la Geometría. Sólo sabemos si un niño realmente tiene una imagen mental formada de una determinada noción geométrica, si es capaz de «construir» o sea crear un modelo o dibujo en el que esté implícita dicha noción. En este sentido decimos que el lenguaje de la Geometría es la Expresión Plástica.

Con una metodología en tres «fases»

Como consecuencia de los anteriores criterios, y refiriéndonos al orden de realización de las actividades, proponemos secuenciar las mismas en tres «fases»:

1. *Actividades de movimiento*: con materiales grandes y con los propios desplazamientos.
2. *Talleres de manipulación*: con materiales pequeños, y con ordenador y programas informáticos, si se puede.
3. *Con lápiz y papel*; estas no se realizan necesariamente cada vez.

Nos referimos no a seguir esta secuencia a lo largo de la escolaridad, sino en cada uno de los temas que se van planteando tanto en la escuela infantil como en la primaria.

En la expresión verbal se aprende a servirse con precisión del lenguaje geométrico adecuado. Para los más pequeños será reducido y con la edad se irá ampliando, pero es preciso que a cada uno se le exija un vocabulario correcto, a su medida.

Sin olvidar la expresión verbal

Este criterio corresponde a uno de los «procedimientos» básicos de Geometría de los que antes hemos hablado, el de acompañar las experiencias con la expresión verbal de las mismas y, sobre todo, de lo que en ellas se ha observado y descubierto. En efecto, las intuiciones que los niños empiezan a formarse sobre la naturaleza del espacio (como sucede por otro lado con cualquier otro tipo de conocimiento) necesitan expresarse para concretarse y no quedar únicamente en ideas implícitas.

En la expresión verbal se aprende a servirse con precisión del lenguaje geométrico adecuado. Para los más pequeños será reducido y con la edad se irá ampliando, pero es preciso que a cada uno se le exija un vocabulario correcto, a su medida. No olvidemos que la palabra, o lenguaje verbal, es indispensable para la concreción del pensamiento y construcción de los conceptos.

Con ello no queremos decir que pida la verbalización sistemáticamente en cada ejercicio, cosa que quizás se haría pesada, pero sí muy a menudo y de forma natural. Se trata de provocar en clase ocasiones propicias para ello y un diálogo habitual. Probablemente, para los más pequeños será siempre expresión oral, y para los mayores será a menudo oral y a veces también escrita.

La Geometría globalizada con otra materias

Después de lo que hemos dicho, nos aparece como necesario, y al mismo tiempo absolutamente natural y fácil, el hecho de trabajar la Geometría en las primeras edades conjuntamente con el Lenguaje, con la Psicomotricidad, con la Expresión Plástica y con el Conocimiento del Medio Natural y Social.

Al mismo tiempo, hay que contemplar la conveniencia de realizar una buena parte de las actividades en otros momentos que no sean los de la «clase de matemáticas», y otros contextos que el de «nuestra aula»; así, por ejemplo muchas cosas deberemos hacerlas en el patio, en el aula de dinámica o en el taller de Plástica, en el caso de que la escuela disponga de ellos, en el escenario de cualquier visita cultural, tal como antes hemos indicado, o en los pasillos, como ocurrió en el anterior ejemplo. Quedará sin duda una parte de las actividades para realizar en clase, y la mayoría de las veces éstas nos obligarán a cambiar la organización material de la misma.

El hecho de concebir una Geometría muy ligada a otros momentos y a otras disciplinas, podría permitirnos enfocar el tratamiento de las Matemáticas en la escuela infantil y primaria, no como una materia que forma un todo inamovible y separado de las otras materias, sino como un conjunto de diversas áreas de conocimiento, estrechamente enlazadas entre ellas y con otras que provienen de otros campos del saber, pero que confluyen todas tanto en el entorno y en la vida de los niños, como en el mismo acto del aprendizaje, y que por esto mismo contribuyen a un proceso humanizador.

Contemplando distintas tipologías de actividades

Anteriormente hemos descrito tres tipos de actividades teniendo en cuenta el punto de partida y el medio usado en su realización: de movimiento, de taller, y de dibujo. Desde otro punto de vista, podemos distinguir entre actividades *de reconocer y de construir.* Las primeras, como su nombre indica, son aquellas en las que los alumnos observan un modelo, y en él «reconocen» o identifican una forma, cuyo nombre pueden aprender, o una propiedad, y normalmente hacen algo para demostrar que lo han reconocido correctamente; por ejemplo, dadas varias líneas en un papel, pintar en rojo las curvas, y en azul las rectas. El segundo tipo de actividades corresponde a aquellas en las que los alumnos han de «construir» (con movimiento, con materiales o con dibujo) un modelo que cumpla una definición o unas condiciones prefijadas; por ejemplo, andar trazando un itinerario recto o curvo, o dibujar líneas rectas o curvas en un papel blanco, según la consigna del maestro. Evidentemente, este segundo tipo de actividad es más difícil, y es la que realmente demuestra que ya se tiene interiorizada la noción correspondiente. Por esto a menudo puede servirnos como evaluación. O mejor dicho, el hecho de trabajar alternando continuamente actividades de reconocer y de construir, no sólo es una garantía para la adquisición del conocimiento, sino que además equivale a practicar una evaluación constante dentro del mismo proceso de aprendizaje.

...el hecho de trabajar alternando continuamente actividades de reconocer y de construir, no sólo es una garantía para la adquisición del conocimiento, sino que además equivale a practicar una evaluación constante dentro del mismo proceso de aprendizaje.

Finalmente, refiriéndonos a la dinámica de la clase, podemos hacer también la distinción entre actividades *dirigidas* y *libres.* Las primeras, que suelen ser mayoritarias, están orientadas por propuestas del maestro o maestra, que ha previsto un hilo conductor y sabe donde quiere que los alumnos vayan a dar al final, y por esto, sin duda, provoca directamente buena parte de los descubrimientos que éstos realizarán.

En cambio en las del segundo tipo, la actividad debe ser tan sólo sugerida en su inicio, dejando la libertad de que los chicos actúen guiados por su propia iniciativa, por sus aficiones o por algo que les ha llamado la atención; se trata más bien de una exploración o incluso investigación a su medida, que probablemente irá por caminos no previstos por el maestro. Este tiene la misión de saber acoger todo lo positivo que aparece.

Una Geometría dinámica

Los anteriores criterios metodológicos determinan una nueva manera de actuar y, por tanto, de organizar nuestras clases, que permite hablar de una *Geometría dinámica.*

En efecto, el empezar a trabajar con los propios desplazamientos nos hace cambiar radicalmente la disposición de la clase, ya que es necesario retirar las mesas, dejar un espacio grande en medio, cambiar de lugar los chicos, acomodar un sitio para los materiales grandes. El trabajo en forma de taller supone potenciar la experimentación, la iniciativa y los intercambios entre los alumnos; buscar materiales diversos y atender a las ideas que surjan. Resumiendo: sin dejar de fomentar la concentración y la reflexión, es preciso estar casi en continuo movimiento. Es en este sentido en el que podemos decir que la clase de Geometría ha de ser *dinámica en su forma.*

Pero la Geometría en la escuela ha de ser también *dinámica en su contenido,* ya que, tal como la hemos presentado, no estudia las formas de las figuras contempladas estáticamente, sino que estudia prioritariamente los fenómenos de movimientos o de otras transformaciones, que contemplan tanto las mismas figuras como todas las propiedades geométricas desde la óptica de los cambios, genuinamente dinámica.

Mirando el mundo «con ojos geométricos»

Si hemos afirmado tantas veces que hacer Matemáticas es desarrollar el hábito de «pensar matemáticamente», o bien de mirar el mundo con «ojos matemáticos», también podríamos resumir todo lo que hemos dicho, y buena parte de lo que no hemos sabido decir, afirmando que hacer Geometría es desarrollar el hábito de saber mirar el mundo en que vivimos con unos «ojos geométricos» y con una «mente geométrica». Esto supondría empezar por interesarnos por las formas y los fenómenos geométricos que suceden a nuestro alrededor (simetrías, sombras, giros, etc.), esforzarnos por comprenderlos, y acabar disfrutándolos. Esto nos haría capaces de interpretar nuestro mundo con nuevos elementos y con mayor profundidad y de solucionar situaciones inéditas que en él se nos plantean, y así llegar a dominarlo.

Esta concepción, representa para los maestros aceptar que en la escuela no se trata de estudiar en los libros los nombres de las figuras, las fórmulas de las áreas o volúmenes y los cálculos de ángulos, cosa que la mayor parte de nosotros hicimos de jóvenes y que, por tanto, hemos identificado con la asignatura. La mayor parte de esto no es ni siquiera propiamente geometría, sino más bien *cálculo aplicado a la geometría*. Es decir, no se trata de «enseñar» nombres o definiciones, que como máximo podemos «explicar o demostrar», sino de poner al alcance de los alumnos, a partir de su propio entorno, las ocasiones, los medios y la interacción verbal necesarios para que puedan realizar su propio y auténtico camino del aprendizaje de las características geométricas del espacio.

Algo ha de cambiar radicalmente en nuestras aulas

Hoy, en una visión mucho más amplia, vemos la Geometría en la escuela de modo completamente distinto, como algo mucho más amplio y complejo que aquello que solemos evocar al decir «clase de Geometría». Quizás también es algo más difícil, e incluso es para nosotros un verdadero reto pero, con toda seguridad, también es algo más auténtico y que produce más entusiasmo.

Pero, sobre todo, exige de nosotros una nueva actitud, basada en el conocimiento de aquello que nuestros alumnos necesitan, y en la voluntad de ofrecérselo, de interpretar las posibilidades de cada uno, de valorar sus hallazgos y de sentir la alegría de sus progresos.

De este modo el conocimiento geométrico del espacio puede llegar a ser, tanto para nuestros alumnos como para nosotros mismos, una ocasión de aumentar nuestra capacidad de descubrimiento, nuestra creatividad y nuestra sensibilidad por la belleza. Juntos hemos de hacer este camino, los pequeños y los mayores, de modo que tanto en la calle como en la clase, seamos más felices haciendo Geometría.

Hoy, en una visión mucho más amplia, vemos la Geometría en la escuela de modo completamente distinto, como algo mucho más amplio y complejo que aquello que solemos evocar al decir «clase de Geometría».

Mª Antonia Canals
Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya

Bibliografía

ALSINA, C., C. BURGUÉS, y J. M. FORTUNY (1987): *Invitación a la didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C., C. BURGUÉS, y J. M. FORTUNY (1988): *Materiales para construir la Geometría*, Síntesis, Madrid.

BURGUÉS, C. (1992): *Endavant amb la Geometria. Exemples d'unitats de programació, 2*, Educació Primària, Depart. D'Ensenyt. de la Generalitat, Barcelona.

BURGUÉS, C. y M. TORRA (1995): *Imatges. Exemples d'unitats de programació, 8,* Educació Infantil, Depart. d'Ensenyt. de la Generalitat, Barcelona.

CANALS, Mª A. (1992): *Per una didàctica de la Matemàtica a l'escola. I. Parvulari,* Eumo, Vic.

CANALS, Mª A. (1992): *Per una didàctica de la Matemàtica a l'escola. I. La geometria a primària,* (En preperación), Eumo, Vic.

CANALS, Mª A. y R. FOIX (1996): *El tangram (quadern),* Onda, Barcelona.

CASTELNUOVO, E. (1981): *La Geometría,* Ketres, Barcelona.

DIENES, Z. P. y E. W. GOLDING (1976): *La Geometría a través de las transformaciones (tomos 1, 2 , 3),* Teide, Barcelona.

Disseny curricular de Primària, Generalitat de Catalunya, Barcelona, 1990.

Disseny curricular de Primària, Generalitat Valenciana, València, 1991.

GRUP ZERO (1983): *Retrobem el món de la Geometria. (Geometria elemental I),* ICE de la UAB, Barcelona.

FIOL, M. L. (1997): «Igual forma, diferent mida», *Revista Perspectiva Escolar,* n.° 211, 1997

FLETCHER, I. (1973): *Tangram,* Teide, Barcelona.

PIAGET, J. (1948): *La geometrie spontanée de l'enfant,* Presse Univer. de France, París.

PINOL-DOURIEZ, M. (1979): *La construcción del espacio en el niño,* Pablo del Río, Madrid.

Revista Perspectiva Escolar (1982): Monogràfic geometria n.° 67, Rosa Sensat, Barcelona.

ROLVI, F. y otros (1990): *Geometria dall'esperienza e dal gioco,vol, 2,* Giunti-Lisciani, Petricione.

VALLÈS, J.: «La didàctica de la matemàtica en el Cicle Inicial», *Quaderns Rosa Sensat,* n.° 29, Barcelona.

VALLÈS, J. (1986): «El nen i la Geometri», *Revista Infancia,* n.° 31.

SUMA 25
junio 1997, pp. 45-52

Dificultades y logros de una gran mujer matemática: Mary Somerville

Lourdes Figueiras Ocaña
María Molero Aparicio
Adela Salvador Alcaide
Nieves Zuasti Soravilla

Dedicado a quien mantuvo siempre el convencimiento de que hombres y mujeres debían trabajar en condiciones de igualdad, estudiar sin ningún tipo de discriminación por razones de sexo y, por supuesto, que las matemáticas a las que él dedicó gran parte de su vida son una ciencia viva, dinámica y en la que las mujeres han tenido y tienen un importante papel.

Con cariño, para ti Gonzalo.

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

Como homenaje a Gonzalo Sánchez Vázquez, socio de la Organización Española para la Coeducación Matemática Ada Byron, hemos querido comentar la vida y la obra de una gran matemática, Mary Somerville, y, al conocer sus dificultades, reflexionar sobre los problemas que han tenido por el hecho de ser mujer otras mujeres matemáticas. Por último recogemos unos bellos diagramas de un libro de Mary para exponer su fundamento matemático y desarrollar a partir de ellos actividades geométricas de aula.

SE CONOCEN muchos nombres de hombres matemáticos famosos y muy pocos de mujeres matemáticas. Es usual que en la sociedad se plantee la pregunta: ¿será cierto que las mujeres «valen» menos para las Matemáticas que los hombres? Tradicionalmente no se consideran las Matemáticas como una ciencia especialmente femenina y, sin embargo, en determinadas épocas históricas el interés de las mujeres por las Matemáticas fue notable.

Al comenzar a estudiar y a preocuparnos por este tema observamos que para que una mujer (o un hombre) sea recordada en la historia de las Matemáticas se necesita que haya recibido una cuidada formación, y que haya crecido, por tanto, en el seno de una familia de clase acomodada. Pero una mujer encuentra, además, otros inconvenientes tales como la dificultad de contar con el apoyo de universidades o instituciones; la dificultad del reconocimiento de su labor frecuentemente vinculada a algún personaje masculino: padre, hermano, esposo; la utilización del propio nombre; la necesidad de ocuparse de «sus labores». Si a pesar de todo ello esta mujer consigue ocupar un lugar en la historia, ocurre a menudo que es recordada por alguna anécdota de su vida antes que por su labor como matemática.

Queremos contar la historia de una mujer matemática, Mary Somerville, como un ejemplo de mujer con el que, analizando sus logros y sus dificultades, podamos generalizar y darnos cuenta de los problemas que han tenido las mujeres para hacer ciencia y en particular para hacer matemáticas.

La opinión generalizada sobre la ausencia de mujeres en la historia de las Matemáticas descansa en una concepción errónea de lo que es la historia de la ciencia. Hay quienes piensan que la ciencia progresa solamente gracias a los grandes descubrimientos olvidándose de quienes han recogido los datos, han hecho minuciosas observaciones y anotaciones, han traducido trabajos importantes poniéndolos al alcance de otros investigadores e investigadoras, o han explicado, analizado, sintetizado y divulgado el saber del momento.

Mary Fairfax Somerville

Educación de las mujeres

Nunca se le ha negado a los hombres el acceso a la educación superior. Este derecho fue ejercido por quienes dispusieron de los medios necesarios tanto por cuna como por propios méritos. Sin embargo, hasta hace poco más de un siglo, a la mayoría de las mujeres les ha estado vetada incluso la lectura y la escritura pues éstas eran consideradas fuente de pecado y tentaciones. Así, mientras que a unas mujeres por su posición social les planificaron cuidadosamente su educación siguiendo unos esquemas establecidos, a la mayoría trataron de impedirles el acceso al conocimiento. No se pretendía en ningún momento que se interesaran por la filosofía, la ciencia y la tecnología sino más bien por el arte, la literatura y la cultura clásica así como todas las habilidades «domésticas». En España, en nuestros días, hemos podido conocer a mujeres intelectuales que fueron las primeras en acceder a determinadas enseñanzas o carreras profesionales. Lo que podríamos considerar al fin un avance choca frontalmente con situaciones como las que se viven en Argelia donde las prácticas fundamentalistas actuales una de las primeras cosas que prohiben es la educación de las niñas. ¿Es tan peligroso que las mujeres tengamos una formación?

Mary Fairfax Somerville nació en Escocia el 26 de diciembre de 1780, siendo la quinta y única hija de una familia de siete hermanos. Pasó su infancia explorando las costas de Escocia y en contacto con la naturaleza, observando las estrellas, las flores, los pájaros y otros animales. Ella cuenta: «Me entretenía en el jardín, frecuentado por los pájaros. Conocía muchos de ellos, sus vuelos, sus costumbres...» (Somerville, 1874: 19). Pero a los diez años sabía escasamente leer pues a su madre le preocupaba que pudiera leer la Biblia, y no sabía en absoluto escribir.

...hasta hace poco más de un siglo, a la mayoría de las mujeres les ha estado vetada incluso la lectura y la escritura pues éstas eran consideradas fuente de pecado y tentaciones.

Al percatarse su padre, a la vuelta de un largo viaje, de que era una «joven salvaje», la envió al internado de una tal señorita Primrose, una escuela en la que como método pedagógico le hicieron aprender, de memoria, las páginas de un diccionario. ¡No solamente deletrear las palabras o su significado sino recordarlas incluso en orden y sin errores! No le gustaba la escuela y a menudo lloraba. Después de un año volvió a su casa donde le reprocharon lo poco que había aprendido. A pesar de esta experiencia traumática, Mary había desarrollado el gusto por la lectura y tenía pequeñas nociones de aritmética.

A los trece años pasó un verano en casa de uno de sus tíos, el Dr. Somerville, que más tarde sería su suegro, el cual al darse cuenta de las ganas que tenía de aprender, la inspiró con historias de mujeres sabias de la antigüedad, la ayudó a aprender latín y a leer a Virgilio. Ella escribió: «El me aseguró que en la antigüedad habían existido muchas mujeres elegantes instruidas, y que él podría leerme a Virgilio si yo estudiaba una hora o dos cada mañana, lo que le agradecí. Nunca fui más feliz en mi vida que durante los meses que estuve en Jedburgh» (Somerville, 1874: 37).

Luego asistió a un curso de pintura y danza. En el curso de pintura se interesaba por las nociones de la perspectiva y de geometría y de ahí pasó a resolver los pasatiempos matemáticos que aparecían en las revistas femeninas.

El tutor de su hermano, que daba las clases en la misma habitación donde ella cosía, se asombró al comprobar que Mary respondía a las preguntas que él le hacía al hermano. Mary aprovechó la fuerte impresión que le causó para convencerle de que comprara para ella libros científicos. Así consiguió leer libros serios como los *Elementos* de Euclides y el *Álgebra* de Bonnycastle. El tutor le ayudó a leer y a resolver los problemas del primer libro de Euclides, pero pronto ella le sobrepasaba en conocimientos y tuvo que continuar sola su formación.

Vivió las contradicciones de la educación de las chicas de su época. Primero sabía demasiado poco y luego ya sabía demasiado. La intensidad de sus estudios sorprendió a sus padres. Al enterarse su padre de la pasión de su hija por las Matemáticas le prohibió continuar estudiando ¡el pensamiento abstracto podía deteriorar la salud de la mujer! Su padre dijo: «uno de estos días veremos a Mary con camisa de fuerza. ¡Acuérdense de X, que se volvió loca de atar con el estudio de la longitud!» (Alic, 1991: 214). Su madre le quitó las velas para que no pudiese estudiar de noche. Durante el día practicaba piano, se ocupaba de las labores del hogar, de sus amistades, bailaba, pintaba, le gustaba el teatro y los conciertos y, además, encontraba tiempo para leer álgebra y a los clásicos, y logró estudiar los seis primeros libros de Euclides.

Esta anécdota de tener que estudiar a escondidas y con la oposición familiar se repite una y otra vez en la historia de mujeres. Si ya es una minoría de hombres y mujeres los que pudieron tener acceso a la educación superior, las mujeres, además, debían superar ese estereotipo social que consideraba impropio de ellas estudiar Matemáticas.

Vivió las contradicciones de la educación de las chicas de su época. Primero sabía demasiado poco y luego ya sabía demasiado.

La labor de las mujeres vinculada a algún personaje masculino

Mary se casó en 1804 con Samuel Greig, capitán de la marina rusa, y adquirió una mayor libertad para continuar sus estudios en Matemáticas a pesar de que su marido no tenía ningún conocimiento científico y no le gustaban las mujeres sabias. La pareja vivió en Londres. Samuel murió pronto, en 1807, a los tres años de matrimonio, y Mary se encontró viuda, con dos hijos pequeños y con independencia familiar y económica. Pudo continuar sola su educación matemática. Por primera vez era libre para conducir su vida, sin el control de padres y esposo. En aquella época ganó una medalla de plata por la solución de un problema sobre las ecuaciones diofánticas en el *Mathematical repository* de W. Wallace. Sus amigos la animaron a que siguiera estudiando. Adquirió un buen número de libros recomendados por un profesor amigo. Se levantaba temprano, y estudiaba o escribía durante horas para poder estar luego disponible para la familia, las amistades o los compromisos sociales que tuviera. Poco después ya leía los *Principia* de Newton.

En 1812, con 32 años, volvió a casarse con el Dr. William Somerville, su primo, de profesión médico, hijo de aquel tío que de joven la ayudó, apoyó y alentó en sus trabajos, y que compartió su interés por la ciencia. Era un hombre de gran inteligencia y poca ambición personal. Estaba orgulloso de los éxitos y la fama de Mary. Fue un matrimonio duradero y feliz. Su marido, en su condición de hombre, podía usar la biblioteca de la Real Sociedad en beneficio de Mary, le presentaba a científicos importantes, y cuando ya era famosa la ayudó a editar sus libros. Dice Ch. Lyell: «Si nuestra amiga la señora Somerville se hubiera casado con Laplace, o con un matemático, nunca habríamos oído hablar de su trabajo. Lo habría fundido con el de su marido, presentándolo como si fuera de él».

En efecto, como dice Ch. Lyell, Mary no sólo tuvo la suerte de contar con la admiración y el apoyo de su esposo sino además el hecho de que éste no fuese matemático. La obra de otras mujeres ha quedado ligada a la de personajes masculinos de su familia como a su padre en el caso de Hipatia, a la de su hermano en el caso de Caroline Herschel, o a la obra de su marido, en el de Grace Crisholm Young, lo que hace muy difícil reconocer y distinguir cuáles han sido las aportaciones de ellas.

Las instituciones científicas

A las mujeres les estaba vetado el paso a la universidad y otras instituciones científicas donde, por otro lado, se encontraban las bibliotecas, de esta forma se les negaba el acceso al conocimiento.

Gracias a las reuniones sociales a las que invitaban a personas notables por sus trabajos científicos, los salones de los Somerville se convertían en punto de encuentro del saber del momento.

Mary admiraba las máquinas de calcular de Charles Babbage y fue la mentora de la joven Ada Byron. Visitaban el observatorio de los Herschel. Conocían a los más grandes científicos de la época. Los amigos les enviaban libros y trabajos científicos, les invitaban a conferencias y realizaban experimentos para ellos.

Su obra

La vida de Mary coincide con la Revolución Industrial, y en esa época existe un hondo interés por la ciencia. Mary se interesó por el magnetismo y en lo que se podría considerar un antecedente de la fotografía, observando el grado de decoloración que se producía en una hoja de papel recubierta por cloruro de plata al ser expuesta a la luz. Fue llamada a su muerte por el *London Post* «La Reina de las Ciencias del siglo XIX». Queremos advertir que en su época todas las ciencias, y entre ellas la física y las matemáticas, no estaban separadas como hoy. Podemos considerarla la última gran mujer «científica». Pronto se licenciarían separadamente biólogos, ingenieros en computación, físicos nucleares, etc. y ya nunca aparecerían importantes descubrimientos científicos estudiados por aficionados.

El 27 de marzo de 1827, lord Henry Brougham, presidente de la Cámara de los Lores, escribió a su marido pidiéndole que convenciera a Mary para que escribiera una traducción de la *Mecánica Celeste* de Laplace para su «Biblioteca de Conocimientos Útiles», dirigida a personas no instruidas. (Es curioso que en ese tiempo, y a pesar de que Mary era ya muy conocida, toda la correspondencia que le enviaban fuera dirigida a su marido.) Mary vacilaba, pero decidió hacerlo con la condición de que se mantuviera el proyecto en secreto, y con el compromiso de que su manuscrito fuese quemado si no se consideraba aceptable. Con una organización excepcional, sin renunciar a su vida social y doméstica, trabajó en su libro e hizo frente a todas las dificultades durante cuatro años. Escribió en su autobiografía: «Frecuentemente abandonaba mi trabajo tan pronto como me anunciaban una visita, para que nadie pudiera descubrir mi secreto». «Un hombre siempre puede tener el control de su tiempo alegando que tiene negocios, a una mujer no se le permite tal excusa». (Alic, 199: 217).

Mary tradujo a Laplace, pero su obra fue mucho más que una simple traducción ya que por un lado añadía comentarios simples y claros que permitían la comprensión por parte de personas no iniciadas y por otro incorporaba opiniones independientes e interesantes para las personas expertas.

En la *Mecánica Celeste* Laplace estudiaba el sistema solar y observaba los cometas, satélites y planetas, utilizando la teoría de la gravitación de Newton. Para darnos cuenta de la dificultad de esta obra, en 1808, John Playfair comentaba que en Gran Bretaña apenas había una docena de matemáticos capaces de siquiera leerla. Era una obra larga y compleja.

Mary tradujo a Laplace, pero su obra fue mucho más que una simple traducción ya que por un lado añadía comentarios simples y claros que permitían la comprensión por parte de personas no iniciadas y por otro incorporaba opiniones independientes e interesantes para las personas expertas. En su amplia *Preliminary Dissertation* están incluidas todas las Matemáticas necesarias para poder comprender la obra de Laplace, una historia del tema y explicaciones del trabajo de Laplace con dibujos, diagramas y comprobaciones matemáticas de la propia Mary. Posteriormente estas *Disertaciones* fueron reimpresas y vendidas por separado. Fue durante el resto del siglo un texto clave en matemáticas avanzadas y astronomía. Esto es lo que al principio comentábamos. Una obra difícil es puesta por esta mujer al alcance de la comprensión de otras personas. Así avanza la ciencia.

Su obra se publicó en 1831 con el título *Mechanism of the Heavens*. Pero no en la colección de divulgación «Biblioteca de Conocimientos Útiles», ya que Brougham la juzgó demasiado larga y complicada, sino por J. Murray, que imprimió sólo 750 ejemplares pues no esperaba que se vendiera demasiado. Sin embargo fue muy alabada, y tuvo gran éxito económico.

Mary se había acostumbrado a escribir. Publicó en 1834 *The Connexion of the Physical Sciences*, libro que trataba diversos temas y en el que explicaba siempre con gran claridad cualquier fenómeno por complejo que este fuese, aunque nunca sacrificaba por ello la precisión. Incluía en este libro los bellos diagramas de los experimentos de Chladny con placas vibratorias, (fenómeno del que también se había ocupado Sofía Germain). Para poder escribirlo hubo de estudiar, consultar e investigar a muy distintos autores. Tuvo aún más éxito. *The Athenaeum* opinaba que «el libro era "delicioso" y, con excepción de los tratados de sir J. Herschel, la obra de ciencia más valiosa y más agradable que se ha publicado en el transcurso del siglo».

El 13 de febrero de 1835 fue nombrada, junto con Carolina Herschel, miembro honorífico de la Real Sociedad de Astronomía. Fueron las primeras mujeres que tuvieron este nombramiento y durante muchos otros años fueron las únicas. A pesar del nombramiento Mary consideraba, y con razón, que no tenía derecho a visitar la Sociedad si no recibía una invitación especial. La reina Victoria le concedió una pensión anual de 200 libras esterlinas, aumentada dos años más tarde a 300 libras (Eychenne, 1993). Por fin, como ella comentaba, era feliz al poder disponer de dinero e independencia económica para comprar por sí misma los libros que necesitaba para continuar estudiando.

Continuó estudiando matemáticas con ¡92 años! Sus últimos escritos muestran gran maestría en la investigación matemática. Poco antes de morir escribió: «Tengo 92 años, [...], mi memoria para los acontecimientos ordinarios y especialmente para los nombres de las personas es débil, pero no para las Matemáticas o las experiencias científicas. Soy todavía capaz de leer libros de Álgebra superior durante cuatro o cinco horas por la mañana, e incluso de resolver problemas».

La dificultad de compaginar «sus labores» con el trabajo científico

Nuestra Mary era considerada una heroína en los círculos científicos y feministas, donde sus contemporáneos insistían en su feminidad. J. G, Children escribe: «...dejando al propio tiempo un registro imperecedero de la perfecta compatibilidad entre el cumplimiento ejemplar de las tareas más suaves de la vida doméstica y las más profundas investigaciones en filosofía matemática» (Alic, 1991: 213). No obstante, ella en su vejez escribió: «La edad no ha menguado mi celo por la emancipación de mi sexo frente al prejuicio irracional que prevalece demasiado en Gran Bretaña en contra de una educación literaria y científica para las mujeres» (Somerville, 1873: 345). Siempre organizó su tiempo de forma que fuesen compatibles sus obligaciones domésticas y sociales con su trabajo como investigadora. Quizás en esto radicó su éxito: nunca se desvió de la conducta socialmente aceptada para una mujer. Sin embargo, no pudo librarse de que en alguna ocasión se la tratara de loca y de excéntrica, pidiéndola que fuese «una mujer respetable».

Hemos querido utilizar la vida y la obra de Mary para hacer hincapié en una serie de elementos comunes que se repiten y que pensamos han influido para que las mujeres no hayan entrado en la historia con la justicia que les hubiera correspondido.

El problema del nombre

Se cuenta que, un día, cuando Laplace estaba cenando con los Somerville en 1817 afirmó ingenuamente: «He escrito libros que nadie puede leer. Sólo dos mujeres han leído la *Mecánica Celeste*; ambas son escocesas: la señora Greig y usted», pues Laplace no conocía el nombre del primer marido de Mary: Samuel Greig.

Observemos cómo algunas mujeres, al perder su apellido al casarse, pueden tener dos o tres nombres distintos a lo largo de su vida. Si a esto sumamos el frecuente uso de seudónimos masculinos como el de M. Le Blanc utilizado por Sophie Germain, o el firmar sus trabajos únicamente con sus iniciales como Ada Lovelace, añadimos una dificultad aún mayor al querer recuperarlas para la historia.

Hemos querido utilizar la vida y la obra de Mary para hacer hincapié en una serie de elementos comunes que se repiten y que pensamos han influido para que las mujeres no hayan entrado en la historia con la justicia que les hubiera correspondido. Hemos mencionado:

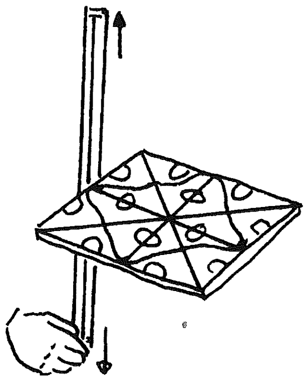
- El problema de la educación, ya que muchas mujeres no han tenido acceso a ella a lo largo de la historia. Algunas, muy pocas, han recibido una instrucción cuidadosamente planificada, pero a la mayoría trataron de impedirles el acceso al conocimiento y en especial al conocimiento científico.
- Unas estudiaron en casa bajo supervisión de un tutor. Pocas tuvieron acceso a las instituciones educativas, no les dejaban entrar en la Universidad, y las que lo hicieron se encontraron con una oposición cerril e irracional, no dejando que pudieran ganarse la vida de un modo independiente.
- Muchas debieron compaginar «sus labores» con el trabajo científico.

- En sus publicaciones, el uso de iniciales, de un seudónimo masculino o la firma en nombre del esposo, no garantiza el reconocimiento de la autoría de estas mujeres.
- A muchas, la historia las recuerda por alguna anécdota sobre su vida o sobre su muerte en lugar de reconocer sus méritos científicos.

Figuras de arena musicales

Las figuras de arena musicales de Chladny están directamente relacionadas con la vibración de una membrana sobre la que hemos extendido una cierta cantidad de arena.

Pasamos el arco de un violín por el lateral de la placa hacia arriba y hacia abajo, y sorprendentemente la arena va disponiéndose de tal manera que aparecen diferentes figuras geométricas sobre la placa.

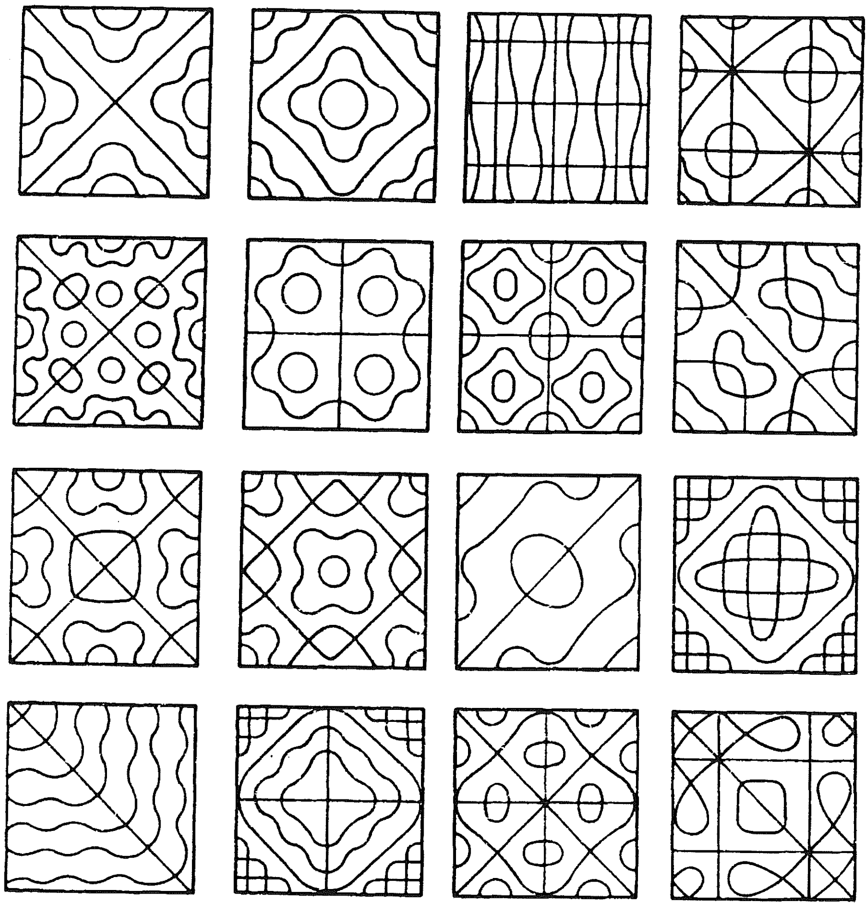


Generación de los diagramas

Actividad 1. Diagramas

Las preguntas que planteamos en esta actividad son las siguientes:

- ¿Por qué sucede esto?
- Una vez que la arena se ha depositado y formado una determinada figura, ¿se mantiene estacionaria pese a nuevos pases con el arco del violín?
- ¿Por qué con el mismo movimiento del arco sobre una placa con arena y otra con un polvo muy fino se obtienen figuras diferentes? Aún más, si mezclamos la arena y el polvo antes de extenderlos sobre la placa, observaremos que tras pasar el arco, se separan para formar sus figuras particulares (las mismas que habían aparecido al hacer el experimento por separado).



Figuras de arena musicales de Chladny. Estos diagramas aparecen publicados en *On the Connexion of the Physical Sciences,* libro escrito por Mary Fairfax Somerville.

Lo que hacemos al pasar el arco es producir una vibración en la placa o membrana. Tanto la figura que se obtendrá como las amplitudes máxima y mínima dependen de la forma de la placa y de su marco o puntos de apoyo que hayamos elegido para mantenerla sujeta, que serán puntos de amplitud cero. En estos puntos no se producirá ninguna oscilación. En nuestro caso consideramos membranas cuadradas cuyo borde está sujeto y no puede moverse. Mientras deslizamos el arco por el borde de la placa, la arena que se encontraba en lugares de amplitud máxima se mueve a lugares de amplitud menor y se acumula en los puntos que no se mueven, o líneas nodales, formando las diferentes muestras.

En el caso del polvo sucede exactamente lo mismo, aunque en este caso hay que tener en cuenta la influencia de las corrientes de aire que se producen con la vibración de la placa. Estas corrientes se dirigen siempre desde los lugares de mínima amplitud a los de máxima, y desde allí hacia arriba, de manera que el polvo es «transportado» por las corrientes de aire hasta los lugares de máxima amplitud y cuando finalizamos el movimiento del arco, se deposita allí.

La justificación matemática de este hecho comienza con la ecuación de vibraciones en el plano y para el caso de membranas circulares, que simplifican mucho el trabajo, se relaciona con las ecuaciones de Bessel. Intentaremos dar una explicación lo más accesible posible a este hecho.

Se basa en resolver el problema de una membrana vibrante y determinar una solución u(x, y, t) de la ecuación bidimensional de onda: $u_{tt} = \Delta u$ que satisfaga la condición de frontera $u = 0$ sobre el borde de la membrana y unas condiciones iniciales de desplazamiento inicial y velocidad inicial. Se aplica el método de separación de variables y teniendo en cuenta las condiciones de frontera se obtiene una ecuación diferencial ordinaria y una ecuación diferencial parcial. Para resolver ésta, de nuevo se aplica el método de separación de variables con lo que se obtiene la solución general como desarrollo de una doble serie de Fourier de funciones de la forma:

$$u(x,y,t) = (B_{mm} \cos \lambda_{mn} t + B^{*}_{mn} \operatorname{sen} \lambda_{mn} t) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

de frecuencia $\lambda_{mn}/2\pi$. Los coeficientes B_{mn} y B^{*}_{mn} son constantes que se obtienen como integrales dobles teniendo en cuenta las condiciones iniciales.

Nos interesa fijarnos en las *líneas nodales* o curvas de puntos de la membrana que no se muevan. Por ejemplo, si consideramos una membrana cuadrada con a=b=1 las soluciones:

$$u_{12} = \left(B_{12} \cos\left(c\pi\sqrt{5} \cdot t\right) + B^{*}_{12} \operatorname{sen}\left(c\pi\sqrt{5} \cdot t\right)\right) \operatorname{sen} \pi x \operatorname{sen} 2\pi y$$

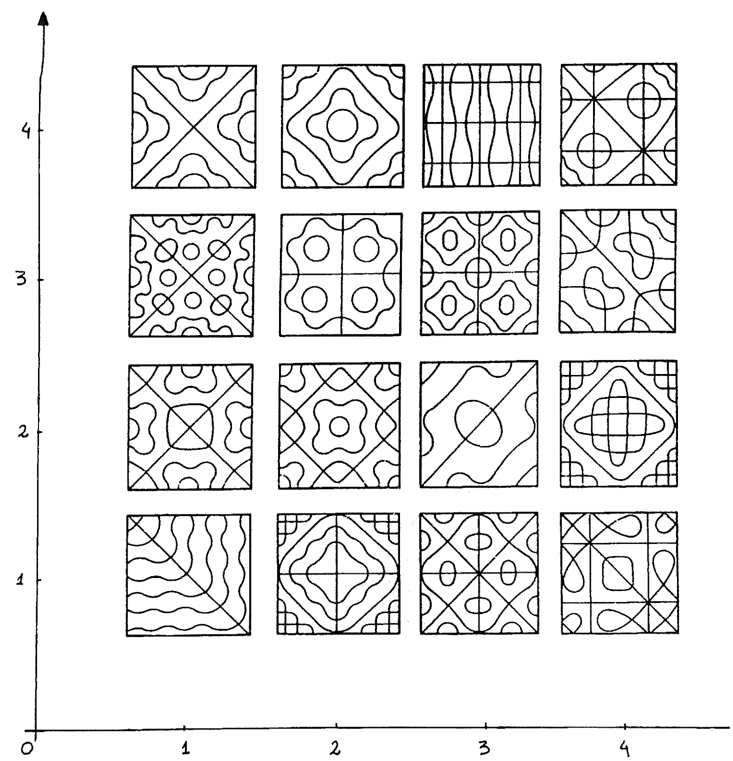
$$u_{21} = \left(B_{21} \cos\left(c\pi\sqrt{5} \cdot t\right) + B^{*}_{21} \operatorname{sen}\left(c\pi\sqrt{5} \cdot t\right)\right) \operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen} \pi y$$

tienen las líneas nodales y=1/2 y x=1/2 respectivamente. (Kreyszig, 1992: 97)

Isometrías en los diagramas de Mary Somerville: Actividades

Actividad 1: Coordenadas

La utilización de coordenadas nos permite referirnos a cada uno de los cuadrados anteriores mediante un par de números. Así, si fijamos el centro en el vértice inferior izquierdo podemos representar cada diagrama mediante sus coordenadas:



Coordenadas

Actividad 2: Espejos y simetrías

Consiste en la búsqueda de simetrías en los diagramas mediante el espejo. Las variaciones de luz que obtenemos a través de las imágenes reflejadas en los espejos nos permiten describir un mundo de simetrías recurrentes. Mediante reflexión óptica podremos obtener los distintos tipos de simetrías a la vez que quedamos sorprendidos por lo mágicos que pueden resultar estos efectos de luz.

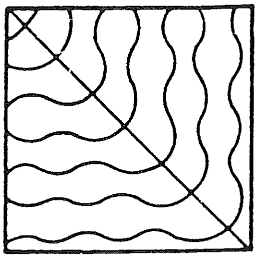
¡IMAGINA!

- ¿Cómo colocarías un espejo en el cuadrado (1, 1) para que veamos exactamente la misma figura?, o lo que es lo mismo ¿cuántos ejes de simetría tiene este cuadrado?
- Haz lo mismo con el resto de los cuadrados. ¿Hay alguno que también tenga un solo eje de simetría? Habrás observado que no. Nuestro cuadrado tiene un grupo de autosimetría D_1 pues sólo tiene un eje de simetría.
- Busca ahora cuadrados que sólo tengan dos ejes de simetrías. ¿Has encontrado alguno? Sitúa en el cuadrado (2, 1) el espejo entre los puntos medios de los lados y las diagonales. Es un ejemplo que te permitirá descartar otros que inicialmente parecen tener sólo dos ejes de simetría.
- Sitúa el espejo en las diagonales de los cuadrados (4, 1), (3, 2) y (4, 4) y en el (3, 4) en los puntos medios de los lados. ¿Qué se observa respecto de sus simetrías? ¿Tienen estos cuadrados centro de simetría? Observa que el cuadrado (1, 1) no lo tiene.
- En el plano se llama simetría central al giro de 180°. Los cuadrados (4, 1), (3, 2), (4, 4) y (3, 4) se transforman en sí mismos, (además de por la identidad), por dos simetrías ortogonales y por un giro de 180°. A su grupo de autosimetría se le llama D_2.

¿Cuántas simetrías presentan el resto de los cuadrados? ¿Puedes identificar sus ejes de simetría? ¿Cuántos son? ¿Quedan invariantes mediante un giro de 90°? Su grupo de autosimetría se llama D_4.

Actividad 3: Del plano al espacio

Imagina que, volando en avioneta, observas en la tierra formas como las de las arenas musicales. ¿A qué podrían corresponder? ¿Edificios? ¿Jardines? ¿Redes viarias? Muchas aves que vuelan a gran altura disfrutan de una imagen de nuestro planeta mucho más bella de la que por desgracia nos muestra a quienes vivimos a ras del suelo.



Cuadrado (1, 1)

Lourdes Figueiras
María Molero
Adela Salvador
Nieves Zuasti
Organización Española para la Coeducación Matemática
Ada Byron

Actividad 4: Libro de espejos

Un libro de espejos se puede construir con dos pequeñas láminas de metacrilato con una cara opaca unidas con cinta de embalar para su mejor manejo, de forma que se consigan distintas aberturas.

- Coloca un libro de espejos abierto en ángulo de 90° sobre cada una de las esquinas del cuadrado (1, 1). ¿Cuál de los resultados obtenidos te gusta más?
- ¿Cómo colocarías el libro abierto 90° sobre cada una de las esquinas del cuadrado (2, 1) para que se vea completo? ¿Y sobre el (4, 1)?
- ¿Con qué otros ángulos puedes colocar el libro de espejos sobre el cuadrado (2, 2) para verlo completo? ¿Valdría un ángulo de 45°?
- Desliza el libro de espejos en diagonal desde los vértices de los cuadrados. Elige el que te ofrezca un resultado más sorprendente o el que consideres más bello y explica tu elección.

Bibliografía

ALIC, M. (1991): *El legado de Hipatia. Historia de las mujeres desde la Antigüedad hasta fines del siglo XIX,* Siglo veintiuno editores, Madrid.

ALSINA, C., C. BURGUÉS y J. Mª FORTUNY, (1988): *Materiales para construir la geometría*, Síntesis, Madrid.

EYCHENNE, E. (1993): *Mathématiciennes, ... des inconnues parmi d'autres,* Brochure de l'IREM de Besançon.

KREYSZIG, E. (1992): *Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol. II,* Limusa. México.

SOMERVILLE, M. (1874): *Personal Recollections of Mary Somerville,* Roberts Brothers, Boston.

SOMERVILLE, M. (1831): *Mechanism of the Heavens*, John Murray, Londres.

SOMERVILLE, M. (1854): *The Connexion of the Physical Sciences*, Harper & Bros, New York.

SOMERVILLE, M. (1873): *Personal recollections, from early life to old age: With selections from her correspondence,* Ed. Martha Somerville, Londres, Murray.

SUMA 25
junio 1997, pp. 53-60

Actividad multisesión con Cabri-Géomètre (La circunferencia de Feuerbach)

Jose María Álvarez Falcón

A la memoria del Prof. Gonzalo Sánchez Vázquez:
Con profundo respeto, dedicado
A quien fue de maestros un maestro
Matemático docto y poeta diestro
Evocando su memoria y su legado

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

Se describe una experiencia dirigida al alumnado del segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO). Se utiliza el programa didáctico de geometría Cabri-Géomètre II. Se toma la circunferencia de Feuerbach o circunferencia de nueve puntos como pretexto para la presentación de varios conceptos elementales de la geometría plana. Finaliza el artículo con unas notas para la evaluación de la actividad.

EL CABRI–GEOMÈTRE II –o, más sencillamente, Cabri– es un programa de enorme utilidad para la didáctica de la Geometría. Aun existiendo versiones posteriores y para otros entornos gráficos (Windows, Mac) se ha utilizado en esta actividad la versión 1.0 para DOS, la más básica de la gama, bien conocida y, por ello, muy fácil de obtener.

Cabri podría definirse como «regla y compás informáticos». Pero es mucho más: comprueba paralelismo y perpendicularidad, efectúa inversiones, calcula distancias y ángulos, etc. y, sobre todo, es esencialmente interactivo; centrado mucho más en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría que en sus contenidos puramente matemáticos y estructurales.

La actividad está pensada para el segundo ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO). Su inclusión en tercer o cuarto curso dependerá solamente de la programación y secuenciación que haya adoptado el Departamento.

Tomamos la circunferencia de Feuerbach como pretexto para la presentación y asimilación de varios conceptos elementales –algunos ya conocidos en este nivel– de la geometría plana. El fin no es, en sí mismo, el estudio de esta circunferencia, más bien es el camino que a ella conduce lo más interesante de esta tarea. Así, conceptos como perpendicularidad, procedimientos como la determinación de una circunferencia por tres puntos no alineados, etc., surgen naturalmente y son fácilmente asimilados mientras se comprueba el famoso teorema (1820) de Brianchon y Poncelet:

> *La circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de un triángulo pasa también por los pies de las perpendiculares y por los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices.*

Curiosamente, esta circunferencia (también llamada, por razones obvias, de los nueve puntos) no se conoce por ninguno de estos nombres propios, sino por el de Feuerbach (1800-1834), en parte por su publicación independiente por éste y por otros descubrimientos igualmente fáciles y sorprendentes:

> *El centro de esta circunferencia es el punto medio del segmento que une el ortocentro con el circuncentro.*

Puede utilizarse el anterior resultado para la evaluación. Se dan más detalles para este proceso en el apartado: Notas para la evaluación.

El guión propuesto para el desarrollo se divide en tres columnas:

1. La primera contiene la «acción» que hay que efectuar directamente con la barra de botones de Cabri. Todas estas acciones son inmediatas y se enumeran más adelante en esta misma introducción.
2. La segunda columna especifica los conceptos involucrados y las implicaciones de las acciones anteriores. Forman el núcleo de la actividad y deben presentarse y discutirse hasta su completa asimilación. Esto es de gran importancia por cuanto es precisamente esta presentación y discusión la que proporcionará la actividad directa por parte del alumno y que, a su vez, posibilitará la asimilación y comprensión de los conceptos y procedimientos que se enumeran en esta columna.
3. La tercera contiene sugerencias didácticas y posibles exploraciones y actividades complementarias que pueden realizarse.

No cabe pensar en esta actividad como «utópica», como a menudo se ha tildado a este tipo de actividades que requieren de material informático. El programa en sí, como ya se ha apuntado, es de muy fácil obtención y debería formar parte de la biblioteca de software de todo Departamento de Matemáticas; es de inmediata utilización, muy versátil, potente y enormemente didáctico. Sus requerimientos de sistema son mínimos, ampliamente rebasados por cualquier ordenador actual de tipo medio o incluso básico. Por otra parte, el aula de informática de los institutos de enseñanza secundaria tiene –debería tener– diez ordenadores con capacidades más que suficientes para ejecutar Cabri. Los treinta alumnos por aula en ESO proporcionan tres alumnos por ordenador, situación que, si bien no es la óptima, sí que permite una fructífera realización de esta práctica. Además, la actividad está pensada para ser desarrollada en varias sesiones. Dado que un mínimo de tres sesiones serán necesarias para conducir al resultado final, los alumnos pueden rotarse en el manejo directo del ordenador. En cualquier caso, se deja al docente la temporalización final, pues depende en gran parte de la realización de algunas actividades de ampliación y complementarias que se sugieren en la tercera columna de la ficha de trabajo que sigue a esta introducción. Sería conveniente, además, una sesión preliminar para que los alumnos se familiaricen un poco con el programa.

No cabe pensar en esta actividad como «utópica», como a menudo se ha tildado a este tipo de actividades que requieren de material informático.

En particular, los alumnos deberían ser capaces, tras esta toma de contacto, de:

- Dibujar puntos cualesquiera en el plano.
- Trazar el segmento que une dos puntos.
- Marcar el punto medio de un segmento.
- Dibujar la mediatriz de un segmento.
- Dibujar la circunferencia con centro dado y tomando otro punto para la medida del radio.
- Trazar perpendiculares a un segmento por un punto exterior.
- Poner –y situar correctamente en sitio legible– letras (etiquetas) a elementos dibujados.
- Cambiar el color de los elementos dibujados.
- Conocer la facilidad de «pinchar y arrastar» elementos previamente dibujados.
- Comprobar paralelismo.
- Medir segmentos.
- Borrar determinados elementos.

(Estos tres últimos puntos sólo son necesarios si se decide explorar la ampliación: Teorema de la Paralela Media. -Ver ficha de trabajo.)

Todas estas acciones se realizan de forma automática y facilísimamente, pues vienen incorporadas en la barra de botones de Cabri.

Por último, y como en toda actividad de este tipo, se aconseja que el docente se familiarice –si no lo está ya– con el programa y realice previamente todos los pasos propuestos en la ficha que sigue.

ACCIONES	CONCEPTOS E IMPLICACIONES	SUGERENCIAS Y NOTAS
• Dibujamos (y etiquetamos) tres puntos cualesquiera A, B, C, en la zona de trabajo.	• Puntos en el plano.	• Recordar el concepto intuitivo de punto en plano. • Utilizar la facilidad para mover objetos para situar en sitio adecuado y legible las etiquetas identificativas de los elementos señalados (en este caso A, B, C).
• Formamos un triángulo uniendo dichos puntos.	• Segmentos. Vértices y lados de un triángulo. Determinación de un segmento por dos puntos en el plano.	• Ampliación: Dos puntos determinan una recta en el plano, ¿cuántos determinan un plano en el espacio? ¿Por qué trípodes en vez de mesas de cuatro patas?
• Marcamos los puntos medios de los lados. Sean M, N, R. Construimos los segmentos MN y NR.	• Punto medio de un segmento. Equidistancia.	• Ampliación: Construcción del punto medio de un segmento con regla y compás.
• Trazamos las mediatrices (perpendicular por el punto medio).	• Perpendicularidad de rectas. Mediatriz de un segmento.	• Ampliación: Construcción de la mediatriz de un segmento con regla y compás (básicamente se habría hecho antes, al hallar el punto medio del segmento con estas mismas herramientas).
• Marcamos el punto de intersección O.	• Intersección de dos rectas. (Paralelismo de rectas).	• Ampliación: Con las opciones incorporadas en Cabri, para comprobar paralelismo y medición de distancias es muy fácil comprobar el teorema de la paralela media (compruébese que, por ejemplo, el segmento MN es paralelo al lado BC y que MN mide la mitad que BC. Figura 1).
• Construimos una circunferencia de centro O y radio (por ejemplo) ON.	• Circunferencia. Centro y radio. Cuerdas. Determinación de una circunferencia por tres puntos. Centro como intersección de las mediatrices de las cuerdas. Perpendicularidad de cuerdas y radios (diámetros).	• Es conveniente cambiar a colores más claros los elementos auxiliares. Aunque Cabri tiene la posibilidad de ocultar elementos, si utilizamos colores claros para éstos seguimos viendo en cada momento la construcción sin perder legibilidad en el dibujo que se va formando. Por contra, marcaremos con negro la circunferencia obtenida, pues es ya la circunferencia de Feuerbach. Llamaremos la atención del alumno comprobando que los seis puntos restantes que determinaremos pertenecen necesariamente a esta circunferencia. (Ver nota final).
• Trazamos las tres alturas y marcamos los pies de éstas como S, T, U. Marcamos el ortocentro H.	• Alturas de un triángulo: perpendicular por un vértice al lado opuesto. Pies de las alturas. Concurrencia de rectas. Ortocentro. Pertenencia de un punto a una circunferencia. Puntos interiores y exteriores a una circunferencia. Círculo y circunferencia.	• Obviamente estos pies pertenecen a la circunferencia de Feuerbach. Se propone una pequeña discusión tras determinar el primer pie: ¿es casualidad? ¿será siempre así? Tras determinar los otros dos debería concluirse que pertenecen siempre. Otra posibilidad es mover un vértice cualquiera (que arrastra toda la construcción) y comprobar que siguen estando sobre la circunferencia. (Ver nota final). • Ampliación: Las mediatrices de las cuerdas (figura 3) son paralelas a las alturas ¿siempre? ¿por qué?
• Marcamos los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro H con cada uno de los vértices A, B, C.	• Afianzamos conceptos: segmento. Ortocentro. Alturas. Vértices. Puntos medios. Pertenencia,...	• Para marcar el punto medio de un segmento que está sobre una recta (por ejemplo, el segmento AH está sobre la recta que contiene a la altura que pasa por A) hay que definir previamente dicho segmento a partir de sus extremos. En la figura 4 se dibujan con línea discontinua, tras definirlos por sus extremos AH, BH y CH.

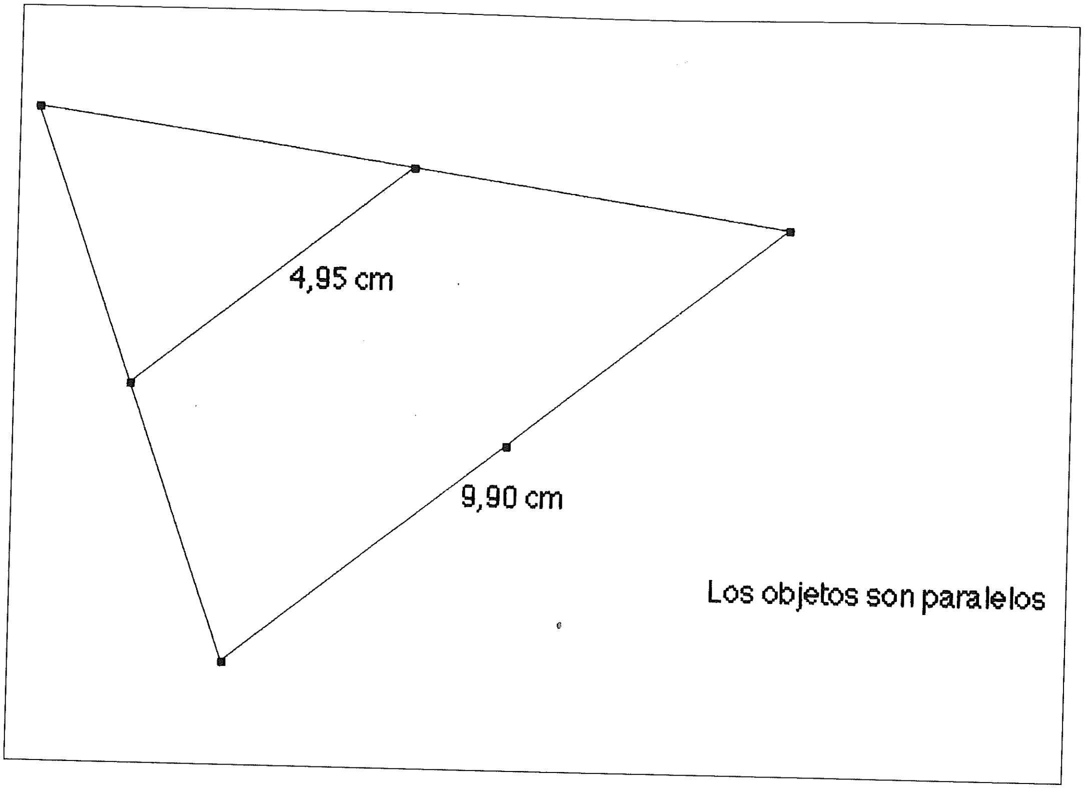


Figura 1

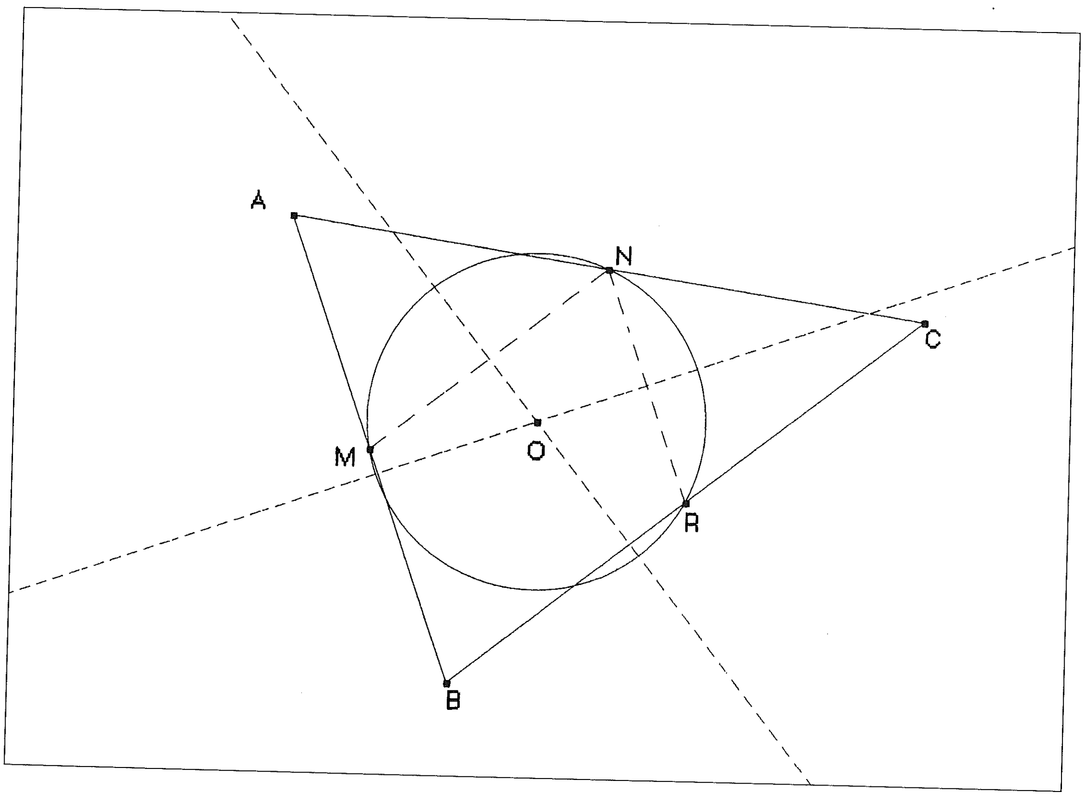


Figura 2

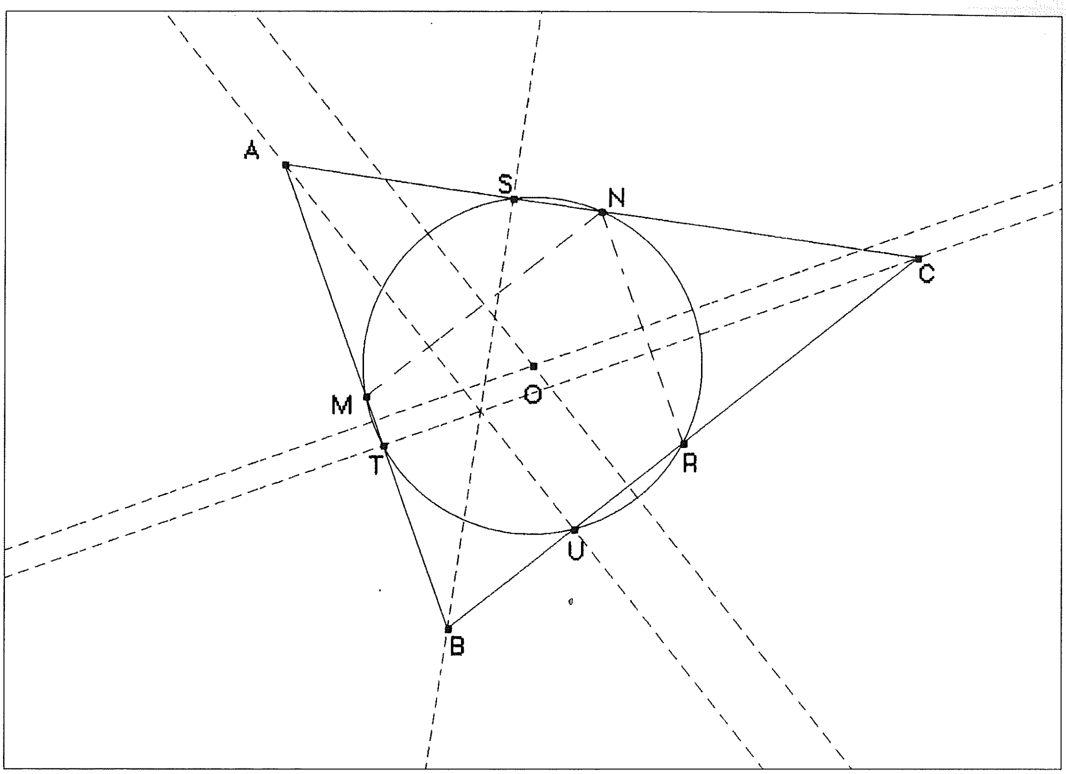


Figura 3

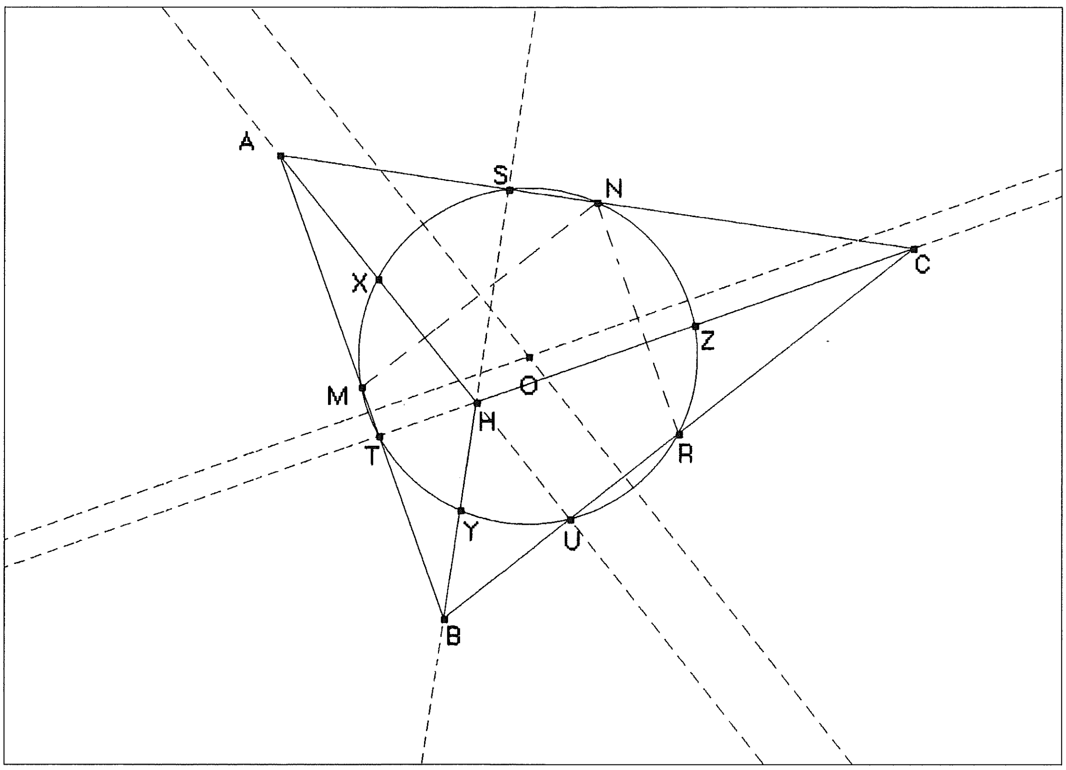


Figura 4

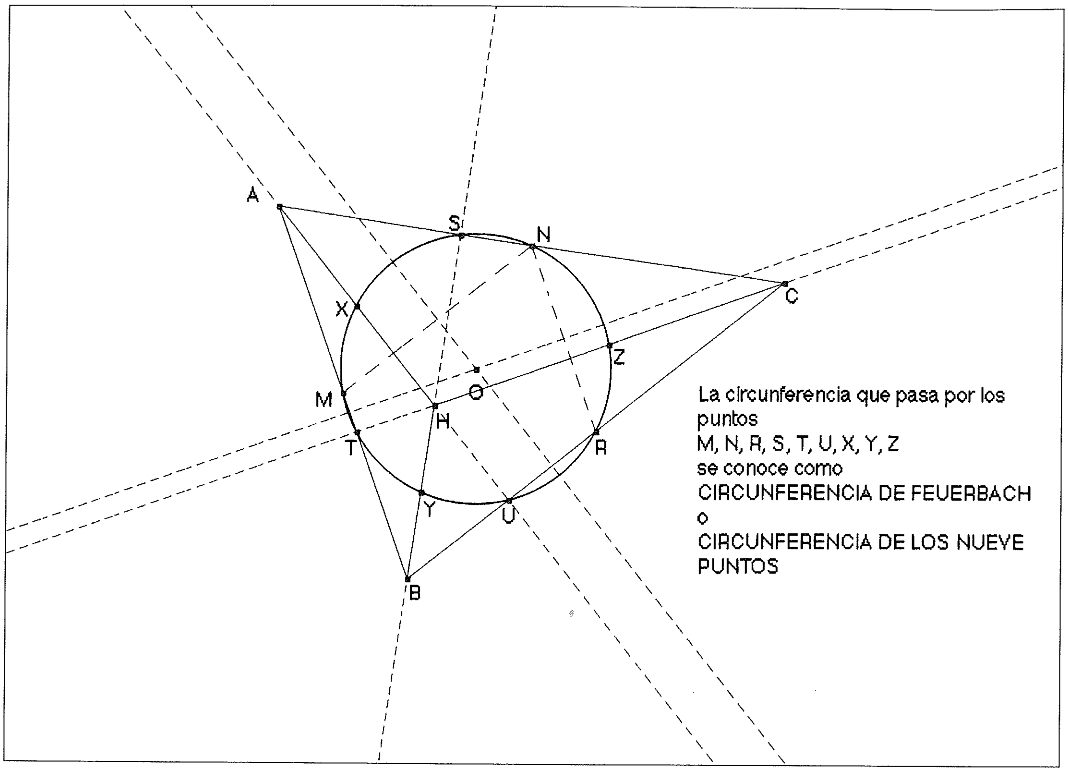


Figura 5

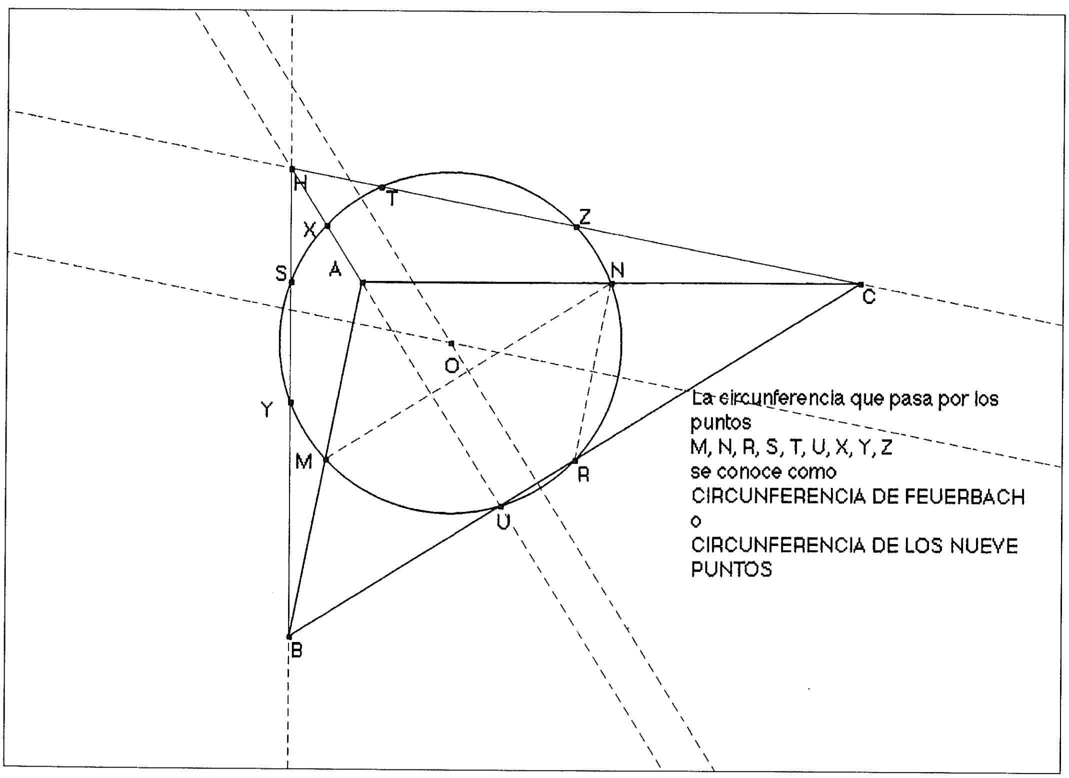


Figura 6

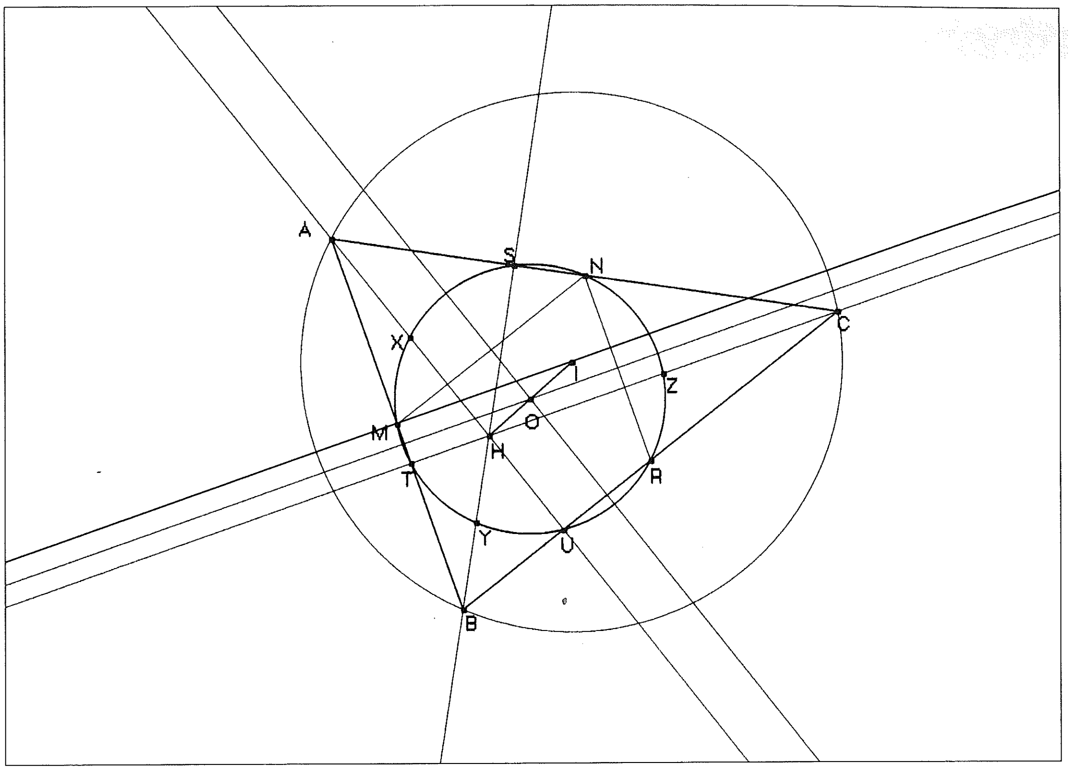


Figura 7

Nota final

Al arrastrar con el ratón uno o más vértices sucesivamente, se irán formando otros triángulos arbitrarios que mantienen la construcción completa anterior. Es un proceso muy ilustrativo para comprobar que, cualquiera que sea el triángulo, los nueve puntos siguientes:

- los tres puntos medios de los lados;
- los tres pies de las alturas;
- y los tres puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices

están siempre sobre una circunferencia, así llamada de los nueve puntos o circunferencia de Feuerbach.

En la figura 5 se tiene el resultado final de la construcción inicial, con la circunferencia en trazo grueso. La figura 6 se ha obtenido arrastrando los vértices. Obsérvese que, al ser el triángulo resultante obtuso, el ortocentro cae «fuera» de este nuevo triángulo.

Notas para la evaluación

La evaluación de esta actividad puede realizarse a partir de cuatro fuentes de información. La primera de ellas se llevaría a cabo *in situ*, durante el desarrollo de la misma. En la segunda, también en el aula de informática, podrían proponerse actividades complementarias que hagan uso de las facilidades previamente utilizadas o incluso investigar nuevas posibilidades del programa. La tercera, ya en el aula habitual, podría ser una prueba escrita donde se comprueben el conocimiento y la asimilación de los conceptos y procedimientos que hayan ido surgiendo en el desarrollo de la actividad. Por último, puede encargarse a cada uno de los grupos de alumnos que trabajen conjuntamente la realización de un «diario» de sesiones, donde se recojan los diferentes pasos que vayan haciéndose.

Desarrollamos brevemente cada una de estas posibilidades:

1. Como se indicó en la introducción, las actuales circunstancias condicionan el uso del ordenador a tres alumnos por puesto de trabajo. Si se opta por rotar dicho uso, podría tomarse nota de las actitudes y aptitudes de cada uno de ellos. La plantilla que proporcionan la mayoría de los «Cuadernos del Profesor» sirve perfectamente al efecto. Si se desea información

más detallada, no es difícil construir una plantilla, a partir de la lista de clase, donde recoger cuantas notas se consideren adecuadas.

2. Utilizando exclusivamente comandos previamente utilizados en el desarrollo del guión anterior puede comprobarse el segundo teorema enunciado en la introducción: «El centro de la circunferencia de Feuerbach es el punto medio entre el ortocentro y el circuncentro».

   En efecto, el ortocentro ha sido ya marcado, el circuncentro es el punto de corte de las mediatrices de los lados (centro de la circunferencia que contiene a los tres vértices) y se sabe cómo marcar segmentos y señalar su punto medio (ver figura 7). La determinación del baricentro es igualmente inmediata.

   Investigando nuevas posibilidades pueden proponerse otras tareas. Así, por ejemplo, la posibilidad de dibujar la bisectriz de un ángulo permite obtener el incentro del triángulo e introducir de este modo nuevos conceptos: bisectriz, incentro, tangencia de circunferencias y rectas, etc. Las posibilidades, como se ve, son prácticamente ilimitadas.

3. La prueba escrita ha tenido y seguirá teniendo su papel importante en la evaluación. La forma queda, como es natural, a criterio del docente: pruebas cortas, tipo test, desarrollo de alguna parte de la actividad, etc. Ejemplos de preguntas cortas pueden ser: ¿Cómo definirías el punto medio de un segmento? ¿Cuántas alturas tiene un triángulo? ¿Siempre se cortan las tres en un punto? ¿Cómo tiene que ser el triángulo para que este punto esté fuera de él?, etc. Preguntas de desarrollo más formal (y más difíciles, ya que requieren de una concatenación de procesos que puede no haberse asimilado aún en su conjunto, aun cuando cada uno de ellos por separado si se haya comprendido) serían: ¿Cómo encontrarías el ortocentro de un triángulo? ¿Cómo encontrarías –sin medir– el punto medio de un segmento?, etc.

4. Elaboración de un cuaderno de trabajo. Si se opta por esta práctica –muy aconsejable, por lo demás–, hay que hacerlo saber previamente a los alumnos para que se repartan las tareas de tomar notas, hacer esquemas de lo que va apareciendo en pantalla, etc. La evaluación de este cuaderno de trabajo se haría de acuerdo a consideraciones habituales de orden, limpieza, claridad de contenidos y de presentación, completitud de la exposición, adecuación de los dibujos a las representaciones de la pantalla, etcétera.

Finalizamos reiterando que la relativa facilidad de preparación y puesta en práctica, unida a la siempre deseable, por parte del alumnado, utilización de material y procedimientos informáticos hacen de esta actividad una tarea de indudable calidad y de muy positivas consecuencias didácticas en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Nota bibliográfica

Las referencias de «Ayuda» incluidas en el programa Cabri permiten, dada la simplicidad de su manejo, su utilización de forma casi inmediata. Por otra parte, los contenidos geométricos de la actividad son de sobra conocidos y están suficientemente detallados en cualquier texto de este nivel, por lo que obviamos hacer referencia específica a cualquiera de ellos.

José María Álvarez
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
Thales

SUMA 25
junio 1997, pp. 61-70

El lenguaje vectorial en geometría. Los pioneros William Rowan Hamilton y Hermann Günther Grassmann

Víctor Arenzana Hernández

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

A Gonzalo Sánchez Vázquez en recuerdo de su paso por Zaragoza como ponente en las III Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas

El cálculo vectorial apareció en el siglo XIX. Hay operaciones entre vectores tales como el producto escalar que se puede ampliar sin dificultad de espacios de dimensión dos a espacios de dimensión tres y superior. Sin embargo, la ampliación del producto vectorial de vectores de dimensión dos a vectores tridimensionales tuvo serias dificultades. El conocimiento de los pasos lógicos que tuvieron que dar Hamilton y Grassmann para sentar las bases del cálculo vectorial en de gran importancia pedagógica para profundizar en el concepto de operación.

LA geometría actual está expresada, en buena medida, en términos vectoriales. Nociones como las de producto escalar, producto vectorial, vector tangente, gradiente de un campo escalar o flujo de un campo de fuerzas son básicas para expresar teoremas geométricos y resultados científicos. Las trasformaciones y movimientos geométricos no solamente tienen su ecuación sino que una operación con vectores puede representar un movimiento en el plano o en el espacio.

El conocimiento de las dificultades por las que atravesó el cálculo vectorial para formar parte del lenguaje científico es un hecho de indudable interés pedagógico, ya que permite profundizar en cuestiones de importancia tan capital como:

a) El paso de la transformación geométrica a una operación de carácter algebraico.

b) La dificultad de extender algunas operaciones definidas entre vectores en el plano al espacio.

c) Conocer el modo como dos grandes matemáticos, Hamilton y Grassmann, pudieron sentar las bases de un nuevo cálculo.

En el proceso del descubrimiento del cálculo vectorial hubo dos tendencias claramente diferenciadas que podemos personalizar en la obra de los dos autores más representativos de cada tendencia William Rowan Hamilton (1805-1865) y Hermann Günther Grassmann (1808-1877).

El primero estudió el cálculo vectorial como extensión al espacio de las propiedades de las operaciones de los números complejos. En especial buscaba una generalización de los números complejos al espacio que mantuviera las mismas propiedades operativas y geométricas. Mientras que Grassmann definió el producto de magnitudes en el espacio a partir de propiedades geométricas de un determinado producto que era parecido al producto vectorial y que representaba áreas orientadas.

Paso de la transformación geométrica a una operación de carácter algebraico

La geometría ha sufrido a lo largo de su historia notables cambios en el modo de expresar sus teoremas. Si se abre un libro de geometría clásica se encontrará plagado de figuras, mientras que se puede abrir otro libro de geometría en el que no se encuentre ninguna. Desde los teoremas que aparecen en los *Elementos* de Euclides hasta los resultados recogidos en *Geometric Algebra* de Artin hay, además de veintitrés siglos de diferencia, un cambio de lenguaje tan grande en el modo de escribir la geometría como el que existe entre el griego de Homero y el inglés de Russell en el que están escritas respectivamente ambas obras. El cambio producido fue gradual y, en ocasiones, no puede determinarse con exactitud el momento en el que cada nuevo concepto se incorporó a la geometría, pero intentaremos hacer un esbozo de las ideas más importantes que se han incorporado al cuerpo de la geometría a lo largo de la historia.

El paso de una geometría a otra presenta ejemplos realmente interesantes para la formación matemática de los estudiantes de enseñanza media ya que permiten apreciar, partiendo de un problema de medida, que se puede llegar a definir una operación que permite realizar esa medida y generalizar el resultado.

La geometría analítica

La geometría griega fue establecida como una ciencia definitiva por Euclides en sus *Elementos*. Se dejó de cultivar a lo largo de la Edad Media, período en que esta ciencia tuvo escasas aportaciones. No obstante, en la Edad Media se perfeccionaron algunos cálculos aritméticos y en el Renacimiento se descubrieron métodos para resolver ecuaciones algebraicas y el cálculo literal, que iban a ser de vital importancia para el desarrollo posterior de la geometría.

Los griegos tenían una aritmética basada en la geometría. Mediante construcciones geométricas elaboraron un método de cálculo, a partir de las definiciones de suma, producto, diferencia, cociente y extracción de raíces cuadradas desarrollando un método de cálculo que, con el paso del tiempo, se ha llamado álgebra geométrica, que permitía sumar áreas, segmentos, cálculo de raíces cuadradas, etc.

Desde los teoremas que aparecen en los Elementos *de Euclides hasta los resultados recogidos en* Geometric Algebra *de Artin hay, además de veintitrés siglos de diferencia, un cambio de lenguaje tan grande en el modo de escribir la geometría como el que existe entre el griego de Homero y el inglés de Russell en el que están escritas respectivamente ambas obras.*

La geometría clásica euclídea y el álgebra aparecida en el renacimiento estaban llamadas a entenderse y, de hecho, se fundieron, gracias a la obra de Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665), en una nueva materia que se llamó geometría analítica. La geometría analítica se vio fuertemente reforzada en su alcance por la aparición del cálculo infinitesimal, que se aplicó al estudio de los problemas geométricos. A lo largo del siglo XVII y el XVIII, los métodos analíticos dominaron el panorama de las matemáticas, hasta tal punto que la geometría euclídea se estudiaba olvidándose del primoroso rigor euclídeo y colocando en su lugar ecuaciones que representaban curvas, pares de números que representaban puntos y utilizando métodos de resolución de ecuaciones al principio, y del cálculo infinitesimal después, como metodología de resolución de problemas geométricos.

La falta de rigor en los fundamentos del cálculo infinitesimal, unido a la dificultad de interpretación de algunos resultados como, por ejemplo, los números complejos que le aparecieron a Leibnitz (1646-1716) al estudiar la intersección de una recta con una esfera, eran inconvenientes que se veían soslayados por los brillantes resultados que se obtenían con el cálculo infinitesimal en todos los campos de la ciencia.

Nuevos métodos analíticos para la geometría del XIX

A finales del siglo XVIII sólo había unos pocos matemáticos que permanecieron ligados a la utilización exclusiva de métodos denominados tradicionalmente geométricos frente a la inmensa mayoría que utilizaba los métodos algebraicos enriquecidos por los métodos infinitesimales.

Entre los primeros están Monge (1746-1818), cuya geometría descriptiva dio paso a la proyectiva de Poncelet (1788-1867) y la llevaron a su culminación matemáticos como Steiner (1793-1863), Chasles (1793-1880) y Staudt (1798-1867) que reconstruyó la geometría proyectiva librándola de contradicciones a partir de unos axiomas que se referían exclusivamente a la posición relativa y no de distancias.

La otra línea, la línea analítica, está representada por autores como Plücker (1801-1868) que utilizó intensivamente en geometría las coordenadas homogéneas, Hamilton (1805-85), tras definir las operaciones con los números complejos como operaciones con parejas de números reales, extendió la operación al espacio con los cuaterniones que se regían por operaciones no conmutativas, Grassmann (1809-77) que en su obra *Die lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844) (La teoría de la extensión lineal, una nueva rama de las matemáticas) sentó los principios del cálculo vectorial y aplicó el cálculo infinitesimal a funciones escalares y vectoriales (la obra de Grassmann era demasiado densa hasta para los especialistas y solamente obtuvo el reconocimiento justo a partir de su edición renovada de 1862 llevada a cabo por los matemáticos Henkel y Schlegel). Clifford (1845-1879) fue, seguramente, el primero en dar una formulación moderna a la definición de los vectores, sus operaciones y los productos escalar y vectorial en sus *Elements of Dynamics*. En todo caso se puede afirmar que los métodos vectoriales se impusieron en la geometría entre 1830 y 1880 y que fue una obra colosal en la que estaba empeñada la comunidad matemática anglosajona. El uso del cálculo vectorial propició el desarrollo del análisis con varias variables dando lugar a la aparición de la geometría diferencial, al análisis vectorial y proporcionó un método analítico de gran potencia para el estudio de la geometría.

El uso del cálculo vectorial propició el desarrollo del análisis con varias variables dando lugar a la aparición de la geometría diferencial, al análisis vectorial y proporcionó un método analítico de gran potencia para el estudio de la geometría.

Nacimiento de la idea de producto escalar

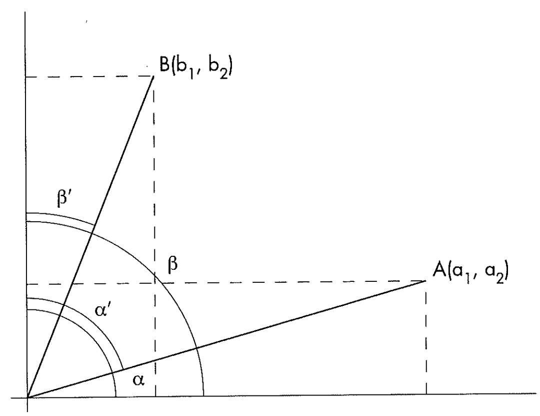
Cuando se trata de calcular el ángulo determinado por dos rectas se puede optar bien por un método puramente geométrico, dado por la geometría descriptiva, o por un método vectorial, utilizando el producto escalar para determinar el coseno del ángulo limitado por ambas rectas tal y como se hace en la geometría analítica en el espacio.

En lo que sigue se dará por supuesto el conocimiento del teorema de Pitágoras, la trigonometría elemental, los teoremas de los senos y del coseno y la representación coordenada de un vector en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ y la representación de un vector determinado por dos puntos. Con ese bagaje estableceremos la medida de ángulos en el plano y en el espacio deduciendo una fórmula común para ambas situaciones que se pueda generalizar a un espacio de dimensión *n* sin dificultad.

Sea el vector de $\mathbb{R}^2$, referido a un sistema de ejes perpendiculares, $OA = \mathbf{a}(a_1, a_2)$. Definiremos *norma* o *módulo* de un vector como la distancia en el plano cartesiano del punto A al origen de coordenadas O:

$$\|OA\| = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Sean ahora los vectores de $\mathbb{R}^2$ $OA = \mathbf{a}(a_1, a_2)$ y $OB = \mathbf{b}(b_1, b_2)$ que forman con los ejes coordenados OX y OY los ángulos α y α' respectivamente. Obsérvese que $\alpha + \alpha' = \pi/2$.



Del gráfico anterior se deduce:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\cos\alpha' = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta' = \frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|}$$

o lo que es igual:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \operatorname{sen}\beta = \frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|}$$

Para determinar el ángulo que forman los vectores **a** y **b** que será α - β en función de las coordenadas de los vectores partiremos de la fórmula trigonométrica:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

y sustituiremos las razones trigonométricas obtenidas anteriormente:

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|}$$

que expresado de otra forma:

$$\|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos(\alpha-\beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

nos permite definir el producto escalar de dos vectores de la siguiente forma:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\| \cos(\alpha-\beta) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Con esta fórmula la determinación del ángulo formado por dos vectores en el plano se puede definir mediante una fórmula algebraica que es la del producto escalar de dos vectores definida como se ha hecho.

¿Cómo podemos definir una operación entre puntos del espacio ordinario que calcule la distancia entre ellos y el ángulo determinado por dos vectores en el espacio ordinario?

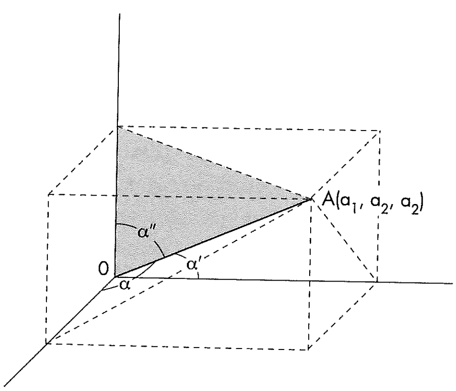
Sea el vector de $\mathbb{R}^3$, referido a un sistema de ejes perpendiculares, OA = a(a_1, a_2, a_3). Definiremos *norma* o *módulo* de un vector como la distancia en el plano cartesiano del punto A al origen de coordenadas O:

$$\|OA\| = \|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Sean ahora los vectores de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

OA = **a**(a_1, a_2 ,a_3) y OB = **b**(b_1, b_2, b_3)

que forman con los ejes coordenados OX, OY, OZ los ángulos α, α' y α'' respectivamente.



Del gráfico anterior se deduce:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta = \frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\cos\alpha' = \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta' = \frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|}$$

$$\cos\alpha'' = \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|} \qquad \cos\beta'' = \frac{b_3}{\|\mathbf{b}\|}$$

Al igual que en $\mathbb{R}^2$, en el espacio $\mathbb{R}^3$ los vectores viene determinados por su norma y los cosenos directores, así

$$a = \|\mathbf{a}\| (\cos\alpha, \cos\alpha', \cos\alpha'')$$

Determinemos el ángulo que forman los vectores OA = **a**(a_1, a_2, a_3) y OB = **b**(b_1, b_2, b_3), que será α – β, en función de las coordenadas de los vectores a partir de la definición de norma y del teorema de coseno.

Dados los puntos A y B se puede definir el vector AB.

En primer lugar calcularemos su norma a partir de la definición:

$$\|AB\|^2 = \|(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)\|^2 =$$

$$= \|(\|\mathbf{b}\|\cos\beta - \|\mathbf{a}\|\cos\alpha, \|\mathbf{b}\|\cos\beta' - \|\mathbf{a}\|\cos\alpha', \|\mathbf{b}\|\cos\beta'' - \|\mathbf{a}\|\cos\alpha'')\|^2 =$$

$$= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta'')$$

Si ahora calculamos la norma de AB utilizando el teorema del coseno se tiene:

$$\|AB\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - 2\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\cos p$$

donde *p* es el ángulo que forman ambos vectores.

De ambas expresiones de la norma de AB es trivial que:

$$\cos p = \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha'\cos\beta' + \cos\alpha''\cos\beta''$$

y sustituiremos las razones trigonométricas obtenidas anteriormente:

$$\cos p = \frac{a_1}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_1}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{a_2}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_2}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{a_3}{\|\mathbf{a}\|}\frac{b_3}{\|\mathbf{b}\|}$$

que expresado de otra forma:

$$\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

nos permite definir el producto escalar de dos vectores de la siguiente manera:

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|\cos p = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Con esta fórmula la determinación del ángulo formado por dos vectores en el espacio se puede definir mediante una fórmula algebraica que es la del producto escalar de dos vectores definida como se ha hecho.

Pasar de calcular la distancia entre dos puntos y el ángulo entre dos rectas por procedimientos puramente geométricos a determinarlas por medio del producto escalar, como una operación entre vectores, aporta una serie de ventajas, ya que proporciona una fórmula unificada para la medida de ángulos, distancias y el estudio de la perpendicularidad. Pero puede transmitir la idea de que la generalización de una operación desde $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ y, finalmente, a $\mathbb{R}^n$ se puede hacer sin dificultad alguna, algo así como si el manejo de vectores permitiera extender cualquier operación definida en $\mathbb{R}^2$ sin más que añadir una coordenada más a un espacio de cualquier dimensión. Nada más lejos de la realidad como veremos a continuación.

Pasar de calcular la distancia entre dos puntos y el ángulo entre dos rectas por procedimientos puramente geométricos a determinarlas por medio del producto escalar, como una operación entre vectores, aporta una serie de ventajas, ya que proporciona una fórmula unificada para la medida de ángulos, distancias y el estudio de la perpendicularidad.

William Rowan Hamilton (1805-1865) y los cuaterniones

Perfil biográfico

Hamilton fue lo que se puede llamar un niño superdotado a los cinco años leía griego, latín y hebreo y a los diez hablaba media docena de lenguas orientales. Estudió en el Trinity College de Dublín y a los veintidós años fue nombrado astrónomo real de Irlanda, Director del Observatorio de Dunsink y profesor de astronomía. Pronto publicó un trabajo sobre sistemas de rayos y el fenómeno de refracción cónica que presentaban ciertos cristales y sus teorías fueron confirmadas experimentalmente por los físicos lo que le proporcionó un gran prestigio, tanto que a los treinta años fue elevado a la nobleza.

En 1833 presentó en la Irich Academy un importante trabajo en el que introducía un álgebra formal de pares de números reales cuyas operaciones definidas entre ellos son las mismas que las de los números complejos. Son las siguientes:

$$(a, b) + (x, y) = (a+x, b+y)$$
$$t(a, b) = (ta, tb)$$
$$(a, b)(x, y) = (ax-by, ay+bx)$$

En este trabajo Hamilton interpretó el producto definido formalmente entre magnitudes orientadas en el plano como un producto en el que intervenía una rotación y se planteó el problema de extender esta operación entre magnitudes orientadas en el plano al espacio. Hamilton sentó las bases de este producto mediante los cuaterniones en 1843 y dedicó los veinte últimos años de su vida al estudio y aplicación de los mismos.

Los números complejos

Los números complejos aparecieron al resolver ecuaciones de grado igual o superior a dos y fueron inicialmente considerados como soluciones extrañas o imposibles, se consideró que aparecían cuando el problema real que representaba la ecuación no tenía sentido. Girolamo Cardano (1502-1576) propuso el ejemplo:

Divide el número 10 en dos partes de manera que su producto sea 40.

La solución la da la resolución de la ecuación

$$(10 - x)\,x = 40.$$

Las soluciones de la ecuación serían:

$$5+\sqrt{-5} \quad \text{y} \quad 5-\sqrt{-5}$$

Pero Bombelli (1526-72) planteó un problema de mayor dificultad, al considerar a las ecuaciones como objetos matemáticos autónomos. Así, la resolución de la ecuación $x^3 - 15x = 4$, que al aplicarle la fórmula de resolución de ecuaciones cúbicas de Cardano se obtenía:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

mientras que admite la solución $x = 4$. Con lo que se ponía de manifiesto que los números complejos aparecían también en problemas que tenían soluciones posibles.

René Descartes (1596-1660) usó los números complejos, Jean Bernouilli (1667-1748) calculó logaritmos de números complejos y Leonard Euler (1707-1783) representó los números complejos como puntos del plano y destacó el carácter geométrico de las operaciones. Sobre todo la regla de que el producto de dos números complejos en forma polar era igual a otro número complejo cuyo módulo era el producto de los módulos de los factores y cuyo argumento era la suma de los argumentos de los factores.

Hamilton definió en 1833 los números complejos como pares ordenados de números reales con las operaciones suma y producto habituales, que se pueden resumir así:

$$(a, b) + (x, y) = (a+x, b+y)$$

$$(a, b)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$$

Siguiendo un camino análogo al realizado en el plano, Hamilton pensó en la posibilidad de que en el espacio se podrían definir unos números parecidos a los números complejos con análogas propiedades algebraicas y geométricas.

Siguiendo un camino análogo al realizado en el plano, Hamilton pensó en la posibilidad de que en el espacio se podrían definir unos números parecidos a los números complejos con análogas propiedades algebraicas y geométricas.

El descubrimiento de los cuaterniones

Por analogía con los números complejos, Hamilton comenzó imaginando tripletes de la forma a+bi+cj, donde visualizaba sus unidades básicas *1, i, j* como perpendiculares dos a dos y de longitud unidad. Las unidades *i* y *j* eran unidades imaginarias

Hamilton debía representar los productos

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)$$

como vectores del mismo espacio, que el producto se pudiera realizar término a término y que, como en los números complejos, el módulo del producto sea el producto de los módulos.

a) En principio supuso que $i^2 = j^2 = -1$, tal y como se verifica para los números complejos y que el producto de dos elementos cualesquiera, incluidos *i* y *j*, eran conmutativos.

b) Luego hizo el producto término a término suponiendo que ij = ji y obtuvo:

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj) =$$
$$= (ax-by-cz) + (ay+bx)i + (az+cx)j + (bz+cy)ij$$

c) Ante este resultado se preguntó cuánto tenía que valer ij para que el producto fuera de la forma p+qi+rj y perteneciera, por consiguiente, el resultado a $\mathbb{R}^3$.

d) Las suposiciones primeras, que fueron ij = 1 o ij = -1, le llevaron a que no se cumplía la ley de los módulos.

f) Con la suposición ij = 0 tampoco se cumplía la ley de los módulos, pero observó que cuando ij desaparecía, y se hacía el producto de dos tripletes con los escalares asociados a *i* y *j* iguales se obtiene el resultado

$$(x+bi+cj)(a+bi+cj) = (ax-b^2-c^2) + (a+x)bi + (a+x)cj$$

que verificaba la ley de los módulos.

g) De aquí pensó que para que se anulara el sumando con ij era suficiente que en el producto del apartado b) se cumpliera que ij = -ji, pero ¿cuál debía ser el valor de este producto? En principio supuso que iba a ser un valor *k* que debía determinar.

h) La consideración que le llevó a fijar un valor de *k* fue la siguiente:

Al hacer el producto

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj) =$$
$$= (ax-by-cz)+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz+cy)ij$$

si suponemos que ij = -ji = k = 0 y observamos la ley de los módulos, al hacer la diferencia entre los cuadrados de los módulos de los factores menos el cuadrado del módulo del producto se obtiene:

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) -$$
$$- (ax-by-cz)^2 + (ay+bx)^2 + (az+cx)^2 =$$
$$= (bz-cy)^2$$

que no es otra cosa que el cuadrado del coeficiente de *k* en el desarrollo del producto. Lo que le hizo orientar el problema en una nueva dirección, añadir una nueva dimensión para lograr el cálculo con tripletes.

i) Supuso que ij = -ji = k, donde *k* era un nuevo símbolo imaginario. Lo que le llevó a considerar, no tripletes, sino cuaternios de la forma a+bi+cj+dk, que se llamaron *cuaterniones*. Las reglas de cálculo de los mismos eran:

$$ik = iij = -j$$

$$ki = -jii = j$$

$$jk = -jji = i$$

$$kj = ijj = -i$$

$$k^2 = (ij)(ij) = -(ji)(ij) = -jiij = j^2 = -1$$

Estas operaciones las resumió Hamilton en una inscripción que realizó, a punta de navaja, en una piedra del Brougham Bridge

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Algunas propiedades de los cuaterniones

a) *Los cuaterniones se pueden expresar como pares de números complejos.*

Los cuaterniones a+bi+cj+dk se pueden escribir de la siguiente forma

$$a+bi+cj+dk = a+bi+cj+dij =$$
$$= (a+bi)+(c+di)j = z_1 + z_2 j$$

con z_1 y z_2 números complejos.

b) *Todo cuaternio A = a + bi + cj + dk tiene inverso para el producto.*

En efecto, sea $A^* = a-bi-cj-dk$, el conjugado de A, el producto de ambos: $A\ A^* = a^2+b^2+c^2+d^2$ es la norma que será positiva siempre que el cuaternión A sea no nulo. Por lo tanto el inverso para el producto del cuaternión A es A/AA^*.

c) *Es asociativa.*

Para demostrar que el producto de cuaterniones es asociativo se utilizará la notación compleja y las propiedades de la operación conjugación de números complejos (conjugado de la suma es suma de conjugados y conjugado del producto es producto de conjugados) y la siguiente:

$z_1 j = (a+bi)j = aj+bk = ja-jib = j(a-bi) = jz_1^*$

El producto de cuaternios en forma compleja será, por consiguiente:

$$(z_1 + z_2 j)\ (w_1 + w_2 j) =$$
$$= (z_1 w_1 - z_2 w_2^*)+ (z_1 w_2 + z_2 w^{1*})j$$

y, a partir de aquí, fácilmente se prueban las propiedades asociativa del producto y la distributiva del producto respecto a la suma.

Los cuaternios con la suma:

$$a+bi+cj+dk + x+yi+zj+tk =$$
$$= (a+x) + (b+y)i + (c+z)j + (d+t)k$$

y el producto con las reglas enumeradas anteriormente constituye un cuerpo conmutativo, esto es, tiene la misma estructura que los números complejos.

Cualquier cuaternio se puede dividir en su parte real y en su parte cuaternio puro, esto es, del cuaternio

$$A = a+bi+cj+dk,$$

a es la parte real y bi+cj+dk la parte cuaternia pura.

Multipliquemos dos cuaternios puros

$$A = (x_1 i+x_2 j+x_3 k) \text{ y } B = (y_1 i+y_2 j+y_3 k)$$
$$A\ B = (x_1 i+x_2 j+x_3 k)\ (y_1 i+y_2 j+y_3 k) =$$
$$= (x_2 y_3-x_3 y_2)i + (x_3 y_1-x_1 y_3)j +$$
$$+ (x_1 y_2-x_2 y_1)k - (x_1 y_1+x_2 y_2+x_3 y_3)$$
$$= A \times B - (A,B)$$

...esta teoría no llegó a imponerse plenamente en la comunidad matemática para resolver problemas geométricos. Los cuaterniones aparecieron de manera natural a finales del siglo XIX en teorías como la representación lineal de grupo o la estructura de los grupos de Lie.

que es el producto vectorial menos el producto escalar. Es a causa de esta identidad por la que el cálculo vectorial se expresó en la segunda mitad del siglo XIX en términos de cuaternios.

Aunque Hamilton dedicara la última parte de su vida a investigar sobre las aplicaciones de los cuaterniones, esta teoría no llegó a imponerse plenamente en la comunidad matemática para resolver problemas geométricos. Los cuaterniones aparecieron de manera natural a finales del siglo XIX en teorías como la representación lineal de grupos o la estructura de los grupos de Lie. La consecuencia fundamental de todas estas investigaciones fue la búsqueda de operaciones que no respetaban las, hasta entonces, intocables propiedades de las operaciones elementales, lo que ponía de manifiesto la posibilidad de operaciones con nuevos objetos matemáticos abstractos, en clara ruptura con la concepción clásica de las matemáticas.

Hermann Günther Grassmann (1809-1877)

Perfil biográfico

Hermann Günther Grassmann (1809-1877) nació en Szcezcin, villa de Polonia en la desembocadura del Oder. Realizó estudios de teología, lenguas clásicas y literatura en la universidad de Berlín. Tuvo una formación autodidacta en matemáticas, sobre todo a partir de 1830, tras su vuelta de Berlín, con las obras *Elements de Géométrie* de Legendre, *Vollständiger lehrbegriff der höhern Analysis* de J, T. Meyer, *Lehrbuch der mechanischen Naturlehre* de E. G. Fischer y otros, sin olvidar la influencia de su padre Justus, profesor del liceo de Szcezcin. En 1840 realizó un examen en Berlín para enseñar matemáticas, física, química y mineralogía en todos los liceos y a todos los niveles, como trabajo de investigación para la obtención de su plaza presentó un trabajo *Theorie der Ebbe und Flut.* Grassmann reconoce que esta obra constituye un paso decisivo en la formación de sus ideas matemáticas, puesto que, por una parte, retomó las ideas esbozadas en su *cálculo geométrico* de 1832 y, por otro, continúa su desarrollo para aplicarlo a la *teoría de las mareas.* Toda su vida la pasó como profesor de liceo.

Cuando Hermann Günther Grassmann publicó en 1844 *La Lineale Ausdehnungslehre*, obra en la que estaban contenidas las ideas más importantes del cálculo vectorial, el libro fue tachado de excesivamente abstracto y no fueron reconocidas sus valiosas aportaciones hasta pasados veinte años. Estos años supusieron para Grassmann tiempos de profundo desánimo y el parcial abandono de la matemática.

Antes de que las ideas de Grassmann fueran aceptadas por la comunidad matemática de forma generalizada hubo dos ediciones diferentes de *La Lineale Ausdehnungslehre,* la primera en el año 1844 y otra en 1862. La edición de 1844 pasó prácticamente inadvertida y tuvo, por consiguiente, escasa o nula repercusión en el panorama matemático de la época.

La edición de 1862 fue mucho más clara desde el punto de vista matemático. Conceptos, que en la primera edición estaban dados implícitamente y de forma oscura, tales como los de combinación lineal de magnitudes, dependencia e independencia lineal, base de un dominio o la idea de dimensión se definieron claramente en la segunda edición.

Tampoco esta nueva versión fue acogida con entusiasmo, al menos, inicialmente, seguramente por tener poca difusión (publicada en la imprenta de su hermano fuera de las vías de distribución habituales) y por estar en boga en esa época el método de los cuaterniones desarrollado por William Rowan Hamilton (1805-1865). Esta situación de indiferencia hacia su producción científica por parte de los más influyentes matemáticos contemporáneos, motivó que, hacia mediados de la década de los sesenta, Grassmann estuviera decidido a renunciar el seguir investigando en matemáticas y dar prioridad definitiva a los estudios de lingüística que nunca abandonó desde que estudió en Berlín con Schleiermacher.

Las ideas de Grassmann fueron, poco a poco, ganando aceptación. Hermann Hankel (1839-1873) estaba redactando una obra que recogía los trabajos sobre el análisis con números complejos y funciones para lo que estaba trabajando con la obra de W. R. Hamilton *Lectures on Quaternions* (1853) y en su búsqueda de aportaciones de distintos matemáticos se encontró, en el año 1866, con la obra de Grassmann.

El interés que Hankel mostró por *La Lineale Ausdehnungslehre* y *Geometricche Analyse* se puso de manifiesto en la abundante correspondencia que mantuvieron en la que Hankel pedía aclaraciones de algunos conceptos, demostraciones y de varios teoremas con la intención de escribir los fundamentos del cálculo grassmaniano en su obra *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* (1867) de una forma clara, precisa y en un lenguaje que resultara fácilmente utilizable por la comunidad matemática en clara confrontación con los métodos de Hamilton. En esa época Hankel era consciente de la superioridad del cálculo grassmaniano y el mismo Grassmann demostró que muchos resultados obtenidos por Hamilton eran consecuencia inmediata y breve de su cálculo.

En el libro de Hankel aparecieron encendidos elogios sobre la originalidad y fecundidad de Grassmann y citaba las fuentes de este cálculo que eran las obras *La Lineale Ausdehnungslehre* de 1862 y *Geometrische Analyse.* No obstante, Hankel calificaba la primera de ellas de excesivamente abstracta y filosófica y de la segunda decía que estaba escrita de forma más acorde con el modo habitual de presentar los escritos los matemáticos. Lo que resulta claro es que Hankel, por desconocimiento o consciente olvido, no citó la primera edición de *La Lineale Ausdehnungslehre* entre sus fuentes, a la que hubiera tachado, sin duda, todavía de más abstracta y filosófica que la que él trabajó.

Así como los resultados de Hamilton fueron descubiertos desde el álgebra y estudiando las propiedades que debían mantener las operaciones cuando se realiza en ellas una extensión de un conjunto a otro más amplio los descubrimiento de Grassmann fueron hechos desde consideraciones geométricas.

El descubrimiento del producto de vectores

Así como los resultados de Hamilton fueron descubiertos desde el álgebra y estudiando las propiedades que debían mantener las operaciones cuando se realiza en ellas una extensión de un conjunto a otro más amplio los descubrimiento de Grassmann fueron hechos desde consideraciones geométricas. Dos puntos de partida diferentes para llegar a unos resultados que entraron en conflicto porque eran aplicables a la resolución de los mismos problemas. Grassmann aporta su punto de vista sobre la geometría que es el siguiente:

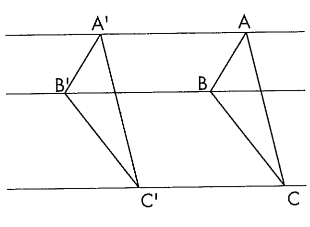
...Yo había comprendido desde hacía tiempo que no podía considerar a la geometría, como se consideraba a la aritmética o a la teoría de combinaciones, como una rama de la matemática, sino más bien, puesto que la geometría hace referencia a algo que ya está dado en la naturaleza, a saber, el espacio, debía tener en consecuencia una rama de las matemáticas que se extrajera de ella misma de manera puramente abstracta, leyes semejantes a las que en geometría aparecen ligadas al espacio. La posibilidad de desarrollar tal rama de la matemática puramente abstracta estaba dada por el nuevo análisis, cuando fue desarrollado independientemente de todo teorema demostrado por otros y en la pura abstracción fue esta ciencia.

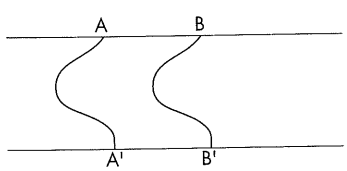
La ventaja esencial obtenida por esta interpretación era, para la forma, que todos los principios que expresaban las *visiones del espacio desaparecieron completamente y, de este modo, los principios se volvían tan evidentes como los de la aritmética y, por otra parte, para el contenido, la ventaja estriba en que la limitación a tres dimensiones se volvía caduca. De esta manera sólo las leyes se iluminan en su evidencia y universalidad y se presentan en su contexto esencial. Algunas regularidades que en tres dimensiones o no existían todavía o no se manifestaban más que de forma oculta, se desarrollan entonces en toda su generalidad por esta generalización.*

Las primeras consideraciones que realizó para descubrir el producto vectorial las realizó sobre el concepto de área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada, que le llevó a la idea de considerar áreas provistas de signo, según se recorriera en un sentido o en otro. Con estas consideraciones fijó las reglas del producto exterior de vectores que, siguiendo su *La Lineale Ausdehnungslehre*, fueron las siguientes:

a) Si un segmento se desplaza en el plano sobre un número cualquiera de segmentos, la superficie total que se obtiene es igual al espacio que se obtiene cuando se desplaza ese segmento por la suma de los segmentos.

b) Si en el plano un segmento se mueve entre dos paralelas fijas de modo que se mueve de una a otra, la superficie total barrida es la misma cualquiera que sea el camino recorrido.





Las primeras consideraciones que realizó para descubrir el producto vectorial las realizó sobre el concepto de área barrida por un segmento que se desliza sobre otro y sobre una línea quebrada, que le llevó a la idea de considerar áreas provistas de signo, según se recorriera en un sentido o en otro.

Sus expresiones, cambiando el lado medido por el que mide, serían:

c) La superficie que describe una línea quebrada es igual a la descrita por un segmento que tiene los mismos puntos inicial y final que ella.

d) La superficie total que describe una superficie cerrada al moverse en el plano es nula.

Estas propiedades las podemos expresar de forma simbólica así:

$$\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\wedge\mathbf{b} + \mathbf{a}\wedge\mathbf{c}$$

$$(\mathbf{b}+\mathbf{c})\wedge\mathbf{a} = \mathbf{b}\wedge\mathbf{c} + \mathbf{c}\wedge\mathbf{a}$$

e) La expresión $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ significa superficie y la $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ significará volumen. Esto llevó a Grassmann a definir **a** como segmento del primer escalón (dimensión uno), $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ segmento del segundo escalón (dimensión 2), $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}$ segmento del tercer escalón, etc.

f) Vectores de la misma especie. Si dos vectores son de la misma especie $\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

g) Si $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son de la misma especie se verifica:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1)\,\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}\,\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}_2\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2\,\mathbf{a}$$

h) La misma demostración es válida para

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,\mathbf{b}_1\,\mathbf{P} = \mathbf{a}\,\mathbf{b}_2\,\mathbf{P}$$

donde **P** es un vector de otro escalón.

i) Nos fijaremos en los signos y no sólo en el valor absoluto de

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1)\,\mathbf{b}_2 = \mathbf{a}\,\mathbf{b}_2$$

$$\mathbf{b}_2\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}_1) = \mathbf{b}_2\,\mathbf{a}$$

para ello supondremos que **a** y b son dos vectores no de la misma especie, el producto $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\,(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ es nulo, puesto que es producto de un vector por sí mismo, es decir dos vectores de la misma especie, pero, además se puede desarrollar aplicando la propiedad distributiva:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{b} =$$

$$= \mathbf{aa} + \mathbf{ba} + \mathbf{ab} + \mathbf{bb} = \mathbf{ba} + \mathbf{ab}$$

de donde $\mathbf{ab} = -\mathbf{ba}$.

k) Pone como ejemplo de un producto no conmutativo de segmentos, y que en lo que Grassmann llama primer escalón significa área es producto es

$$\mathbf{a}\,\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\;|\mathbf{b}|\ \text{sen}\,(\mathbf{ab})$$

que, evidentemente, el seno cambia de signo según se tome el ángulo de **a** a **b** o de **b** a **a**.

El producto exterior, llamado habitualmente producto vectorial, fue escrito por primera vez en la forma que se conoce hoy día por Clifford (1845-1879), en su *Elements of Dynamics*. Pero resulta interesante incorporar en la enseñanza estos aspectos fundamentales del proceso creador de los matemáticos que transmiten al estudiante la idea de que la matemática es algo vivo y dinámico en la que quedan muchas cuestiones por descubrir.

Bibliografía

BIRKHOFF, G. y S. MacLANE (1970): *Álgebra Moderna*, Vicens Vives, Barcelona.

BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

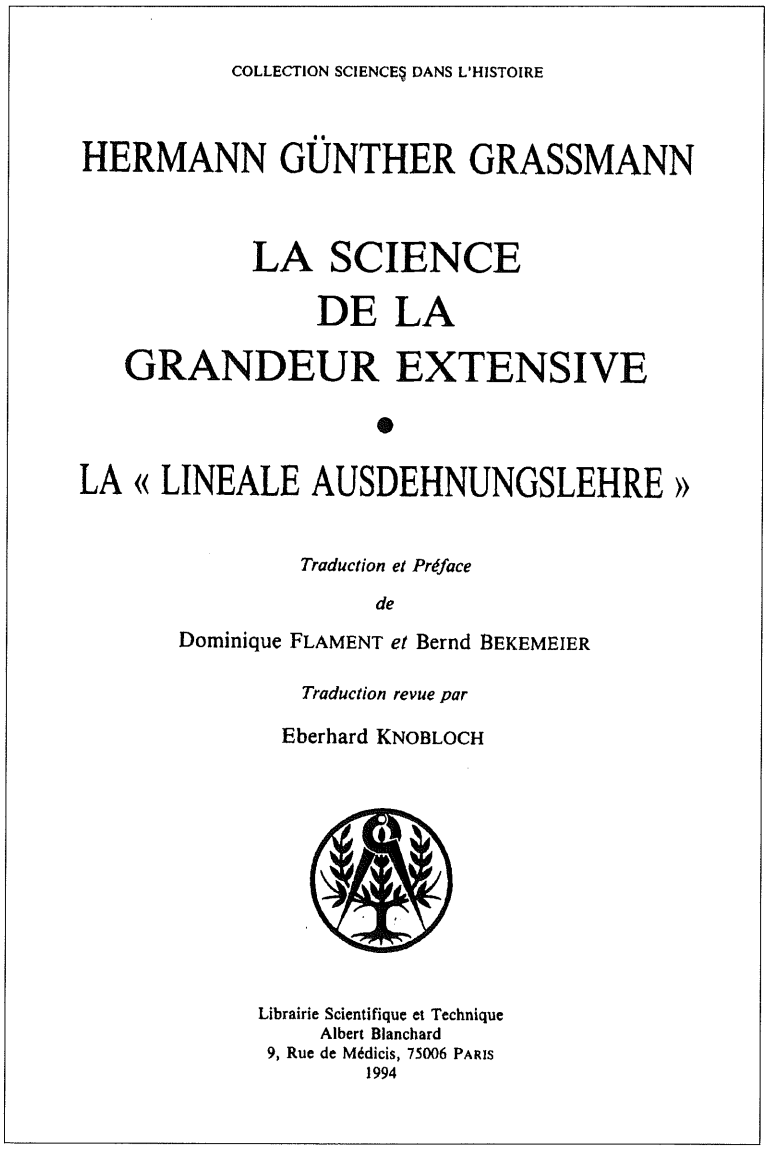
CROWE, M. J. (1994): *A History of Vector Analysis. The Evolution of the Idea of Vectorial System*, Dover, New York.

DIEUDONNÈ, J. (1989): *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*, Alianza Universidad, Madrid.

GRASSMANN, H. G. (1994): *La science de la grandeur extensive. La Lineale Ausdehnungslehre.* Librería científica y técnica Albert Blanchard. París.

WAERDEN, B. L. (1985): *A history of Algebra. From al-Khawarizmi to Emmy Noether*, Springer Verlag, Berlín.

Víctor Arenzana
Sociedad Aragonesa
Pedro Sánchez Ciruelo
de Profesores de Matemáticas



COLLECTION SCIENCES DANS L'HISTOIRE

HERMANN GÜNTHER GRASSMANN

LA SCIENCE
DE LA
GRANDEUR EXTENSIVE

•

LA « LINEALE AUSDEHNUNGSLEHRE »

Traduction et Préface

de

Dominique FLAMENT *et* Bernd BEKEMEIER

Traduction revue par

Eberhard KNOBLOCH

Librairie Scientifique et Technique
Albert Blanchard
9, Rue de Médicis, 75006 PARIS
1994

SUMA 25
junio 1997, pp. 71-86

El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con geoplanos

Josetxu Arrieta Gallastegui
José Luis Álvarez García
Antonio Eugenio González García

Dedicado a un enamorado de la reina de las ciencias que dio sus primeros pasos, tras la senda de Pitágoras, en el reino asturiano de Alfonso II

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

El geoplano, utilizado por primera vez por el pedagogo belga Cattegno, fue introducido en España por Puig Adam en los años cincuenta. En el plan de estudios que en estos momentos se está implantadndo, como consecuencia de la implantación de la LOGSE, se hace una apuesta decidida por el uso en las aulas de recursos didácticos de diversa índole, entre ellos los manipulativos. En el presente artículo se propone la introducción del teorema de Pitágoras, o la consolidación del mismo, apartir de una secuencia de actividades de manipulación con geoplanos.

EL GEOPLANO y su utilización didáctica en las clases de matemáticas

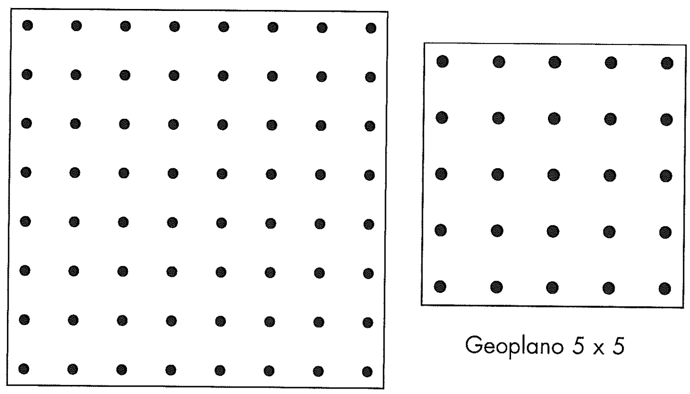
En su *Iniciación a las Matemáticas. Materiales y recursos didácticos*, Cascallana (1988, 146) afirma que «el geoplano fue utilizado por primera vez por Gattegno e introducido en España por Puig Adam». Efectivamente, el pedagogo belga Caleb Gattegno concibió el geoplano en los años cincuenta como un material multivalente, susceptible de ser utilizado para plantear y resolver múltiples y variados problemas geométricos, en los distintos niveles de la enseñanza. Como el propio Gattegno (1964, 11) afirma, «los geoplanos sirven para la toma de conciencia de las relaciones geométricas», esto es, sirven para favorecer la construcción progresiva de los conocimientos geométricos, construcción que sabemos es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas impuestas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares. Su visión de la enseñanza de las matemáticas y del papel que en ella deben de jugar los materiales manipulativos, sean regletas (Gattegno, 1967) o geoplanos, igual que la de su contemporáneo y compatriota nuestro, D. Pedro Puig Adam, encajaría bastante bien en el marco de los postulados psicopedagógicos esgrimidos hoy en día por los especialistas en el área de educación matemática (Gil y Guzmán, 1993) y, por lo tanto, en los incorporados en los diseños curriculares base de dicha área.

Sin embargo, y como es sabido, sus ideas y materiales no se difundieron ni arraigaron lo suficiente a partir de los años setenta. La ola de las «matemáticas modernas» arrastró su obra, así como el ámbito de actuación de su material, la geometría euclídea, al pozo del olvido. En nuestro país, el tratamiento «nueva matemática» o «matemática moderna» se introdujo con las Orientaciones Pedagógicas para la EGB (las de 1970 para la primera etapa y las de 1971 para la segunda), puesto que en ellas se parte del hecho de que una de las funciones fundamentales de las matemáticas es la de ordenar conocimientos y crear estructuras formales que los resuman y expresen, por lo que proponían que la enseñanza de las matemáticas se centrase, en todos los niveles de escolaridad, en el proceso de matematización de problemas, en la creación de sistemas formales y en la utilización de las leyes de estos sistemas o estructuras para obtener unos resultados e interpretarlos.

Es a finales de la década de los setenta cuando, en Cataluña, pionera como siempre en nuestro país en la introducción de innovaciones didácticas, y por medio de la beneficiosa y cercana influencia de algunos IREM (Institutos de Investigación en Educación Matemática franceses) como el de Lyon o Bordeaux, se comienza a experimentar de nuevo con los geoplanos en las aulas, como lo ponen de manifiesto distintos artículos publicados al respecto en la revista *L'Escaire* (ver Bedos, M; Forns, M. y otros, 1983 y Rigon Grandesso, M., 1979). Por su parte, unos años después, la Subdirección General de Formación del Profesorado apoya explícitamente la utilización del material de Gattegno, dentro del marco de experimentación de la Reforma de las Enseñanzas Medias, al editar un libro sobre el tema, *Geoplano y Mecanos* (Bas, M. y Brihuega, J., 1987), aunque el método para incorporarlo que se propone, al menos en cuanto a la unidad didáctica que aquí nos interesa, la del teorema de Pitágoras, no se adecua precisamente en términos didácticos y psicopedagógicos a lo que proponía el propio Gattegno y a lo que recientemente se ha aprobado como marco administrativo y legal de trabajo dentro del área.

Si la construcción, observación y modificación de formas geométricas es previa a la fijación de los conceptos geométricos, debemos asumir que la acción sobre los objetos constituye una fase inicial ineludible en los procesos de aprendizaje y que, por ello, el recurso a los geoplanos de Gattegno debe también considerarse como un hecho imprescindible en la Educación Secundaria dentro del área de Matemáticas.

Hemos utilizado indistintamente el singular y el plural para referirnos al (singular) o a los geoplanos (plural). Y ello es así porque aunque hablando con propiedad deberíamos referirnos siempre a los geoplanos (puesto que los hay cuadrados, rectangulares, circulares, cuadrados por un lado y circulares por otro,...; también los hay de 3 x 3 puntas, de 5 x 5, de 8 x 8, de 10 x 10, de 3 x 5, etc.), todos ellos se basan en la misma idea: recurrir a una superficie en la que sobresalen un conjunto de puntas o clavos, alrededor de los cuales se pueden construir distintas formas geométricas utilizando simples gomas elásticas. En nuestro trabajo hemos recurrido exclusivamente a geoplanos cuadrados de 5 x 5 y 8 x 8 puntas, respectivamente (figura 1). Los construimos con planchas de aglomerado y unas puntas de madera que encajábamos en los agujeros que previamente habíamos taladrado sobre el aglomerado.



Geoplano 8 x 8

Geoplano 5 x 5

Figura 1

Debemos contar además con un importante material auxiliar: tramas cuadradas de puntos, dispuestos igual que las puntas de los geoplanos. Se trata simplemente de folios con esquemas dibujados del geoplano. Estas hojas se utilizarán para poder tomar nota de lo que se realiza con las gomas sobre el mismo geoplano. En determinadas ocasiones, estas hojas pueden sustituir al propio geoplano.

El contexto organizativo de las actividades que vamos a presentar es siempre el siguiente: en grupos de tres o cuatro personas, los y las estudiantes van asumiendo la tarea de encontrar «algo» (sean segmentos, triángulos, recorridos o cuadrados) diferente a lo que hayan encontrado sus compañeros y compañeras de grupo. Una vez realizado sobre el geoplano, y antes de dibujarlo en los respectivos esquemas de los que disponen de manera individual, discuten si lo realizado por su compañero o compañera es efectivamente «distinto» a lo trazado y dibujado previamente, y sólo tras ponerse de acuerdo en ello, dibujan cada uno en sus esquemas la nueva forma geométrica hallada. Como vemos, la mayor parte de las actividades que proponemos se realizarán en el marco organizativo de trabajo en pequeño grupo, única manera de garantizar que efectivamente se «aprenda» a trabajar en equipo.

El teorema de Pitágoras: siempre presente en el currículum escolar

El teorema de Pitágoras constituye un contenido del curriculum escolar desde que se fraguaron los primeros rasgos de institucionalización de la Escuela, en el mundo grecorromano, cuando se especializaron los agentes educativos y comenzaron a vivir de ella, dedicándose exclusivamente a la enseñanza, los primeros sofistas, los primeros «trabajadores» de la enseñanza (Lerena, 1985). El quadrivium no se podría entender sin la Geometría y ésta sin la enseñanza de dicho teorema.

Pues bien, las justificaciones que a lo largo de la historia se han dado para su introducción en el ámbito escolar han oscilado a la hora de destacar dos polos o aspectos destacados al respecto: su vertiente formativa o bien su rol instrumental o utilitario. Comenzando por su vertiente utilitaria, parece indudable que el conocimiento de dicho teorema es absolutamente necesario para la enseñanza posterior de numerosos conceptos científicos, no sólo matemáticos sino físicos. Es imposible hablar de distancias en el espacio, de normas o de vectores, así como de espacios de Hilbert, etc. en el campo de las matemáticas sin conocerlo. Por ello, también es inconcebible entender lo que son las magnitudes vectoriales en el ámbito de la física (velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc.), sin comprender la relación pitagórica. De todas formas no debe ser esta la justificación que demos a nuestros alumnos: no debemos caer nunca en el tan repetido «ya veréis el año que viene para qué sirve esto». En tal caso, ¡deja para el año que viene ese contenido! Así pues, con respecto al teorema de Pitágoras deberemos destacar su carácter instrumental para resolver multitud de problemas, por ejemplo de cáculos de distancias en el plano, en los mapas, en la realidad. Por otra parte, nuestros alumnos y alumnas deben poder vivir el proceso de construcción por su parte de un teorema, y por tanto, de un tipo de conocimiento muy específico, el geométrico, con características muy peculiares y diferenciadoras frente a otro tipo de conocimientos. Esta última idea tiene que ver con el carácter formativo de su enseñanza, y no con el meramente instrumental, pues en pocas ocasiones a lo largo de la escolaridad obligatoria van a poder actuar en las aulas como verdaderos científicos, matemáticos en este caso, con las ventajas educacionales que ello acarrea.

...las justificaciones que a lo largo de la historia se han dado para la introducción del teorema de Pitágoras en el ámbito escolar han oscilado a la hora de destacar dos polos o aspectos: su vertiente formativa o bien su rol instrumental o utilitario.

Una propuesta didáctica para tratar el teorema de Pitágoras

En las líneas que siguen nos proponemos explicar el conjunto de tareas que hemos planteado en varias aulas, no sólo de la ESO, sino también en contextos muy diferentes, como lo puedan ser la formación inicial del profesorado en la Escuela Universitaria de Magisterio o la formación permanente del mismo en distintos CEP asturianos, con la finalidad de que los y las estudiantes aprendan de manera significativa el teorema de Pitágoras. En él pues, nos adentramos en la vida real de las aulas, determinada por lo que en ella se hace, que es, a su vez, lo que determina el currículum realizado, y no ya el pretendido u oficial.

Por lo que hemos dicho hasta ahora, está claro que dicho curriculum en la acción no va a estar mediado por las editoriales, a través de los libros de texto o de los ahora en boga «proyectos curriculares» (y ponemos las comillas a la expresión pues está bastante claro que se está devaluando el significado originario de dicha expresión, incluso a instancias de la propia administración, dado que lo que se denomina de esa manera en absoluto tiene que ver con lo que se entendía por tal en el ámbito anglosajón y en la década de los sesenta), sino por la configuración de un conjunto de tareas originales paraa realizar recurriendo sistemáticamente a los geoplanos cuadrados de 3 x 3, 5 x 5 y 8 x 8 y a las tramas cuadradas de puntos que complementan este material.

Como se podrá apreciar, en nuestra propuesta didáctica otorgamos una gran importancia al proceso de enseñanza-aprendizaje en el que implicamos a los y las estudiantes, pues pensamos que es a través de él como pueden vivir una relación educativa, entre ellos y ellas y con el profesorado, y no meramente instructiva. Resaltamos que más importante que el producto deseado, a saber, que dominen el teorema de Pitágoras, es el proceso seguido para su consecución, proceso que en todo momento debe ser en sí mismo educativo. Sus rasgos característicos, por lo tanto, deben ser coherentes con los que se desprenden del análisis de los objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria, para no desterrar al ámbito de la mera retórica dichas descripciones por todos y todas compartidas.

Para explicar la unidad didáctica vamos a distinguir tres subapartados en la misma: en el primero analizaremos los elementos didácticos de la unidad, basándonos en el DCB y citando los objetivos, contenidos, el contexto organizativo y la forma de evaluación; en el segundo presentamos la secuencia propuesta de actividades, una sesión introductoria y siete tareas claramente diferenciadas, para, en el tercero y último, sintetizar y concluir el trabajo realizado.

El teorema de Pitágoras en el DCB: análisis didáctico de la unidad

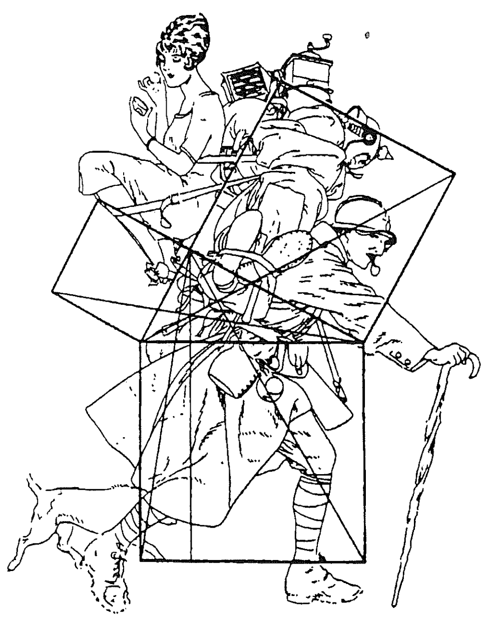
En el DCB de Secundaria Obligatoria, el teorema de Pitágoras viene citado como contenido conceptual del currículo oficial dentro del bloque de contenidos n.° 2 del área de Matemáticas, el de «Medida, estimación y cálculo de magnitudes» (MEC, 1992). Más concretamente, se cita como contenido conceptual del apartado 6, el de «Mediciones indirectas», y se puede relacionar directamente con contenidos procedimentales («utilización de las fórmulas de longitudes… para medir magnitudes» o el de «medida del área… utilizando distintas técnicas tales como la descomposición en otras más simples…») o relacionados con las actitudes, los valores y las normas («reconocimiento de la importancia y utilidad de las medidas indirectas como un medio sencillo para medir determinadas magnitudes» o el de «revisión sistemática del resultado de las medidas directas o indirectas, aceptándolas o rechazándolas según se adecuen o no a los valores esperados»).

Sin embargo, pensamos que, tal y como vamos a plantear la programación de la unidad didáctica, los objetivos o capacidades que se pretenden desarrollar van mucho más allá de los que acabamos de citar. Nuestro interés es el de incidir en los objetivos generales del área en la ESO, concretamente en el primero («incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática con el fin de comunicar los pensamientos propios de una manera precisa y rigurosa»), el tercero («identificar utilizaciones y aplicaciones diversas del conocimiento matemático en distintos ámbitos de la actividad humana percibiendo el papel que juegan como lenguaje e instrumento en situaciones muy diversas»), el cuarto («mostrar actitudes propias de la actividad matemática en situaciones cotidianas o de resolución de problemas»), el quinto («utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas»), el sexto («elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, utilizando distintos recursos y analizando la coherencia de los resultados para mejorarlos si fuera necesario») y el noveno («desarrollar estrategias de medida y cálculo de magnitudes realizando estimaciones y aproximaciones de estas medidas con el grado de exactitud conveniente según lo requiera la naturaleza de la situación, del objeto o del aspecto medido»).

…más importante que el producto deseado, a saber, que dominen el teorema de Pitágoras, es el proceso seguido para su consecución, proceso que en todo momento debe ser en sí mismo educativo.

Pero también queremos resaltar la relación directa de la unidad didáctica con el posible logro de objetivos o capacidades generales de la propia etapa educativa, en concreto con los siguientes objetivos generales de la ESO: «interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos y técnicos, con el fin de enriquecer sus posibilidades de comunicación y reflexionar sobre los procesos implicados en su uso»; «obtener y seleccionar información utilizando las fuentes en las que habitualmente se encuentra disponible, tratarla de forma autónoma y crítica, con una finalidad previamente establecida y transmitirla a los demás de manera organizada e inteligible; «elaborar estrategias de identificación y resolución de problemas en los diversos campos del conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, constrastándolas y reflexionando sobre el proceso seguido» y, por último, el de «conocer y valorar el desarrollo científico y tecnológico, sus aplicaciones y su incidencia en su medio físico y social».

Los contenidos conceptuales que es preciso aprender están recogidos en la relación esencial que se establece en el teorema de Pitágoras, a saber, que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, así como reconocer que eso sólo ocurre si el triángulo de partida es rectángulo. Los términos (catetos, hipotenusa, triángulo rectángulo, acutángulo y obtusángulo), las operaciones (suma de cuadrados, triangulación de rectángulos) y la relación de igualdad en ese determinado caso, constituyen las figuras sintácticas características de la geometría euclidiana que es preciso construir.



Para favorecer el desarrollo de las capacidades citadas y la construcción de dichas figuras sintácticas es preciso instaurar en el aula una dinámica de trabajo en la que el realizado por el alumno o alumna sea comparable por momentos a la actividad científica. Deberá actuar, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiarlas con otros, reconocer las que son conformes a la cultura, recurrir a ellas cuando son útiles, etc. Y para hacer posible tal actividad, el profesorado debe de imaginar y proponer situaciones que puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparezcan como la solución óptima y descubrible a los problemas planteados. Más concretamente, debe optar por seguir los principios de procedimiento que justificamos en el anterior apartado.

La secuencia de actividades que presentamos a continuación se ha realizado en su mayor parte dentro de un contexto de trabajo en pequeño grupo (de cuatro personas). En las situaciones de acción éste es el contexto usual, aunque en las de formulación, validación e institucionalización se recurre habitualmente a una puesta en común con todo el grupo de estudiantes.

Los medios utilizados, como ya se ha indicado anteriormente, son únicamente geoplanos de 5 x 5 para cada grupo, y de 8 x 8 para toda el aula, más las gomas necesarias para la construcción de las figuras planas. Además se dispondrá de fichas fotocopiadas donde aparecen los esquemas de dichos geoplanos, con la finalidad de que puedan tomar nota de sus acciones previas, así como hojas con tramas cuadradas de puntos. Es interesante tener preparadas las transparencias necesarias para visualizar, en la puesta en común, las soluciones a los problemas de búsqueda planteados. En los centros donde se pueda recurrir a ordenadores que dispongan del lenguaje LOGO, es factible realizar actividades similares a las propuestas en dicho entorno, sea para comprobar los resultados y conocimientos adquiridos mediante el recurso a los geoplanos, sea para plantearlas directamente en dicho entorno informático.

La labor del profesorado debe de entenderse en función del tipo de situación a plantear y no en términos globales (directividad y no directividad, por ejemplo). Así, en las situaciones de acción y formulación, deberán apoyar y animar a sus estudiantes para que acepten el problema que se les ha planteado, dándoles los consejos oportunos par que perseveren, tomen conciencia del trabajo realizado, comparen el suyo con el de otros grupos, etc. Sin embargo, en las situaciones de validación deberán abstenerse de intervenir como poseedores de la verdad, esto es, deberán simular, como un actor o una actriz en una obra de teatro, que no conocen la respuesta a las preguntas que se plantean. De otra manera se interferiría con los procesos de razonamiento del alumnado, impidiéndoles construir las ideas adecuadas para la resolución de los problemas planteados. Por último, en las situaciones de institucionalización, el profesorado debe de intervenir de manera totalmente directiva, zanjando los debates, introduciendo los términos adecuados y explicitando la importancia de los resultados obtenidos.

Por su parte, la evaluación específica de la unidad deberá de realizarse en un marco equiparable al ya vivido y reconocido por los y las estudiantes, esto es, en pequeño grupo. La prueba individual de evaluación puede y debe reducirse a comprobar si los resultados previamente institucionalizados son conocidos y comprendidos. De esta forma distinguiríamos entre dos pruebas de evaluación: la grupal, dirigida a comprobar el nivel de trabajo de cada grupo al intentar resolver un problema nuevo, aunque relacionado con los previamente trabajados, y el individual, dirigido a comprobar su nivel de conocimiento de los conceptos básicos que se supone deben de aprender.

Hemos resuelto relatar la secuencia de actividades para plantear en las aulas de manera abierta, sin determinar específicamente el tiempo dedicado específicamente a cada una de ellas y el contexto concreto organizativo de las mismas, y ello de manera deliberada. En los diferentes ensayos que hemos realizado de la misma, como dijimos, en contextos muy diversos, hemos podido comprobar cómo los resultados obtenidos en cada tarea son algo diferentes en cada aula y ello nos obliga, además de la necesidad de ser coherentes con los principios de procedimiento asumidos (recuérdese el que afirma que el profesorado «favorecerá que identifiquen, inicien y desarrollen sus propios problemas relacionados con las situaciones planteadas») a describir el conjunto de tareas a desarrollar en las aulas de manera no cerrada.

En necesario indicar, por último, que en algunas de las tareas se proponen alternativas según se plantee la unidad didáctica en el primer ciclo o en el segundo ciclo de la ESO. En este último caso se eliminan las actividades en las que se hace referencia a los números irracionales. Tanto en uno como en otro caso, los alumnos y alumnas llegan a la relación pitagórica de manera similar y, por tanto, la unidad didáctica mantiene todo su significado. En el caso de los estudiantes del segundo ciclo, que ya se habrán encontrado con el teorema en cursos anteriores, tendrán ocasión de afianzar, de manera significativa, su aprendizaje y valorar todo su significado.

Secuencia de actividades

Primera sesión introductoria

En la primera sesión, y con vistas a proporcionar una panorámica global del tema que se va a abordar en las siguientes clases, esto es, con la pretensión de presentar un organizador previo que facilite al alumnado la asignación de un sentido genérico al conjuntos de actividades y fases que se van a desarrollar, suele ser conveniente comenzar la programación con una actividad como la que proponemos, que pensamos satisface las características que los psicólogos cognitivos, especialmente Ausubel o Mayer, asignan a los organizadores avanzados. Este último sostiene que un organizador previo debe poseer las siguientes características:

1. Es un conjunto breve de información verbal o visual.
2. Se presenta antes del aprendizaje de un amplio cuerpo de información.
3. No incluye contenido específico de la información que hay que aprender.
4. Proporciona medios para generar relaciones lógicas entre los elementos.
5. Influye en los procesos de codificación del alumno.

...dos pruebas de evaluación: la grupal, dirigida a comprobar el nivel de trabajo de cada grupo al intentar resolver un problema nuevo, aunque relacionado con los previamente trabajados, y el individual, dirigido a comprobar su nivel de conocimiento de los conceptos básicos que se supone deben de aprender.

En nuestro caso, como veremos a continuación, no sólo se tratará de una información verbal y visual presentada por el o la profesora, sino que exigirá también la realización de actividades manipulativas por parte del alumnado. En concreto, se trataría, en primer lugar, de explicarles verbalmente que el conjunto de actividades que se realizarán a continuación está relacionado con uno de los conocimientos matemáticos más universales, planteado y resuelto a través de diferentes cursos operatorios por civilizaciones muy diversas (babilónica, egipcia, india, china, arábiga, griega,... que explica de manera abstracta y general la relación existente entre diferentes cuadrados, rectángulos y triángulos y que permite resolver una gran cantidad de problemas geométricos y algebraicos en el plano y, generalizándolo, en el espacio. Se le conoce convencionalmente como el «Teorema de Pitágoras», y nos va a permitir adentrarnos en las características de los conocimientos científicos, más concretamente, matemáticos, que implican una manera de razonar, argumentar y demostrar muy específica y determinada, muy peculiar, la que se recoge de manera implícita a través del término «teorema».

Como vemos, breve conjunto de ideas, presentado antes del amplio conjunto de actividades a desarrollar y de información a transmitir, que no incluye contenido específico de la información a aprender, a la vez que proporciona medios para generar relaciones lógicas entre los elementos y las actividades subsiguientes y que esperamos influya en los procesos de codificación del alumnado, por lo que, explicitado en un lenguaje apropiado, se convierte en un organizador previo del tema que se va a estudiar.

Tras transmitir la información verbalmente, les pasaremos por escrito un breve texto que recoja sintéticamente los puntos anteriores y, a continuación, proporcionaremos a cada grupo de cuatro alumnos dos cuadrados, de 15 y 20 cm de lado respectivamente, una escuadra y un cartabón, así como unas tijeras, y les pediremos que busquen la manera de conseguir, con los dos cuadrados dados, otro cuadrado de área la suma de los iniciales, pudiendo cortar éstos en las partes que crean conveniente y de la forma que consideren apropiada. Se trataría de «ver», una vez troceados los dos o alguno de ellos, cómo se pueden disponer las distintas partes de manera que obtengamos uno solo, sin despreciar ninguno de los fragmentos en los que los hayamos dividido, para garantizar que la suma de los pequeños nos «dé» el mayor. Con cortes paralelos a los lados del cuadrado surgen fácilmente varias opciones, por ejemplo, la de cortar el mayor en cuatro tiras rectangulares iguales y disponerlas alrededor del menor, pero complicaremos la tarea pidiendo que los cortes sean «oblicuos».

Tras diversos intentos, que es de esperar no fructifiquen, dada la dificultad que encierra el hallar por dónde cortarlos, en cuántos trozos y si hay que recurrir a uno o a ambos cuadrados, les presentaremos una de las posibles formas de hacerlo. Les diremos concretamente que partan el mayor, el de 20 cm mediante dos rectas que unan, dos a dos, los puntos situados en las distancias y los lugares indicados en la figura 2 (presentada en una trasparencia). Después se les pide que sitúen los cuatro cuadriláteros obtenidos en torno al cuadrado de 15 cm para ver si obtienen un cuadrado mayor, y, si es así, que midan el lado de este último.

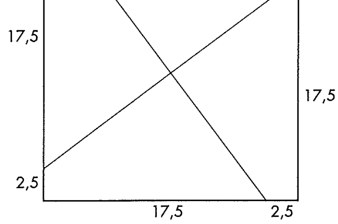


Figura 2

Una vez conseguida la disposición deseada (los cuatro cuadriláteros «bordeando» al cuadrado de 30 cm, que aparece como encajado en el interior del mayor, obtenido por todos los grupos), les comentaremos que la justificación de este procedimiento, así como la de la relación obtenida entre las áreas será uno de los conocimientos que habremos aprendido tras la realización de las actividades de la programación, y que está directamente relacionado con el citado «Teorema de Pitágoras».

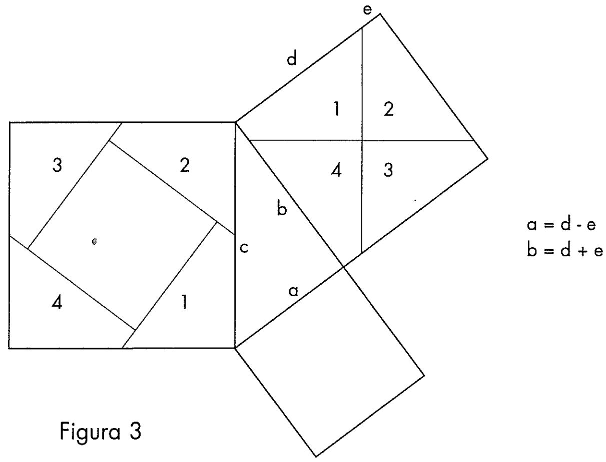


Figura 3

Como se puede apreciar en la figura 3, el procedimiento presentado se basa en uno de los muchos existentes para construir un cuadrado, basándose en dos más pequeños, siempre que entre sus lados se satisfaga la relación pitagórica. En este caso a = 15 cm y b = 20 cm, por lo que «d» es igual a 17,5 cm y «e» a 2,5 cm. El cuadrado mayor construido tendrá, obviamente, un lado de 25 cm.

En el caso general, los valores de «d» y «e» se hallan calculando la semisuma de los lados de los cuadrados pequeños y la semidiferencia de los mismos, respectivamente, como se puede deducir resolviendo las dos ecuaciones de la figura, despejando «d» y «e» en función de «a» y «b». Así, $d = 1/2(b+a)$ y $e = 1/2(b-a)$ y en el caso particular planteado,

$$d = 1/2(20+15) = 17{,}5 \text{ cm}$$

$$e = 1/2(20-15) = 2{,}5 \text{ cm.}$$

Tarea 1: segmentos de diferente longitud en el geoplano 5x5

Se les propone que, en grupos de cuatro personas, encuentren todos los segmentos de distinta longitud que se pueden construir en un geoplano de 5 x 5 puntos. Como vemos, les proponemos una situación de acción, dirigida, entre otras cosas a que pongan de manifiesto sus conocimientos previos sobre los términos usados: segmentos e igual longitud. Situación o problema de búsqueda para el que no pueden recurrir a ningún algoritmo previo y que deberán resolver obligadamente por tanteo, mediante sucesivos ensayos y errores. En este proceso pondrán de manifiesto sus ideas previas sobre igualdad de segmentos, aprendiendo, por ejemplo, que la distancia entre dos puntos no es la misma si éstos, en vez de estar situados de manera consecutiva en horizontal o vertical, están situados en oblicuo.

El contexto organizativo de la tarea puede ser el siguiente: cada alumno construye un segmento en el geoplano, diferente siempre en longitud a los previamente realizados y, tras ponerse de acuerdo con los compañeros en que es efectivamente distinto en dicha magnitud a todos los anteriores, lo dibujan todos los miembros del grupo en sus fichas correspondientes. Así van construyendo y dibujando el mayor número posible de segmentos distintos, hasta que no encuentren más. Como vemos, es preciso que cada grupo cuente con un geoplano, gomas, y fichas con bastantes esquemas del geoplano 5 x 5 (es aconsejable proporcionarles, como mínimo, 16 esquemas en dos folios, para que dibujen inicialmente un segmento en cada uno de ellos).

En la puesta en común es de esperar que los distintos grupos no se pongan de acuerdo: unos encontrarán 11 o 12 segmentos distintos, mientras que otros dibujarán en sus fichas más de 15, al no percatarse de la igualdad de algunos de ellos por estar situados en posiciones diferentes. Como se puede apreciar en la figura 4 (en la que aparecen ya agrupados siguiendo un criterio: horizontales, suben un «piso», dos, tres o cuatro), sólo existen 14 segmentos distintos en longitud, pero como este número no es fácil de hallar, dado que no cuentan con ninguna estrategia previa que les permita estar seguros de ello, no es previsible que lleguen a él, al menos de manera mayoritaria. Este hecho, la falta de acuerdo para encontrar el mismo número de segmentos, es el que va a motivar la siguiente tarea que se va a realizar.

Situación o problema de búsqueda para el que no pueden recurrir a ningún algoritmo previo y que deberán resolver obligadamente por tanteo, mediante sucesivos ensayos y errores.

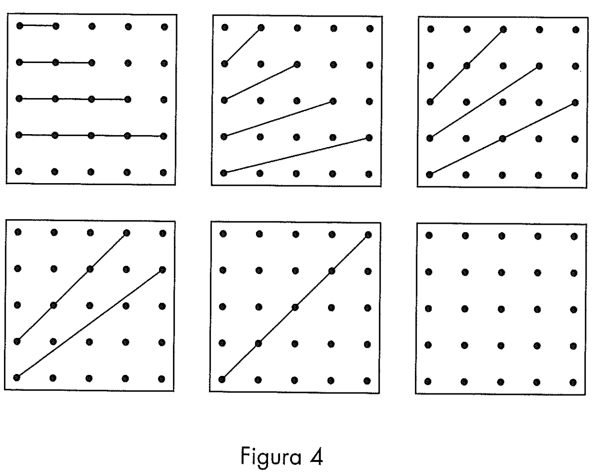


Figura 4

Tarea 2: codificación de los segmentos hallados

En esta ocasión, y como fruto del desacuerdo alcanzado en la tarea anterior, les planteamos una situación o dialéctica de formulación: se trata de construir un lenguaje que nos permita identificar sin ambigüedades cualquier segmento construible sobre el geoplano de 5 x 5, de manera que, por su mediación, podamos estar seguros más adelante, repasando las fichas realizadas en la tarea anterior, que no repetimos ninguno, así como que podemos encontrar todos los posibles.

Para ello podemos recurrir al planteamiento de la siguiente actividad: les pedimos que, fijado un punto de partida para los distintos segmentos, por ejemplo, la esquina inferior izquierda, se intercambien mensajes con la finalidad de averiguar qué segmento han construido sin que los restantes compañeros del grupo lo puedan ver. Los distintos mensajes, del tipo «dos saltos a la derecha y uno hacia arriba», los iremos abreviando sin incurrir en ambigüedades hasta que asuman que es suficiente con indicar un par de números –el par (2, 1) para el caso anterior– para identificar de manera rigurosa uno y sólo uno de los posibles segmentos posibles. Llegados a esta conclusión, se les pide que nombren los segmentos que previamente habían construido para percatarse de las posibles repeticiones o exclusiones en que habían incurrido.

De esta manera, y superando ciertas dificultades, como la relativa al nombre de los segmentos horizontales –el (1, 0), (2, 0), (3, 0) y (4, 0)– o al hecho de que el orden de los números del par es indiferente respecto a la longitud (lo que viene a indicar que, por lo tanto, en sentido matemático estricto no constituyen un «par»), puesto que el segmento (2, 1), por ejemplo, tiene la misma longitud que el (1, 2), pueden llegar a nombrar los catorce segmentos posibles, así como a estar seguros de que únicamente pueden construirse dichos catorce segmentos. Como objetivo final de la tarea, se trataría que todos los grupos lleguen a construir una tabla como la siguiente:

(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
		(3, 3)	(4, 3)
			(4, 4)

Con dicha tabla construida pueden fácilmente apreciar que, efectivamente, sólo se pueden construir 14 segmentos de distinta longitud en el geoplano de 5 x 5, al margen de su orientación y disposición en el plano. Implícitamente, también habrán descubierto que para expresar la medida de un segmento, en ocasiones es preferible «dar un rodeo», esto es, no medir directamente su longitud sino indicar cuánto se avanza (o retrocede) en horizontal y cuánto se sube (o baja) en vertical; esto es, es preferible expresar la distancia entre dos puntos no directamente sino indirectamente, recurriendo a lo que más adelante denominaremos como «catetos» del triángulo rectángulo que tiene como «hipotenusa» la distancia buscada. Esto es así, dado que de los catorce segmentos construidos, únicamente los cuatro horizontales y el (4, 3) tienen una medida racional, expresable mediante un número entero en estos casos (respectivamente miden 1, 2, 3, 4 y 5 unidades, si consideramos como unidad la distancia horizontal o vertical entre dos clavos consecutivos). El resto, como podrán comprobar más adelante, tienen una medida irracional.

Una vez concluida la tarea, podremos plantear las siguientes actividades de refuerzo o ampliación:

- Dado un segmento cualquiera, dibujar el mismo en muchas posiciones diferentes o construir figuras con segmentos siempre iguales (ver figura 5).
- Dado un segmento cualquiera, elegido entre los «pequeños» (más adelante matizaremos esta idea de «pequeño»), construir un cuadrado que tenga dicho segmento como lado, proporcionándoles, si tienen dificultades con los segmentos «inclinados», dos lados ya dibujados para que encuentren el cuarto vértice que permite «cerrar» el cuadrado (ver figura 6). Esta actividad será la base de una de las próximas tareas que habrán de abordar.
- Encontrar una fórmula que nos permita calcular el número de segmentos construibles en cualquier geoplano de n x n clavos. Fórmula que se puede construir planteando una situación de validación, en la cual tengan que conjeturar que dicho número, llamémosle N, es igual a la suma de los *n* primeros términos de la progresión aritmética de diferencia 1 (1+2+3+4+...+n), menos una unidad. Hecho fácilmente deducible ampliando, por generalización, la tabla previamente construida. Así se puede introducir, además, la idea de progresión aritmética, al menos la de la más sencilla, para llegar a la fórmula en cuestión, esto es 1/2 [n(n+1)] – 1. Más adelante merece la pena volver sobre esta actividad para probar su validez: a partir del geoplano 6 x 6 se encontrarán con que algunos segmentos aparentemente de «diferente» longitud realmente miden lo mismo, como por ejemplo el (5 ,0) y el (4, 3). En todo caso nos parece más oportuno introducir esta reflexión después de haber realizado alguna de las tareas siguientes.

...sólo se pueden construir 14 segmentos de distinta longitud en el geoplano de 5x5, al margen de su orientación y disposición en el plano.

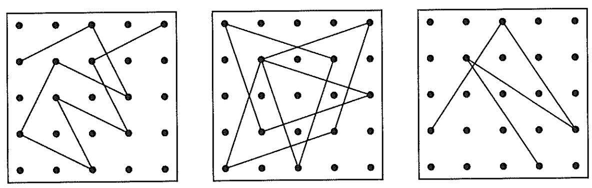


Figura 5

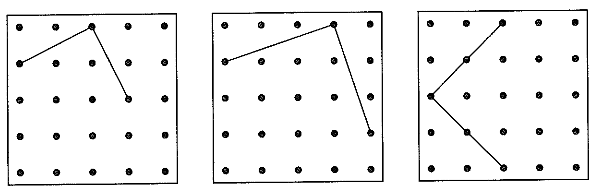


Figura 6

Tarea 3: ordenación de los segmentos por su longitud

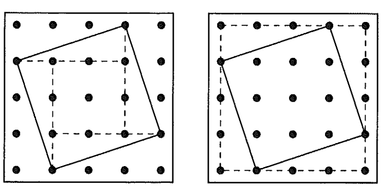
Se les pide, en el mismo contexto organizativo que en el caso de la tarea inicial, que ordenen de menor a mayor longitud todos los segmentos que han encontrado. Para ello pueden recurrir, si lo estiman necesario, al uso de reglas graduadas.

Tras un periodo de trabajo de los grupos, el profesor o la profesora pedirá que expongan sus resultados. Sin duda surgirán distintas ordenaciones y surgirán problemas ya que, con toda probabilidad, se habrán encontrado con serias dificultades para ordenar los segmentos. Ni siquiera con ayuda de la regla habrán sido capaces de establecer diferencia de longitud entre los segmentos (4, 1) y (3, 3).

Esta falta de acuerdo será la base para plantear la siguiente tarea: cómo encontrar la medida exacta de los diferentes segmentos, que nos permita ordenarlos según su longitud.

Tarea 4: la longitud exacta se puede determinar indirectamente

Al final de la tarea anterior se plantea el problema de determinar la medida exacta de los segmentos del geoplano. Será difícil encontrar propuestas razonables para hallar la medida exacta de los segmentos, por lo que será el profesor o la profesora la que sugerirá una manera de hacerlo. El procedimiento que propondrá para hallar la longitud exacta de los segmentos se basará en la relación entre el lado y el área de un cuadrado: conocido el valor del área, el lado será la raíz cuadrada de este valor. Para explicar este procedimiento de cálculo, el profesor o la profesora plantearán algunas actividades previas de cálculo de áreas de cuadrados construidos en el geoplano. En el caso de los cuadrados cuyos lados son paralelos a los lados del geoplano, los y las estudiantes no tendrán ninguna dificultad para el cálculo del área. La unidad, obviamente, será el cuadrado de lado unidad. En el caso de los cuadrados cuyos lados sean oblicuos a los lados del geoplano se utilizarán tanto lo que nosotros denominamos «método puzle» o de «dentro a fuera», que consiste en dividir el cuadrado cuya área se desea calcular en 4 triángulos y un cuadrado cuyos lados son paralelos a los lados del geoplano y cuyas áreas se calculan de manera inmediata, y el que llamamos «método marco» o procedimiento de «fuera a dentro», que consiste en inscribir el cuadrado de lados oblicuos en otro de lados paralelos a los lados del geoplano: en este caso el área del cuadrado interior será la del cuadrado grande menos la de los cuatro triángulos iguales que se forman en las esquinas (figura 7).



Método *puzzle* Método *marco*

Figura 7

Tras el cálculo del área de cada uno de estos cuadrados, el profesor o la profesora pedirá a sus alumnos que indiquen cuál sería la longitud de su lado. La manera de indicar la solución dará lugar a un nuevo debate y reflexión.

...cómo encontrar la medida exacta de los diferentes segmentos, que nos permita ordenarlos según su longitud.

La mayoría habrá optado por dar una expresión decimal, cuyo valor habrán obtenido con la calculadora. Como no todas las calculadoras mostrarán el mismo número de dígitos y, además, no todos habrán hecho el redondeo con el mismo número de decimales surgirá de nuevo la controversia acerca de qué resultado ha de ser el admitido por todos. El profesor o la profesora aprovechará este hecho para que los alumnos y alumnas admitan y comprendan la imposibilidad de expresar con exactitud el valor de estos radicales en forma decimal. Puede ser el momento, si se considera oportuno, de hablar de cuestiones como números irracionales, infinitas cifras decimales no periódicas, redondeo y cifras significativas,... Las características del grupo clase, sus conocimientos previos, el tiempo del que se disponga, etc. serán factores que el profesor o la profesora habrá de valorar. En cualquier caso, el contexto puede ser muy adecuado para introducir estas cuestiones, así como otras, como la simplificación de radicales que se explicará entre las actividades de ampliación.

En cualquier caso, y volviendo a la tarea que nos habíamos propuesto, tras esta reflexión habrá de surgir el acuerdo de expresar el resultado exacto mediante la forma radical y que las medidas aproximadas, salvo excepciones, se darán con tres cifras significativas y redondeando. Los alumnos y alumnas, a continuación, hallarán la longitud exacta de todos los segmentos distintos del geoplano 5 x 5, a partir de los correspondientes cuadrados, y confeccionarán una tabla con los resultados que van obteniendo, ordenando en la misma los segmentos en función de su longitud. Como en el geoplano de 5 x 5 no pueden construir todos los cuadrados que tienen por lados los segmentos citados, se pedirá que utilicen para ello las tramas cuadradas de puntos.

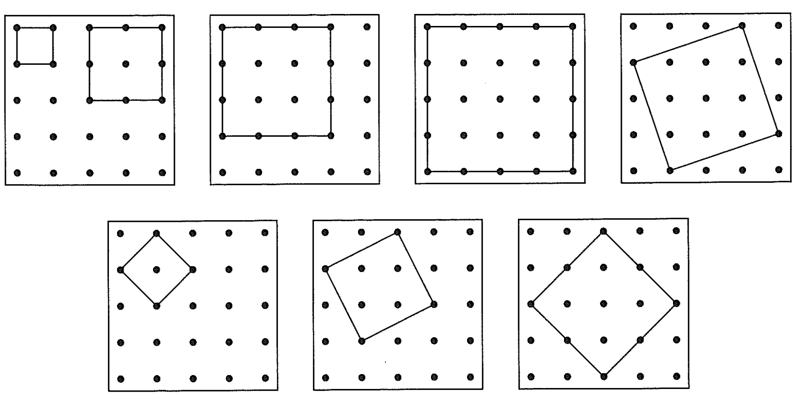
El resultado que se espera obtener es el reflejado en el siguiente cuadro:

Segmento	*Área cuadrado*	*Longitud exacta*	*Longitud aproximada*
(1, 0)	1	1	1
(1, 1)	2	$\sqrt{2}$	1,41
(2, 0)	4	2	2
(2, 1)	5	$\sqrt{5}$	2,24
(2, 2)	8	$\sqrt{8}$	2,83
(3, 0)	9	3	3
(3, 1)	10	$\sqrt{10}$	3,16
(3, 2)	13	$\sqrt{13}$	3,61
(4, 0)	16	4	4
(4, 1)	17	$\sqrt{17}$	4,12
(3, 3)	18	$\sqrt{18}$	4,24
(4, 2)	20	$\sqrt{20}$	4,47
(4, 3)	25	5	5
(4, 4)	32	$\sqrt{32}$	5,66

Alternativa a las tareas 3 y 4 para el primer ciclo de ESO: cuadrados en el geoplano 5 x 5

En esta ocasión volvemos a plantear una situación de acción, de búsqueda, relacionada con la segunda actividad de refuerzo de la tarea 2. Se les pide que busquen el mayor número posible de cuadrados, de diferente superficie, que se pueden construir sobre un geoplano de 5 x 5. Además, y basándose en la tabla previamente construida, deberán «nombrar» a dichos cuadrados, esto es, deberán identificarlos por la longitud de sus lados, recurriendo al lenguaje de pares que habían ya elaborado en la actividad anterior.

Figura 8



Los cuatro más sencillos, los que tienen por lado los segmentos (1, 0), (2, 0), (3, 0) y (4, 0) no tienen ningún problema en dibujarlos. Los cuatro restantes que pueden dibujarse en el geoplano de 5 x 5 (ver figura 8), sí les cuesta más trazarlos, aunque si previamente han realizado la actividad de refuerzo n.° 2, o si les planteamos una situación de intercambio de mensajes, podrán hacerlo sin excesivas dificultades. La situación de formulación puede plantearse como sigue: tienen que dar instrucciones a los miembros de su grupo para que dibujen el mismo cuadrado que alguien de ellos ha dibujado previamente, sin que el resto lo vea, fijando un punto de partida. De esta forma se ven obligados a utilizar siempre el mismo par de números, por lo que toman conciencia, de una manera eficaz y no ambigua, de cómo se pueden dibujar. Por ejemplo, si se trata del cuadrado de lado (2, 1), el mensaje, tomando como punto de partida un punto adecuado, pues no todos sirven, tendría la siguiente forma: dos a la derecha y uno hacia arriba, uno a la derecha y dos hacia abajo, dos a la izquierda y uno hacia abajo, y, por último, uno a la izquierda y dos hacia arriba.

Una vez construidos sobre el geoplano y dibujados en sus fichas, les propondremos que los ordenen por tamaño, por su área o superficie, para lo cual tendrán que hallar dichas áreas, dado que a simple vista tienen dificultades para saber cuál de los dos elegidos es mayor y cuál menor. Si bien las áreas de los cuatro primeros se calculan inmediatamente, tomando obviamente como superficie unidad la del cuadrado de lado el segmento (1, 0), no ocurre lo mismo con las cuatro restantes. Las consideraciones hechas anteriormente sobre los métodos puzle y marco tienen aquí también toda su validez.

De esta manera pueden llegar a construir, en paralelo con la tabla de segmentos, una tabla de áreas de los ocho cuadrados construidos sobre el geoplano de 5 x 5, tabla que quedaría así:

1	4	9	16
2	5	10	
	8		

A continuación instauraremos en el aula una dialéctica de la validación, esto es, propondremos una situación en la que tengan que argumentar, realizando conjeturas y comprobando su validez, de acuerdo con la comparación de las dos tablas construidas en las dos tareas anteriores. Esto es, teniendo presentes las siguientes tablas:

Lados				*Áreas*			
(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)	1	4	9	16
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	2	5	10	
	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)		8		
		(3, 3)	(4, 3)				
			(4, 4)				

les pediremos que conjeturen, en primer lugar, cuál será el área del cuadrado de lado (4, 1), esto es, cuál será el valor que tiene que aparecer inmediatamente debajo del 16 en la tabla de las áreas. Comparando la segunda fila con la primera, es fácil de establecer la conjetura de que tiene que ser una unidad más que 16, por lo tanto podrán afirmar que el cuadrado de lado (4, 1) tendrá 17 unidades cuadradas de área. Hecho que comprobarán efectivamente construyendo y dibujando dicho cuadrado en un geoplano mayor, por ejemplo en el de 8 x 8 clavos, y calculando su área directamente por triangulación.

Si para pasar de la primera fila a la segunda añadimos una unidad, para pasar de la primera a la tercera, parece plausible pensar que hay que añadir cuatro unidades (comparando los valores 4 y 8 de la tabla de áreas), por lo que los cuadrados de lado (3, 2) y (4, 2), deberán tener unas áreas respectivas de 13 y 20 unidades cuadradas. También suele ser habitual que conjeturen que hay que multiplicar por dos. De nuevo comprobarán la conjetura, trabajando en el geoplano de 8 x 8 (ver figura 9) y calculando directamente las áreas de estos cuadrados por triangulación. Podrán calcular el área del cuadrado de lado el segmento (3, 2), sea sumando al cuadrado central el área de los cuatro triángulos que lo «bordean», esto es, mediante la suma 1+12 (puesto que cada triángulo tiene un área de 3 unidades cuadradas), o sea restando de 25 las 12 unidades cuadradas de los cuatro triángulos que bordean al cuadrado, esta vez por el exterior. De igual forma, el área del cuadrado de lado (4, 2) la calcularán así: 4 + (4 x 4) = 20 ó 36 - (4 x 4) = 20.

Por último, si para pasar de la primera a la segunda fila sumábamos una unidad, y para pasar de la primera a la tercera fila sumábamos cuatro unidades, la pregunta obvia es: ¿cuánto tendremos que sumar para pasar de la primera a la cuarta fila?; esto es, ¿qué área tendrán los cuadrados de lados los segmentos (3, 3) y (4, 3)? Como en este caso no tienen ningún ejemplo en el cual basarse para establecer la conjetura, les pediremos que los dibujen previamente en el geoplano de 8 x 8 y que calculen sus áreas por triangulación. Una vez hallados los valores (18 y 25, respectivamente), pediremos que los sitúen en la tabla de áreas, completándola con los valores obtenidos con anterioridad, quedando ésta de la siguiente manera:

Lados				*Áreas*			
(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)	1	4	9	16
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	2	5	10	
(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)		8			
	(3, 3)	(4, 3)					
		(4, 4)					

Ahora ya pueden conjeturar, en base a los datos empíricos, que para pasar de la primera fila a la tercera fila es preci-

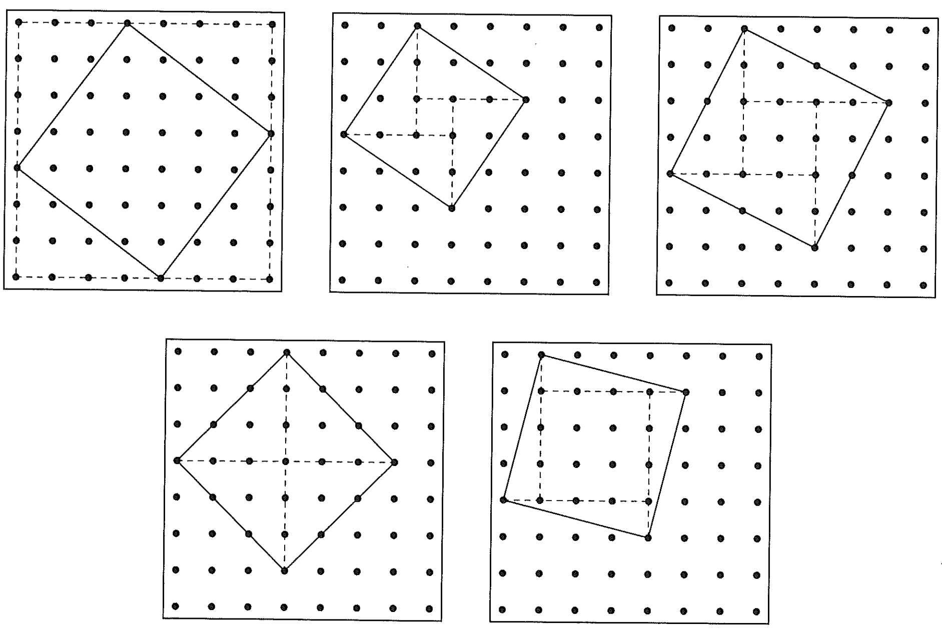


Figura 9

so sumar 9 unidades, lo que aprovecharemos para pedirles que generalicen: hemos obtenido los valores 1, 4 y 9 para pasar, respectivamente, a las filas dos, tres y cuatro, ¿cuánto tendremos que añadir para pasar a la fila cinco? El valor buscado, 16, lo utilizaremos, comprobando su validez, al construir en una trama cuadriculada el cuadrado de lado el segmento (4, 4) y calcular su área por triangulación. Efectivamente, obtenemos un área de 32 unidades cuadradas, esto es, 16+16, con lo que completaremos, de manera definitiva el cálculo del área de los catorce cuadrados en cuestión.

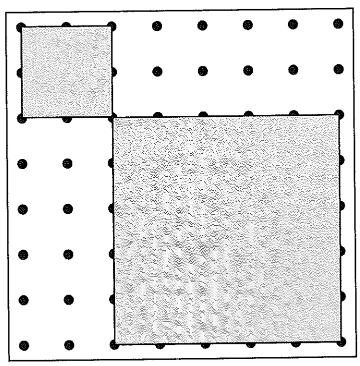
Tarea 5: descubrimiento en la tabla de la relación pitagórica y demostración del teorema de Pitágoras

Estará dirigida fundamentalmente a demostrar el teorema y comprobar su recíproco, porque, como se puede apreciar por lo realizado hasta ahora, en ningún momento hemos demostrado una relación general entre los valores numéricos de los lados y el área correspondiente. Todo lo más hemos comprobado empíricamente que si partimos del segmento (a, b), el área del cuadrado construido sobre dicho lado debe ser a^2+b^2. Generalización que es fácil de realizar al observar la tabla obtenida, tanto por uno como por otro camino. En el caso de la primera propuesta de tareas 3 y 4, el análisis conjunto de las columnas primera y tercera de la tabla permite ver la relación pitagórica. En el caso de las tareas 3 y 4 propuestas para el primer ciclo de ESO es fácil comprobar que tanto en sentido horizontal (al pasar de una columna de la tabla de áreas a la siguiente), como en sentido vertical (al pasar de una fila a la siguiente), hemos encontrado la serie de los cuadrados 1, 4, 9, 16,...

Este es el momento para incidir en la diferencia entre una comprobación empírica y una generalización, basada en datos calculados concretamente, y una demostración rigurosa en términos matemáticos, entre las pruebas para decidir y las pruebas para saber. Como es de prever por las actividades descritas con anterioridad, la demostración que vamos a «enseñar» está en la línea de la realizada por los árabes, los cuales no recurrían a la demostración euclídea para la demostración del teorema de Pitágoras. Esto es, vamos a procurar que los alumnos demuestren la relación pitagórica, basándose en la generalización de los métodos de cálculo empíricos que han utilizado previamente al calcular las áreas de los catorce cuadrados citados.

...vamos a procurar que los alumnos demuestren la relación pitagórica, basándose en la generalización de los métodos de cálculo empíricos que han utilizado previamente al calcular las áreas de los catorce cuadrados citados.

Para ello les proponemos que estudien, recurriendo al caso general de un segmento (a, b), cuál será el área del cuadrado construido sobre el mismo. Será el momento de introducir los términos «catetos» (a y b) e «hipotenusa» (c) así como de recordar la fórmula del binomio al cuadrado, esto es, que $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Para ello, si es preciso, recurriremos de nuevo al geoplano de manera que puedan visualizar y explicar por qué es correcta dicha fórmula (ver figura 10), identificando los cuadrados y los dos rectángulo de área axb.


$(5+2)^2$

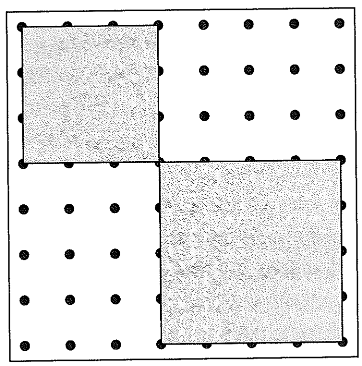

$(4+3)^2$

Figura 10

Como dado cualquier triángulo rectángulo de catetos *a* y *b*, siempre podemos construir el cuadrado sobre la hipotenusa *c* de manera que quede inscrito en el cuadrado de lado a+b, generalizando lo realizado empíricamente con antelación en los casos de los segmentos no horizontales y basándonos en el método «marco» o cálculo de «fuera a dentro», tendremos que $c^2 = (a+b)^2-4(1/2)ab$, esto es, obtendremos que $c^2 = a^2+b^2$.

De la misma forma, podríamos demostrar la relación pitagórica recurriendo al método «puzle» o procedimiento de «dentro afuera», esto es, sumando al cuadrado de lado (b–a) los cuatro triángulos de catetos *a* y *b*, llegando a idéntica conclusión al recurrir a la fórmula de la diferencia de un binomio al cuadrado.

El recíproco del teorema, o la demostración que si en un triángulo se satisface la relación pitagórica necesariamente es rectángulo, lo pueden comprobar fácilmente trazando triángulos acutángulos y obtusángulos en un geoplano de 5 x 5 y estudiando la relación entre los cuadrados construidos sobre sus lados. Con los datos de la tabla de áreas anterior llegarán fácilmente a percatarse que en el caso de los triángulos acutángulos, la suma de dos de los cuadrados es siempre superior a la del tercero, mientras que en el caso de los triángulos obtusángulos comprobarán que uno de los cuadrados (precisamente el trazado sobre el lado opuesto al ángulo obtuso) tiene una área superior a la suma de los dos restantes.

Tarea 6: generalización

Se trataría, por último de generalizar a otros contextos el teorema y de aplicarlo en la resolución de distintos problemas de cálculo de distancias en el plano o en la resolución de problemas puramente geométricos (hallar la altura de distintos triángulos, etc.).

En este contexto una actividad interesante es proponerles que, en grupo, estudien si el teorema es válido cuando trazamos sobre los lados de un triángulo rectángulo otras figuras geométricas, concretamente, triángulos equiláteros o semicírculos. De esta manera se ven obligados a calcular la fórmula del área de un triángulo equilátero, hallando previamente una expresión de la altura en función del lado, para lo cual deben recurrir necesariamente al teorema de Pitágoras. Basándose en él se llega fácilmente a la demostración de que efectivamente la suma de áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos es igual al área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa, así como que la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos es asimismo igual al área del semicírculo trazado sobre la hipotenusa.

Si la unidad didáctica se propone en el segundo ciclo de la ESO hay una actividad de ampliación particularmente interesante que es la comparación de los números irracionales que aparecen en la actividad 4. La rápida constatación en el geoplano de que el segmento (2, 2) mide exactamente el doble que el segmento (1, 1), sugiere la búsqueda de otras relaciones similares entre los segmentos hallados. Así, fácilmente encontrarán que el segmento (3, 3) mide el triple que el segmento (1, 1), el (4, 4) es el cuádruple del (1, 1) o el doble que el (2, 2), el segmento (4, 2) mide el doble que el (2, 1). Así pues, pueden escribirse igualdades como las siguientes:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad \text{etc.}$$

lo que da un significado geométrico a las relaciones entre radicales y proporciona un buen punto de apoyo para explicar las operaciones aritméticas que permiten la simplificación de determinados radicales:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \quad \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \quad \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

A nuestro parecer, el conjunto de actividades propuestas en torno al tema «Teorema de Pitágoras» satisfacen los principios psico-pedagógicos de intervención que se deducen de una concepción constructivista del proceso de aprendizaje de los conocimientos científicos y que se explicitan como los más adecuados en el DCB.

Tarea 7 visión retrospectiva

Por último retomaríamos la actividad inicial, la que planteábamos a modo de «organizador avanzado» antes de desarrollar el conjunto de tareas que acabamos de describir, con la finalidad de que se expliquen, en pequeño grupo, por qué los cuadrados de 15 y 20 cm de lado configuran, al partirlos por determinados sitios, uno de 25 cm de lado. Será el momento también de resolver el problema algebraico que permite determinar, para cualquier terna pitagórica, el lugar exacto por donde realizar los cortes oblicuos de manera que podamos lograr la disposición deseada, actividad realizada en gran grupo (figura 2).

Se vuelve asimismo a estudiar la ficha que les habíamos entregado al comienzo de la unidad didáctica, y se introduce una situación de institucionalización de los conocimientos adquiridos en torno al estudio del teorema de Pitágoras. Para ello es conveniente plantearles que en una ficha definan los términos aprendidos (hipotenusa, catetos y la relación entre ellos) y expresen las ideas esenciales del recorrido realizado para demostrar tal relación. De esta manera cuando necesiten más adelante del teorema, sea al estudiar vectores, o distancias entre puntos o rectas en el plano cartesiano, etc., tendrán un instrumento útil y elaborado por ellos mismos al que recurrir.

A modo de recapitulación

A nuestro parecer, el conjunto de actividades propuestas en torno al tema «Teorema de Pitágoras» satisfacen los principios psico-pedagógicos de intervención que se deducen de una concepción constructivista del proceso de aprendizaje de los conocimientos científicos y que se explicitan como los más adecuados en el DCB. Asimismo, satisfacen los criterios recogidos en las orientaciones para la enseñanza y evaluación de dicho documento referidos al área de Matemáticas en la Educación

Secundaria Obligatoria. Pero no nos conformamos con poner de manifiesto los principios generales comunes a todas las áreas, a saber: es preciso partir del nivel de desarrollo del alumno, asegurando aprendizajes significativos, posibilitando que los realicen por sí mismos, mediante una modificación de sus esquemas de conocimiento, y a través de la realización de una intensa actividad por su parte, quedan perfectamente recogidos en la propuesta de actividades y tareas que acabamos de realizar. Pretendemos mostrar además cómo los principios de procedimiento asumidos, al menos los cinco más generales y determinantes de la metodología propuesta, también se han concretado en el desarrollo propuesto:

El profesor o la profesora,

- se centrará en la organización de las actividades de sus alumnos y alumnas, teniendo en cuenta los contenidos a aprender;
- planteará situaciones de aprendizaje en las que sus alumnos puedan adquirir progresivamente las nuevas nociones basándose en sus conocimientos anteriores y primitivos;
- procurará que en cada situación de acción perciban un problema a resolver, una dificultad que quieran y deban superar;
- favorecerá que identifiquen, inicien y desarrollen sus propios problemas relacionados con las situaciones planteadas;
- permitirá que utilicen sus conocimientos previos, aunque no sean eficaces para la resolución de la situación.

Bibliografía

ALEKSANDROV, A. D., A. N. KOLMOGOROV, M. A. LAURENTIEV y otros (1973): *La matemática, su contenido, método y significado* (3 vols.), Alianza, Madrid.

ALSINA, C., C. BURGUES y J. M. FORTUNY (1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ARGÜELLES, J. (1989): *Historia de la matemática*, Akal, Madrid.

ARRIETA, J. (1986): «La teoría de Piaget y el desarrollo curricular en matemáticas: a) de la estructuras a las funciones; b) de las acciones a las operaciones», en *Actas del I Simposio sobre Psicología del Aprendizaje y Desarrollo Curricular*, realizado en Oviedo, 140-164.

— (1989): «La resolución de problemas y la educación matemática: hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 7(1), 63-71.

— (1989): «Investigación y docencia en didáctica de las matemáticas: hacia la constitución de una disciplina», *Studia Pedagógica*, n.° 21, 7-17.

— (1993): «¿Qué fué de la matemática moderna? Análisis didáctico del diseño curricular del área de Matemáticas», *Signos. Teoría y práctica de la educación*, n.° 8-9, 94-101.

BAS, M. y J. BRIHUEGA (1987): *Geoplanos y Mecanos*, MEC, Madrid.

BEDOS, M., M. FORNS y otros (1983): «Mesures de superficie i geoplá», *L'Escaire*, n.° 11, 9-16.

BELL, A. W., J. COSTELLO y D. KUCHEMANN (1983): *A Review of Research in Mathematical Education. Research on Learning and Teaching*, N.F.E.R.-Nelson, Windsor.

BELL, A. (1987): «Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas», en A ÁLVAREZ (comp.): *Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica.* Actas de las II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación, Aprendizaje Visor, Madrid, 73-93.

BROUSSEAU, G. (1986): «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7.2, 33-116.

— (1990): «Le contrat didactique: le milieu», *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.9 (3), 309-336.

CALVO, C. y otros (1986): *Matemáticas. Geometría*, Dirección General de Educación Básica, MEC, Madrid.

CASCALLANA, M. T. (1988): *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*, Santillana, Madrid.

CASTELNUOVO, E. (1973): *Geometría intuitiva*, Labor, Barcelona.

FIELKER, D. S. (1985): «Siete estrategias para plantear problemas en geometría», en MEC, *La enseñanza de la matemática a debate*, Madrid, 97-109.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*, Reidel, Holland.

— (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

GARCÍA ARENAS, J. y C. BERTRÁN (1987): *Geometría y Experiencias*, Alhambra, Madrid.

GATTEGNO, C. (1964): «La percepción y la acción como bases del pensamiento matemático», en C. GATTEGNO y otros, *El material para la enseñanza de las matemáticas*, Aguilar, Madrid, 3-12.

GATTEGNO, C. (1964): «Materiales multivalentes», en C. GATTEGNO, y otros, *El material para la enseñanza de las matemáticas*, Aguilar, Madrid, 210-221.

GONOBOLIN, F. N. (1979): «Pupils'comprehension of geometric proofs», en J. W. WILSON, *Soviet Studies in the psychology or learning and teaching mathematics*, University of Chicago, vol. XII, 61-90.

GORMAN, P. (1988): *Pitágoras*, Crítica, Barcelona.

GRUPO CERO DE VALENCIA (1987): *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas*, Mestral Llibres, Valencia.

GUZMAN, M. de (1989): «Tendencias actuales de la Enseñanza de la Matemática», *Studia Paedagógica*, 21, 19-26.

HOWSON, A. G., C. KEITEL y J. KILPATRICK (1981): *Curriculum Development in Mathematics*, Cambridge University Press.

JAIME PASTOR, A. y A. GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ (1990): «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el Modelo de Van Hiele», en S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*, Alfar, Sevillla, 295-382.

LAKATOS, Y. (1978): *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza, Madrid.

LERENA, C. (1985): *Materiales de sociología de la educación y de la cultura*, Grupo Cultural Zero, Madrid.

MEAVILLA, V. (1986): *La geometría como soporte de diversas cuestiones matemáticas*, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado-MEC, Madrid.

MEC (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria II*, MEC, Madrid.

— (1992): *Secundaria Obligatoria. Matemáticas*, MEC, Madrid.

ORTON, A. (1990): *Didáctica de las matemáticas*, Morata, Madrid.

PIAGET, J. (1973): «Comments on mathematical education», en A. G. HOWSON, *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, 79-87. (Traducción al castellano en J. HERNÁNDEZ (comp.), *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza, Madrid, 1978).

— (1978): Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático, Paidós, B. Aires.

POLYA, G. (1982): *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, (10ª ed.).

RADICE, L. L. (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona.

RIGON GRANDESSO, M. (1979): «Sobre el geoplá Gattegno de 9 puntes», *L'Escaire*, n.° 3, 5-21.

SHOENFELD, A. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Nueva York.

SKEMP, R. (1980): *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, Morata, Madrid.

STEINER, H-G. (1987): «Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education», *For the Learning of Mathematics* 7, 1, 7-13.

STODOLSKY, S. S. (1991): *La importancia del contenido en la enseñanza. Actividades en las clases de matemáticas y ciencias sociales*, Paidós-MEC, Madrid.

THOMAS, Y. (1968): «Matemáticos griegos», en J. R. NEWMAN, *SIGMA. El mundo de las matemáticas* (Vol. 1), Grijalbo, Barcelona, 116-137.

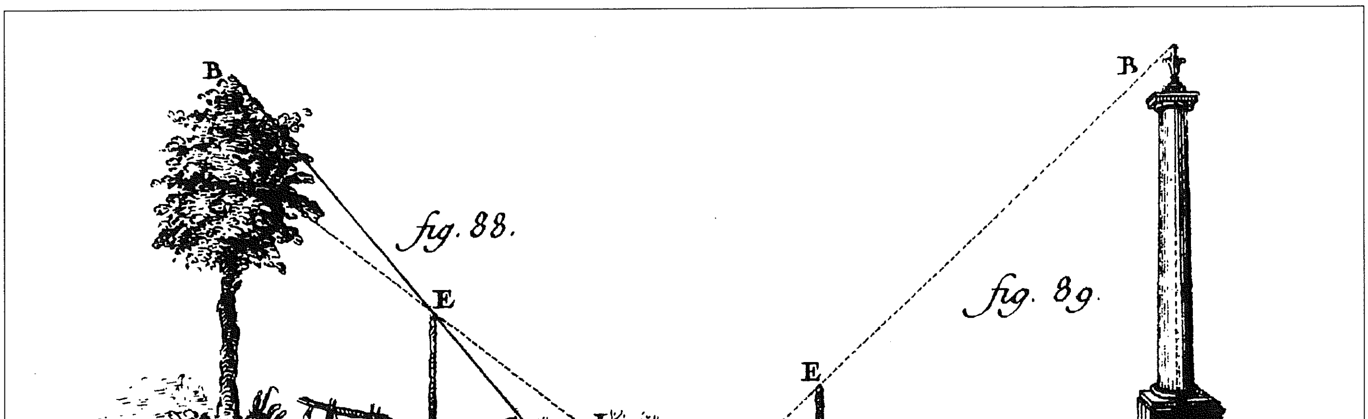
TURNBULL, H. W. (1968): «Los grandes matemáticos», en J. R. NEWMAN, *SIGMA. El mundo de las matemáticas* (Vol. 1), Grijalbo, Barcelona, 4-96.

VAN HIELE, P. M. (1986): *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education,* Academic Press, London.

VELARDE, J. (1992): «Teoría del "cierre categorial aplicado a las matemáticas"», en AA.VV., *La filosofía de Gustavo Bueno*, Revista Meta, Complutense, Madrid, 105-126.

VERGNAUD, G. (1988): «Psicología Cognitiva y del Desarrollo y Didáctica de las Matemáticas», en F. HUARTE (Coord.), *Temas actuales sobre psicopedagogía y didáctica*, Narcea, Madrid, 239-255.

Josetxu Arrieta
José Luis Álvarez
Antonio E. González
Sociedad Asturiana
de Educación Matemática
Agustín de Pedrayes



SUMA 25
junio 1997, pp. 87-89

Investigar en Didáctica de las Matemáticas, ¿dónde, quiénes?

Jose Antonio Rupérez Padrón

A Gonzalo Sánchez Vázquez

Se expone la necesidad, por coordenadas temporales y de localización, de disponer de Equipos de Investigación en Didáctica de las Matemáticas en los que se integren profesores de todos los estamentos y, también, lo imprescindible que resulta la existencia de organismos nacionales o internacionales que coordinen y difundan esas investigaciones.

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

CON el Profesor Gonzalo Sánchez mantuve, en escenarios muy diferentes, conversaciones muy similares. Sobre la mejora de la enseñanza de las matemáticas hablamos en La Gomera, en Madrid, en Quebec,... Lamentablemente no lo pudimos hacer en Sevilla, en la ciudad de cielo luminoso que el Guadalquivir se encarga de reflejar y los sevillanos de contagiar. Este año pasado, los casi cuatro mil visitantes del ICME creemos haber dejado en la capital andaluza un poco de nosotros, una parte no tan infinitesimal que Gonzalo, seguro, habrá ido recogiendo, añadiéndolas, para formar un duende matemático que ahora se puede columbrar entre las calles estrechas del barrio de Santa Cruz.

En alguna de esas conversaciones hablamos acerca de la necesidad de que los grupos que hacían investigación sobre didáctica de las matemáticas, fuesen grupos integrados por investigadores universitarios y profesores de secundaria y primaria en ejercicio. Esa idea que intentábamos concretar, ya estaba latente hace muchos años y, en algunos lugares, llevada a la práctica. Así y todo quisiera exponer algunas reflexiones al respecto, en su homenaje.

«Todos los titulados deberían hallarse familiarizados con la investigación científica en Educación» dice J. W. Best en un trabajo que durante muchos años fue el texto preferido de los educadores americanos y, aunque antiguo y orientado a la realización de tesis doctorales, contiene ciertos principios que conviene, por renovados, considerar.

Exponiendo algunas de las cosas que él dice y que la Conferencia Internacional de Instrucción Pública recomienda, siguen algunas consideraciones sobre investigación en Educación Matemática.

¿Quiénes hacen investigación en Educación? Y entre ellos, ¿quiénes en Educación Matemática? A niveles generales, la investigación se lleva a cabo en dos estamentos docentes: el universitario y el no universitario.

Los primeros lo hacen, dado que las investigaciones se centran en los términos de educación y matemáticas, en Facultades y Centros de Educación Superior, titulados en Ciencias de la Educación, Pedagogía, Psicología o Matemáticas (los menos).

Estos licenciados, de los cuales una parte considerable no ha ejercido docencia directa con alumnos de niveles no universitarios, han venido publicando investigaciones sobre aprendizaje y enseñanza desde hace muchos años. Pero es en tiempos más recientes cuando se leen los resultados de profesores de matemáticas que investigan sobre aspectos pedagógicos de su materia. Recientemente, por ejemplo, se han leído dos tesis en la Universidad de La Laguna.[1]

Los no universitarios mediante grupos de trabajo, sociedades de profesores, seminarios permanentes, por iniciativa propia, desde centros de profesorado y por análogos grupos y métodos.

Para toda acción educativa es necesario un conocimiento metódico del niño, del adolescente y del hombre en general. Y para solucionar los problemas educativos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, es necesario una investigación objetiva, sistemática y experimental, y para los problemas de investigación pedagógica, conviene encontrar soluciones variadas que respondan a las condiciones, posibilidades, tradiciones y estructuras de cada lugar y situación.

La investigación de aspectos aislados son importantes, pero no son aprovechables si no existe algún tipo de coordinación, de sistematización y publicidad de esa investigación y sus resultados.

Las reformas de planes de estudio, procesos de evaluación, tecnologías y los propios cambios sociales, culturales y laborales, hacen necesario el reconsiderar algunos aspectos de la investigación e innovación en Educación Matemática.

Los fines de este tipo de investigación, publicados hace más de treinta años por la Conferencia Internacional de Instrucción Pública, eran, entre otros, los siguientes:

...para solucionar los problemas educativos en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, es necesario una investigación objetiva, sistemática y experimental...

1 Revista NÚMEROS de la Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas. Marzo de 1997.

«a) La calidad de la educación extraescolar dada por la familia, las organizaciones gubernamentales y no gubernamentales de la juventud...

b) El rendimiento de los métodos de orientación escolar y profesional.

c) La calidad y el nivel de dificultad de los manuales...»

Llevar a cabo este proceso supone disponer de laboratorios o centros experimentales, de créditos o fondos suficientes, de personal, de medios de difusión de resultados, de capacidad para aplicar esos resultados, etc.

La puesta a punto de programas, métodos, medios y procedimientos de valoración, son objetivos de la investigación, y sus resultados deben gozar de una difusión suficiente que garantice su aplicación.

Pero dónde y cómo llevar a cabo todo esto. ¿Hay centros de investigación pedagógica en matemáticas? Algunas universidades poseen departamentos y cátedras que se acercan a este cometido; tal es el caso de las denominadas Cátedras de Didáctica de la Matemática, con profesores especializados y equipos que trabajan aunadamente.

Estos grupos deberían conectarse, de forma intensa y profunda, con aquellos docentes calificados, a título individual o en tanto que grupos, en investigaciones organizadas de forma sistematizada por las instituciones educativas.

La participación en la investigación del profesorado activo es también un medio de asegurar el perfeccionamiento profesional de los docentes permitiendo que la investigación en didáctica de la matemática alcance su objetivo último: el mejoramiento de la educación matemática.

Este profesorado debería ser favorecido con facilidades especiales; reducción de horario lectivo y remuneración conveniente.

Los profesores que emprenden investigaciones y lleven a cabo experimentos pedagógicos deben formar parte y estar respaldados por ese Equipo de Investigación que proponemos, recibiendo los consejos técnicos necesarios en cuanto a la metodología de aplicación de las pruebas y también en la referente al proceso de investigación en sí.

Además de repercutir en los profesores relacionados con el Equipo de Investigación, esos resultados deben revertir en los programas de formación de futuros docentes y de docentes en activo a través de cursos de perfeccionamiento.

Esas líneas de investigación no pueden evolucionar localmente, sin relacionarse y coordinarse a nivel nacional e internacional.

Organismos supranacionales deberían seguir manteniendo vías y foros para esa coordinación y tener el prestigio necesario como para que emane autoridad, y poder organizar, a través de servicios de comunicación, definiendo temas comunes, orientaciones sobre líneas de investigación, evitar duplicaciones, facilitar las adaptaciones nacionales y regionales de resultados, etc.

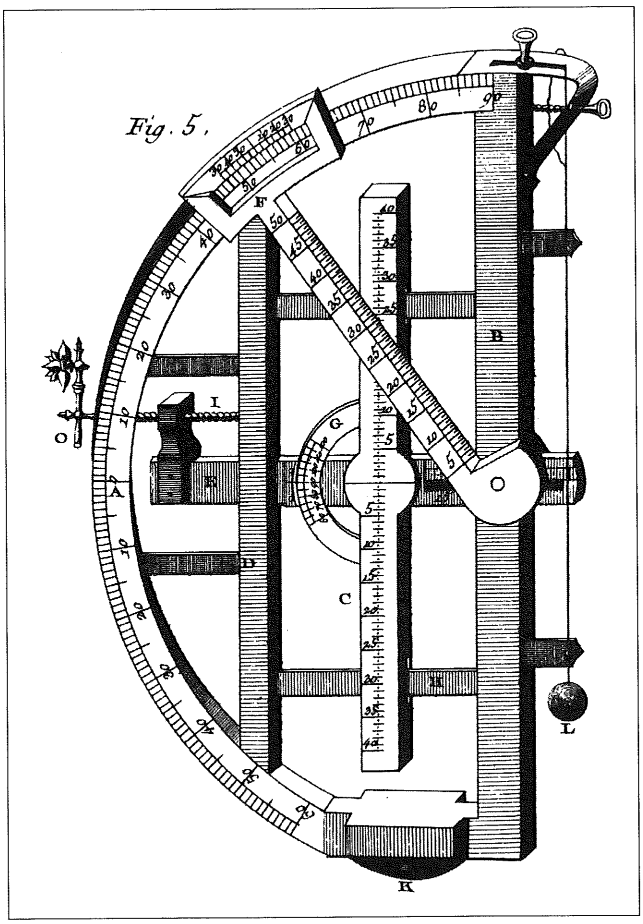
El desarrollo inesperado que redes internacionales de comunicación han experimentado en el último lustro, induce a considerar que debería existir un lugar común donde se conjuguen los esfuerzos de coordinación emprendidos por organismos o centros de algunos países e internacionales, y donde los países más adelantados en este campo permitan que regiones con menos recursos se beneficien de los resultados de esas investigaciones.

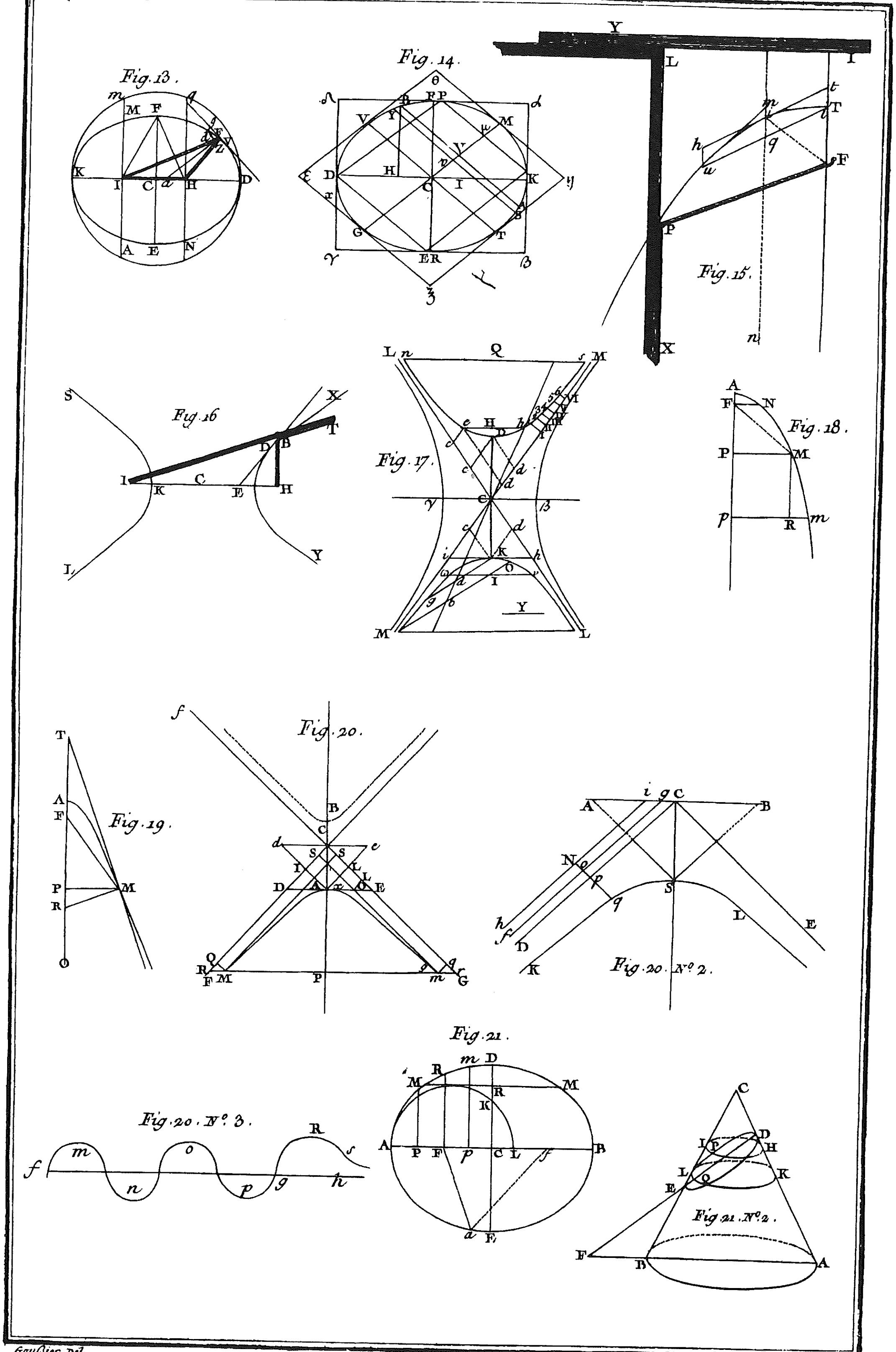
La Federación que publica esta revista y los organismos ya existentes a nivel internacional deberían asumir este reto en los niveles en los que son competentes. Los departamentos universitarios que investigan en Didáctica de la Matemática deben integrar en Equipos de Investigación a profesores de secundaria y primaria en activo, con el auspicio de las entidades educativas competentes, cara a un enriquecimiento mutuo y un futuro lleno de resultados. Un duende matemático vela por ello.

José Antonio Rupérez
Sociedad Canaria
Isaac Newton
de Profesores
de Matemáticas

Bibliografía

BEST, J. W. (1972): *Cómo investigar en educación*, Ediciones Morata, Madrid.





Goussier Del.

Benard Fecit.

Sections Coniques.

SUMA 25
junio 1997, pp. 91-96

Medios electrónicos: gráficas y sonido en las funciones periódicas

Luis C. Cachafeiro Chamosa
Francisco M. Rodríguez Mayo

In memoriam

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

En este trabajo se presentan una serie de actividades realizadas para el 2.° ciclo de ESO, BUP y Bachillerato LOGSE, en las que se quiere resaltar la conexión entre las funciones periódicas y diversos ejemplos de ondas. Aprovechando algunos equipos electrónicos se consigue hacer evidente el significado de algunas operaciones sobre funciones como la suma, el producto por un número, la composición de una funcion lineal con una función sinusoidal.

LAS FUNCIONES sinusoidales suelen plantearse, en la asignatura de Matemáticas, de una forma teórica, esto es, sin relacionarlas directamente con una serie de fenómenos periódicos que pueden matematizarse fácilmente y relacionadas con experiencias de los alumnos.

Aquí queremos mostrar una experiencia llevada a cabo en nuestros respectivos centros, donde queremos darle un contenido real a las funciones periódicas, relacionándolas con los movimientos ondulatorios y más concretamente con el sonido en general y el habla humana en particular. Conceptos como amplitud y frecuencia están prácticamente ignorados en el currículo y, sin embargo, son precisamente dos aspectos fundamentales que se deben considerar en los fenómenos periódicos. El estudio de los fenómenos periódicos proporciona una herramienta ideal para observar a nivel experimental el significado de otros conceptos matemáticos como la suma de funciones, el producto por constantes o la proporcionalidad inversa. Evidentemente, al tratar los fenómenos ondulatorios se solapan contenidos de Física, Tecnología y Matemáticas. Creemos que, por resultar muy atractiva para los alumnos y muy rica en situaciones matemáticas, es conveniente incluir algunas o todas las actividades que se presentan, directamente en el aula de Matemáticas.

Nuestros objetivos en la experiencia son los de, por una parte, trabajar en lo que se ha dado en llamar «Aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana» (Corbalán, 1996) y, por otra, experimentar con materiales en el aula utilizándolos tanto como sustitutos de la pizarra, como materiales que permitan investigar sobre una situación que se les propone (Barba y Esteve, 1996). Uno de los instrumentos que utilizan nuestros alumnos es la calculadora gráfica que tiene unas ventajas de rapidez y portabilidad francamente interesantes. El uso que se le da en este trabajo a la calculadora gráfica es el de trazado de gráficas funcionales. Otros usos de la calculadora gráfica en Análisis en nivel de bachillerato pueden verse en Salinas (1996).

Para comenzar la descripción de nuestra experiencia, podemos ver los principales conceptos matemáticos presentados, si bien no se hace un uso explícito de todos ellos. Entre éstos:

- Función periódica: período y amplitud. Continuidad de una función.
- Suma de dos funciones y producto de una función por un número.
- Representación de funciones: extremos, crecimiento, escalas, etc.
- Composición de una función lineal con una función periódica.

En el currículo de Matemáticas de secundaria se hace hincapié en los procesos de matematización de los resultados obtenidos por observación y experimentación de la realidad (DCB). Esto exige o bien el uso de instrumentos que nos proporcionen esos datos o su conocimiento indirecto. Evidentemente, siempre que sea posible, es preferible presentarlos directamente tanto por la calidad intrínseca de la experiencia, como por la mayor motivación que produce en el alumnado.

En los laboratorios de Física y de Tecnología se dispone habitualmente de algún osciloscopio y de generadores de ondas, que van a ser especialmente aprovechados en esta experiencia. El uso de estos instrumentos es más simple de lo que cabría esperar. Con unas pocas instrucciones de alguien que ya lo haya utilizado, podemos manejarlo por nosotros mismos.

Además del osciloscopio hemos utilizado la calculadora gráfica y un ordenador con tarjeta de sonido.

Introducción a las funciones periódicas

En una primera fase se consideran algunos fenómenos periódicos. Cada fenómeno periódico da lugar a una serie de distintas funciones periódicas que en algunos casos los alumnos deben inventar o describir. Entre estos fenómenos periódicos están:

Cada fenómeno periódico da lugar a una serie de distintas funciones periódicas que en algunos casos los alumnos deben inventar o describir.

- Los ciclos astronómicos (movimientos de la Luna, Tierra, Sol, etc.).
- Procesos biológicos (ciclo menstrual, latido cardíaco).
- Movimiento oscilatorio (péndulo, agujas del reloj).

Estudio de funciones periódicas sencillas

En estas actividades nos centramos en aquellos aspectos que pueden destacarse directamente a partir de la gráfica: amplitud, período, extremos, continuidad. A continuación se muestran ejemplos de algunas funciones periódicas y de distintas formas de introducirlas:

a) Funciones cuadradas:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [2i, 2i+1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [2i+1, 2i+2] \end{cases}$$

b) Funciones dadas directamente a partir de gráficas:

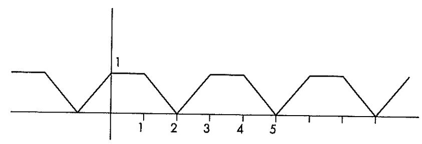


Figura 1

c) Funciones dadas mediante alguna descripción del fenómeno periódico:

Función que proporciona el número de horas en las que está el sol por encima del horizonte.

Para este último tipo, un instrumento que nos parece especialmente útil es un simple reloj de agujas que proporciona ejemplos de funciones continuas y no continuas. Sorprendentemente, no se suele considerar en los libros de texto ninguna de las funciones que se pueden estudiar directamente en un reloj y de las que a continuación mostramos un pequeño ejemplo:

1.°) Función y_1 que proporciona los minutos marcados en la aguja a partir de los minutos trascurridos desde las 0 horas. La gráfica de esta función no difiere de la figura 2 más que en la magnitud de la ordenada. Su fórmula es:

$$y_1 = 60 \cdot \mathrm{Dec}\left(\frac{x}{60}\right)$$

2.°) Función y_2 que proporciona los grados que forma la aguja de los minutos con la direccion y sentido 6h→12h. La fórmula para esta función es:

$$y_2 = 6 \cdot 60 \cdot \mathrm{Dec}\left(\frac{x}{60}\right)$$

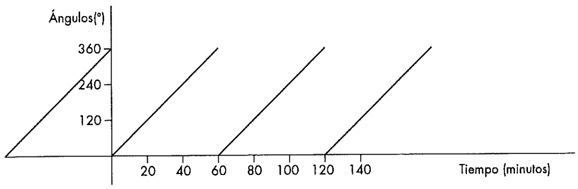


Figura 2

3.°) Función y_3 que proporciona la distancia del extremo del minutero a la posición de éste en las horas. Su fórmula es:

$$y_3 = \sqrt{\mathrm{sen}^2(6x) + (1 - \cos(6x))^2} = \sqrt{2 - 2\cos(6x)}$$

Ver figuras 3 y 4.

[Recordemos que la ecuación anterior utiliza los grados sexagesimales. Para la medida en radianes la fórmula es

$$d = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi x}{60}\right)}$$

El paso de una a otra forma es un ejemplo de proporcionalidad directa y es interesante su repaso].

Ondas sinusoidales y osciloscopio

El osciloscopio (ver figura 5) nos permite visualizar las ondas de diferentes forma producidas mediante un generador de ondas. Este último instrumento proporciona una corriente eléctrica de voltaje variable y de forma o sinusoidal o cuadrada o triangular, pudiendo variarse la frecuencia y la amplitud a voluntad. De esta forma, los alumnos observan la relación inversamente proporcional entre la frecuencia y el período de la función.

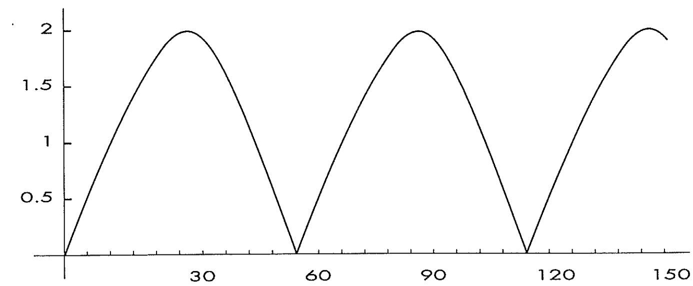


Figura 3

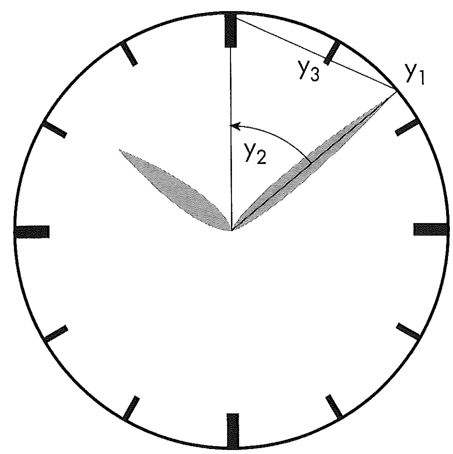


Figura 4. Un reloj permite definir varias funciones periódicas

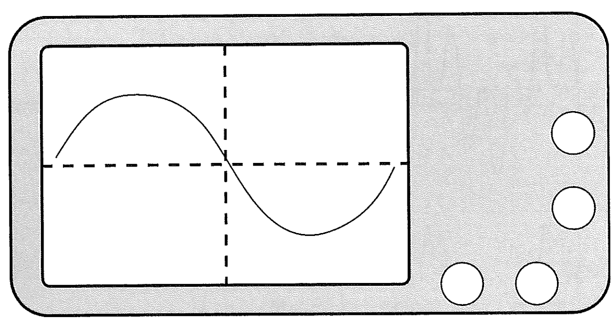


Figura 5

Una actividad particularmente interesante es la búsqueda, con ayuda de la calculadora gráfica, de la fórmula de la función sinusoidal que corresponde a las imágenes del osciloscopio, y que toma la forma general y = a·sen(b·x). Los alumnos tienen que averiguar los coeficientes *a* y *b* que aparecen en esa fórmula y cuya gráfica se corresponde con la que están visualizando en el osciloscopio. De esta forma la relación entre la *amplitud* y el *coeficiente a* y sobre todo la relación inversa entre *período* ↔ *coeficiente b* y la relación de proporcionalidad directa *coeficiente b* ↔ *frecuencia* aparecen nítidamente. Esta relación de proporcionalidad inversa es una de las mayores dificultades que se plantean en el proceso de matematización de las funciones periódicas.

Suma de funciones periódicas

El osciloscopio admite la entrada de dos ondas diferentes que pueden verse por separado o bien observarse como una única onda resultante de realizar la suma de ambas. Esto justifica el estudio de nuevas funciones periódicas: todas aquellas que pueden escribirse como

$$y = \mathrm{sen}(x) + a\cdot\mathrm{sen}(b\cdot x)$$

Se comprobará que este nuevo modelo matemático nos permite generar muchísimas funciones de formas aparentemente bien diferentes. Si bien este modelo sólo representa a una parte de las funciones periódicas, son similares a muchas de las que aparecen frecuentemente en los ejemplos y permitirá intuir cómo se pueden proporcionar, mediante nuevos sumandos, todas las funciones periódicas, en una forma simplificada del teorema de Fourier (Calus y Fairley, 1973).

Nuevamente, con la ayuda de la calculadora gráfica, los alumnos deben encontrar los coeficientes *a* y *b*, de la función y = sen(x) + a·sen(b·x). Para simplificar el problema, se introducen algunas restricciones:

$$0 < a < 1\ ,\ a \in \mathbb{R}$$

$$1 < b < 10,\ b \in \mathbb{Z}$$

El osciloscopio admite la entrada de dos ondas diferentes que pueden verse por separado o bien observarse como una única onda resultante de realizar la suma de ambas.

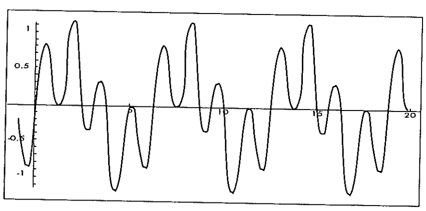
La calculadora gráfica permite obtener la gráfica de muchas funciones de este tipo, de forma que por tanteo, los alumnos suelen encontrar en poco tiempo los coeficientes. De hecho, aun con esta simplificación, observamos que prácticamente llegaron a generar intuitivamente un procedimiento de obtención de los coeficientes que era de aplicación en nuevos problemas no sujetos a esas restricciones.

A continuación, observamos que estas funciones aparecen en algunas funciones periódicas como movimientos de mareas, astronómicos, ciclos biológicos, etcétera.

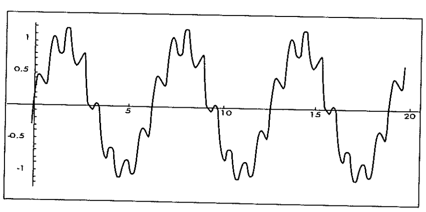
El sonido y el osciloscopio

Conectando un micrófono al osciloscopio, podemos estudiar una nueva fuente de generación de ondas periódicas: *la voz humana.* Esta actividad aparece en un breve trabajo presentado en esta misma revista por uno de los autores (Cachafeiro, 1989).

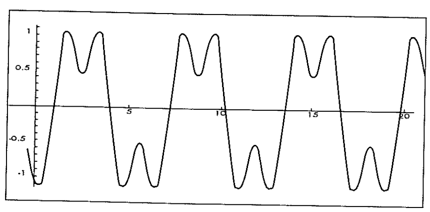
De forma natural se observa que la amplitud se corresponde con la intensidad y la frecuencia con el tono utilizado. Comprobamos que los sonidos que corresponden a una onda más simple son los de las vocales, en especial las vocales cerradas. De hecho, un «iiii...» cerrado lo vamos a ver en el esciloscopio como una onda sinusoidal. La forma de un «aaaa...» típico es muy parecida a la de la figura 6 (con a= 0,2, b= 8).



a=0,9
b=4



a=0,2
b=8



a=0,5
b=3

Figura 6

Existen diferencias notables en la frecuencia de los alumnos y de las alumnas así como entre la del profesor y del alumnado (por una cuestión de edad esencialmente).

Una onda curiosa se obtiene si se silba delante del micrófono pues su frecuencia es mucho más alta que la de la voz. Además si en esta onda se realiza una entonación, puede apreciarse claramente la existencia de una onda portadora similar a la de la emisión de ondas de radio de Modulación de Amplitud (AM). Por otra parte, éste es el ejemplo más claro de una función periódica que es exactamente suma de otras dos (silbido y entonación).

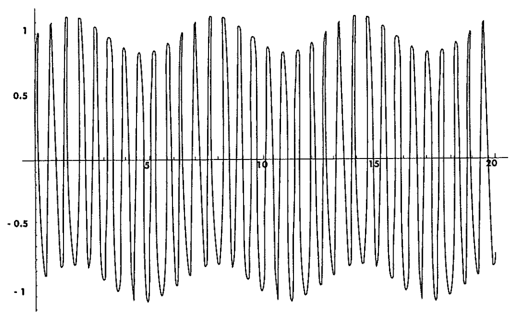


Figura 7

El ordenador: Sonido digitalizado

En esta actividad empleamos un ordenador con una tarjeta de sonido. Mediante software (proporcionado con la tarjeta) la corriente recibida del micrófono es dirigida por una parte al altavoz y por otra es enviada a una ventana similar a la del osciloscopio. Dadas las posibilidades del tratamiento digital, podemos:

- Ver la voz (como en el osciloscopio).
- Aumentar o reducir el volumen así como su frecuencia.
- Escuchar el sonido pero invertido (del final hacia atrás).
- Mezclarlo con otros sonidos almacenados por diversos métodos (CD, etc.).

El ordenador nos permite cerrar el proceso transformando una función matemática en un sonido con la ayuda de un programa apropiado...

Esta actividad permite recoger y ampliar algunas de las actividades anteriores e introducir nuevas actividades estimulantes como:

- Grabar en disquete el propio sonido del alumno.
- Medir la frecuencia de su habla y compararla con la de otros compañeros y compañeras, clasificando las frecuencias por sexo, edad, etc.
- Aclarar la diferencia entre reproducción digital y reproducción analógica.

En todo este proceso, empezamos convirtiendo el sonido en una onda que va a ser descrita a partir de una ecuación matemática. El ordenador nos permite cerrar el proceso transformando una función matemática en un sonido con la ayuda de un programa apropiado (por ejemplo, MATHEMATICA, MATLAB).

Otras actividades y conclusiones

En este trabajo hemos descrito una serie de actividades realizadas en varios cursos (BUP, ESO, Bachillerato LOGSE) pero aquí no están expuestas con el detalle y material escrito que reciben nuestros alumnos. Además, hemos pasado por encima de algunos de los problemas que el profesorado debe considerar en el aula (uso de distintas unidades de medida de ángulos, principales valores de las funciones trigonométricas elementales, etc.). Además hay actividades que consideramos pueden plantearse en un curso (3.° BUP, 1.° Bachillerato LOGSE) que no es posible hacerlo en otros. Entre éstas están:

Demostración de que la suma de funciones periódicas de períodos inconmensurables no es una función periódica.

Para ello, empleamos las funciones:

$$f(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = \cos\left(\sqrt{2}x\right)$$

La primera vale 1 para x = 0 y para valores de la forma $x = 2\pi n$ ($n \in Z$) mientras que g(x) toma el valor 0 para x = 0 y para los valores de x de la forma:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}m \quad (m \in Z)$$

En consecuencia, si f+g es periódica existirá otro valor de x_0 para el que f+g que valga 2 y por lo tanto

$$x_0 = 2\pi n = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}m$$

de donde

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

contradicción debido a la irracionalidad de $\sqrt{2}$

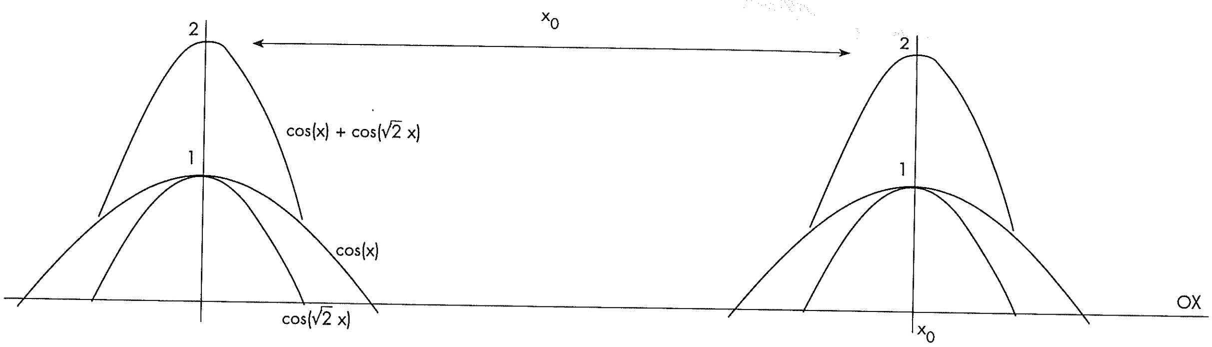


Figura 8

En ocasiones, también hemos empleado una función cuadrada de período 2 y otra de período $2\sqrt{2}$.

Esta actividad nos demuestra que no siempre la suma de dos funciones periódicas es una función periódica. Pero para el caso de la función y = sen(x) + sen(3x/2), ¿es una función periódica? Al representarla en la calculadora parece que, efectivamente, sí lo es. ¿Cual es su período? En una forma un tanto parecida a la actividad anterior, se comprueba que su período es 6π.

En resumen, en esta experiencia se ha planteado una forma de matematización de una serie de situaciones periódicas. Se pone énfasis en las operaciones sobre las funciones, mostrando que estas operaciones tienen un contenido fuertemente asociado a las propiedades de los fenómenos que se desea matematizar.

Luis C. Cachafeiro
Francisco M. Rodríguez
Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Sección de Matemáticas

Bibliografía

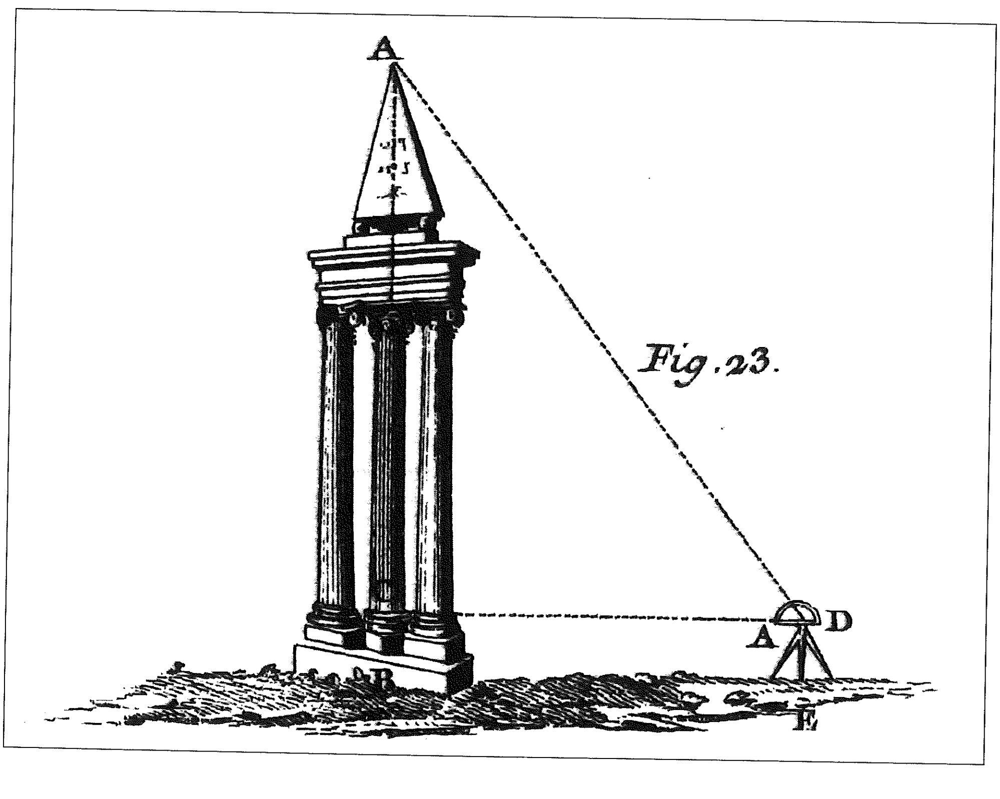
CALU, I. M. y J. A. FAIRLEY (Eds.) (1973): *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales*, Paraninfo, Madrid.

BARBA, D. y J. ESTEVE (1996): «Cómo cambiar la opinión impartiendo un curso: materiales para la enseñanza de las matemáticas», *Uno, Revista de Didáctica de las matemáticas,* n.° 7, 61-70.

CACHAFEIRO, L. C. (1989): «Buscando recursos para el aula», *Suma,* n.° 4, 43-45.

CORBALÁN, F. (1995): *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*, Graó, Barcelona.

SALINAS, E. (1996): «La calculadora gráfica en análisis», *Suma,* n.° 22, 59-62.



SUMA 25
junio 1997, pp. 97-111

Recuperación de instrumentos y unidades de medida tradicionales en Extremadura como motivación al estudio de la medida

Luis M. Casas García
Ricardo Luengo González
Cipriano Sánchez Pesquero

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

A la memoria de nuestro colega, profesor, y sobre todo amigo Gonzalo Sánchez Vázquez que nos animó y orientó en la creación de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática Ventura Reyes Prósper y con el que compartíamos el amor por la enseñanza de las Matemáticas y de la Geometría

Este artículo es una breve descripción del Proyecto de Innovación Educativa llevado a cabo en dos colegios públicos de Badajoz, que obtuvo el «Primer Premio Joaquín Sama a la Innovación Educativa» convocado por la Consejería de Educación y Juventud de la Junta de Extremadura. Culminó con una exposición en el ICME-8 de Sevilla en julio de 1996. Se investiga el uso y se recogen unidades e instrumentos de medida tradicionales en Extremadura, estudiando su evolución hasta llegar al sistema métrico decimal, equivalencias, uso actual e incluso su distribución geográfica.

ESTE PROYECTO, acogido a la convocatoria de Proyectos de Innovación Educativa convocados por el Ministerio de Educación y Ciencia, ha sido llevado a cabo durante los cursos 1994-95 y 1995-96 en los Colegios Públicos Juventud de Badajoz y San José de Guadajira (Badajoz).

Obtuvo el primer «Premio Joaquín Sama a la Innovación Educativa» convocado por la Consejería de Educación y Juventud de la Junta de Extremadura. Con tal motivo ha sido publicado íntegramente y distribuido a todos los centros educativos de la región extremeña, por lo que, para una descripción más detallada, remitimos a tal publicación.

Ha culminado con la exposición «Instrumentos y Unidades de Medida Tradicionales en Extremadura» en Sevilla, en el mes de julio de 1996, durante el desarrollo del VIII Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME 8), tercera de las realizadas, anteriormente, en los centros participantes en la experiencia.

El núcleo de la actividad ha sido conocer y valorar la utilidad de las Matemáticas en una de las actividades más cotidianas: medir. Investigando el uso de unidades e instrumentos que hicieron nuestros antepasados, intentando recuperar esas unidades y los aparatos que utilizaron para efectuar sus medidas, estudiar la evolución que sufrieron hasta llegar al sistema métrico decimal, las equivalencias con éste, apreciar si alguna de ellas está en uso y estudiar la distribución geográfica que ocuparon en nuestro entorno próximo, la región.

Origen del proyecto

La idea del proyecto surgió en la Sociedad Extremeña de Educación Matemática Ventura Reyes Prósper.

Para los profesores autores del mismo, el interés a la hora de ponerlo en marcha fue doble:

- En primer lugar, el deseo de profundizar en nuestras raíces, conocer y rescatar las unidades y los instrumentos de medida, utilizadas por nuestros antepasados, que aún se utilizaban en algunos pueblos de la región, para medir longitudes, superficies, capacidades, pesos, tiempos... y en torno a las cuales discurrían sus labores domésticas, comerciales, agrícolas, ganaderas e industriales.
- En segundo lugar, utilizar este tema como motivación para hacer más interesante a los alumnos el aprendizaje, de forma activa, de un tema de gran importancia dentro del currículo de Matemáticas: la medida, y realizar un estudio, buscando caminos alternativos para una mejor enseñanza a partir de la investigación, observación y experimentación del conocimiento sobre las unidades de medidas utilizadas por nuestros antepasados en un tiempo no muy lejano.

Los autores del trabajo consideraron que esta actividad podía ser también un buen motivo para que sus alumnos enriquecieran su vocabulario y su conocimiento de hechos históricos, conocieran textos antiguos, dichos, refranes... y, sobre todo, despertaran sus capacidades de observación, manipulación, relación y medida, en contextos poco habituales en los programas escolares.

Apoyados por la Sociedad Extremeña de Educación Matemática y con la intención, en principio, de enmarcar el trabajo en otro más amplio propuesto en la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, se comenzaron a dar los primeros pasos.

Situación inicial

El estudio de la situación inicial se centró en dos grandes líneas de trabajo:

La situación del trabajo en Matemáticas y de su profesorado en las nuevas perspectivas marcadas por la LOGSE

Por lo que respecta a este aspecto, constatamos las siguientes notas que, a nuestro parecer, marcaban el nuevo perfil de las Matemáticas y del profesor de Matemáticas.

...utilizar este tema como motivación para hacer más interesante a los alumnos el aprendizaje, de forma activa, de un tema de gran importancia dentro del currículo de Matemáticas: la medida...

Atendiendo a las propias Matemáticas, su importancia en un currículo escolar, según pensábamos y seguimos pensando, radica, a nuestro juicio, en dos aspectos fundamentales:

- Son una disciplina científica con un gran poder como instrumento de comunicación de la realidad.
- La actividad matemática forma a los alumnos no sólo en los aspectos relativos al pensamiento lógico-matemático, sino en muchos otros, como son: fomentar la creatividad, la intuición, el espíritu crítico, la capacidad de análisis y síntesis y la actitud positiva frente al trabajo potenciando la tenacidad y aumentando la autoestima del alumno.

A la hora de enfocar el estudio de esta disciplina, hemos de tener, así mismo en cuenta los siguientes aspectos, que consideramos de gran importancia:

- Su fuerte contenido utilitario, como herramienta auxiliar para otras áreas de conocimiento y para múltiples ámbitos de la vida.
- La necesidad para el alumno (al menos en las etapas de Primaria y Secundaria Obligatoria) de realizar el abordaje de su estudio desde una perspectiva empírica e inductiva, basada en la actividad sobre objetos y sobre la propia realidad, previa a una posterior adquisición de aspectos formales por la vía deductiva.

Por lo que respecta al profesor de Matemáticas, las características del nuevo sistema educativo (carácter terminal, nueva concepción del ciudadano que hay que formar, nueva concepción del currículo y de sus elementos...) hacen que éste adquiera nuevos roles, y pierda el de ser un mero transmisor de conocimientos, centrado en su área exclusivamente.

El perfil del profesor que propugna la Logse apunta hacia un profesional cuya función deberá ser «formadora y creadora» frente al alumno: enseñar al alumno nuevos caminos, orientándole en su trabajo, en una palabra, creando mentes abiertas, creativas y presentando ante él nuevas perspectivas. Y además, un profesor que salga de su aislamiento, de su área de Matemáticas exclusivamente, y colabore con los compañeros de otras áreas, en la formación integral del alumno.

Las reflexiones sobre los aspectos antes indicados nos sirvieron para determinar, posteriormente, tanto la metodología como las actividades o los procedimientos de evaluación que se iban a emplear durante el posterior desarrollo del proyecto.

La situación de partida de nuestros alumnos

El conocimiento de la situación de partida de nuestros alumnos, algo que para nosotros era fundamental, se hizo en una doble vía, que describiremos muy brevemente:

- Por una parte estudiar cuáles eran los conocimientos sobre el tema que aparecían propuestos en los respectivos proyectos curriculares de los centros participantes. Por tal motivo se procedió a seleccionar, desde la Educación Infantil hasta el final de la Secundaria Obligatoria cuáles eran los conceptos, procedimientos y actitudes que se pretendían tratar en relación con el tema de la medida.
- Por otra parte, analizar cuáles eran los conocimientos que los alumnos de la etapa de Secundaria Obligatoria, casi al final de su proceso educativo básico, poseían realmente sobre el tema. A tal efecto, se elaboró una prueba de evaluación inicial que fue aplicada a dichos alumnos y que nos permitió identificar cuáles eran las principales dificultades que presentaban.

Fases del trabajo

Caben diferenciar tres fases en el desarrollo del proyecto:

Los alumnos de zona urbana dirigieron su actividad fundamentalmente a la búsqueda de datos en archivos, bibliotecas y hemerotecas...

Los alumnos de zona rural procuraron entrevistar a personas mayores de su entorno de quienes obtuvieron información directa sobre el uso de las unidades de medidas y los aparatos empleados...

1. Fase de recopilación de datos e instrumentos

En la primera fase, la actividad investigadora que los alumnos realizaron se dividió en consideración al entorno de los centros participantes:

- Los alumnos de zona urbana dirigieron su actividad fundamentalmente a la búsqueda de datos en archivos, bibliotecas y hemerotecas, así como a encuestar en los hogares de pensionistas a personas mayores procedentes del medio rural que hicieron uso de las unidades de medida que se querían estudiar.
- Los alumnos de zona rural procuraron entrevistar a personas mayores de su entorno de quienes obtuvieron información directa sobre el uso de las unidades de medidas y los aparatos empleados. Así mismo, realizaron una labor de recuperación de antiguos instrumentos de medidas, algunos de ellos de su propia familia.

Para realizar las encuestas se confeccionaron unas fichas, que permitieron tratar la información de forma sistemática y homogénea.

Como es de suponer, no solamente participaron en esta fase los alumnos, sino, y de una forma muy notable, también los profesores de los centros. De forma muy concisa, su trabajo en esta fase consistió en:

— *Investigación bibliográfica.* Se utilizaron fundamentalmente fondos de la Biblioteca de la Real Sociedad Económica de Amigos del País y publicaciones de la Asamblea de Extremadura. En este trabajo se hizo una revisión sistemática del tema, que arrojó datos significativos sobre nuestra región, bastante diferentes, en algunos casos, de los encontrados en algunas publicaciones actuales que recogen estudios de carácter nacional sobre el tema de la medida, y que prácticamente han utilizado tan sólo algunos textos, incompletos o de carácter muy general, para informar sobre las medidas, su uso y sus equivalencias.

— *Encuesta a los ayuntamientos sobre sus fondos bibliográficos publicados.* Esta encuesta se remitió a una muestra tomada de los ayuntamientos de toda la región y se obtuvo información, y ejemplares en algunos casos, de antiguas ordenanzas, fueros, etc., en los que se hacía referencia a las unidades e instrumentos de medida utilizados.

— *Visitas a museos de la región.* Particularmente interesante resultó la visita al Museo Etnográfico de Olivenza, que se realizó con alumnos de los centros participantes. En ella pudieron observar los objetos allí expuestos relacionados con el tema.

— *Entrevistas personales.* Dado que fueron bastantes los profesores implicados en esta fase, y de varias zonas de Extremadura, se obtuvieron informes de primera mano y de excelente calidad de personas de edad, artesanos, agrimensores, etc.

— *Recopilación de instrumentos*. Supuso una importante tarea, que costó numerosos desplazamientos a pueblos de la región, e incluso de las regiones vecinas de Portugal, visitando a particulares, anticuarios, chatarreros, artesanos y, en general, cuantas personas pudieron facilitarnos, en préstamo, en donación en muchos casos y comprados en otros, objetos e instrumentos relacionados con la medida.

El trabajo de recopilación y restauración de instrumentos llevado a cabo por los profesores fue complementado muy eficazmente por el que mencionábamos antes que realizaron los alumnos.

2. Fase de estructuración y análisis

En esta fase trabajaron esencialmente los profesores. Básicamente consistió en:

— *Ordenación y análisis de los datos obtenidos*. Se ordenó la abundante información y el material obtenidos y se profundizó, por parte de los profesores, sobre el tema, en sus aspectos históricos y culturales en general: origen y desarrollo histórico, uso de las unidades de medida, permanencia y distribución actual en la región, tablas de equivalencia, relaciones con otras áreas de la cultura,... todo ello a partir del amplio trabajo de campo realizado anteriormente.

Por otra parte, y esto es quizá lo más interesante en el aspecto educativo, los profesores llevaron a cabo un análisis sobre los aspectos didácticos del tema de la medida, y qué forma podría ser la más adecuada para aprovechar los conocimientos adquiridos y hacer participar en ellos a los alumnos.

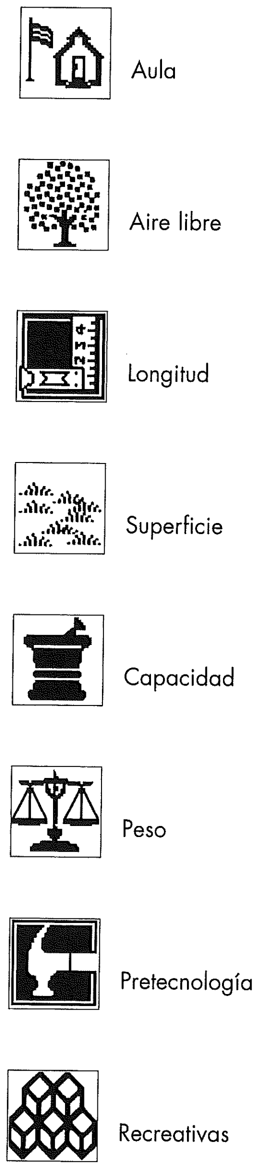
— *Planteamiento de las actividades para realizar con los alumnos*. Fueron confeccionadas numerosas actividades relacionadas con el tema, que se seleccionaron y adaptaron en muchos casos, de referencias de antiguos textos.

Básicamente las actividades que se propusieron a los alumnos, tal como se describirá más adelante de forma más detallada se organizaron en cuatro grandes bloques:

- Actividades de investigación.
- Actividades de resolución de problemas.
- Actividades manipulativas.
- Actividades lúdicas.

Para una mejor identificación fueron simbolizadas con los iconos adjuntos.

— *Evaluación continua de lo realizado*. Por medio de las reuniones de coordinación de los profesores participantes se llevó a cabo una revisión continua de lo realizado, sus progresos y dificultades.



3. Fase de trabajo de aula

Con respecto a esta fase, de trabajo de aula, consideramos que junto con los conocimientos matemáticos el alumno tenía que conocer los procesos históricos que abocaron a la situación actual, y que sirvieron para ampliar sus conocimientos, despertando el amor por su tierra, su cultura y sus costumbres.

Se utilizó una metodología basada en la actividad del alumno, uso y manejo de materiales concretos para la realización de medidas de objetos reales con las unidades usadas por nuestros antepasados y los aparatos de medidas que los alumnos consiguieron recuperar y aportar, elaboración de tablas de equivalencia con el SMD, construcción de unidades de medida, restauración de las encontradas, etc. Tales actividades están descritas en el apartado correspondiente.

En todas ellas se ha tratado, sobre todo, de presentar las Matemáticas a los alumnos de manera que fueran llevadas a cabo:

- De una forma amena, con actividades que despertaran su interés.
- De forma activa, recurriendo constantemente al uso de materiales manipulativos.

Actividades

No es factible detallar todas las actividades realizadas, por lo que se hace solamente una exposición de algunas de ellas, con la indicación de que todo el proceso de la experiencia ha sido una actividad en sí misma.

Las actividades con alumnos, según el esquema que se acompaña, las clasificamos en dos grandes grupos: las propias de aula y las exteriores, aunque no de forma separada ni en bloques totalmente aislados, sino buscando su compenetración y un orden lógico de desarrollo, según los niveles y necesidades del propio proyecto, como a continuación se describe.

ACTIVIDADES DE ALUMNOS

Aula
- Longitud
- Superficie
- Capacidad
- Peso
- Recreativas

↔

Exteriores al aula
- Recogida de información
- Búsqueda de datos
- Visitas a museos
- Recopilación de aparatos de medida
- Construcción de aparatos de medida
- Aire libre

Actividades de Educación Infantil y Primaria

Por lo que se refiere a las etapas de Educación Infantil y Primaria, las actividades realizadas fueron las siguientes:

— Actividades de medida propiamente dichas.

— Recopilación, por parte de los alumnos, de juegos infantiles y unidades de medida utilizadas en ellos.

Actividades de medida para las Etapas de Educación Infantil y Primaria

* Actividades con medidas de ***longitud***:

Educación Infantil

Se trabajaron conceptos como «más largo que», «más alto que», «tan grande como», y otros similares. Otras actividades realizadas fueron:
- Clasificar regletas de igual longitud.
- Ordenar objetos iguales, pero de distinta longitud.
- Construir torres de iguales alturas.
- Utilizar sencillas unidades antropométricas.

Primer y segundo ciclo

Continuar con actividades de este tipo y añadir las siguientes:
- Utilizar unidades antropométricas y observar la variabilidad entre las mismas.
- Realizar estimaciones de longitud y comprobarlas.
- Utilizar medidas del sistema métrico decimal (SMD).

En el tercer ciclo de primaria se tratan ya de forma sistemática las unidades de longitud del SMD, haciendo uso de las unidades decimales, y las conversiones de unas unidades a otras.

Tercer ciclo

En este ciclo se tratan ya de forma sistemática las unidades del SMD, haciendo uso de las unidades decimales, y las conversiones de unas unidades a otras.

* Actividades con medidas de ***superficie***:

Educación Infantil

Más que actividades propiamente de medida, en Educación Infantil se trata más bien de identificar la magnitud, efectuando, para ello, actividades tales como comparar por tanteo, por pintado y por superposición distintas superficies, de manera que se llegue a la identificación de esta magnitud.

Primer y segundo ciclo

Se continúa con actividades de este tipo, en las que se pretende, ante todo, la adquisición de la magnitud, diferenciándola de otras con las que suele confundirse como, por ejemplo, el perímetro.

Se inicia el trabajo con unidades de medida, utilizando principalmente, la técnica del recubrimiento y la teselación de superficies.

Tercer ciclo

En este ciclo se trabajan ya de forma sistemática las unidades del SMD y todas las conversiones entre unidades. Se trata igualmente, y de forma más definida, la aritmetización del área, y las fórmulas de las áreas de polígonos.

* Actividades con medidas de ***capacidad y volumen***:

Educación Infantil
- Clasificar recipientes, identificando los que tienen igual capacidad, sirviéndose del trasvasado.
- Estimar la mayor o menor capacidad de recipientes, y verificarlo por trasvasado.
- Llenar recipientes, utilizando otros más pequeños.
- Ordenar recipientes de mayor o menor capacidad.

Primer y segundo ciclo

Continuar con actividades de este tipo y añadir las siguientes:
- Utilizar recipientes graduados.
- Iniciación al uso de medidas del sistema métrico decimal.

Tercer ciclo

En este ciclo se tratan ya de forma sistemática las unidades del SMD, haciendo uso de las unidades decimales. Se comienza a trabajar también la aritmetización del volumen de los cuerpos.

* Actividades con medidas de ***masa***:

Educación Infantil
- Sopesar, utilizando las manos, dos objetos y averiguar cuál es más pesado.
- Utilizar balanzas de platillos.

- Equilibrar objetos en una balanza de platillos.
- Ordenar masas.

Primer y segundo ciclo

Continuar con actividades de este tipo y añadir las siguientes:

- Dividir una masa de plastilina en trozos pequeños y observar que entre todos equilibran al mismo objeto que el trozo original.
- Clasificar objetos distintos, pero de igual masa.
- Fabricar un sistema de unidades de masa, con las equivalencias entre unidades.
- Introducción al sistema legal de unidades de masa.
- Pesar objetos con distintos instrumentos.
- Estimar el número de objetos iguales que forman un determinado peso.
- Construcción de balanzas.

Tercer ciclo

En este ciclo se trabajan ya de forma sistemática las unidades del SMD y todas las conversiones entre unidades.

* Actividades con medidas de ***tiempo***:

Tratar esta magnitud es difícil, pues es tardía su adquisición, y podemos caer en el error de creer que los alumnos pequeños tienen adquirida la noción de tiempo por el simple hecho de que sepan decir la hora del reloj, que en realidad sólo supone leer una escala graduada. Puede ocurrir que el alumno lo haga correctamente, pero le cuesta bastante, y para ello hemos de ayudarle en la escuela, tener conciencia del paso del tiempo y de la duración de fenómenos, en especial los más prolongados.

Las actividades realizadas han buscado que el alumno, en un principio tenga conciencia del paso del tiempo, según la siguiente secuencia:

- Sucesos que se repiten de forma cíclica: Jugar - dormir, desayuno - merienda cena, escuela - juego - dormir, mañana - tarde - noche, y así sucesivamente.
- Sucesos con una mayor duración: días de escuela - días sin escuela, vacaciones - escuela,...
- Estaciones del año, cumpleaños,...

En este sentido, las actividades han procurado que el niño explique los conocimientos que va adquiriendo acerca de estos fenómenos, para que, una vez explicitados, los interiorice de una forma cada vez más consciente.

El otro grupo de actividades han tendido a que los alumnos tengan conocimiento del uso del reloj, tanto los de agujas como los digitales, conociendo además el funcionamiento y uso de otro tipo de relojes, como los de arena o los de sol.

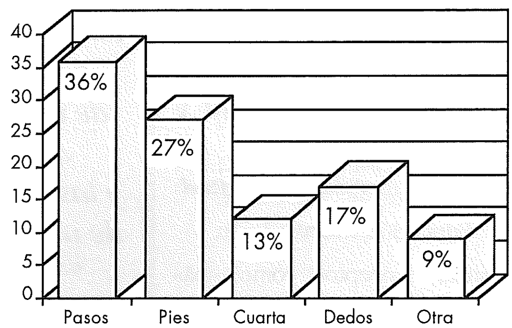
Recopilación, por parte de los alumnos. de juegos infantiles y unidades de medida utilizadas en ellos

En esta fase del proyecto, se pasaron unas encuestas cuya finalidad, de acuerdo con el carácter interdisciplinar que quisimos darle, iban encaminadas a conseguir un doble objetivo:

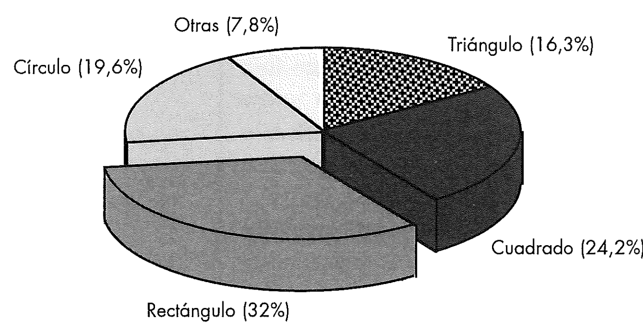
- Recopilar los juegos que los alumnos utilizan en distintas zonas.
- Recopilar las unidades de medida de longitud, superficie, capacidad y tiempo, que los alumnos utilizaban en sus juegos, para de esta forma hacerlos conscientes de su uso. Por lo que respecta a este apartado, veamos algunos de los resultados obtenidos:

El tipo de medida de longitud preferentemente utilizada es la antropométrica y el uso de instrumentos que no tiene una unidad ponderable al sistema métrico decimal. En ninguna encuesta aparecen términos como metro, decímetro...

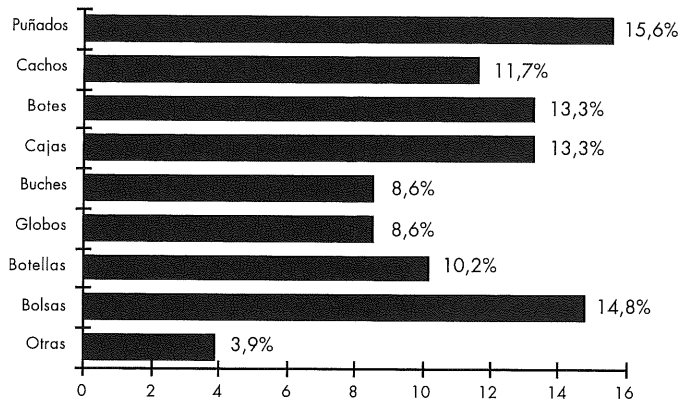
Veamos, por ejemplo, los resultados del porcentaje de los juegos en que se utilizan diferentes medidas de longitud:



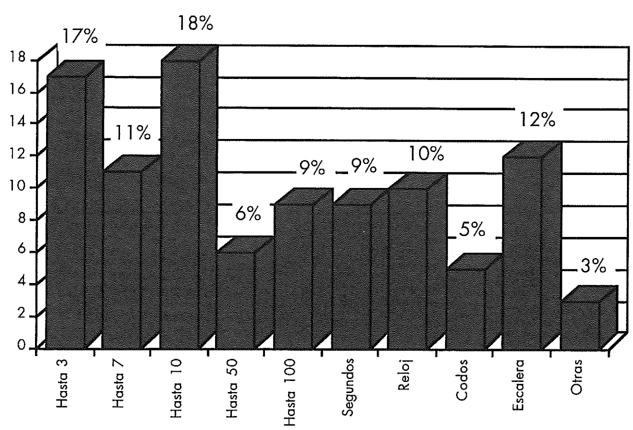
Las superficies sobre las que desarrollan sus juegos son normalmente de forma geométrica regular, siendo el rectángulo la más utilizada.



Los utensilios que utilizan en los juegos para medir capacidades son muy diversos, al igual que ocurría en las medidas de longitud, los más usados son los que les proporcionan su propio cuerpo: los puñados.



Para medir el tiempo el instrumento normalmente utilizado es el de contar una cantidad determinada, a una velocidad moderada. La cantidad que hay que contar está en función de los juegos, para los que requieren mucha rapidez cuenta hasta tres, pasando por 7, 10, 50 o 100 para aquellos en que los jugadores necesitan más tiempo como el caso del escondite.



Actividades para el Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria.

Presentamos a continuación tan sólo una breve muestra de algunas actividades de las que se propusieron a los alumnos:

* Actividades sobre medidas de ***longitud***:

Manual Práctico del comerciante y del dependiente del comercio. Anónimo 1896. Página 237.

En este libro anónimo nos informan: «La vara portuguesa tiene una longitud de 1,10 metros».

Un comerciante español compró 325 varas portuguesas de telas para venderlas en Extremadura, midiéndolas con nuestra vara.

- ¿Cuántas varas vende en nuestra región?
- ¿Qué diferencia de longitud en metros hay al pasar de la medida portuguesa a la extremeña?

Puerta de Palmas. Badajoz 1995. Alberto González

A finales del siglo XVIII, Ponz, al tratar de Badajoz, se refiere al puente de Palmas en los siguientes términos:

«Es de mucha magnifencia en esta ciudad el puente sobre el Guadiana, saliendo por la Puerta de las Palmas para ir a Portugal, y se debe contar entre las más insignes obras modernas que hay en España y que pueden de algún modo competir con las de los romanos. Tiene veintiocho arcos, el mayor de 78 pies de diámetro, y el menor, de poco más de 21; lo largo de todo él es de 1874 pies y 23 a lo ancho».

- ¿Qué longitud y ancho tiene el puente expresada en metros?
- ¿Cuales son las medidas del ojo mayor y menor expresadas en metros?
- ¿Hay diferencias en las medidas que nos expone Madoz y las expresadas por Ponz?

La familia de Pascual Duarte. Ediciones Destino. Camilo José Cela. Páginas 21 y 27.

Camilo José Cela al escribir su famosa novela, nos narra que el personaje nació en un pueblo que estaba situado a dos leguas de Almendralejo y que solía ir a pescar a una charca que estaba a legua y media de Almendralejo, hacia la raya de Portugal.

- Investiga el término: raya.
- ¿A qué distancia en kilómetros estaban el pueblo natal y la charca de Almendralejo?
- ¿En qué pueblo nació el personaje?
- ¿Se encuentran en la misma dirección de Almendralejo el pueblo y la charca?

Ordenanza Municipal de la Policía Urbana de la ciudad de Plasencia. Ayuntamiento Constitucional de Plasencia. Imprenta D. M. Ramos. 1849. Páginas 13 y 14.

En las Ordenanzas de Plasencia en su artículo 139, dice: «Las aceras serán de piedra berroqueña del ancho de cuatro cuartas y media en las calles de primera clase, y de tres y media en las de segunda, elevando unas y otras, dos dedos sobre el nivel de la calle. El mínimo de la longitud de las aceras, será de tres cuartas».

- Investiga el término: piedra berroqueña.
- Expresa en centímetros las medidas de las aceras.
- Compara dichas medidas con las aceras del Colegio.

Completa el siguiente cuadro:

	Legua	Toesa	Braza	Paso	Codo	Pie
Legua						
Toesa						
Braza						
Paso						
Codo						
Pie						

* Actividades sobre medidas de ***superficie***:

Completa el siguiente cuadro:

	Fanega	Cuartilla	Celemín	Vara^2	Pie^2
Fanega					
Cuartilla					
Celemín					
Vara^2					
Pie^2					

Guía práctica de Agrimensores y Labradores. Imprenta José Repullés. Madrid 1848. Francisco Verdejo Paez. Página 87

En este texto para hallar la superficie de un triángulo sin necesidad de conocer la altura, se describe el siguiente método:

«Mídanse los tres lados, y supongamos que tenga AB 40 pies, BC 50 y AC 60; sumaremos estos tres números, y de la suma 150 se tomará la mitad, que son 75. Restando de 75 el 40 resultan 35; restando del mismo 75 el 50 quedan 25, y rebajando del 75 el 60 restan 15; multiplíquesen los números 75, 35, 25 y 15, y del producto 984375 se extraerá la raíz cuadrada, que es 992(2/10) y ésta será la superficie del triángulo ABC en pies cuadrados».

- Expresa en centímetros las medidas dadas.
- Calcula el área del triángulo descrito.
- ¿Coinciden tus cálculos con los expresados por Verdejo?
- ¿Se puede dar por válida la medición que hace el autor, según el margen de diferencia con tus cálculos?

Guía práctica de Agrimensores y Labradores. Imprenta José Repullés. Madrid 1848. Francisco Verdejo Paez. Página 157.

Verdejo nos explica de forma amena el error que suelen cometer los agricultores a la hora de sembrar las viñas, por creer tener casi el mismo número de plantas estando sembradas a 8 palmos, 7 o 6 ya que la diferencia es muy pequeña.

En una superficie de 1.000 varas cuadradas, ¿cuántas plantas se pueden sembrar a 5, 6, 7, 8 y 9 palmos?

Guía práctica de Agrimensores y Labradores. Imprenta José Repullés. Madrid 1848. Francisco Verdejo Paez. Página 89.

El autor para hallar la superficie de un círculo conocido el diámetro propone: «calcular el cuadrado del diámetro, multiplicar dicho cuadrado por 11 y el producto obtenido dividirlo entre 14, siendo el cociente la superficie del circulo».

- Según este método, hallar la superficie de un círculo de 35 pies de diámetro.

Guía práctica de Agrimensores y Labradores. Imprenta José Repullés. Madrid 1848. Francisco Verdejo Paez. Página 184.

Verdejo en este texto nos requiere: «¿Cuántas losas de piedra de 2(1/2) pies en cuadro se necesitan para enlosar una pieza que tiene 450 pies superficiales?».

- Averigua el número de losas necesarias.
- ¿Cuál es la medida de la losa en centímetros?
- Investiga si aún se fabrican losas con esas medidas.

TRADICIÓN ORAL

En la localidad extremeña de Barcarrota, para hacer las transformaciones de hectáreas a fanegas y viceversa, siguen el siguiente procedimiento:

a) Para pasar de hectáreas a fanegas, dividen éstas por dos y a continuación la cantidad obtenida la suman al número de hectáreas, siendo el resultado fanegas.

$$\text{Hectáreas} + \frac{\text{Hectáreas}}{2} = \text{Fanegas}$$

b) Para pasar de fanegas a hectáreas el procedimiento consiste en restar al número de fanegas un tercio de las mismas

$$\text{Fanegas} - \frac{\text{Fanegas}}{3} = \text{Hectáreas}$$

Según este procedimiento, ¿cuántas fanegas son 40 hectáreas? y ¿cuántas hectáreas son 90 fanegas?

* Actividades sobre medidas de ***peso***:

Historia de Extremadura. Página 490.

En el periodo de 1580 a 1599 en la ciudad de Cáceres, el pan de dos libras, incrementó su precio de 18,6 a 28,8 maravedíes.

- ¿Cuántos gramos pesaba el pan cacereño?
- Una arroba, ¿cuántos panes la formarían?
- ¿Qué tanto por ciento fue el incremento anual del precio del pan?

Método Completo de Primera Enseñanza Cíclica o Progresiva. Tomo IV. Editorial Calleja.

En este libro para reducir de las medidas antiguas al SI propone: «para averiguar los metros que tienen 42 varas, puesto que la vara tiene 0,836 metro, o un poco más de 83 y medio centímetros, se multiplicará 42 varas por 84 centímetros, separando las dos últimas cifras de resultado por ser centésimas partes, y tendremos un resultado muy aproximado».

- Realiza la actividad según nos indica el libro y calcula el error cometido.

Tradición agrícola extremeña. Difusión oral

Los agricultores extremeños al sumar el pesaje de los cerdos, operaban de la siguiente forma: sumaban las arrobas, sumaban las libras, el número de libras lo multiplicaban por cuatro obteniendo cuarterones, a continuación los cuarterones eran divididos entre cien obteniendo arrobas que eran sumadas a las obtenidas en la primera suma, expresando el peso total en arrobas y cuarterones.

- Siguiendo este método, ¿cuánto pesan en total cuatro cerdos si cada uno en su pesaje ha dado: el primero 11 arrobas y 17 libras, el segundo 18 arrobas y 21 libras, el tercero 9 arrobas y 20 libras y el cuarto 13 arrobas y 12 libras?

Completa el siguiente cuadro:

Quintal					
Arroba					
Libra					
Cuarterón					
Onza					
	Quintal	Arroba	Libra	Cuarterón	Onza

* Actividades de ***aire libre***:

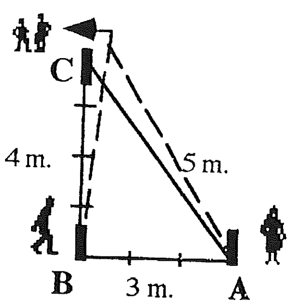
ÁNGULOS RECTOS: CUERDA DE LOS DOCE NUDOS

En un parque cercano al colegio solicitamos a los alumnos que por grupos trazasen un ángulo recto, sobre el suelo. Con sorpresa comenzaron su trazado apoyando las cuerdas sobre los lados de una escuadra, esta tarea no supone dificultad. El siguiente paso de la experiencia en el parque consistió con la ayuda de la cuerda y el metro como únicos materiales, en construir diseños de ajardinamientos que contengan ángulos rectos.

Las dificultades aumentaron considerablemente, los ángulos se construían, doblando la cuerda sobre un palo clavado en el suelo, haciendo una estimación. Les hicimos ver que el método era aproximado, cuando comprobaban su amplitud, en muy pocos casos dio el ángulo recto, había que buscar otro método mejor.

No tardaron en encontrar un método consistente en bordear con una cuerda un trazado de los ajardinamientos existentes, formando un ángulo recto y sujetando la cuerda tres alumnos, cada uno por un vértice transportar el triángulo formado a la zona del dibujo.

Consideramos que era el momento de empezar a formalizar los conocimientos para ello, y continuando con los grupos formados, les solicitamos que clavasen una estaca (A) sobre el suelo, midiesen tres metros y en ese punto fijasen otra (B), debiendo clavar otra (C) que estuviese a una distancia de cuatro metros de (B) y a cinco de (A).

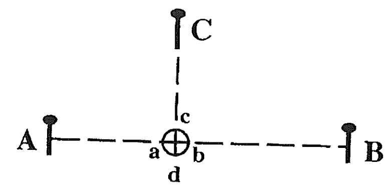


Hechas las mediciones precisas comprobaron que todos habían logrado la construcción de un triángulo rectángulo.

TRAZAR EN EL TERRENO UNA PERPENDICULAR A UNA RECTA DADA. MÉTODO DEL CARTABÓN.

Esta misma actividad se realizó con el uso del cartabón usado por agrimensores, que fue reproducido en la clase de pretecnología.

Se trazó en el suelo una línea entre los puntos AB, colocando en la misma el cartabón de tal forma que al dirigir la visual por la hendidura ab quedaba ajustado sobre la línea trazada, después se fue corriendo el cartabón en esta situación a lo largo de AB hasta que la visual dirigida por las pínulas dc correspondían con el punto C, siendo esta visual la perpendicular buscada.



Aunque este método no deja de ser un tanteo, con un par de veces que lo hacían los alumnos conseguían trazar la perpendicular con bastante exactitud.

MEDIR CON CADENAS LA PROYECCION HORIZONTAL DE UN TERRENO EN CUESTA.

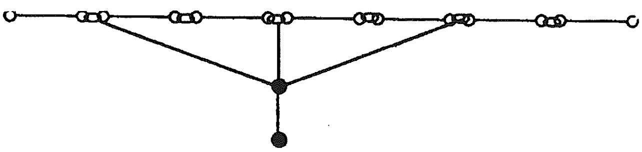
Se planteó la actividad de medir la distancia horizontal entre dos puntos que están en cuesta, aquello supuso un debate muy interesante, hubo algunos que no eran capaces de buscar un método viable, otros encontraron algunas fórmulas muy descabelladas, la mayoría optó por el teorema de Pitágoras. El grave problema era medir la altura en perpendicular de la cuesta, algunos propusieron que haciendo un pozo, se podría averiguar, pero francamente sus compañeros, pensaron que tenía que haber un método más sencillo y menos complicado.

Tras una consulta en los libros utilizados, encontraron el método propuesto por Francisco Verdejo en su libro: *Agrimensores y Labradores* de 1848.

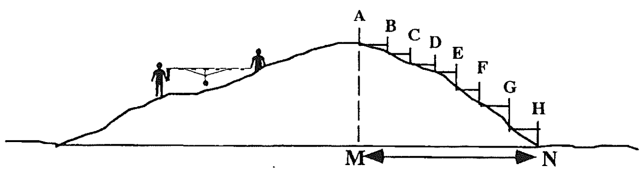
Quisimos probarlo y en una cuesta no muy pronunciada seguimos el procedimiento encontrado por los alumnos.

La cadena de agrimensor, construida previamente en clase de Pretecnología, la preparamos de la siguiente forma:

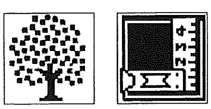
contando cuatro eslabones, atamos en el primero y último un cordoncillo de cincuenta centímetros de largo, poniendo en el medio un plomo para que quedase de forma tensa, quedando los lados perfectamente igualados, del punto medio de la cadena se ató otro cordón con un plomo en su extremo libre.



A continuación un alumno se colocaba en un punto de la cuesta y otro bajaba con la cadena hasta una distancia que le permitiese elevar la cadena de tal forma que el cordón de extremo libre coincidiese con el plomo del cordón atado, ya que en ese momento la cadena estaba en posición horizontal al suelo. Después el primero bajaba a la posición del segundo y este seguía bajando, haciendo las mismas operaciones que anteriormente, hasta llegar al final de la cuesta, habiendo conseguido medir la distancia propuesta en varias mediciones.

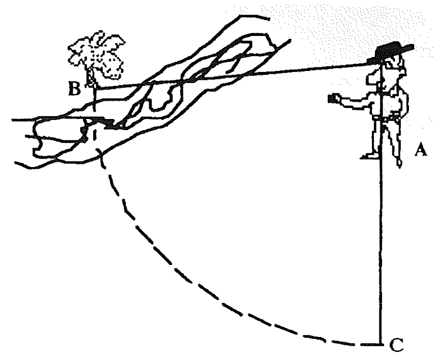


MN = AB+BC+CD+DE+EF+FG+GH

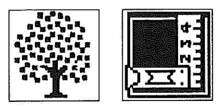


MEDIR UNA DISTANCIA INACCESIBLE MEDIANTE UN SOMBRERO.

Quisimos terminar las actividades de medidas inaccesibles, practicando un método sencillo y original, que no presenta complicaciones, aunque sí los errores cometidos son mayores, pero nos permiten de manera aproximada obtener la distancia a un punto inaccesible.



Colocados en un punto A bien firme y sin mover la cabeza, ir bajando el ala del sombrero hasta que por su borde se descubra el punto B de referencia para medir la distancia desconocida, después girar lentamente de modo que la visual llegue hasta otro punto C accesible sin alzar la cabeza, fijar el punto C en el terreno, para finalizar medimos la distancia AC desde nuestra posición al punto fijado, que es la misma de AB. Los errores cometidos fueron grandes en algunos alumnos, otros se aproximaron con cierta precisión.

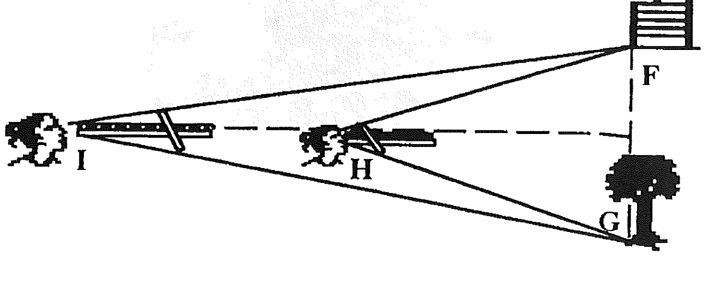


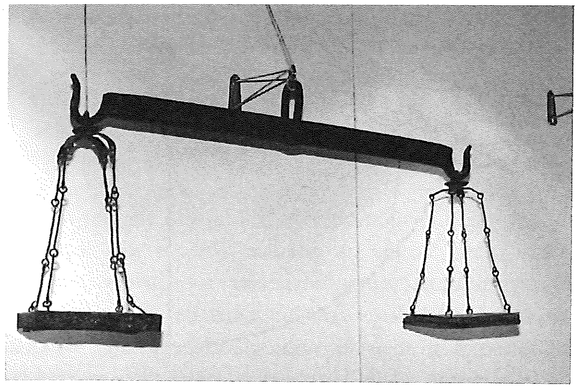
MEDIR UNA DISTACIA INACESSIBLE MEDIANTE EL BÁCULO

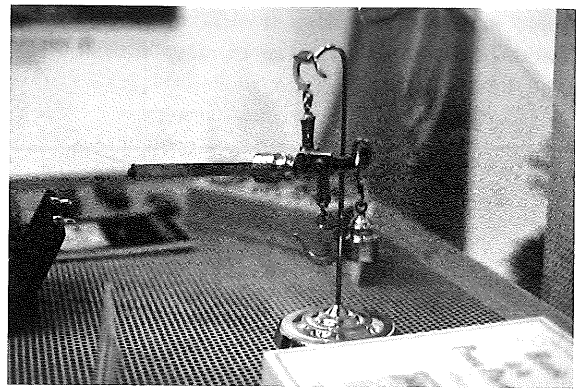
En el aula de pretecnología los alumnos construyeron un «báculo», material que su construcción se desarrolla en el apartado de Tecnología, para medir las distancias inaccesibles entre dos puntos.

Para su utilización se situaron en un punto que llamamos I, equidistante de los objetos a medir F y G. La condición primera es colocar el aparato en completa horizontalidad, una vez lograda ésta, desplazaron la traviesa sobre la regleta de tal forma que fuesen visibles los puntos F y G desde I. Después avanzaron la traviesa hacia su punto de visión una distancia igual a la correspondiente longitud de la traviesa.

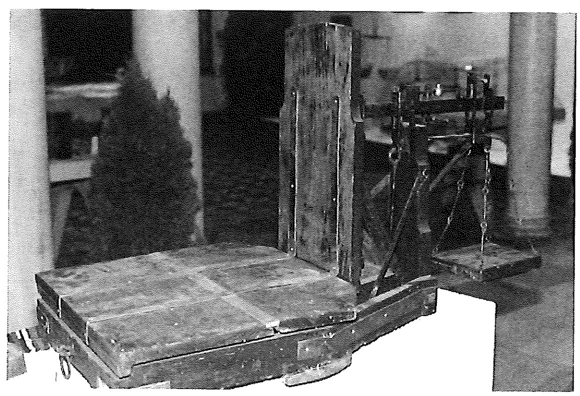
Puesta la traviesa en su nueva posición, avanzaron a lo largo de la línea IH hasta llegar a una posición H donde pudieron ver de nuevo los puntos F y G.







Aspectos de la exposición:
Instrumentos y Unidades de Medida Tradicionales en Extremadura.
ICME-8. Sevilla. Julio 1996



Midieron la distancia andada IH, que teóricamente corresponde a la separación de F y G.

Realizada esta actividad, con dos puntos accesibles, para poder medir posteriormente la distancia real, los errores cometidos a veces eran grandes, tal vez debidos a que no situaban el punto I equidistante del F y G, ni tampoco se lograba la perfecta horizontalidad del báculo, sin embargo habían logrado medir distancias entre dos puntos por un método alternativo obteniendo medidas aproximadas.

* Actividades en el ***Área de Tecnología***:

CADENA DE AGRIMENSOR

a) *Materiales*:

Alambre, cortafrío, alicates, regla.

b) *Proceso de trabajo*:

Enderezar el alambre, cortarlo en fragmentos de 4 y 27 centímetros.

Con las piezas de 4 centímetros se formará un eslabón de 1,5 centímetros de longitud interior, con los de 27 en cada extremo se les hará un cierre que dé una longitud interior de 23,5 cm.

Una vez elaboradas las piezas se van uniendo por medio de los eslabones.

Para finalizar con alambre más grueso haremos dos asas de sujeción para cada uno de los extremos.

Las piezas de los extremos se harán de 15 cm, para lograr que junto con la manilla de sujeción den la longitud total de 25 centímetros igual a la de cada uno de los tramos que compone la cadena una vez unidos a los eslabones.

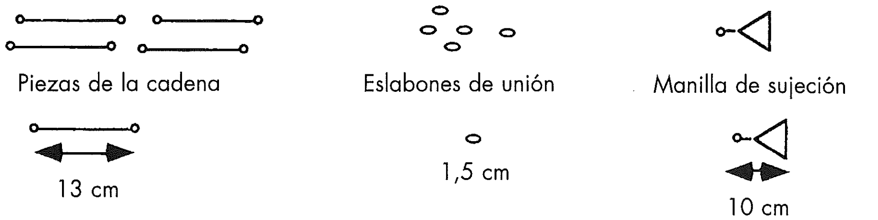
c) *Utilidades*:

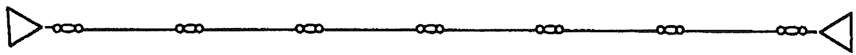
Hacer mediciones de distancias desconocidas. Medir superficies de terreno.

d) *Investigación*:

- ¿Qué ocurre cuando el terreno no está nivelado?
- ¿Que ventaja tiene este método, con el de medir con una cuerda?
- ¿Qué cantidad de alambre es necesaria para construir una cadena de 20 metros?
- ¿Cuántos eslabones se necesitan para una cadena de 20 metros?

e) *Esquema del aparato*:





BÁCULO

a) *Materiales*:

Cartulina fuerte o táblex, regla, rotuladores, tijeras, sierra de marquetería.

b) *Proceso de trabajo*:

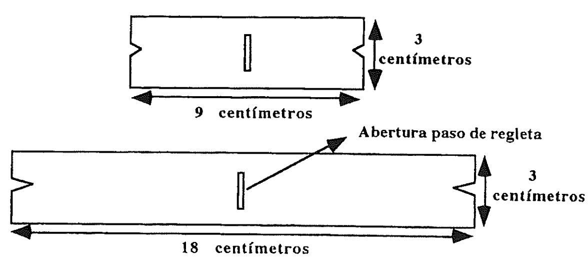
El báculo consta de una regleta y dos traviesas, que se recortarán en cartulina o táblex.

La regleta tiene una dimensión de unos 30 centímetros de longitud por uno y medio de ancho. Una vez recortada se marcan los centímetros sobre ella, es conveniente marcarlos en grupo de siete a siete.

1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7									

30 a 35 cm

La traviesa A es de igual ancho, 3 centímetros, que la B, pero mitad de longitud, siendo ambas de 9 y 18 centímetros respectivamente. En su parte central llevan una abertura coincidente con el grosor y ancho de la regleta, de tal forma que puedan desplazarse una sobre la otra. Las dos tienen en sus extremos unos cortes, triangulares de 5 milímetros, que servirán de puntos de mira.



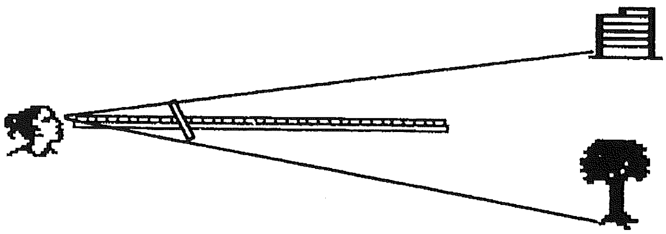
c) *Utilidades*:

Medir distancias inaccesibles

d) *Investigación*:

- ¿En qué concepto matemático está basado este método de medición?
- Si estamos muy próximos a los objetos a medir, ¿qué traviesa debemos usar?
- Si con una misma traviesa nos acercamos o alejamos de los objetos que hay que medir, ¿qué ocurre con la posición de la traviesa en la regleta?

e) *Esquema del aparato*:



Evaluación y conclusiones

Por lo que respecta a la evaluación, se ha llevado a cabo en tres momentos claves:

Evaluación inicial

Esta evaluación ha tratado de recoger los aspectos: ¿qué *conocimientos* tienen nuestros alumnos?, ¿qué *actitudes* presentan?, ¿qué *habilidades*?, ¿qué *destrezas*?, etc. Y, a la vez también, cuál era la disposición de los profesores, cuáles eran las condiciones de los centros, etc.

Además de lo que se refleja en el resumen que presentamos, se han tomado numerosas anotaciones por parte de los profesores participantes de los procedimientos empleados y de la actitud denotada por los alumnos, datos éstos que han sido recogidos en fichas del profesor para su posterior tratamiento en las reuniones de coordinación.

Evaluación durante la realización del proyecto

La evaluación durante la realización del proyecto nos ha permitido seleccionar cuáles eran los puntos más interesantes, por su significación para el aprendizaje de los alumnos o por el nivel de dificultad que tenía para ellos, y de este modo seleccionar las actividades propuestas hasta llegar a las que se presentan en este artículo, y también para depurar nuestros métodos de trabajo.

La herramientas utilizadas para la evaluación de los alumnos han sido las anotaciones por parte de los profesores, donde se reflejaban:

a) Los datos de la observación directa sobre las actividades realizadas.

b) El trabajo con los compañeros.

Además de las observaciones sobre consecución de objetivos conceptuales por parte de los alumnos, se ha utilizado un modelo de ficha (ver página siguiente) donde se ha recogido la actitud que éstos han mostrado durante la realización de las actividades:

c) Las hojas de actividades de cada alumno, recogidas y analizadas por cada profesor y comentadas en las reuniones de coordinación.

d) La autoevaluación por parte de los propios chicos, como un elemento de alto valor educativo, para colaborar a su propia formación.

Tan necesaria como la evaluación de los alumnos ha sido, como decíamos al principio, la evaluación del profesor y del propio proceso.

Por lo que se refiere a la *evaluación del profesor*, y dada la importancia de este tipo de evaluación, hemos estado atentos a todo lo que sucedía en clase. ¿Eran felices en el trabajo nuestros alumnos?, ¿estábamos atendiendo a todos por igual según sus necesidades y características?, ¿eran correctas las estrategias de trabajo propuestas?, ¿se hizo uso adecuado de los recursos a nuestro alcance?

Para la evaluación del profesor nos hemos servido fundamentalmente de la reflexión de los propios profesores, de la valoración del ambiente de clase y de la puesta en común en las reuniones.

En cuanto a la *evaluación del proceso*, bajo este aspecto vemos la evaluación como una recopilación de todas las realizadas en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Nos ha ido diciendo hasta qué punto se lograban las pretensiones iniciales, cuáles eran las causas que entorpecían la consecución de los obje-

Fecha: Observación: Nombre	ALUMNO 1	ALUMNO 2	ALUMNO 3	ALUMNO 4	ALUMNO 5
Muestra interés al presentarle la actividad					
Enfoca la actividad con confianza					
Hace preguntas					
Reflexiona sus ideas					
Persevera en las tareas					
Argumenta sus soluciones					
Encuentra más de una solución					
Ayuda a los demás					
OTRAS NOTAS					

Ficha de actitud matemática

tivos y nos ha ido permitiendo redefinir muchas partes del proceso: estrategias, actividades, etc.

El inconveniente con el que nos hemos encontrado para evaluar el proceso es que no hay elementos de medida perfectamente definidos para realizar esta evaluación, por lo que hemos hecho una globalización de las diferentes evaluaciones de cada uno de los elementos que intervienen en el proceso.

Evaluación final

Se ha realizado al terminar el proyecto, y ha contado con todos los datos que se han ido recogiendo durante la realización del mismo, así como con los datos comparativos de las situaciones inicial y final. Las herramientas empleadas han sido prácticamente las mismas que se describen en la evaluación hecha durante la realización del proyecto.

Luis M. Casas
Ricardo Luengo
Cipriano Sánchez
Sociedad Extremeña
de Educación Matemática
Ventura Reyes Prósper

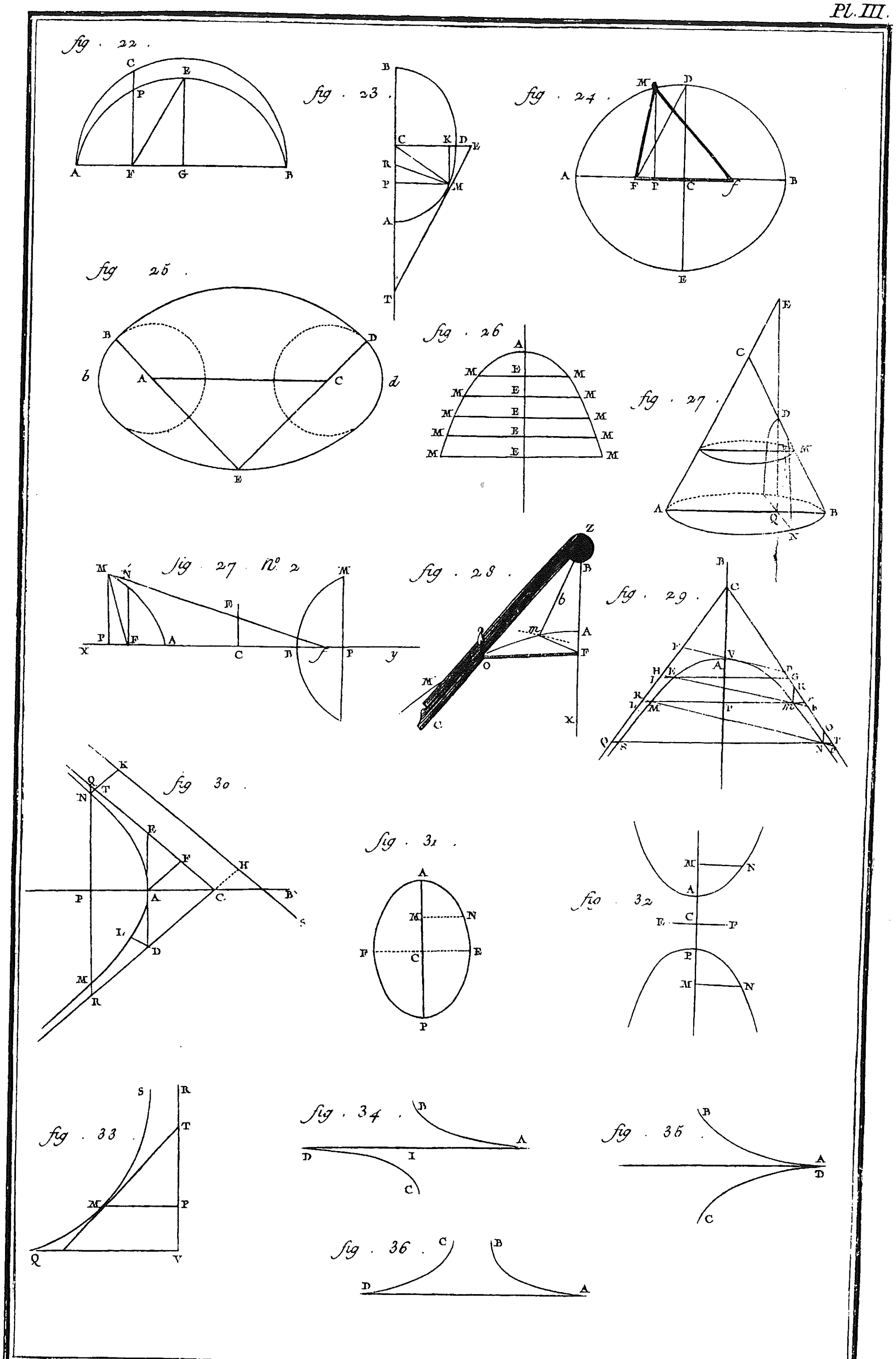
Conclusiones

Por lo que respecta a conclusiones, creemos que ha supuesto un interesante trabajo interdisciplinar, en el que se ha conseguido:

— La integración de varias áreas del currículo, pues ha involucrado muy particularmente las áreas de Matemáticas, Lenguaje y Conocimiento del Medio, todo ello sin olvidar las áreas transversales, tal como se puede constatar en las actividades realizadas.

— La integración del trabajo de profesores de varios centros, principalmente los dos en los que se ha llevado a cabo la experiencia, aunque han participado también profesores de otros varios, y sobre todo, de varias áreas.

— La integración y participación en el trabajo escolar de los padres de los alumnos y de las poblaciones del entorno, pues a ellos ha estado dirigida, en primer lugar, la encuesta para obtener datos que se hizo al iniciar el proyecto y, por último, la exposición de objetos de medida que se llevó a cabo.



Goussier Del.

Benard Fecit.

Sections Coniques.

SUMA 25
junio 1997, pp. 113-122

Las Matemáticas en el Bachillerato

Javier Brihuega Nieto

Artículo dedicado a Gonzalo Sánchez Vázquez

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

En este artículo se comentan los aspectos más significativos de las distintas asignaturas de matemáticas de nuevo Bachillerato, cuya puesta en marcha se está iniciando.
Las materias «Matemáticas», «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales» y «Matemáticas de la forma» de las diferentes modalidades del bachillerato se analizan, destacando los elementos más novedosos y se dan unas breves pinceladas de su tratamiento didáctico.

LA REFORMA del sistema educativo que se deriva de la LOGSE incluye una etapa educativa, no obligatoria, con unas características especiales que la confieren especial importancia. Enmarcada entre la ESO y la Universidad (o los estudios profesionales de nivel superior), el Bachillerato, con sus distintas modalidades, es la etapa formativa donde se deben fundamentar los conocimientos adquiridos, por los estudiantes, a lo largo de toda su escolarización obligatoria anterior.

En estos momentos, todavía son muy pocos los centros en los que se imparten los dos cursos de Bachillerato y, entre ellos, son bastantes los que lo hacen por primera vez. Además, a pesar de su importancia, el MEC y las distintas comunidades autónomas apenas han elaborado orientaciones ni materiales que nos sirvan de apoyo para su aplicación y desarrollo.

En este artículo pretendo comentar las peculiaridades más importantes de las diferentes materias de Matemáticas en las distintas modalidades del Bachillerato del nuevo Sistema Educativo, así como las diferencias y similitudes en su planteamiento. No se trata, por tanto, de hacer un análisis exhaustivo de cada materia, sino intentar un acercamiento a los aspectos más significativos de cada una de ellas, resaltando lo más novedoso y su tratamiento didáctico. Previamente parece preciso hacer algunas consideraciones iniciales.

Introducción

Las Matemáticas forman una ciencia compuesta por un amplio conjunto de conocimientos que, en muchas ocasiones, se presentan de una manera aparentemente diferenciada. Este conjunto de conocimientos está en continua evolución debido a su interrelación con los otros campos de la Ciencia y la Técnica, pues siempre ha de responder a la necesidad de resolver determinados problemas prácticos derivados de ellos. Paralelamente, en las últimas décadas, se ha producido una ampliación y diversificación de su propia perspectiva y se han ido convirtiendo en una herramienta potente y eficaz en la interpretación y, en su caso, resolución de multitud de problemas, fenómenos y situaciones de todo tipo, posibilitando, además, la creación y utilización de modelos aplicables a otras ciencias.

Las Matemáticas están cada vez más introducidas en nuestro mundo actual, tanto desde la perspectiva anteriormente analizada, como en su papel de lenguaje aplicable a gran cantidad de situaciones de la vida, ya sea en el entorno cotidiano o en el profesional. En los medios de comunicación, las publicaciones, especializadas o de carácter divulgativo, de carácter social o económico, incluso en los anuncios, el lenguaje matemático –gráficas, tablas, porcentajes, etc.– está presente de forma notoria. Se puede afirmar que esto se debe, fundamentalmente, a su carácter de lenguaje funcional y, en consonancia, a su capacidad de utilización instrumental.

Por todo esto es por lo que, en una sociedad cada vez más desarrollada, las Matemáticas tienen una incidencia relevante en la comprensión, interpretación y desarrollo de nuestro mundo. Es en este sentido en el que se puede afirmar que las Matemáticas están en la base de cualquier contexto social, científico y tecnológico.

Todo lo anteriormente dicho tiene que tener una gran influencia en el momento en que nos planteemos su enseñanza y aprendizaje. Pasada ya la etapa de educación obligatoria, el Bachillerato debe ser el «espacio» en el que nuestros estudiantes se enfrenten al aprendizaje de las Matemáticas de una manera más formal. Pero la adquisición de los conocimientos matemáticos no puede reducirse a la posesión de sus resultados finales, también debe estar siempre presente el *saber hacer Matemáticas* que va a permitir su aplicabilidad en las distintas situaciones a las que los estudiantes de Bachillerato se tendrán que enfrentar en su futuro profesional.

Es ese *saber hacer Matemáticas* el que va a potenciar su aplicabilidad en muchas de las situaciones de la actividad cotidiana, social y profesional. *Las Matemáticas sólo tendrán sentido para los estudiantes si éstos llegan a asimilar sus conceptos y a entender sus significados, aplicaciones* e *interpretaciones.*

Las Matemáticas están cada vez más introducidas en nuestro mundo actual, tanto desde la perspectiva anteriormente analizada, como en su papel de lenguaje aplicable a gran cantidad de situaciones de la vida, ya sea en el entorno cotidiano o en el profesional.

Por otra parte, la incorporación generalizada de nuevas tecnologías en la realidad social y productiva introduce nuevos instrumentos y recursos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y, al mismo tiempo, crea la necesidad de desarrollar en el alumnado una actitud abierta hacia su utilización como herramientas imprescindibles en sus futuras actividades profesionales. Este hecho hace totalmente necesario la utilización de estos medios a lo largo del Bachillerato, creando en cada estudiante una actitud crítica hacia los mismos y potenciando su capacidad para utilizarlos, de manera correcta, cuando la situación estudiada lo haga necesario.

Las Matemáticas en las distintas modalidades del Bachillerato

En el Bachillerato existen distintas modalidades y en todas ellas las Matemáticas están presentes, aunque con finalidades y contenidos diferentes. Es, por tanto, importante analizar las repercusiones que, las modalidades en las que se encuadran, tienen en la enseñanza y aprendizaje de las materias de Matemáticas.

En las modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología del Bachillerato tenemos las materias de «Matemáticas». Su currículo es el mismo para ambas modalidades y estos se agrupan en cinco bloques para el primer curso: Estadística y Probabilidad, Geometría, Funciones, Aritmética y Álgebra y Resolución de Problemas, y en tres para el segundo: Álgebra lineal, Análisis y Geometría.

Por un lado, tanto en una como en otra modalidad, las Matemáticas deben contribuir al desarrollo de las estructuras mentales de los estudiantes y a la adquisición de conceptos más formales y herramientas más potentes. Así mismo, es preciso dotar a las Matemáticas de un respaldo teórico que de solidez a la adquisición de los conceptos y las técnicas que se empleen.

Por otro lado, la resolución de problemas debe ser uno de los aspectos en los que se tiene que profundizar en mayor medida, sin limitarse a un simple adiestramiento, pues ello puede proporcionar técnicas y estrategias útiles a los estudiantes, para enfrentarse a situaciones nuevas.

Por último, deben proporcionar una serie de procedimientos y estrategias básicas para otras materias de estas modalidades –es en esta vertiente utilitaria donde más claramente se puede observar su relación con ellas, pues van a servir tanto como herramienta, como de apoyo teórico a las mismas– y para su futura actividad científica, técnica o profesional. Su componente instrumental tiene que contemplar las necesidades derivadas de las distintas materias que cursan los estudiantes de cada una de estas modalidades.[1] *Es por esto, por lo que resulta preciso establecer diferencias, en su programación y en su desarrollo en el aula, entre estas materias dependiendo de la modalidad que se imparta.*

En la modalidad de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, se sitúan las materias de «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales». Sus contenidos se agrupan en cuatro bloques para el primer curso: Aritmética y Álgebra, Funciones, Estadística y Probabilidad y Resolución de problemas, y tres para el segundo: Álgebra, Análisis y Estadística y Probabilidad.

Estas materias tienen un marcado carácter de aplicación –como herramienta de apoyo instrumental y teórico– a la resolución y toma de decisiones de problemas del ámbito de las Ciencias Sociales. Es por ello por lo que las Matemáticas en esta modalidad deben servir para que los estudiantes desarrollen capacidades relacionadas con su aplicabilidad al estudio, análisis y discusión de fenómenos de tipo social y económico.[2] *En este sentido la Estadística y la Resolución de problemas, de todo tipo, son partes fundamentales en sus contenidos.*

El mayor desarrollo conceptual y procedimental de las otras materias que configuran la modalidad –Economía, Geografía, Historia del mundo contemporáneo, etc.–, hace que éstas necesiten de la capacidad de análisis y modelización de las Matemáticas para el estudio e interpretación de datos e informaciones de todo tipo que se presentan en el desarrollo de dichas materias. Las «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales» deben, por tanto, proporcionar los conocimientos y destrezas cognitivas necesarias para desenvolverse con eficacia en una sociedad en continuo desarrollo, que demanda y utiliza, de forma creciente, lenguajes, conceptos y procedimientos matemáticos. En este sentido, el desarrollo de estas materias debe estar profundamente influido por el carácter de aplicación a las Ciencias Sociales.

En la modalidad de Artes del Bachillerato, se encuentra la materia optativa de «Matemáticas de la Forma». Sus contenidos se agrupan en cuatro bloques: Elementos y movimientos en el plano, Elementos y movimientos en el espacio, Curvas y superficies y Proporciones y medidas.

El conocimiento de los elementos matemáticos presentes en las formas y proporciones no solamente permite su comprensión, sino también su utilización en diversos aspectos del arte.[3] *Desde la antigüedad, el ser humano ha observado las formas geométricas en la naturaleza y las ha utilizado en sus representaciones artísticas, de tal manera que los elementos geométricos los encontramos en multitud de formas creadas por él –decoraciones de vasijas, frisos, construcciones arquitectónicas, etc.–. Los hombres y las mujeres de todas las épocas han estado interesados en el análisis y representación de las formas, así como por su proporción –desde las pinturas rupestres, los adornos espirales en la cerámica primitiva o en la decoración del palacio de Knosos, hasta las expresiones artísticas más modernas–. La forma y el tamaño, su análisis, interpretación y manipulación, no es el único componente del planteamiento artístico, pero sí es una de las bases de su estructura.*

Se puede, por tanto, afirmar que el medio artístico requiere un cierto grado de conocimiento y destreza en el manejo de los elementos y propiedades matemáticas de las formas y los tamaños y, en el contexto de la modalidad de Artes del Bachillerato, es conveniente la existencia de un espacio para que estos elementos y propiedades puedan ser estudiados. Este espacio es el que debe cubrir la materia «Matemáticas de la Forma».

Una de las características fundamentales de esta materia se deriva del lugar que ocupa en esta modalidad. Las «Matemáticas de la Forma» tienen un marcado carácter de apoyo en la construcción, análisis e interpretación de las formas artísticas, esto es, ha de proporcionar una serie de técnicas y estrategias básicas, para su aplicación en otras materias de esta modalidad. Los contenidos matemáticos, y su desarrollo y estudio, deben estar siempre en función de su aplicabilidad en el mundo artístico. Es, por tanto, aconsejable partir siempre de situaciones concretas y contextualizadas que pongan de relieve los aspectos matemáticos de la creación artística con la finalidad de entenderla mejor y poder utilizarlos con este fin.

Por otro lado, su carácter de materia optativa va a permitir al profesorado adaptar el desarrollo de los contenidos a las necesidades y expectativas de los estudiantes que la cursen –al no estar incluida en las Pruebas de Acceso a la Universidad permite un tratamiento más flexible de los contenidos, pudiendo poner el énfasis en aquellas facetas del aprendizaje más próximas a las necesidades de los estudiantes–.

1 Las necesidades de aparato matemático de las materias de Tecnología Industrial I y II son diferentes de las de Biología y Geología o Ciencias de la Tierra y del Medio Ambiente, por ejemplo. Esto podría condicionar el grado de desarrollo de algunos de los contenidos de la materia Matemáticas I de primer curso

2 Capacidades como: la curiosidad ante situaciones nuevas, el interés por investigar a fondo una situación, la actitud crítica ante informaciones y apreciaciones intuitivas, la necesidad de comprobar las soluciones en el marco del problema, la mentalidad abierta y receptiva a las ideas de los demás, la confianza en las propias capacidades para abordar situaciones nuevas y la madurez y reflexión ante la toma de decisiones.

3 Por ejemplo, el estudio de la perspectiva conlleva un análisis de los objetos, respecto a su tamaño y su forma, que es imprescindible para su representación plástica. También se puede observar este análisis y sus aspectos matemáticos en obras concretas, así por ejemplo, en el modelo de hombre de Leonardo da Vinci la distancia desde el ombligo a los pies esta en proporción áurea con la altura del cuerpo humano, y Le Corbusier también utilizó esta proporción en sus construcciones y proyectos arquitectónicos.

Análisis de algunos de los aspectos más significativos de los contenidos

No es el objetivo de este artículo hacer un análisis exhaustivo de los contenidos de las diferentes materias de Matemáticas en las modalidades de Bachillerato, pero sí merece la pena hacer algunas consideraciones sobre los aspectos más significativos de la enseñanza y aprendizaje de algunos de ellos (no de todos) enmarcados en su modalidad.

Dentro de las modalidades de **Ciencias de la Naturaleza y de la Salud** y de **Tecnología**, son varios los contenidos sobre los que hay que reflexionar:

Los números

Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de las matemáticas se encuentra en relación con el uso y sentido de los números. (En el primer curso de estas modalidades de Bachillerato el campo numérico se completa con el estudio de los números reales y complejos.)

Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de las matemáticas se encuentra en relación con el uso y sentido de los números.

Hay que tener en cuenta que en la ESO se ha iniciado este estudio con la utilización de los números racionales en el contexto de situaciones que necesiten de ellos –cálculo de medidas geométricas, parámetros estadísticos, etc.–, llegando a la utilización, muy somera, de los números irracionales en algunas ocasiones –en Geometría, por ejemplo–. Por tanto, puede ser útil partir de situaciones ya estudiadas en la anterior etapa educativa para introducir, a los estudiantes, en la necesidad y utilización de los números reales, mediante aproximaciones acordes a la situación que se estudia y controlando el margen de error que se comete.

La abstracción que conlleva el estudio de los números complejos es una fuente de errores en su aprendizaje por parte de los estudiantes –en muchas ocasiones estos se limitan a memorizar una serie de reglas que les permiten realizar los cálculos requeridos sin ser conscientes del sentido de estos números–. Por ello puede ser conveniente presentar este tipo de números a partir de ecuaciones de segundo grado que no tengan solución real, así como relacionar su forma binómica y polar con las coordenadas cartesianas y polares del plano.

La gran mayoría de los estudiantes de estas opciones de Bachillerato deberían haber cursado la opción B de Matemáticas en 4.° curso de ESO. (Lo deseable es que fueran todos.) Aun así, en el campo numérico pueden darse diferencias entre los estudiantes de primer curso en cuanto a su competencia numérica. –La utilización de la calculadora, de una forma crítica y razonada, puede permitir acercarse a la comprensión numérica y evitar bloqueos en otras partes de las Matemáticas que necesiten de las operaciones numéricas para su estudio y aprendizaje –.

Las funciones

El concepto de función es uno de los conceptos básicos en las materias de «Matemáticas» y, al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes de este nivel educativo, pues se mezclan en él aspectos complejos en sí mismos como su simbolismo, su representación, sus aplicaciones a otros campos –física, química, biología, tecnología, etc.– y sus propiedades locales y globales, entre otros. A lo largo de la historia, este concepto se ha ido desarrollando a partir del estudio de fenómenos variables, fundamentalmente derivados del estudio de problemas de movimiento, y ha sido expresado en distintos lenguajes –verbal, gráfico, algebraico, etc.–. Es, por tanto, preciso estudiar este concepto desde distintas facetas, utilizando distintos lenguajes y en distintas situaciones para poder conseguir una aproximación significativa al sentido de las funciones.

En la ESO se han realizado estudios, desde un punto de vista intuitivo y gráfico –mediante la utilización de descripciones verbales, tablas y gráficas–, de fenómenos funcionales relacionados con otras áreas de conocimiento –las Ciencias de la Naturaleza, las Ciencias Sociales, etc.– y esto permite que los estudiantes hayan alcanzado una primera aproximación al concepto de función. Es a partir de esta situación desde la que debe comenzarse el estudio de funciones en el Bachillerato, en este sentido es muy importante que los estudiantes relacionen, con destreza, las familias más comunes de funciones con su gráfica, entendiendo el significado de sus características más importantes. El lenguaje gráfico es, en la actualidad, un recurso muy importante para la transmisión de la información y el desarrollo de las capacidades básicas de este lenguaje –lectura e interpretación– es fundamental en este nivel educativo.

El lenguaje gráfico es, en la actualidad, un recurso muy importante para la transmisión de la información...

La dificultad de visualización de la representación gráfica de una función puede salvarse con la utilización de las calculadoras gráficas y los programas informáticos. Bien utilizando un solo ordenador en el aula –mediante la proyección de la pantalla–, con el uso de los ordenadores por los estudiantes en un aula especial o mediante la utilización de calculadoras gráficas en el aula, estos pueden familiarizarse con la forma de las gráficas de las funciones elementales y su modificación en función de sus parámetros. Para que un estudiante pueda comprender el significado de una asíntota, por ejemplo, es preciso que la visualice en distintas funciones y tenga un sentido concreto para la situación que representa.

Los conceptos de límite y derivada constituyen otro de los problemas didácticos en las matemáticas en este nivel educativo. Si el concepto de función es, como se acaba de decir, complejo y difícil para los estudiantes, más complicado les resultan aquellos, pues, además de su dificultad intrínseca, se sustentan en este. Así resulta que uno de los primeros problemas con que un alumno o alumna se encuentra, en el momento de aproximarse al concepto de límite, es la idea del infinito y de una cantidad infinitesimal, al que se añade el problema derivado de no tener asentado el concepto de función. De nuevo hay que tener en cuenta que en la ESO se ha realizado una aproximación intuitiva a la idea de límite y es a partir de esta situación de la que se debe partir.

Para introducir el concepto de derivada de una función en un punto y, a partir de él, el de función derivada, parece conveniente tratar el tema de la tasa media de variación para llegar a la tasa instantánea de variación. El apoyo en el estudio de velocidades, medias e instantáneas, es un recurso interesante, pues es próximo a los estudiantes y refuerza, además, la idea de límite.

El cálculo de derivadas y primitivas

La finalidad del Análisis en estas modalidades de Bachillerato está en la gradual adquisición de los conceptos implicados y su aplicación en las situaciones que así lo requieran, *el cálculo de derivadas y primitivas está en función de su aplicación a la interpretación de los sucesos funcionales que se estudian.*

El creciente desarrollo de los medios informáticos y su posibilidad de integrarlos en el proceso de enseñanza lleva implícito un cambio significativo en el enfoque del estudio del cálculo de derivadas y primitivas. La existencia de calculadoras gráficas y software informático, que permiten calcular, de una manera sencilla, derivadas e integrales complicadas, ofrece la posibilidad de que el énfasis se sitúe en el sentido del cálculo más que en el cálculo en sí mismo. De todas formas, el desarrollo de destrezas de cálculo es importante en este nivel educativo, pero se debe limitar a aquellos casos elementales que van a permitir una aproximación, desde otra perspectiva, al concepto.

Es evidente que es fundamental que los estudiantes de este nivel educativo sepan calcular con destreza derivadas y primitivas de funciones sencillas con técnicas elementales, pero queda fuera de los objetivos de estas materias, desarrollar destrezas sofisticadas de cálculo cuando, hoy en día en nuestra sociedad –y en un futuro inmediato es presumible que más aún–, el desarrollo de los instrumentos informáticos y de las calculadoras permite su utilización en el aula, posibilitando que el esfuerzo de enseñanza y aprendizaje se desplace de la adquisición de técnicas y algoritmos complicados de cálculo, a la comprensión significativa y aplicación práctica de los conceptos matemáticos implicados.

Los problemas más frecuentes en la enseñanza de la geometría analítica vienen derivados, en la mayor parte de los casos, de la falta de visualización de los problemas geométricos que, generalmente, se plantean desde una perspectiva algebraica.

La Geometría

Los problemas más frecuentes en la enseñanza de la geometría analítica vienen derivados, en la mayor parte de los casos, de la falta de visualización de los problemas geométricos que, generalmente, se plantean desde una perspectiva algebraica. La disociación entre la geometría sintética y la algebraica conlleva que aquellos estudiantes menos capacitados en el razonamiento abstracto, se pierdan en un mundo de fórmulas y ecuaciones en el que se manejan según ciertas reglas independientes de su significado geométrico.

El trabajo geométrico realizado en la ESO puede servir de base para que el tratamiento algebraico de la Geometría esté más próximo a las situaciones de aprendizaje de los estudiantes de estas modalidades de Bachillerato. Es a partir de estos aprendizajes desde donde se puede fundamentar el contenido geométrico de las Matemáticas en estas modalidades del Bachillerato y, por tanto, es muy importante que la visualización de las formas geométricas esté presente en todo el proceso de enseñanza; la utilización de programas informáticos puede ser muy importante para esta visualización.

En estas modalidades de Bachillerato se tiene que partir de un enfoque geométrico de la trigonometría y del estudio analítico de la geometría del plano, que debe desarrollarse de forma creativa e imaginativa, superando la presentación inicial clásica de forma algebraica. Hay que tener en cuenta que un estudio exclusivo de las ecuaciones de la recta en el plano da soluciones a muy pocos problemas geométricos de la Ciencia y la Tecnología actuales.

No hay que tomar partido por la enseñanza de una geometría sintética o una geometría analítica, ambas pueden y deben complementarse. La interacción entre la geometría y el álgebra contribuye a reforzar la capacidad de los estudiantes para analizar desde distintos puntos de vista un mismo problema geométrico, y para visualizar el significado de determinadas expresiones algebraicas –ecuaciones/curvas, matrices/transformaciones geométricas, etc.–. Así, en el tratamiento de las cónicas, estas dos visiones son fundamentales; en el estudio de los cuerpos geométricos –esfera y poliedros– y sus secciones se puede, con la utilización del ordenador, completar su análisis; para estudiar secciones de superficies mediante coordenadas cartesianas o polares se puede ampliar el campo de interpretación, desbordando el estrecho margen de un enfoque exclusivamente algebraico que sólo posibilita, a este nivel, el estudio de formas lineales.

El tratamiento de cuerpos y superficies proporciona a los estudiantes una visión más global del espacio que el mero estudio de rectas y planos. Para el estudio de espirales y hélices, envolventes de rectas y curvas –la cicloide, la cardiode, etc.– y de superficies de revolución de rectas y cónicas es necesario recordar los distintos tipos de coordenadas para representar en el plano y en el espacio. Puede resultar interesante partir del visionado de vídeos y diapositivas de formas arquitectónicas y naturales en las que aparezcan curvas y superficies sencillas –arcos de puentes, escaleras de caracol, caracoles, chimeneas, plantas trepadoras, etc.–.

En las materias de «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales», de la modalidad de **Humanidades y Ciencias Sociales**, analicemos los siguientes:

Los números y el cálculo

Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de las Matemáticas, y más concretamente en esta modalidad de Bachillerato, se encuentra en relación con el uso de los números y las operaciones con ellos. En este sentido es conveniente partir de situaciones concretas para la introducción de los números irracionales. A partir de la existencia de medidas y de ecuaciones cuyas soluciones no pueden ser expresadas exactamente con números racionales se puede introducir la necesidad del número real y su utilización mediante las aproximaciones y estimaciones acordes a la situación que se estudia.

No hay que tomar partido por la enseñanza de una geometría sintética o una geometría analítica, ambas pueden y deben complementarse.

En el campo numérico pueden darse grandes diferencias entre los estudiantes de primer curso y es preciso prestar especial atención a este tema pues la competencia numérica incide directamente en todos los contenidos de esta materia. Por lo tanto, será preciso disponer de una serie de actividades de refuerzo y recuperación para aquellos estudiantes con dificultades numéricas. Estas actividades deber estar enmarcadas en contextos que no presenten dificultades añadidas y pueden ser extraídas de otras ya trabajadas en la ESO. Es muy importante que tales actividades no estén descontextualizadas –no parece conveniente presentar hojas de operaciones numéricas sin ningún significado–, pues no se pretende ejercitarles en las operaciones con estos números, sino que se familiaricen con ellos y entiendan su significado. Además, este tipo de actividades totalmente descontextualizadas pueden dificultar aún más su aprendizaje a estos estudiantes con problemas de competencia numérica.

La utilización de la calculadora, de una forma crítica y razonada, va a ser un instrumento muy importante en estas materias, pues, por un lado, va a posibilitar que los estudiantes aumenten su comprensión numérica y, por otro, va a permitir evitar bloqueos en otros campos de las Matemáticas que necesiten de las operaciones numéricas para su estudio y aprendizaje.

El lenguaje algebraico

Uno de los problemas que, en general, se presentan en la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles educativos es el relativo al aprendizaje del lenguaje algebraico. Es su propia cualidad de lenguaje la que proporciona una de las mayores dificultades debido fundamentalmente a su grado de abstracción, la utilización de símbolos para representarlo, sus *características sintácticas* –convenios de notación, signos de operación, utilización de paréntesis, sentido y uso de las letras, etc.–, sus reglas de utilización, sus diferencias con el lenguaje aritmético, etc.

Precisamente el papel de las Matemáticas en esta modalidad de Bachillerato, como lenguaje de comunicación aplicable a gran cantidad de situaciones de la vida, es el que hace especialmente importante la enseñanza y aprendizaje de las estructuras básicas del lenguaje algebraico en esta etapa educativa, y uno de los aspectos que habrá que reforzar es *la traducción de situaciones y problemas en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico.* En el tratamiento de problemas y situaciones del ámbito de las Ciencias Sociales es donde es especialmente importante la *traducción* al lenguaje matemático para proceder a la búsqueda de soluciones o toma de decisiones acordes con ellos –la transcripción de problemas reales, expresados en lenguaje usual, al lenguaje cotidiano está recogido en los criterios de evaluación de ambos cursos–.

La posibilidad de utilizar una sola letra para representar y operar, de manera sencilla, un conjunto de valores numéricos es una de las principales características que dan utilidad al álgebra y, a su vez, proporcionan un grado alto de complejidad a su aprendizaje. En muchas ocasiones la dificultad está derivada de que los estudiantes no llegan a comprender la utilización de los símbolos algebraicos porque no ven su relación con lo que representan en las situaciones que se estudian. Esto se debe, en gran medida, a que se han estudiado de una manera descontextualizada –lo que lleva a muchos estudiantes a aprenderse de memoria un conjunto de reglas y algoritmos de resolución, sin entender su sentido ni su significado– y, en otras ocasiones, a que las situaciones de partida no son lo suficientemente adecuadas como para llegar a necesitar su utilización. La doble vinculación entre la situación concreta que se analiza y su expresión algebraica, necesita que se dedique un tiempo importante a su aprendizaje que permita que los estudiantes interioricen el sentido de las letras –como parámetros, variables, incógnitas, etc.– y los símbolos, como base para el tratamiento algebraico de otros contenidos de estas materias en el Bachillerato.

Tanto la resolución de problemas de ecuaciones, como en el estudio de las matrices, sus operaciones, propiedades y aplicaciones, y en la programación lineal, se deben partir de situaciones concretas del ámbito de las Ciencias Sociales...

Durante la ESO se ha debido comenzar la introducción al álgebra y, más concretamente, a su utilización como lenguaje de comunicación e interpretación de la realidad, pero en un grado de profundización básico. Ademas, hay que tener en cuenta que es en la opción B del área de Matemáticas en cuarto curso –donde se desarrolla, con más profundidad, el lenguaje algebraico– y no se puede dar por supuesto que todos los estudiantes hayan cursado esta opción, más bien todo lo contrario, con lo cual el grado de diversidad en estos puede ser grande.

En este sentido parece conveniente comenzar el primer curso con la resolución de problemas –en contextos derivados de las Ciencias Sociales– que den lugar a ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales –con diferentes grados de complejidad para atender a la diversidad– y, a su vez, permitan el tratamiento de los aspectos básicos del lenguaje algebraico –como la naturaleza y significado de los símbolos y las letras–.

La contextualización es un elemento fundamental en la enseñanza del álgebra en los dos cursos de esta modalidad de Bachillerato. Tanto la resolución de problemas de ecuaciones, como en el estudio de las matrices, sus operaciones, propiedades y aplicaciones, y en la programación lineal, se deben partir de situaciones concretas del ámbito de las Ciencias Sociales –no se puede olvidar el carácter de aplicación a las Ciencias Sociales de estas materias– en las que los alumnos y alumnas encuentren el sentido (en el problema que se estudia) de la utilización de los elementos algebraicos que intervienen.

La inferencia estadística

La Estadística inferencial es una de las partes de la Matemáticas que más aplicabilidad tiene en el campo de la investigación social, por lo tanto, en esta modalidad de Bachillerato es fundamental su estudio. Cuando se quiere realizar una investigación sobre unas determinadas características de una población es preciso recoger la información de cada uno de sus elementos, hecho no siempre posible. La necesidad de extraer muestras representativas de una población, de determinar su tamaño, inferir a toda la población los datos obtenidos con un cierto nivel de confianza, validar hipótesis sobre las características que se están estudiando y de tomar decisiones significativas, son algunos de los aspectos fundamentales en toda investigación estadística y, por tanto, deben introducirse en las Matemáticas de esta modalidad de Bachillerato.

En la ESO los estudiantes han realizado el tratamiento estadístico unidimensional de datos de una manera bastante completa, y a partir de ello se debe presentar el estudio de la inferencia estadística en esta modalidad de Bachillerato. Por otra parte, por todo lo dicho anteriormente, es fundamental que los problemas e investigaciones que se planteen debe estar siempre contextualizados.

Una de las mayores dificultades que los estudiantes pueden encontrar en el aprendizaje de la estadística inferencial es la complejidad de los cálculos de determinados parámetros estadísticos, por lo que es imprescindible la utilización de calculadoras estadísticas, gráficas o programas de ordenador –lo más importante en esta materia es que los alumnos y alumnas empleen la inferencia estadística para tomar decisiones, comprender los procesos y contrastar hipótesis–.

Otro de los problemas que se encuentran los estudiantes es el hecho de que las medias de cada muestra constituyen una nueva variable aleatoria que tiene su propia media y su propia varianza. Para mitigar este problema es preciso hacer reflexionar a estos mediante el estudio de situaciones concretas diferentes viendo el significado de cada estadístico y de cada parámetro. Una posible opción es el estudio de una situación que pueda dar lugar a un estudio completo. Este tipo de problema permite un desarrollo amplio de los contenidos de inferencia estadística de esta materia.

Un método de trabajo podría ser ir desarrollando los contenidos al hilo del problema –siendo este problema el eje del desarrollo del tema– deteniéndose, cuando sea necesario, para afianzar los conceptos implicados. Otra forma de trabajo sería plantearlo al final de una unidad didáctica que desarrolle estos contenidos, como investigación global que resuma todo el tema trabajado en el aula.

Sea cual fuere el método elegido, en el desarrollo de un problema de este tipo, se han de seleccionar varias muestras del mismo número de individuos, estudiando el tipo de muestra que se elige, los estratos utilizados, su tamaño y las consecuencias que se deduzcan de ello; posteriormente efectuar una estimación sobre el total de la población analizando los estadísticos y los parámetros que intervienen. Por último, se ha de comprobar que las medias de cada muestra constituyen una nueva variable aleatoria, tal que su media coincide aproximadamente con la calculada y su desviación típica con la anterior dividida por la raíz del número de elementos de cada muestra. A partir de ello se puede plantear la aceptación o rechazo de una determinada altura media de todos los estudiantes con unos determinados niveles de significación. Los estudiantes deberán definir la hipótesis nula y la hipótesis alternativa y aceptar o rechazarla con un nivel de significación determinado (probabilidad de rechazar la hipótesis nula) a partir del análisis de la muestra, además, deberán encontrar la región de aceptación y calcular la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo esta cierta (error de tipo I) o aceptarla siendo falsa (error de tipo II).

La Estadística inferencial es una de las partes de la Matemáticas que más aplicabilidad tiene en el campo de la investigación social, por lo tanto, en esta modalidad de Bachillerato es fundamental su estudio.

Finalmente, en la materia de «Matemáticas de la Forma» de la modalidad de **Artes** veamos los siguientes:

La medida

Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de los contenidos de la materia «Matemáticas de la Forma» se encuentra en relación con la utilización de los números para medir. En todo estudio de formas geométricas es fundamental el estudio de sus medidas –longitud, área y volumen– y en el problema de la medida hay dos aspectos, fundamentales, intrínsecos en este tema: contar y comparar.

Cuando, para realizar una construcción geométrica, se utiliza el compás para trasladar una medida un número determinado de veces, o cuando para construir un exágono regular se utiliza la medida del radio para construir los lados, se están utilizando propiedades geométricas importantes y es básico ser conscientes de ello.

Para establecer la medida directa de una forma geométrica es preciso establecer una comparación entre ella y un patrón establecido, que tendrá una cierta graduación de tal manera que nos permita establecer la medida del objeto con la precisión que necesitemos. En la ESO se han desarrollado una serie de contenidos básicos de la medida –unidades de medida, sistema métrico decimal, medida de ángulos, utilización de regla, compás y portaángulos como instrumentos de medida, estimación, etc.– que tiene que servir de base para el desarrollo de los contenidos relativos a esta tema. Es a partir de ellos desde donde se deben estudiar las propiedades métricas más importantes para el análisis y creación de formas geométricas. La utilización y estudio de las medidas antropométricas puede ser otro punto de partida para el estudio y comprensión del problema de la medida.

Sin embargo, uno de los aspectos más problemáticos se deriva del tipo de magnitud –lineales, cuadráticas o cúbicas– del objeto que hay que medir, esto es, uno de los problemas de aprendizaje es la no distinción entre longitudes, áreas y volúmenes. Un ejemplo claro está en el problema que se les plantea a los alumnos y alumnas en la distinción entre la variación del perímetro y del área de una figura al realizar una transformación no isométrica en ella –por ejemplo, la variación del área de un rombo al modificar sus ángulos sin modificar la medida de los lados–. Este problema se acentúa en el caso del volumen. La dificultad de los conceptos de longitud, área y volumen, debida en parte a su grado de abstracción y a su habitual representación es la raíz de este problema.[4]

Este problema se plantea ya en la ESO, pero puede seguir apareciendo en el Bachillerato y, además, puede haber una diversidad amplia de posibles errores entre los estudiantes. Por esto es importante la realización de una evaluación inicial que facilite un diagnóstico de este problema que permitirá al profesor o profesora realizar un tratamiento acorde a las circunstancias. La utilización de materiales manipulables –varillas, cartón, etc.– y de programas informáticos –DAO, Cabri, etc.– puede ser muy útil para alumnos y alumnas con dificultades en el aprendizaje de estos conceptos.

La proporcionalidad

Las relaciones de proporcionalidad entre objetos geométricos es otro de los conceptos más difíciles que se han trabajado en geometría en la ESO. A la dificultad de la medida se le une la de la relación entre esas medidas.

Las relaciones de proporcionalidad las encontramos en multitud de representaciones artísticas –por ejemplo en la perspectiva esta incluido, de una forma intrínseca, el concepto de proporcionalidad– y es básico desarrollar este concepto. Muchos de los procedimientos empleados en la creación artística están fundamentados en el concepto de proporción[5] y, en este sentido, es muy importante que los estudiantes, al realizar estos procedimientos, sean conscientes de ello. Para lograr esta conciencia es necesario que se realicen actividades que pongan de manifiesto la proporcionalidad y ésta se calcule por diversos métodos, estudiando el margen de error de cada uno de ellos. La utilización de vídeos, transparencias y programas informáticos va a permitir una visualización más fácil de la proporcionalidad entre las formas, sobre todo en el espacio, y su empleo cotidiano en el aula es un recurso metodológico importante para el tratamiento de este tema.

Muchos de los procedimientos empleados en la creación artística están fundamentados en el concepto de proporción...

El análisis de las relaciones de proporcionalidad entre superficies o entre volúmenes resulta más complicado para los estudiantes –en la ESO ya se ha tratado el tema de la proporcionalidad, pero sobre todo en su vertiente lineal–, la dificultad que representa el estudio y análisis de la semejanza entre figuras se acrecienta al tratar las áreas –por ejemplo en la construcción de un polígono semejante, de área doble, a otro dado– y mucho más al trabajar volúmenes.

El problema básico es que la proporcionalidad de áreas y de volúmenes deja de ser lineal. Es una constante en la literatura fantástica las variaciones sobre el tamaño de los objetos y de las personas –por ejemplo: *Alicia en el País de las maravillas* de Lewis Carroll o *Los viajes de Gulliver* de J. Swift– y ello es debido a la relativa sorpresa que producen los resultados reales que no se corresponden con los que se pueden pensar vulgarmente que parecería lógico que ocurriera.

La dificultad estriba en que se aplican proporciones lineales en el cálculo proporcional de las medidas de volumen, además del cálculo de las medidas mismas, y esta concepción está muy extendida entre los estudiantes. Es preciso, por tanto, realizar actividades de este tipo que desmonten estos preconceptos erróneos, al mismo tiempo que les resulten motivadoras para trabajar este tema.

Las isometrías en el plano

Los movimientos isométricos de figuras planas se han estudiado ya en la ESO, sin embargo, existen dificultades en el análisis y elaboración de representaciones artísticas en las que existen estos movimientos. En muchas ocasiones el problema radica en la visualización de los movimientos de las formas geométricas incluidas en una representación.

El problema se complica cuando en la representación artística existen deslizamientos –composición de simetría axial y traslación paralela al eje de simetría–. La simetría

4 Cuando se representa un polígono suele dibujarse exclusivamente sus lados y no se suele diferenciar, al referirnos a él, el interior (superficie) del contorno (perímetro), este problema aparece también entre circunferencia y circulo (su dibujo es el mismo) y mucho más, en las formas espaciales, como en los poliedros con relación a las aristas, los lados y el volumen.

5 En la utilización del lápiz con el brazo extendido para trasladar al papel una medida lejana de forma proporcional, se está utilizando el Teorema de Thales.

es la isometría plana que presenta más problemas de aprendizaje en los alumnos y alumnas de este nivel educativo. La dificultad estriba en que para realizar una simetría con una figura plana, es preciso salirse del plano para visualizar el movimiento. En la ESO ya se ha estudiado este movimiento y es posible que se hayan utilizado espejos y materiales manipulables para ello, sin embargo, en su utilización para el análisis de frisos y mosaicos, así como para su creación, va a seguir planteando dificultades a los estudiantes.

Para el desarrollo de la capacidad de visión espacial, y más concretamente del aspecto dinámico de las formas, es muy conveniente la utilización de los medios audiovisuales –vídeos, diapositivas, transparencias–, así como algunos programas informáticos específicos de este tema. La visualización de las isometrías en las representaciones artísticas es fundamental para potenciar el aprendizaje significativo de estos contenidos.

Otro aspecto importante, que conlleva una seria dificultad en su aprendizaje, es la creación de rosáceas, frisos y mosaicos por parte de los alumnos y alumnas que cursan esta materia. Para ello es positivo el estudio y creación de diferentes motivos mínimos a partir de los cuales, realizando las isometrías convenientes, se pueden elaborar las rosáceas, mosaicos o frisos que se deseen. El color es otro de los elementos que hay que considerar en el estudio de los mosaicos y las representaciones que contienen isometrías. Por un lado, la utilización del color va a permitir obtener diferentes mosaicos a partir del mismo diseño, por otra parte, en el análisis de representaciones, permite identificar módulos dentro de las mismas.

El espacio

A pesar de que los estudiantes se desenvuelven en un mundo tridimensional carecen, en muchos casos, de intuiciones espaciales. Este problema, bastante generalizado, se basa en la dificultad para representar las formas espaciales en el plano.

Un elemento metodológico muy importante para conseguir desarrollar la capacidad de visión espacial es la utilización de las nuevas tecnologías, tanto de los medios audiovisuales como de distintos juegos y programas informáticos tridimensionales, que simulan y permiten la visualización de las formas espaciales mediante una representación en el plano, potenciando el desarrollo de la abstracción espacial de las propiedades geométricas de las formas.

Otro de los recursos importantes, para el trabajo con formas espaciales, es la utilización de materiales manipulables. A partir del manejo de cuerpos sólidos, sus cortes y truncamientos, se pueden identificar y analizar propiedades importantes de las formas espaciales.

A pesar de que los estudiantes se desenvuelven en un mundo tridimensional carecen, en muchos casos, de intuiciones espaciales.

Para el estudio de las isometrías en el espacio los programas y juegos informáticos espaciales van a cumplir un papel metodológico importante –por ejemplo el Tetris espacial, aparte de su aspecto lúdico, implica un desarrollo importante de la capacidad de visualizar distintas isometrías de una forma espacial concreta–. De igual modo, para la identificación y análisis de curvas en el espacio los programas informáticos permiten su visualización de una manera fácil y rápida –si se utilizan programas informáticos, como el Derive, es conveniente que sea el profesor o profesora quien maneje el ordenador, pues la finalidad es la visualización de las curvas espaciales y no su estudio analítico–.

Comentarios finales

Con estas observaciones, tan sólo he pretendido poner de manifiesto algunas de las características más importantes de las Matemáticas en las distintas modalidades del Bachillerato LOGSE, así como, sobre su tratamiento didáctico.

La principal finalidad de este artículo es potenciar el debate sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en el Bachillerato. En unos momentos en los que el desarrollo científico y tecnológico es cada vez más rápido, debemos hacer una profunda reflexión sobre distintos métodos y diferentes contenidos.

Quiero terminar con unas palabras de Gonzalo Sánchez Vázquez, que se publicaron en el periódico del ICME 8 de Sevilla, y que muestran, con mayor claridad, algunos aspectos didácticos que he querido resaltar en este artículo:

Esta revolución informática y los nuevos contenidos de la Matemática actual no pueden ser desconocidos por la enseñanza... Las Matemáticas no deben enseñarse ya de una manera expositiva, estática, transmitida por el profesor a un conjunto de alumnos pasivos. Es preciso que estos participen, observen, exploren, hagan conjeturas y se enfrenten con problemas que les interesan. El profesor es un director de orquesta que apenas se ve, pero que sugiere y orienta constantemente...

Javier Brihuega
Sociedad Madrileña de
Profesores de Matemáticas
Emma Castelnuovo

SUMA 25
junio 1997, pp. 123-129

Algunas cuestiones y problemas sobre los triángulos

Juan-Bosco Romero Márquez
María Ángeles López y Sánchez-Moreno

A Gonzalo Sánchez Vázquez

En esta corta nota de carácter elemental presentamos la relación que existe entre las mediatrices de un triángulo y las medias armónica y geométrica, así como la media aritmética ponderada de dos números reales positivos, o lo que es lo mismo, de las longitudes de los segmentos geométricos asociados. Así mismo, damos la construcción geométrica de todas las medias anteriores a través del triángulo y sus mediatrices.
También se presenta en este artículo una nueva caracterización de los triángulos rectángulos.

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

CONCEPTOS y resultados previos

Comenzamos esta sección presentando los conceptos y los resultados más importantes sobre las medias de dos números reales positivos y de sus distintas interpretaciones geométricas vía los triángulos rectángulos –medias armónica, geométrica y aritmética–, o vía el trapecio –medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática–, que se pueden encontrar en la bibliografía citada.

Todo ello puede ser vivido y construido con las herramientas euclidianas –la regla y el compás– o a través del ordenador.

Medias asociadas a dos números reales positivos

En este apartado resumimos los conceptos y los resultados elementales más notables sobre las medias de dos números reales positivos o, lo que es lo mismo, las medias de las longitudes, de las áreas y de los volúmenes de las figuras geométricas asociadas en cada caso.

Sean $0 < a < b$ dos números reales positivos y $r \in \mathbb{R}$. Llamamos media r-ésima de los números a y b al número $m_r(a, b)$ definido como sigue:

$$m_r(a,b) = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{1/r}, \text{si } r \in \mathbb{R} - \{0\}$$

[1]

$$m_0(a,b) = \sqrt{a \cdot b}\ ,\ m_{-\infty}(a,b) = a,\ m_{+\infty} = b$$

En particular, si hacemos en [1], r = –1, r = 1, r = 2, se obtienen las medias armónica, aritmética y cuadrática de *a* y *b*, respectivamente.

En el teorema siguiente resumimos las propiedades más importantes que tienen las medias de dos números reales positivos.

Teorema 1

Si $0 < a < b$ son dos números reales, entonces se verifica:

a) $m_r(a, b) = m_r(b, a)$ (*simetría*).

b) $m_r(t{\cdot}a, t{\cdot}b) = t{\cdot}m_r(a, b)$ (*homogeneidad*).

c) $a < m_r(a, b) < b$.

d) Si $r < s$ implica $m_r(a, b) < m_s(a, b)$ (*monotonía*)

Por métodos elementales de cálculo algebraico simple se puede probar el siguiente resultado (Posamentier, 1988 y Beckenbach y Bellman, 1961).

Corolario

Si $0 < a < b$ son números reales, entonces se tiene:

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$$

Ejercicio

Estudiar las propiedades y dibujar las gráficas de las funciones reales que se obtienen al tomar $a = 1$ y $b = x > 0$ para las medias $r = -\infty$, $r = -1$, $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ y $r = +\infty$.

Para un estudio algebraico, analítico y geométrico de estos tipos de medias, de algunas identidades y desigualdades fundamentales que se establecen entre ellas, así como la relación existente con algunos problemas de máximos y mínimos sobre ciertas figuras del plano, véanse Posamentier (1988) y Beckenbach y Bellman (1961). Para una generalización de las medias y de otros resultados sobre ellas se puede consultar Mitrinovic (1976).

Resultados

En esta sección probamos los resultados más importantes de nuestro trabajo utilizando para ello el teorema de Tales aplicado a la semejanza entre triángulos.

La media armónica y media aritmética ponderada caracterizadas mediante los triángulos acutángulos y obtusángulos vía los triángulos isósceles

Suponemos conocido en todo lo que sigue los conceptos de mediatrices y circuncentro de un triángulo y las propiedades de las medias armónica, geométrica y aritmética (ponderada o no) de dos números reales positivos.

Comenzamos enunciando el siguiente teorema:

Teorema 2

Sea ABC un triángulo de lados a = BC, b = CA y c = AB. Tracemos la mediatriz al lado BC por su punto medio A', y sean los puntos C' y B' donde ésta corta a los lados (o a sus prolongaciones) AB y AC, respectivamente. Si denotamos por h = AA" a la altura correspondiente al lado BC, y si ponemos x = A'C', y = A'B', m = BA" y n = A"C (ver figura 1), entonces se verifica:

$$h = \frac{mx + ny}{m + n} = \frac{2xy}{x + y}$$

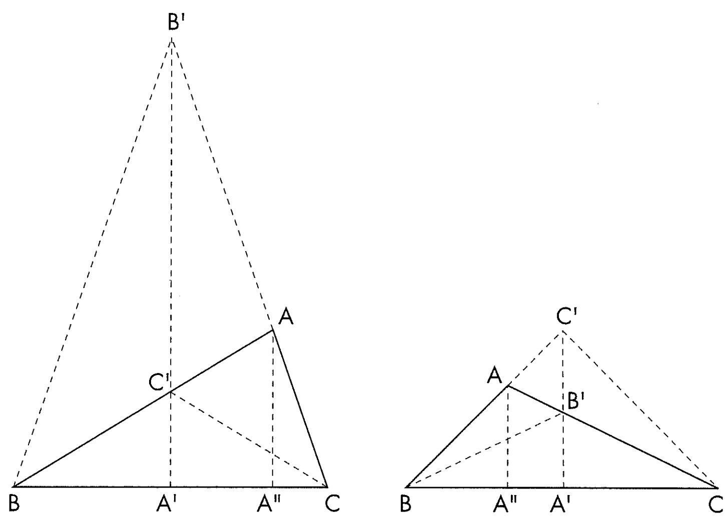


Figura 1

Demostración: Veamos la demostración del teorema para el caso en que el triángulo es acutángulo (si es obtusángulo se hace de una forma similar).

Por las construcciones que hemos hecho en la figura 1, los triángulos rectángulos ABA" y C'BA' son semejantes ya que tienen los lados paralelos.

Por lo tanto, tenemos:

$$ah = 2mx$$

de donde:

$$h = \frac{2\,mx}{a} \qquad [2]$$

De forma similar, los triángulos rectángulos A'B'C y A"AC son también semejantes, ya que tienen un ángulo común, C. Por ello:

$$ah = 2ny$$

y de aquí tenemos que:

$$h = \frac{2\,ny}{a} \qquad [3]$$

Sumando [2] y [3] obtenemos:

$$2h = \frac{2}{a}(mx + ny)$$

y ahora despejando h, teniendo en cuenta que mx = ny, llegamos a

$$h = \frac{mx + ny}{m + n} = \frac{2xy}{x + y} \qquad [4]$$

Con lo que tenemos así probado que h es a la vez la media aritmética ponderada y la media armónica de los segmentos de longitudes x e y, respectivamente, en virtud de la proporcionalidad que hay entre los segmentos m, n, x e y que intervienen en [4].

Corolario

El área del triángulo ABC es la media armónica de las áreas de los triángulos isósceles BCC' y BCB'.

Ejercicio

Utilizando una construcción similar a la anterior dibujar el segmento:

$$h = \frac{2xy}{y - x}$$

donde $y > x > 0$. Ver la figura 2.

BC = a, A'B = A'C = a/2, A'C' = x, A'B' = y, AA" = h

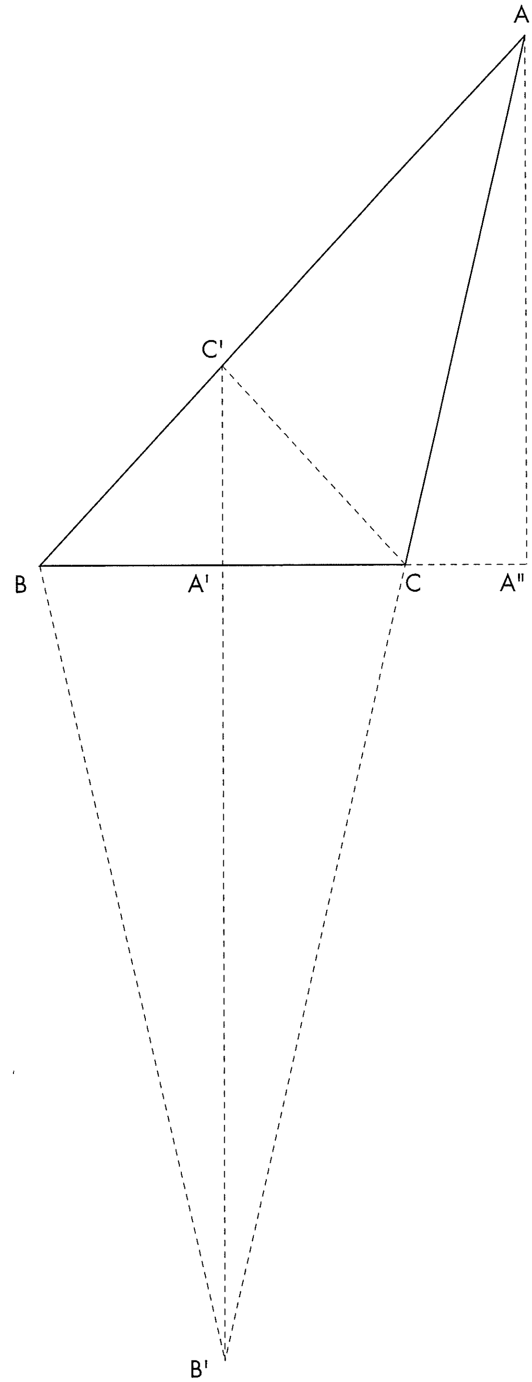


Figura 2

Nota. Observar que la clave, en todo lo anterior, ha sido el utilizar los triángulos isósceles para determinar la altura de todo triángulo como una media armónica de las alturas de los triángulos isósceles BCB' y BCC'

Equivalencia de la media armónica y la media geométrica en un triángulo rectángulo

De la misma forma que anteriormente, pero vía el triángulo rectángulo, podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3

Sea ABC un triángulo rectángulo en A de lados $a > b \geq c$. Si denotamos por a = BC, x = A'B', y = A'C', m = A"C, n = A"B, y h = AA" donde A" es el punto proyección ortogonal (pie de la perpendicular) trazada desde el punto A sobre el lado BC, entonces

$$h = \frac{2xy}{x+y} = \sqrt{m \cdot n} \qquad [5]$$

Demostración: Por la construcción realizada, en la figura 3, los triángulos rectángulos A'B'C y A"AC son semejantes, ya que tienen un ángulo común en el vértice C y los lados B'A' (mediatriz de BC) y AA" (altura) paralelos y perpendiculares al segmento BC.

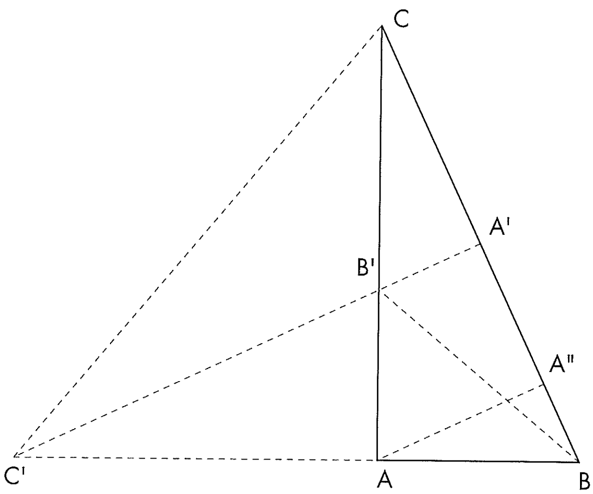


Figura 3

De forma análoga se prueba que los triángulos rectángulos A'C'B y A"AB son semejantes, ya que tienen un ángulo común en el vértice B y los lados A'C' y AA" paralelos.

Por lo tanto, escribiendo la relación de semejanza entre los siguientes pares de triángulos, obtenemos para el par A'B'C, AA"C:

$$\frac{h}{x} = \frac{A''C}{\frac{a}{2}} \quad , \quad A''C = \frac{ha}{2x}$$

y para el par A'C'B, A"AB:

$$\frac{h}{y} = \frac{A''B}{\frac{a}{2}} \quad , \quad A''B = \frac{ha}{2y}$$

Ahora bien:

$$a = BC = A''C + A''B = \frac{ha}{2x} + \frac{ha}{2y} = \frac{ha}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

y despejando h obtenemos:

$$h = \frac{2xy}{x+y} = \sqrt{m \cdot n}$$

con lo que el teorema queda probado.

Otra construcción de la media armónica de dos segmentos vía los triángulos rectángulos

En este apartado vamos a dar un nuevo teorema que nos permite construir la media armónica de dos segmentos vía el triángulo rectángulo como método de construcción y caracterización.

Teorema 4

Sea ABC un triángulo de lados a = BC, b = AC y c = AB. Tomando como referencia el lado BC, trazamos por B y C, las rectas perpendiculares hasta que corten a las prolongaciones de los lados AC y AB, respectivamente, en los puntos B' y C'.

Entonces, dos veces la altura h = AH del lado BC es la media armónica de los segmentos x = CC' e y = BB'

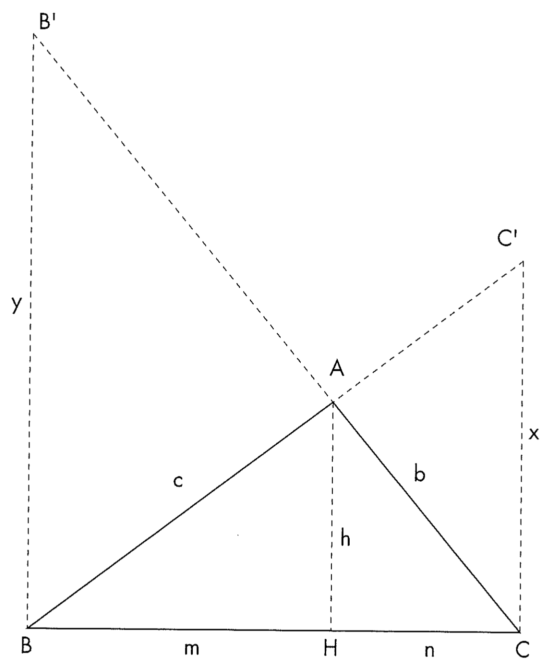


Figura 4

Demostración: Por las construcciones que hemos realizado (ver figura 4) los triángulos rectángulos BCC' y BHA son semejantes, ya que tienen lados paralelos y, además, un ángulo común en el vértice B.

Por lo tanto, por el teorema de Thales aplicado a ambos triángulos, tenemos (véase la figura 4):

$$\frac{x}{h} = \frac{a}{m} \qquad [6]$$

Similarmente, los triángulos rectángulos CBB´ y CHA son también semejantes, por la misma razón anterior.

Por todo ello:

$$\frac{y}{h} = \frac{a}{n} \qquad [7]$$

Despejando de [6] y [7] m y n, respectivamente, tenemos que:

$$a = m + n = \frac{ha}{x} + \frac{ha}{y} = ha\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Despejando h llegamos a:

$$h = \frac{xy}{x + y} \qquad [8]$$

Finalmente, pongamos $h^* = 2h$ y obtenemos el cálculo y la construcción de la media armónica de los segmentos x e y.

De forma más general, y vía cualquier clase de triángulo, tenemos el siguiente resultado que nos permite construir la media armónica de dos segmentos (ver figura 5):

Teorema 5

Sea C_1 cualquier punto del lado AB del triángulo ABC, y dibujar C_1C. Sea A1 el punto de intersección de BC prolongada hasta cortar a la paralela trazada por A a CC_1; similarmente, sea B1 la intersección de AC prolongada hasta cortar a la paralela por B a C_1C. Entonces se verifica la siguiente relación:

$$\frac{1}{CC_1} = \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} \qquad [9]$$

Demostración: Ya que los segmentos AA_1, BB_1 y CC_1 son paralelos (figura 5), los pares de triangulos CAC_1, B_1AB y de otra parte, CBC_1, A_1BA son semejantes,

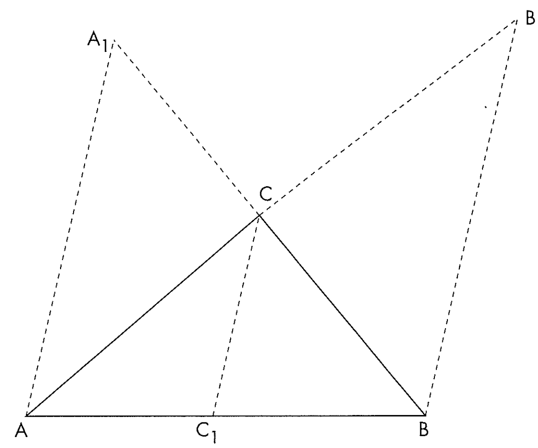


Figura 5

respectivamente. De esto obtenemos:

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC_1}{AB} \quad \text{y} \quad \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{C_1B}{AB}$$

Sumando miembro a miembro estas dos proporciones llegamos a la relación propuesta en [10].

Proponemos a título de investigación en la clase los siguientes problemas de geometría.

Ejercicios

1) Escribiendo la semejanza entre los triángulos ABB' y ACC', obtener nuevas relaciones entre los lados b y c del triángulo ABC.

2) Sean los triángulos ABC y A'B'C' y tales que los ángulos B y B' son iguales y que la suma de los ángulos A y A' es igual a 180°. Probar que los lados de los triángulos están relacionados por la siguiente fórmula:

$$aa' = bb' + cc'$$

(Esta relación se verá más adelante que se verifica de forma natural para los triángulos rectángulos.)

3) Sea ABC un triángulo y D el pie de la bisectriz trazada desde el vértice C. demostrar que:

$$CD^2 = AC{\cdot}BC - AD{\cdot}BD$$

4) Probar que si en un triángulo se verifica la relación $a/\cos A = b/\cos B$, éste es isósceles.

5) AD es la altura del triángulo ABC, el punto H es el ortocentro. Demostrar que DC·DB = AD·DH.

6) Demostrar que si a y b son los lados de un triángulo, l la bisectriz del ángulo comprendido entre ellos, a' y b' los segmentos en los que la bisectriz divide al tercer lado, entonces se verifica

$$l^2 = ab - a'b'$$

7)El punto H es el ortocentro del triángulo ABC. En la recta CH se ha tomado un punto K tal que ABK es un triángulo rectángulo. Demostrar que el área del triángulo ABK es la media geométrica entre las áreas de los triángulos ABC y ABH.

Distintas caracterizaciones equivalentes de los triángulos rectángulos

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, y cuyos lados son $a > b \geq c$. Proponemos los siguientes problemas:

Problemas

1. Sean T = ABC y T' = A'B'C' dos triángulos de lados $a > b \geq c$ y $a' > b' \geq c'$, respectivamente. Probar que los tres asertos siguientes son equivalentes:

a) T y T' son triángulos rectángulos y semejantes.

b) T y T' son triángulos rectángulos y entre sus lados se verifica que $aa' = bb' + cc'$.

c) T y T' son triángulos semejantes y entre sus lados se verifica que aa' = bb' + cc'.

Sugerencia: Aplicar el teorema de Thales y el teorema de Pitágoras y luego efectuar un cálculo algebraico elemental.

2. Sea ABC un triángulo rectángulo en A (figura 6). Sea H el pie de la perpendicular trazada desde A sobre el lado BC. Ahora proyectamos ortogonalmente el punto H, sobre los lados AC y AB, respectivamente, obteniendo así los puntos B' y C'. Estos se proyectan de nuevo perpendicularmente sobre el lado BC para obtener los puntos H_1 y H_2, respectivamente. Probar que:

$$AH = B'H_1 + C'H_2 \text{ y } H_1H = H_2H$$

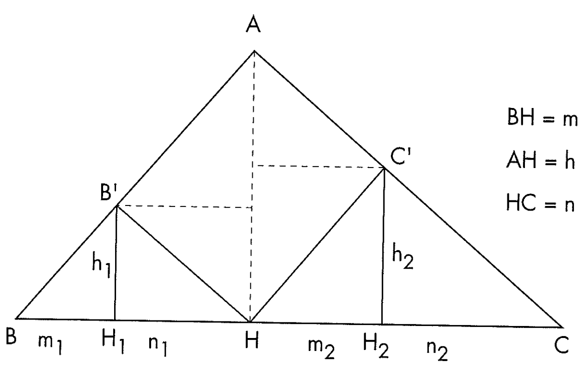


Figura 6

Conclusiones, comentarios y observaciones

Creemos que los resultados elementales aquí expuestos sobre las caracterizaciones y las construcciones de las medias usuales vía el triángulo pueden ser explicados como una experiencia didáctica novedosa sobre la geometría plana elemental en el aula, por ser ésta sencilla tanto a los alumnos de BUP como a los de la ESO.

Se puede llevar a cabo la manipulación activa de estos resultados sencillos sobre la geometría plana elemental del triángulo, no sólo con los instrumentos de dibujo, la regla y el compás, sino también con el ordenador, así como recrear los teoremas aquí expuestos utilizando para ello los diferentes lenguajes de programación y los distintos paquetes de geometría que aparecen en *Maple, Mathematica, Matlab, Derive, Sketchpad, Cabri* y *Geomouse,* entre otros.

Esta experiencia de investigación metodológica-didáctica ha sido llevada al aula, con aceptable éxito, con alumnos de la ESO y también alumnos del actual BUP, dentro del importante y trascendental tópico de «Resolución de problemas y de conjeturas». Sin duda, *las estrategias del pensamiento plausibles para la proposición y la resolución de las conjeturas y de los problemas en las matemáticas y en las ciencias en general,* permiten conseguir una buena enseñanza-aprendizaje y una educación matemática de gran calidad. Es decir, *la resolución de problemas y conjeturas es el más noble, el más difícil e imaginativo, el más aventurero, y el más fantástico y emocionante de todos los artes que consisten en la creación y en la proposición de problemas y de conjeturas en la clase, con el objeto de fomentar en los alumnos la investigación para la resolución de los problemas y de las conjeturas que se susciten sobre los entes matemáticos.*

En definitiva, como conslusión u observación última podemos afirmar que en el noble y difícil arte de enseñar, si los profesores somos creativos, imaginativos e investigadores en el aula, y eso lo ven, lo viven, lo tocan, lo juegan, lo aman y lo observan nuestros alumnos, también ellos lo serán y lo demostrarán algún día, en cualquier campo profeisonal donde tengan que realizar su trabajo. Y esta es la satisfacción más grande que puede recibir un profesor de los alumnos a los que ha enseñado y educado en las Matemáticas: ser creativos e imaginativos. esta es *la gran y emocionante aventura de las matemáticas que cada profesor quiere vivir cada día con sus alumnos en la clase.*

Menudo reto es, en la enseñanza actual el conseguir este objetivo.

Bibliografía

ALSINA, C. y otros ((1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

BECKENBACH, F. E. y R. BELLMAN (1961): «An Introduction to Inequalities» en *The Classical Inequalities*, Random House, New York.

BEHNKE, H. y otros (edts.) (1974): *Fundamental of Mathematics, Geometry*, MIT Press Cambridge, Cambridge.

BLOOM, D. M. (1979): *Linear Algebra and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

CASTELNUOVO, E.: *Geometría Intuitiva*, Labor, Barcelona.

CEDERBERG, J. N. (1991): *A Course in Modern Geometries*, Springer-Verlag, New York.

CLEMENS, C. H. y M. A. CLEMENS (1991): *Geometry for the classroom*, Springer-Verlag, New York.

COXETER, H. S. M. (1971): *Fundamentos de la Geometría,* Limusa-Wiley, México.

COXETER, H. S. M. y S. L. GREITZER (1993): *Retorno a la Geometría*, DLS-Euler, Madrid.EVES, H. (1969): *Estudio de las Geometrías*, Uteha, México.

GUSEV, V., A. LITVINENKO y A. MORDKOVICH (1988): *Solving Problems in Geometry*, Mir, Moscu.

GUSIATNIKOV, P y S. REZNICHENKO (1988): *Álgebra vectorial en ejemplos y problemas*, Mir, Moscu.

Juan-Bosco Romero
Mª Ángeles López
Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

LANGE, L. H. (1989): «Pòlya's Mushrooms - a Mathematical Concert Remenbering George Pòlya» en *Teaching and Learning: A problem-Solving Focus,* NCTM, Reston.

MITRINOVIC, D. S., J. E. PECARIC y V. VOLONEC (1989): *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

MITRINOVIC, D. S. (1976): *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, New York.

MOISE, E. E. (1978): *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado,* CECSA, Barcelona.

PERRY, E. (1992): *Geometry: Axiomatic development with Problem Solving*, Marcel dekker, New York.

POGORÈLOV, A. V. (1974): *Geometría Elemental*, Mir, Moscu.

POSAMENTIER, A. S. (1988): «The harmonic Mean and Its Place among Means» en *Readings for enrechment in secondary school mathematics*, NCTM, Reston.

POSAMENTIER, A. S. y CH. T. SALKIND (1988): *Challenging Problems in Geometry*, Dale Seymour Publications, Palo Alto.

PUIG ADAM, P. (1961): *Curso de Geometría Métrica*, Editorial Matemática, Madrid.

QUEYSANNE, M. y A. REVUZ (1976): *Geometría*, CECSA, Barcelona.

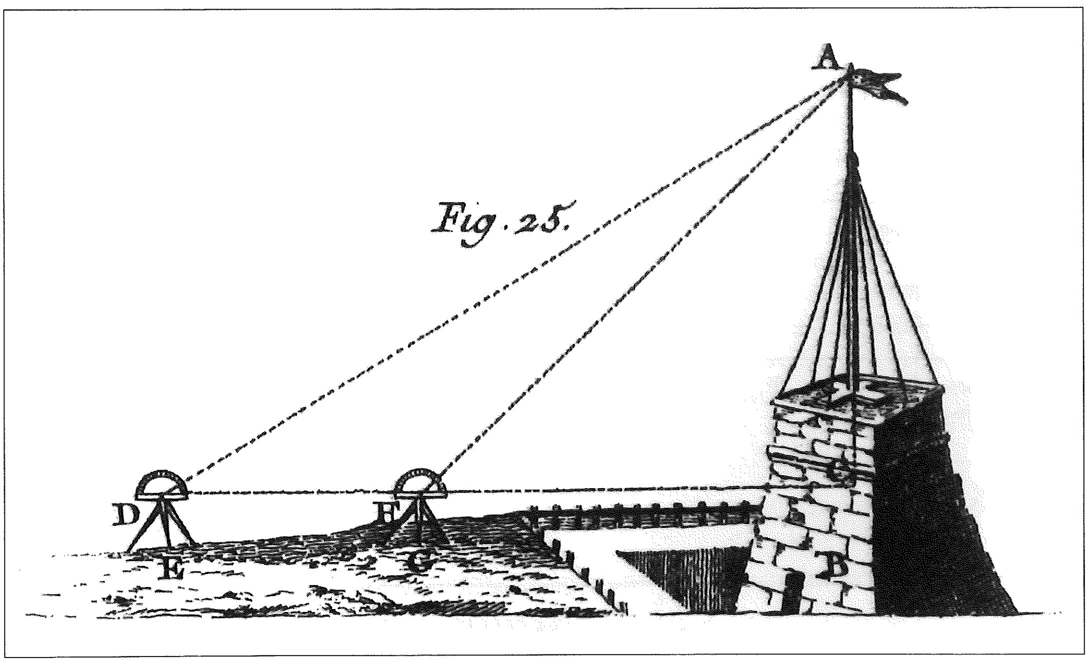
ROMERO MÁRQUEZ, J. B. y M. A. LÓPEZ SÁNCHEZ-MORENO: «Las mediatrices de un triángulo y su relación con las medias», *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, por aparecer.

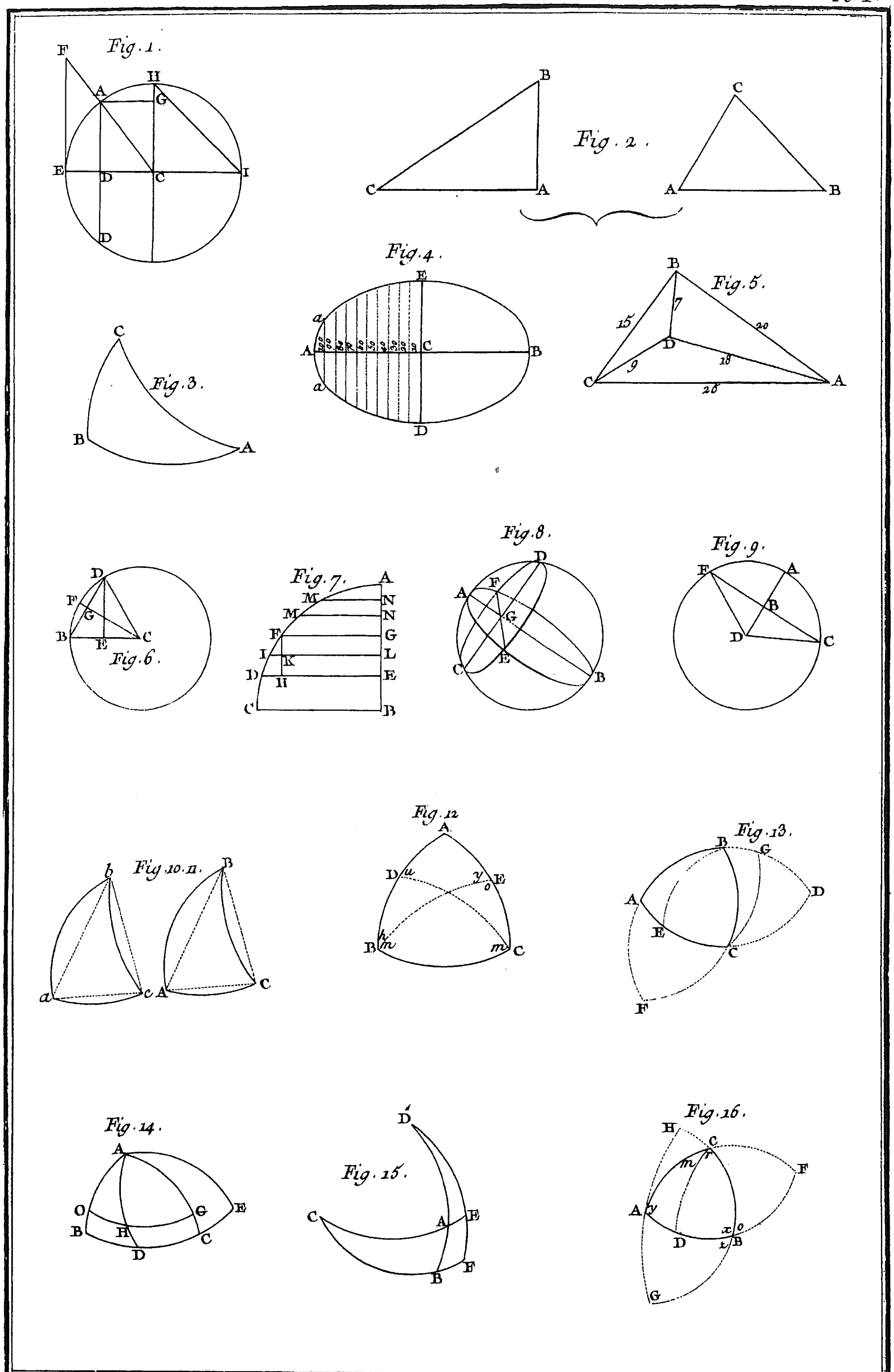
SÈNECHAL, B. (1979): *Gèomètrie classique et mathèmatiques moderns*, Hermann, París.

SHARYGIN, I. F. (1988): *Problems in Plane geometry,* Mir, Moscu.

SHUVALOVA, E. Z. (1980): *Geometry,* Mir, Moscu.SHANG-CHING CHOU (1987); *Mechanical Geometry Theorem Proving,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

YAGLOM, I. M. (1973): *Geometric Transformations*, MAA.





Goussier Del. Benard Fecit

Trigonométrie.

SUMA 25
junio 1997, pp. 131-138

La perspectiva como concepto matemático[1]

Francisco Jesús García García

A Gonzalo que supo ver
con una perspectiva prospectiva

Ya el Renacimiento observó, por boca de Giordano Bruno y de Bacon, que los verdaderos antiguos somos nosotros y no los hombres del Génesis o de Homero.

J. L. Borges

EL FINAL de la Primera de las Bellas Artes

La misión de la representación en perspectiva es generar un mensaje (gráfico) que provoque la ilusión de tridimensionalidad. Esa ilusión puede ser objetiva o subjetiva y se sustenta en la comprensión y transmisión de una serie de convenios cuya efectividad depende del estado cultural de la colectividad o del estadio evolutivo del individuo. La racionalización de estos convenios produjo históricamente una impecable teoría matemática, axiomáticamente fundada, que acabó produciendo una violenta reacción de rechazo en el mundo artístico.

A finales del siglo XV Piero della Francesca (1420-1492) publica *De Prospectiva pingendi* con la pretensión de describir cómo es posible plasmar la realidad de las cosas según un orden matemático reflejo o expresión de la suprema armonía de la creación. En 1509 Luca Pacioli (1445-1510), influenciado por –o tal vez plagiando a– Piero, publicaba *De Divina Proportione*, estudiando la *sección áurea* y su intervención en las construcciones geométricas, en la naturaleza y en las proporciones del cuerpo humano, estableciendo fundadamente un nuevo canon occidental de belleza. Durante el primer cuarto del siglo XVI, los métodos matemáticos de la perspectiva y la proporción eran enseñados y practicados en toda Europa con éxito arrollador por artistas de la talla de Alberto Durero (1471-1528) o Leonardo da Vinci (1452-1519).

El descubrimiento de las *leyes matemáticas de la perspectiva y de la armonía* constituyó una auténtica revolución cultural. Para entender su dimensión, es necesario recordar que fue el primer gran éxito *completo de aplicación* de los métodos matemáticos a la naturaleza, generando

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

una teoría sólidamente fundada e inventando un método asequible y practicable. Naturalmente hubo triunfos anteriores y sublimes de las matemáticas que, no obstante, tenían una génesis más bien teorética, como los *Elementos* o la *Óptica* de Euclides, o distaban mucho de ser completos, como el sistema cósmico de Tolomeo (100-170) sobre el que Tycho Brahe (1546-1601) pronto acumularía fuertes evidencias de inadecuación y que estaba lejos de ser sustituido por modelos más efectivos como los heliocéntricos de Galileo (1564-1642) o Kepler (1571-1630), y mucho más lejos todavía de adquirir los sólidos fundamentos que proporcionó Newton (1642-1727) a la Astronomía convirtiéndola en Física.

La *teoría de la perspectiva y la teoría de la proporción* reducen los fenómenos pictóricos a reglas matemáticas exactas y sólidas extraídas y abstraídas empíricamente del mundo: una ley matemática universal determina cuánto debe distar una cosa de otra y en qué relación deben encontrarse las cosas para que la comprensión de la representación sea óptima y otra ley matemática regula las medidas de las partes en relación al todo.

En síntesis, tales teorías consiguen modelar el *arte del dibujo*, mecanizándole y haciéndole susceptible de *ser aprendido.* Complementan esta revolución los progresos en la representación de sombras, luces y colores, la mejora y abaratamiento de los materiales y la aparición de técnicas nuevas como el óleo.

No existían en aquel siglo historiadores atrevidos, pero de haberlos habido hubieran decretado sin duda el *fin* de la primera de las bellas artes.

Para conseguir el efecto visual de la reproducción en el plano del espacio, la perspectiva recurre a la determinación de una «correcta» *medida* y *distribución* de los objetos mediante un auténtico *sistema de coordenadas.* En definitiva se trata de un cambio esencial que sustituye la construcción del espacio a partir de los objetos que van siendo agregados a la representación por la predeterminación de un espacio sistemático *en el que* son adecuadamente colocados los objetos que hay que representar.

Un espacio así concebido, infinito pero representable finitamente y medible, es en esencia una anticipación concreta, no solo de las coordenadas cartesianas, sino de la propia concepción del espacio que adoptarán Kant (1724-1804) y Descartes (1596-1650), que si bien sentó las bases de la algebraización de las formas, no puede sino declararse heredero de la perspectiva en el concepto de coordenada. Más todavía, es el método perspectivo del renacimiento el que hace posible la construcción teórica de Desargues (1591-1661) que, al generalizar el cono visual al concepto de haz de rayos geométricos, inicia la *geometría proyectiva*[2] y, con ella, la superación de Euclides.

La teoría de la perspectiva y la teoría de la proporción reducen los fenómenos pictóricos a reglas matemáticas exactas y sólidas extraídas y abstraídas empíricamente del mundo...

Con el descubrimiento de la perspectiva y de la armonía, el Renacimiento consigue racionalizar completamente en el *plano matemático* la imagen del *espacio tridimensional visible*, es decir, consigue la representación del espacio mismo y no sólo de los objetos que contiene. No sólo el arte se eleva a la categoría de ciencia, racionalizando la impresión visual subjetiva hasta tal punto que sirve de fundamento para una construcción espacial unitaria y no contradictoria de extensión infinita en la cual los cuerpos y los intervalos constituidos por el espacio vacío se hallan unidos por determinadas leyes, sino que además se logra la transición de un espacio psicofisiológico a un espacio matemático: es decir la *objetivación del subjetivismo* por la matematización del espacio visual.

Propiedades suficientes para poder hablar en propiedad de una *concepción perspectiva del espacio*, y no sólo de una mera *construcción en* perspectiva.

¿Por qué en el Renacimiento?

Como ocurre con todas las ideas importantes, el nacimiento de las ideas proyectivas puede rastrearse muy atrás en el tiempo. Y también puede detectarse las causas de que cuajen o se desarrollen en determinados momentos y no en otros. Antes del Renacimiento el paradigma cultural imperante no pretendía reproducir el espacio observable:

> *Para el pensamiento medieval era, por tanto, indiscutible que el artista conformaba su obra, si no según una Idea metafísica en el verdadero sentido de la palabra, sí según una representación interior o* ***Quasi-Idea*** *preexistente a la propia obra [...] el pensamiento medieval no podía plantearse en absoluto cómo esta representación interior de la forma podía limitarse a la contemplación de algo dado «naturalmente». [...] La forma de las cosas que han de ser creadas debe tener un arquetipo (similitudo) en el que crea... Esto sucede de dos maneras: en algunos sujetos activos*

1 Dejo constancia de mi agradecimiento a Ricardo García Moya, gracias al cual accedí al estudio fundamental de Erwin Panofsky sobre perspectiva.

2 Técnicamente, es E. Laguerre (1834-1886) (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, vol. 12, 1853) quien resuelve definitivamente el problema de la conexión entre los conceptos métricos y los conceptos proyectivos, culminando la geometría proyectiva en el sentido clásico. Una excelente introducción a la Geometría Proyectiva desde el punto de vista algebraico moderno puede encontrase en Santaló (1966).

preexiste la forma de las cosas que han de ser creadas, en el sentido que tiene en los seres naturales (así, el hombre engendra al hombre, y el fuego, al fuego), pero en otros la forma preexiste en el sentido de los seres inteligibles, o sea, en aquellos sujetos que obran mediante el espíritu. Así, la casa ***preexiste en el espíritu*** *del arquitecto y puede ser definida como* ***Idea*** *de la casa, porque el artista se esfuerza en imitar en la casa (real) la forma que él posee en su mente. (Panofsky, 1977, 39).*

Esta concepción aristotélica de las obras de arte[3], traza una frontera infranqueable entre éstas y los productos de la naturaleza. No importa ahora mucho cómo, pero el caso es que con el tiempo, la concepción de la *intuición* o idea previa artística pasa a ser fruto de la *experiencia,* es decir el Renacimiento se caracteriza por una concepción *constructivista* del arte:

Al no estar ya preconstituida la Idea a priori en la mente del artista, anticipándose a la experiencia, sino que, generada en base a ésta, es producida a posteriori, resulta que, por un lado, la Idea no aparece ya como rival o incluso como prototipo de la realidad sensible, sino como derivado de ésta, y, por otro, no ya como un contenido dado o incluso como un objeto trascendente del conocimiento humano, sino como producto de éste: cambio que hasta en el lenguaje se evidencia de la manera más clara. De ahora en adelante La Idea «no está» ni «preexiste» en el alma del artista, como decían Cicerón y Santo Tomás de Aquino, y menos aún le es «innata», como propugnaba el verdadero neoplatonismo, sino que más bien «viene a la mente», «nace», es «sacada», «obtenida» de la realidad, y aun expresamente «conformada y esculpida». (Panofsky, 1977, 61).

Las leyes de la perspectiva

Siguiendo a Panofsky (1973, 7), hablaremos en sentido pleno de una *intuición perspectiva* del espacio allí y sólo allí donde todo el cuadro se halle transformado, en cierto modo, en una «ventana», a través de la cual nos parezca estar viendo el espacio, esto es donde la superficie material es negada como tal y transformada en un mero «plano figurativo», sobre el cual y a través del cual se proyecta un espacio unitario que comprende todas las diversas cosas, sin importar si esta proyección está determinada por la inmediata impresión sensible o por una construcción geométrica más o menos «correcta».

...una máquina que genera intuición perspectiva por la vía de controlar cuantitativamente el tamaño y la ubicación de los objetos representados.

El método de representación del espacio en perspectiva inventado por los renacentistas se sustenta en tres pilares: a) la *fuga* de las líneas visuales a un punto, b) la *gradación* de distancias entre las líneas horizontales y c) la aceptación de un canon de proporciones. Se trata de una máquina que genera intuición perspectiva por la vía de controlar cuantitativamente el tamaño y la ubicación de los objetos representados.

Son bien conocidas las reglas de la proporción, que tienen precedentes en la más lejana antigüedad y que, con mayor o menor sofisticación, consisten en descripciones cuantitativas fundadas en supuestos preestablecidos cuya eficacia tiene por juez a la propia realidad. He aquí, por ejemplo, las proporciones de la figura humana dictadas por Viturbio:

Tres narices a lo largo tengan la misma longitud que un rostro, y que los dos semicírculos de las orejas, colocados juntos, sean iguales al círculo de la boca abierta, y que esto mismo suceda con las cejas si se unen. Que la longitud de la nariz sea igual a la del labio y a la de la oreja, y que los dos círculos de los ojos sean iguales que la abertura de la boca. Que la altura del cuerpo sea igual a la de ocho cabezas y también a la de los brazos y piernas extendidos.

3 Para Aristóteles las artes incluían también la medicina y la agricultura, es decir, en cierto sentido, también la ciencia y la técnica.

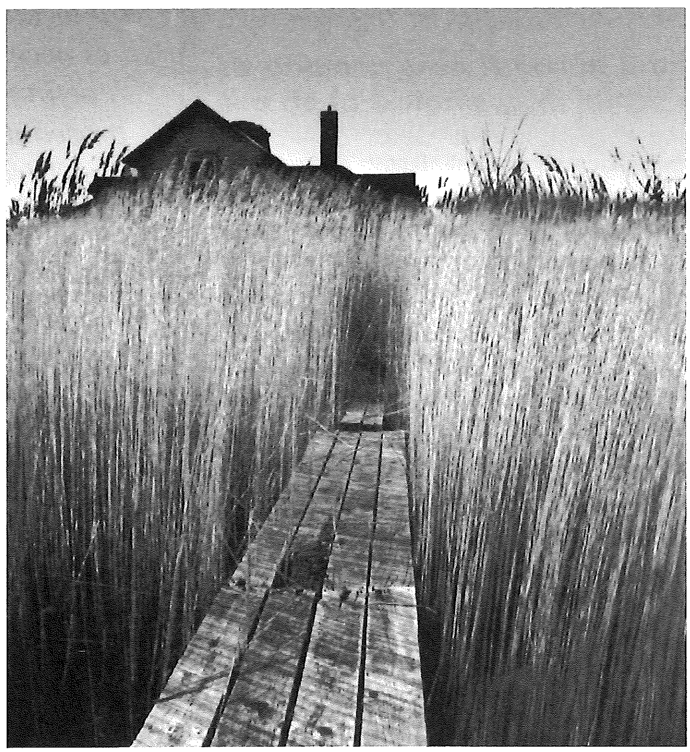


Figura 1

La existencia de *un punto de fuga* establece axiomáticamente[4] la representación del infinito mediante un punto fijo. La posibilidad de definir tal punto tiene una base visual experimental. El lector puede, no obstante, entretenerse en comprobar las dificultades de su localización concreta intentando pintarlo en un espejo o en el cristal de una ventana. La movilidad del observador es para este menester, una traicionera virtud que puede ser sorteada recurriendo a la fotografía (figura 1).

El punto de fuga es el recurso utilizado para proyectar la tercera dimensión en el plano, pero no es suficiente para *localizar* los objetos en el espacio virtual así generado. Para esta localización es necesario definir un *procedimiento métrico*, es decir un procedimiento que describa *cómo* disminuye la longitud unidad *en profundidad*, esto es en los ejes que convergen en el punto de fuga, supuestamente representativo del infinito. Un ejemplo: cada unidad de longitud real tiene una longitud figurada que es un tanto por ciento de la precedente (figura 2).

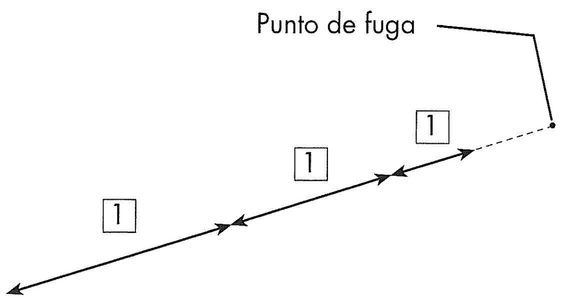


Figura 2

De hecho, todavía en época de L. Battista Alberti (1404-1472), considerado el primer tratadista de arte del siglo XV, se mantenía la costumbre, en las representaciones pictóricas con punto de fuga, de disminuir mecánicamente cada franja del suelo en un tercio respecto a la precedente.

Otra cosa es que ese procedimiento, intrínsecamente coherente, pues permite representar potencialmente infinitas unidades en una recta de longitud finita, coincida con la impresión visual real.

Es el propio Alberti el que sienta las bases para resolver este *problema métrico* con una definición: el cuadro (léase la porción *finita* de plano) es una intersección plana de la *pirámide visual* que se forma por el hecho de considerar el *centro visual* como un punto, el *punto de fuga*, que está conectado virtualmente con los diferentes y característicos puntos de la forma espacial que se quiere obtener.

De esta definición se deduce como una *consecuencia* la métrica proyectiva[5] (figura 3).

El punto de fuga es el recurso utiltzado para proyectar la tercera dimensión en el plano, pero no es suficiente para localizar los objetos en el espacio virtual así generado. Para esta localización es necesario definir un procedimiento métrico,...

4 Como axioma, la suposición de la existencia de un punto de fuga es removible. La elección de axiomas distintos dará lugar, como veremos, a otras perspectivas.

5 La explicación gráfica procede de Rovira (1972, 12).

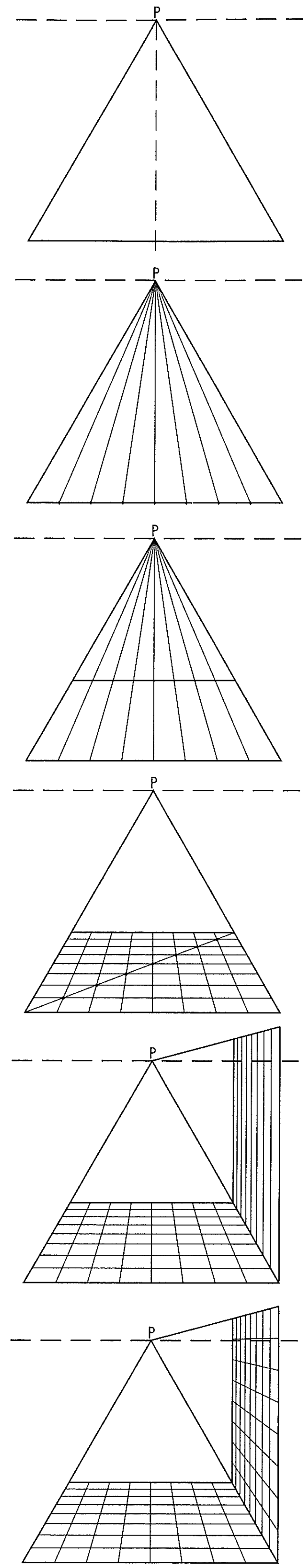


Figura 3

La definición anterior se basa implícitamente en dos grupos de supuestos:

1. Sobre el *espacio:* es *infinito,* es *constante,* es *homogéneo.*
2. Sobre la *representación* del espacio: «miramos» con un *único* ojo que, además, está *inmóvil* y la intersección plana de la pirámide visual es una representación *adecuada* de nuestra imagen visual.

El primer grupo, el de los supuestos «objetivos», se corresponde con lo que más tarde serán las hipótesis galileanas del espacio físico, es decir, conforman una abstracción matemática. Pero como tal abstracción no se corresponde con ninguna de los observables de la experiencia: el infinito no es perceptible, el espacio perceptivo no es homogéneo nunca, es heterogéneo y además anisótropo. Por ejemplo la gravedad introduce una asimetría entre la verticalidad y la horizontalidad perceptible.

Por otra parte los supuestos «subjetivos» son manifiestamente simplificadores: miramos con dos ojos, los ojos se mueven constantemente y, para colmo, la imagen retínica no es plana, lo que nos hace percibir al entorno exterior con forma esferoide, es decir *no desarrollable* en el plano.

Estas objeciones básicas a los presupuestos básicos no son sólo teóricas sino que producen efectos prácticos no deseados que los perspicaces pintores renacentistas no ignoraron. El más significativo, pero no el único, es el fenómeno de las *aberraciones marginales*: la diferencia existente entre la relación de los ángulos visuales y la relación de los segmentos obtenidos por la proyección sobre una superficie plana lo que genera una patente contradicción entre la *construcción perspectiva* y la efectiva *impresión visual.* Así, una serie de círculos del mismo diámetro representados en una línea con las leyes de la perspectiva generarían una imagen con aberración en los márgenes: el segmento AB tiene la misma longitud que EF pero *mayor* que CD (figura 4).

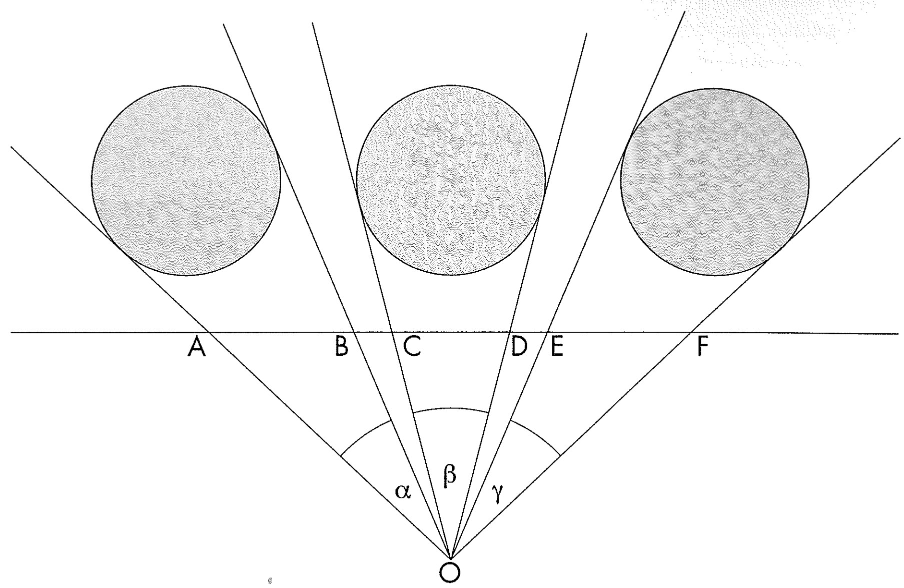


Figura 4

Para ocultar o disimular este fenómeno, el Renacimiento impuso límites al campo de aplicación de las leyes de la perspectiva, acotando así las aberraciones, tal y como reza el siguiente canon de la época: *La distancia del pintor a la escena debe ser al menos veinte veces mayor que la altura del escenario o que la dimensión del mayor objeto a representar.*

La primera gran reacción antimatemática de la historia

Un problema concreto e importante, la representación del espacio en el plano, resuelto definitivamente por un método claro, bien fundado en unos axiomas controlados, con un procedimiento métrico sencillo, efectivo y razonablemente en concordancia con las observaciones, con sus limitaciones detectadas y con reglas conocidas para acotar sus efectos. Y además más de siglo y medio *antes* de la irrupción de las matemáticas en la física y, por lo tanto, del nacimiento oficial del método científico. ¡Todo un sueño dorado para una disciplina básica como las matemáticas!

Sin embargo, como todo el mundo sabe, el arte de la pintura *no se acabó*, sino que en lo sucesivo simplemente tomó otros rumbos y se planteó otros problemas: el expresionismo evita la perspectiva, el impresionismo da preferencia a la luz frente a la forma, Picasso hace intervenir mecanismos psicológicos para representar la tridimensionalidad sin perspectiva y Dalí se dedica a atrapar con el pincel el tiempo que se escurre (figura 5).

Estas objeciones básicas a los presupuestos básicos no son sólo teóricas sino que producen efectos prácticos no deseados que los perspicaces pintores renacentistas no ignoraron.

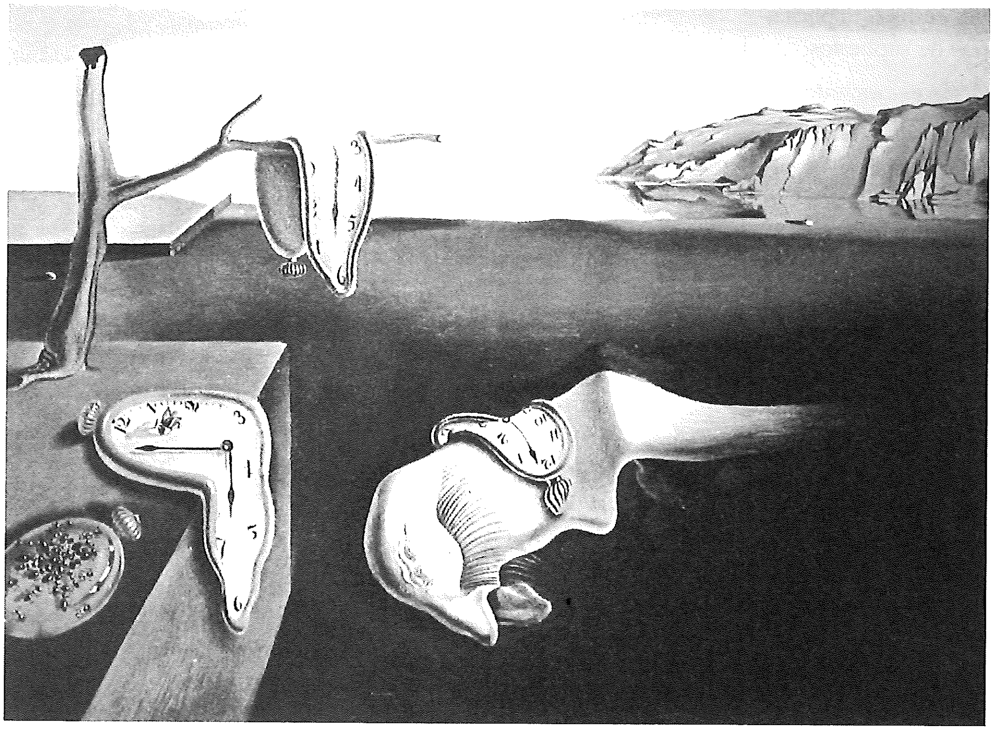


Figura 5

Menos conocido es, sin embargo, que apenas medio siglo después del soberbio triunfo matemático del descubrimiento de las leyes de la armonía y la perspectiva, se produjo una virulenta reacción, artística en primera instancia, pero de más amplio calado intelectual, el *manierismo,* que vino a dejar patente el fracaso del intento de matematización del arte. Si ya es significativo que El Greco viole concienzudamente las más elementales dictámenes de la proporción, las opiniones de los teóricos del arte de la época no dejan lugar a dudas:

> *[...] esta nobilísima profesión requiere el juicio y la buena práctica, que sirvan de regla y norma al buen trabajo. Como ya me dijo mi queridísimo hermano y predecesor, al enseñarme las primeras reglas o medidas de la figura humana: que las proporciones perfectas y graciosas han de ser de tantas y no más cabezas. Pero conviene, decía él, que al trabajar te familiarices con estas reglas y medidas hasta tal punto que tengas el compás y la escuadra en los ojos, y el juicio y la práctica en las manos.* ***De tal forma que estas reglas y términos matemáticos no son ni pueden ser útiles ni buenos para trabajar con ellos***[6]*. Ya que, en lugar de aumentar el espíritu y la vivacidad del arte práctico, le quitaría todo, porque el intelecto se envilecería, el juicio se apagaría, y quitaría al arte toda la gracia, todo el espíritu y el sabor.*
>
> *Así, pues, creo que Durero, con aquel trabajo, que no fue poco,* ***hizo esto en broma****, como pasatiempo y para dar entretenimiento a aquellos intelectos que* ***se dedican más a la contemplación que a la acción****, y para demostrar que el «Disegno» y el espíritu del pintor sabe y puede hacer todo lo que se propone. Igualmente fue poco fructífero y sustancioso el otro trabajo que dejó dibujado con escritos invertidos otro gran hombre [Leonardo da Vinci] de la profesión, pero también él demasiado sofisticado, al dejar que preceptos, aunque fueran matemáticos, movieran y torcieran las figuras con líneas perpendiculares, con escuadra y compases:* ***cosas ingeniosas todas, sí, pero fantásticas*** *y sin fruto sustancioso; a pesar de lo que otros crean, cada uno puede obrar a su gusto. Diré que estas reglas matemáticas deben reservarse para las ciencias y profesiones especulativas, como la geometría, astronomía, aritmética y similares, que con sus resultados satisfacen al intelecto. Pero nosotros, profesores de Dibujo, para imitar a la Naturaleza* ***no tenemos necesidad de otras reglas*** *que las que ella misma dicta. (Zuccari, citado en Panofsky, 1977, 70, nota 180).*

...el manierismo, que vino a dejar patente el fracaso del intento de matematización del arte.

6 El resalte en negrita de todas las citas que siguen es un añadido mío.

La línea argumental de Zuccari contra el método matemático descansa no sólo en el *objeto* (es decir en las eventuales limitaciones o dificultades que conlleva el método) sino también en el *sujeto* (es decir, en la necesidad de libertad del espíritu del artista con prioridad sobre cualquier otra consideración). Es precisamente esta última bandera la que acaba enarbolándose como la razón esencial del rechazo a un método por otra parte técnicamente incontestable. Esta sofisticación argumental se manifiesta ya explícitamente en Vincenzo Danti que en su *Il primo libro del Trattato delle perfette proporzioni* (1567) distingue expresamente entre un *ritratare* que reproduzca la realidad tal y como la vemos, y un *imitare* que la reproduce *como debería ser* o como al artista le gustaría que fuese, esto es, se podría añadir, no sujeta a leyes matemáticas. Esta posibilidad posibilidad de reconstruir la realidad que se autoconcede el artista abre las puertas a la creación de infinitos mundos pictóricos sujetos a muchas leyes o incluso a ninguna ley. En palabras[7] de Giordano Bruno, «sólo el artista es autor de las reglas, y únicamente existen verdaderas reglas en la misma medida y número que verdaderos artistas», tantas realidades habrá como artistas, y por lo tanto, parece querer concluir, dado cualquier método matemático de representación siempre se podrá inventar un mundo subjetivo no representable.

Esta rebelión contra toda regla fija, y en especial contra las reglas matemáticas se extiende con carácter general y apasionado a finales del siglo XVI, rompiendo o modificando las formas armónicas y abandonando las representaciones claras, basadas en el concepto de la perspectiva racional, reconociendo, y esto es lo más curioso, los méritos de la matemática en la racionalización de la representación artística sobre una base científica pero rechazando abiertamente su aplicación. La matemática, considerada y honrada por Piero della Francesca, Durero o Leonardo como el fundamento más sólido de las artes figurativas, es ahora perseguida con odio:

Esta rebelión contra toda regla fija, y en especial contra las reglas matemáticas se extiende con carácter general y apasionado a finales del siglo XVI, rompiendo o modificando las formas armónicas y abandonando las representaciones claras, basadas en el concepto de la perspectiva racional,...ß

> *Pero digo, y sé que digo la verdad, que el arte de la pintura no toma sus principios de las ciencias matemáticas, ni tiene ninguna necesidad de recurrir a ellas para aprender leyes o procedimientos para su arte, o simplemente para razonarlos especulativamente... Incluso añadiré que todos los cuerpos producidos por la naturaleza poseen proporción y medida, como afirma el Sabio [Aristóteles], pero si alguien quisiera dedicarse a considerar y conocer todas las cosas a través de la especulación teórico-matemática, y obrar con respecto a ésta,* ***además de un aburrimiento insoportable****, sería una inútil pérdida de tiempo, [...] Porque el pensamiento del artista no sólo ha de ser claro, sino libre, y su espíritu, abierto, y no limitado por una dependencia mecánica de tales reglas. (Federico Zuccari, en Panfsky, 1977, 69).*

A modo de conclusión

El injusto desgaste y desprestigio sufrido por las matemáticas no se ha reparado nunca del todo. Aproximadamente dos siglos después de los procesos aquí descritos, triunfaba la matematización de la física pero a costa de un cierto encasillamiento de los métodos matemáticos, que resultarían útiles sólo para describir, comprender y transformar el mundo objetivo que estudian las ciencias de la naturaleza, separado taxativamente de ciertas actividades o fenómenos, como el artístico, que tendrían una naturaleza no racional. Sólo muy recientemente, y siempre despertando tremendos recelos y furiosas críticas[8], las ciencias sociales, o más precisamente algunas parcelas de las ciencias humanas y sociales, se han dejado modelar matemáticamente.

Ha subsistido una cierta identificación actitudinal de matemáticas con reglas a obedecer que tiene su origen en la reacción manierista. Esta aversión ha sido alimentada por otros fenómenos[9] que han contribuido a apuntalar la suposición de la existencia de un conflicto irresoluble entre la aceptación de reglas impuestas en último extremo por la naturaleza y la defensa de la libertad de creación a ultranza. Además esta última se caracterizaría porque no se puede aprender, y por lo tanto no se puede enseñar.

Por otra parte, esta separación no es tajante. El ya citado Danti, que rechaza la *esquematización matemática de las formas* y de los movimientos corporales, admite, sin embargo, incondicionalmente ya que en alguna forma habría que encontrar un camino «científico» para acceder al arte el método anatómico, y explica claramente que «su *vera regola* debe valer tanto para los que han nacido para el arte como para aquellos[10] que no han nacido para él» (Panofsky, 1977, 72).

7 Citado en Panofsky (1977, 66).

8 Tanto de los matemáticos *puros* que ridiculizan tales pretensiones como de los científicos sociales y humanos que parecen desear cierta irracionalidad espiritual para sus disciplinas.

9 Entre los que habría que incluir algunos calificables de **docentes.**

10 Entre los que se incluye a sí mismo

Del mismo modo el ya mencionado Zuccari, a pesar de su aversión a la *teórica matemática,* no renuncia a fijar modelos en fórmulas numéricas y a delimitar exactamente el campo de aplicación de cada uno de ellos, situándose intelectualmente sobre una línea fronteriza difusa y declarando estar, a conveniencia, en un lado o en otro de la misma.

Si el primer intento serio de matematización se libró sorprendentemente en el terreno del arte y no en el de la física, sus resultados intelectuales no fueron menos sorprendentes.

Francisco Jesús García
Societat d'Educació
Matemática de la
Comunidad Valenciana
Al-Khwarizmi

Referencias

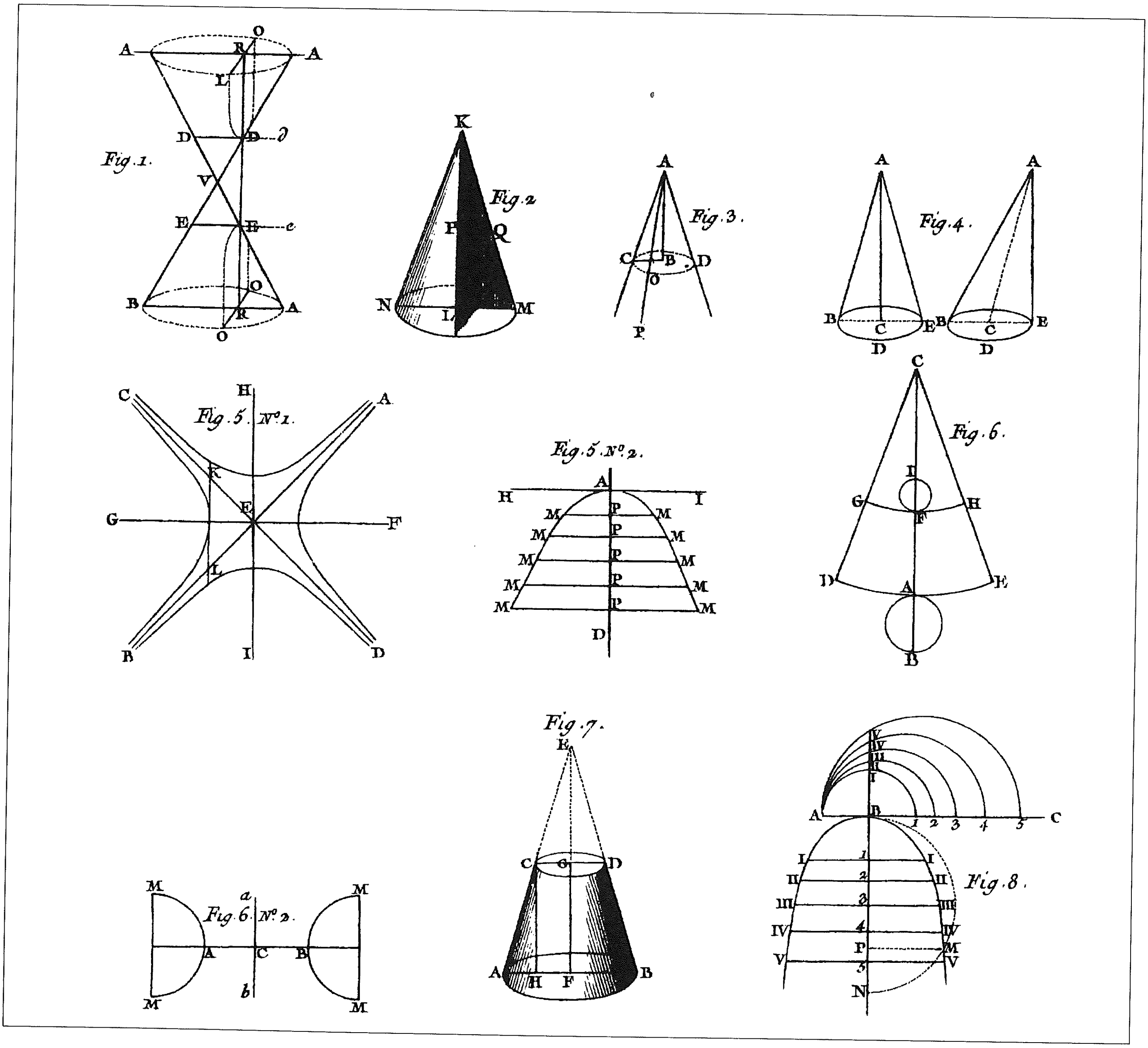
BORGES, J. L. 91985): *Prólogo a Crónicas Marcianas de Ray Bradbury,* Minotauro, Barcelona.

PANOFSKY, E. (1973): *La perspectiva como forma simbólica,* Tusquets Editor, Barcelona.

PANOFSKY, E. (1977): *Idea,* Ensayos Arte, Ediciones Cátedra, Madrid.

ROVIRA, A. (1972): *Perspectiva básica,* AF, Barcelona.

Santaló, L. A. (1966): *Geometría proyectiva,* EUDEBA, Buenos Aires.



Homenaje de Thales a Gonzalo Sánchez Vázquez Investigación en el aula de matemáticas

Homenaje póstumo al profesor Gonzalo Sánchez Vázquez

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales rindió en Sevilla un emotivo homenaje a su Presidente desde su fundación, el profesor Gonzalo Sánchez Vázquez los días 21 y 22 de marzo de 1997.

En la apertura del Homenaje, a la que asistieron diversas autoridades educativas andaluzas, así como una representación de la Federación Española de Sociedades de profesores de Matemáticas, se glosó la figura del profesor Sánchez Vázquez por parte del Presidente de la SAEM Thales, Antonio Pérez, que se reproduce al inicio de este número de SUMA.

Tras el acto oficial de apertura se dictaron las siguientes conferencias:

- *Del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático*, por Miguel de Guzmán.
- *Perfiles para la Educación Matemática*, por Luis Balbuena.
- *El movimiento asociativo y el desarrollo profesional de los profesores de Matemáticas*, Por Paulo Abrantes.
- *In memoriam*, por Rafael Pérez.
- *La lección que nos dio no está acabada ¡y el corazón no olvida!: el legado de Gonzalo Sánchez Vázquez*, Por Claudi Alsina.
- *Geometría diferencial LOGO. El ejemplo de los polígonos nazaríes*, por Ricardo Luengo.

Estas conferencias, junto con otros trabajos, serán publicados por la SAEM Thales en un libro homenaje a Gonzalo Sánchez Vázquez.

Investigación en el aula de matemáticas. El currículo

Por segundo año consecutivo, la SAEM Thales de Granada y el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada han organizado las Jornadas sobre la investigación en el aula de matemáticas, haciendo incidencia de forma especial, en la presente edición, en el tema del currículo matemático.

Durante dos intensos fines de semana, concretamente los días 28, 29 y 30 de noviembre y 12, 13 y 14 de diciembre de 1996, más de un centenar de docentes de todos los niveles educativos –Infantil, Primaria, Secundaria y Universidad– han compartido ponencias, comunicaciones, debates y diálogos en torno a la labor de investigación que, en sus respectivos niveles y evidentemente desde sus perspectivas teóricas y prácticas, están llevando a cabo en sus aulas.

Si tuviésemos que destacar algunos hechos relevantes de estos encuentros matemáticos habría que señalar el amplio abanico de ponencias y comunicaciones presentadas, tanto por su variedad internivelar –desde Infantil a Universidad– como por los aspectos considerados en cada una de ellas, donde se han analizado distintos componentes del área de Matemáticas. También es de resaltar las ponencias de diversos grupos de trabajo, tales como, Grupo Elo, Instituto de Cartuja y de Churriana de Granada, Grupo Averroes de Córdoba y Grupo Nervión de Sevilla, así como Escuelas Infantiles Zagal y Belén de Granada. En cuanto a comunicaciones ha sido generalizada la participación del Departamento de Didáctica de la Matemática de esta Universidad.

De manera especial y con nuestro mayor sentimiento hemos dedicado tanto las Jornadas como las actas de las mismas a nuestro primer Presidente y amigo, recientemente fallecido, el profesor Gonzalo Sánchez Vázquez.

Como en la primera edición, las jornadas se han ofrecido de forma gratuita a los miembros de nuestra Sociedad lo que ha posibilitado la participación de estudiantes de los últimos cursos de carrera, los cuales ven limitada su participación en este tipo de actividades dada su condición de no ser profesores en activo, requisito exigido por distintas instituciones que realizan actividades de perfeccionamiento.

Concluiremos la información haciendo referencia a las ponencias y comunicaciones más destacadas, no sin antes felicitar al Comité de Organización por el buen desarrollo de dichas jornadas, así como por la buena coordinación que, una vez más, se ha puesto de manifiesto entre el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y la Junta Directiva de la SAEM Thales de Granada.

Las ponencias individuales versaron sobre los siguientes temas:

- La actitud investigadora en la planificación e implementación de nuevas Matemáticas escolares. Julián Baena.
- Geometría y Topología de curvas planas. Manuel Barros.
- Evolución de la Didáctica de las ecuaciones. Carmen García Arribas.
- Rompecabezas Matemáticos. Luis Berenguer Cruz.

Las ponencias a nivel de grupos trataron diversos temas como se puede apreciar por sus títulos, tales como: «Propuestas alternativas de atención a la diversidad en el área de Matemáticas en la ESO», «Medidas. Figuras tridimensionales», «El laboratorio de Matemáticas», «¿Matemáticas antes de los dos años?,...

En el apartado de comunicaciones el Departamento de Didáctica de la Matemática presentó una decena de trabajos que desarrollaron aspectos de Teoría de la Educación Matemática, Estadística, Diseños, desarrollo y evaluación del currículo, Pensamiento numérico, la simplificación, etc. Entre la veintena de comunicaciones presentadas se pudieron analizar diversos temas que, a distintos niveles, están siendo objeto de investigación en la actualidad, como se puede observar en las actas de dichas Jornadas; las cuales las pudieron retirar los asistentes el último día de los encuentros.

El acto de clausura estuvo presidido por el Decano de la Facultad de Ciencias de la Educación, Antonio Romero y los profesores Luis Rico y Salvador Guerrero como Director del Departamento de Didáctica de la Matemática y Presidente de la SAEM Thales, respectivamente. Todos elogiaron la buena participación y nivel de calidad de las ponencias y comunicaciones, animando a la organización a iniciar la preparación de las terceras Jornadas para el curso próximo.

José Mª Sánchez Molina

Delegado de la SAEM Thales. Granada.

SUMA 25
junio 1997

Jornades de Didàctica de les Matemàtiques COMAT 97 VIII JAEM...

Jornades de Didàctica de les Matemàtiques de les Comarques Meridionals

La Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals, el Departament d'Enginyeria Informática y el Institut de Ciènces de l'Educació, ambos de la Universitat Rovira y Virgili, organizan los días 13, 14 y 15 de noviembre de 1997 las terceras Jornades de Didàctica de les Matemàtiques que se celebrarán en Reus.

Estas jornadas, en la línea de las precedentes, pretenden ser un punto de encuentro de diferentes perspectivas de los profesores que enseñan matemáticas en los distintos niveles del sistema educativo.

Una mayor información e inscripciones pueden solicitarse mediante Fax (777)559710, (777) 701752, los e-mails: lgirondo@etse.urv.es o jrovira4@pie.xtec.es o bien dirigiéndose a la Associació de Professors de Matemàtiques de les Comarques Meridionals, Apdo 1306, 43200 Reus.

Seminario de Actualización Científico-Didáctica de Matemáticas en la UIMP

Organizado por la Universidad Internacional Menández Pelayo y la Subdirección General de Formación del Profesorado del MEC, se convoca el seminario «Una visión actual de la matemática y su enseñanza» (código 1094), dirigido por el profesor Javier Peralta. La actividad se realizará entre el 15 y el 19 septiembre de 1997 en el Palacio de la Magdalena (Santander).

Para pedir mayor información y hacer las solicitudes, dirigirse a la Secretaríoa de Alumnos de la UIMP, c/Isaac Peral, 23 - 28040 Madrid. Telf: (91)5920631 - 5920633. Fax: (91)5920640.

COMAT 97

Desde Cuba nos llega la convocatoria del III Evento Científico Internacional COMAT 97 que se celebrará del 10 al 14 de noviembre de 1997 en la Universidad de Matanzas.

El programa incluye las habituales actividades de este tipo de reuniones con los objetivos de compartir experiencias sobre:

- Participación del matemático en la solución de problemas concretos en la industria y los servicios.
- Utilización de las Métodos Matemáticos y Estadísticos en la investigación científica y en la economía material.
- Resultados obtenidos por especialistas en la rama de la Matemática y la Computación en su trabajo investigativo.
- Enseñanza de la Matemática desde el nivel primario al superior.
- Enseñanza de la Computación y Enseñanza con Computadoras.

Quienes estén interesados en mayor información o inscribirse pueden dirigirse a:

Profesor Ramón J. Almeida, Departamento de Matemática General, Universidad de Matanzasa, Autopista a Varadero km. 3 CP-44740, Matanzas CUBA. Telf:(53)(52)61013 (53)(52)61432. Fax: (53)(52)53101. e.mail:umcc@reduniv.edu.cu.

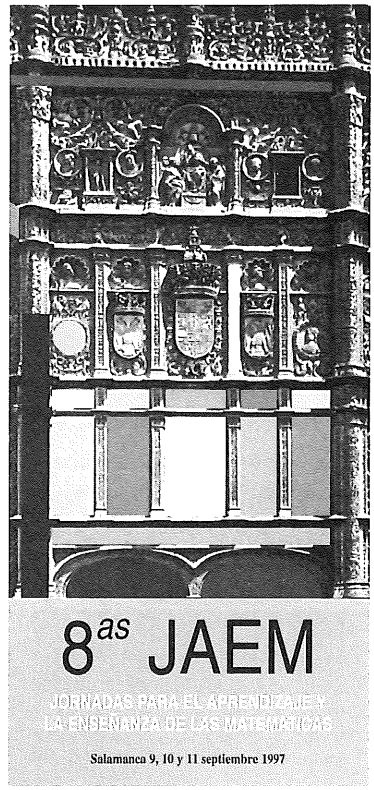
V Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias

Organizado por la revista *Enseñanza de las Ciencias* se celebrará en Murcia (Facultad de Educación, Campus de Espinardo) los próximos días 10, 11, 12 y 13 de septiembre de 1997.

El desarrollo científico del congreso se articulará en torno a tres temas-ejes, que serán tratados con continuidad a lo largo de los distintos días de celebración del mismo. Son:

1. Formación y desarrollo profesional de los profesores de ciencias.
2. Estrategias para la enseñanza de las ciencias.
3. Modelos de desarrollo curricular.

Más información en ICE, Universitat Autònoma de Barcelona, 08193 Bellaterra (Barcelona). Tel.: (34-3) 581 26 42. fax: 581 200 00. E-mail: icerr@cc.uab.es/Neus Sanmartí (coordinadora del Congreso).



NORMAS DE PUBLICACIÓN

1. Los artículos se remitirán por triplicado a la redacción de SUMA (Revista SUMA, ICE de Universidad de Zaragoza, C./ Pedro Cerbuna 12, 50009 Zaragoza), impresos a doble espacio, por una sola cara, en formato Din A-4.

2. Los datos de identificación del autor no deben figurar en el texto original ya que éste será enviado a asesores para ser referenciado. Estos en ningún caso serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo y aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo, o recomendarán posibles modificaciones, etc.

3. Los gráficos, diagramas y figuras se enviarán en hojas separadas (una para cada gráfico), en tinta negra sobre papel blanco. Así mismo, podrán incluirse fotografías. En el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

4. Adjunto al artículo se redactará un resumen, de entre cinco y diez líneas, que no necesariamente tiene que coincidir con la Introducción al artículo. Debe ir escrito en hoja aparte. En ese mismo folio aparecerán los datos de identificación del autor o autores: nombre y apellidos; dirección completa; lugar de trabajo; teléfono de contacto; sociedad federada a la que pertenecen (si procede).

5. Si se usa procesador de texto, agradeceremos que además se envíe un disquette con el archivo de texto que contenga el artículo, así como tantos archivos gráficos, como figuras elaboradas con el ordenador se quiera incluir. La etiqueta del disquette debe identificarlo sin lugar a dudas. En cuanto al formato de los archivos de texto, se recomienda MS-Word (hasta versión 5.0) en Macintosh, o WordPerfect (hasta versión 5.1) en PC. Los archivos gráficos es preferible que tengan formato EPS, o TIFF.

6. En cualquier caso, tanto un ejemplar del texto como los gráficos, si proceden de impresoras deben ser originales y no fotocopias.

7. Los trabajos se enviarán completos, aunque por necesidades de edición pudieran publicarse por partes.

8. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente, numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

9. La bibliografía se dispondrá al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del artículo, título de la revista completo (en cursiva o subrayado), volumen y páginas del mismo. Por ejemplo:

   TRIGO, V. (1995): «Generación de números aleatorios», *Suma,* n.° 20, 91-98.

   En el caso de libros se indicará el autor(es), año, título completo (en cursiva o subrayado), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   GARDNER, M. (1988): *Viajes por el tiempo y otras perplejidades matemáticas,* Labor, Barcelona.

   En el caso de artículos que se encuentran en una obra colectiva se indicará el autor(es), año, título del artículo (entre comillas), título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición. Por ejemplo:

   VILLARROYA, F. (1987): «Geometría: construir y explorar», en *Aspectos didácticos de matemáticas, 2,* ICE Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

10. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: ...supone un gran avance (Hernández, 1992).

    Si el autor aparece explícitamente en el texto tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: ...según Rico (1993).

11. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo– la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

SUMA

BOLETÍN DE SUSCRIPCIÓN

Tarifa

	Suscripción anual	Número suelto
Particulares	3.500 pts.	1.700 pts.
Centros	5.000 pts.	1.700 pts.
Europa	$40 USA	$14 USA
América y resto del mundo	$50 USA	$17 USA

Fotocopiar y enviar a: Revista SUMA. ICE Universidad de Zaragoza. C./ Pedro Cerbuna, 12. 50009-ZARAGOZA

Deseo suscribirme a la revista SUMA:
Nombre y apellidos:. . . . .
Dirección:. . . . . Tno.: . . . .
Población: . . . . CP:. . . . .
Provincia/país . . . . CIF/NIF: . . . .

	Importe
☐ Suscripción a partir del n.° ______ (3 números)	
☐ N.os sueltos: ______________________	
Total	

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto).

☐ Transferencia bancaria (Ibercaja: 2085-0168-50-03-000415-98).

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista Suma.

Firma y fecha:

☐ Giro postal dirigido a Revista Suma.

Nombre y apellidos: . . . .
Código Cuenta Cliente
Entidad |_|_|_|_| Oficina |_|_|_|_| DC |_|_| Cuenta |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|
Banco/Caja . . . .
Agencia n.°:. . . . . Dirección: . . . .
Población: . . . . Provincia: . . . .

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que periódicamente les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista SUMA.

Atentamente (Fecha y firma):

FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

FESPM