

La perspectiva como concepto matemático¹

Francisco Jesús García García

A Gonzalo que supo ver con una perspectiva prospectiva

> Ya el Renacimiento observó, por boca de Giordano Bruno y de Bacon, que los verdaderos antiguos somos nosotros y no los hombres del Génesis o de Homero.

> > J. L. Borges

EL FINAL de la Primera de las Bellas Artes

A finales del siglo XV Piero della Francesca (1420-1492) publica *De Prospectiva pingendi* con la pretensión de describir cómo es posible plasmar la realidad de las cosas según un orden matemático reflejo o expresión de la suprema armonía de la creación. En 1509 Luca Pacioli (1445-1510), influenciado por –o tal vez plagiando a–Piero, publicaba *De Divina Proportione*, estudiando la *sección áurea* y su intervención en las construcciones geométricas, en la naturaleza y en las proporciones del cuerpo humano, estableciendo fundadamente un nuevo canon occidental de belleza. Durante el primer cuarto del siglo XVI, los métodos matemáticos de la perspectiva y la proporción eran enseñados y practicados en toda Europa con éxito arrollador por artistas de la talla de Alberto Durero (1471-1528) o Leonardo da Vinci (1452-1519).

El descubrimiento de las *leyes matemáticas de la perspec*tiva y de la armonía constituyó una auténtica revolución cultural. Para entender su dimensión, es necesario recordar que fue el primer gran éxito *completo de aplicación* de los métodos matemáticos a la naturaleza, generando

La misión de la representación en perspectiva es generar un mensaje (gráfico) que provoque la ilusión de tridimensionalidad. Esa ilusión puede ser objetiva o subjetiva y se sustenta en la comprensión y transmisión de una serie de convenios cuya efectividad depende del estado cultural de la colectividad o del estadio evolutivo del individuo. La racionalización de estos convenios produjo históricamente una impecable teoría matemática. axiomáticamente fundada, que acabó produciendo una violenta reacción de rechazo en el mundo artístico.

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ una teoría sólidamente fundada e inventando un método asequible y practicable. Naturalmente hubo triunfos anteriores y sublimes de las matemáticas que, no obstante, tenían una génesis más bien teorética, como los *Elementos* o la *Óptica* de Euclides, o distaban mucho de ser completos, como el sistema cósmico de Tolomeo (100-170) sobre el que Tycho Brahe (1546-1601) pronto acumularía fuertes evidencias de inadecuación y que estaba lejos de ser sustituido por modelos más efectivos como los heliocéntricos de Galileo (1564-1642) o Kepler (1571-1630), y mucho más lejos todavía de adquirir los sólidos fundamentos que proporcionó Newton (1642-1727) a la Astronomía convirtiéndola en Física.

La teoría de la perspectiva y la teoría de la proporción reducen los fenómenos pictóricos a reglas matemáticas exactas y sólidas extraídas y abstraídas empíricamente del mundo: una ley matemática universal determina cuánto debe distar una cosa de otra y en qué relación deben encontrarse las cosas para que la comprensión de la representación sea óptima y otra ley matemática regula las medidas de las partes en relación al todo.

En síntesis, tales teorías consiguen modelar el *arte del dibujo*, mecanizándole y haciéndole susceptible de *ser aprendido*. Complementan esta revolución los progresos en la representación de sombras, luces y colores, la mejora y abaratamiento de los materiales y la aparición de técnicas nuevas como el óleo.

No existían en aquel siglo historiadores atrevidos, pero de haberlos habido hubieran decretado sin duda el *fin* de la primera de las bellas artes.

Para conseguir el efecto visual de la reproducción en el plano del espacio, la perspectiva recurre a la determinación de una «correcta» medida y distribución de los objetos mediante un auténtico sistema de coordenadas. En definitiva se trata de un cambio esencial que sustituye la construcción del espacio a partir de los objetos que van siendo agregados a la representación por la predeterminación de un espacio sistemático en el que son adecuadamente colocados los objetos que hay que representar.

Un espacio así concebido, infinito pero representable finitamente y medible, es en esencia una anticipación concreta, no solo de las coordenadas cartesianas, sino de la propia concepción del espacio que adoptarán Kant (1724-1804) y Descartes (1596-1650), que si bien sentó las bases de la algebraización de las formas, no puede sino declararse heredero de la perspectiva en el concepto de coordenada. Más todavía, es el método perspectivo del renacimiento el que hace posible la construcción teórica de Desargues (1591-1661) que, al generalizar el cono visual al concepto de haz de rayos geométricos, inicia la geometría proyectiva² y, con ella, la superación de Euclides.

La teoría de la perspectiva y la teoría de la proporción reducen los fenómenos pictóricos a reglas matemáticas exactas y sólidas extraídas y abstraídas empíricamente del mundo...

- 1 Dejo constancia de mi agradecimiento a Ricardo García Moya, gracias al cual accedí al estudio fundamental de Erwin Panofsky sobre perspectiva.
- 2 Técnicamente, es E. Laguerre (1834-1886) (Nouvelles Annales de Mathématiques, vol. 12, 1853) quien resuelve definitivamente el problema de la conexión entre los conceptos métricos y los conceptos proyectivos, culminando la geometría proyectiva en el sentido clásico. Una excelente introducción a la Geometría Proyectiva desde el punto de vista algebraico moderno puede encontrase en Santaló (1966).

Con el descubrimiento de la perspectiva y de la armonía, el Renacimiento consigue racionalizar completamente en el plano matemático la imagen del espacio tridimensional visible, es decir, consigue la representación del espacio mismo y no sólo de los objetos que contiene. No sólo el arte se eleva a la categoría de ciencia, racionalizando la impresión visual subjetiva hasta tal punto que sirve de fundamento para una construcción espacial unitaria y no contradictoria de extensión infinita en la cual los cuerpos y los intervalos constituidos por el espacio vacío se hallan unidos por determinadas leyes, sino que además se logra la transición de un espacio psicofisiológico a un espacio matemático: es decir la objetivación del subjetivismo por la matematización del espacio visual.

Propiedades suficientes para poder hablar en propiedad de una concepción perspectiva del espacio, y no sólo de una mera construcción en perspectiva.

¿Por qué en el Renacimiento?

Como ocurre con todas las ideas importantes, el nacimiento de las ideas proyectivas puede rastrearse muy atrás en el tiempo. Y también puede detectarse las causas de que cuajen o se desarrollen en determinados momentos y no en otros. Antes del Renacimiento el paradigma cultural imperante no pretendía reproducir el espacio observable:

Para el pensamiento medieval era, por tanto, indiscutible que el artista conformaba su obra, si no según una Idea metafísica en el verdadero sentido de la palabra, sí según una representación interior o Quasi-Idea preexistente a la propia obra [...] el pensamiento medieval no podía plantearse en absoluto cómo esta representación interior de la forma podía limitarse a la contemplación de algo dado enaturalmente. [...] La forma de las cosas que han de ser creadas debe tener un arquetipo (similitudo) en el que crea... Esto sucede de dos maneras: en algunos sujetos activos

preexiste la forma de las cosas que han de ser creadas, en el sentido que tiene en los seres naturales (así, el hombre engendra al hombre, y el fuego, al fuego), pero en otros la forma preexiste en el sentido de los seres inteligibles, o sea, en aquellos sujetos que obran mediante el espíritu. Así, la casa preexiste en el espíritu del arquitecto y puede ser definida como Idea de la casa, porque el artista se esfuerza en imitar en la casa (real) la forma que él posee en su mente. (Panofsky, 1977, 39).

Esta concepción aristotélica de las obras de arte³, traza una frontera infranqueable entre éstas y los productos de la naturaleza. No importa ahora mucho cómo, pero el caso es que con el tiempo, la concepción de la *intuición* o idea previa artística pasa a ser fruto de la *experiencia*, es decir el Renacimiento se caracteriza por una concepción *constructivista* del arte:

Al no estar ya preconstituida la Idea a priori en la mente del artista, anticipándose a la experiencia, sino que, generada en base a ésta, es producida a posteriori, resulta que, por un lado, la Idea no aparece ya como rival o incluso como prototipo de la realidad sensible, sino como derivado de ésta, y, por otro, no ya como un contenido dado o incluso como un objeto trascendente del conocimiento bumano, sino como producto de éste: cambio que hasta en el lenguaje se evidencia de la manera más clara. De abora en adelante La Idea «no está» ni «preexiste» en el alma del artista, como decían Cicerón y Santo Tomás de Aquino, y menos aún le es «innata», como propugnaba el verdadero neoplatonismo, sino que más bien «viene a la mente», «nace», es «sacada», «obtenida» de la realidad, y aun expresamente «conformada y esculpida. (Panofsky, 1977, 61).

Las leyes de la perspectiva

Siguiendo a Panofsky (1973, 7), hablaremos en sentido pleno de una *intuición* perspectiva del espacio allí y sólo allí donde todo el cuadro se halle transformado, en cierto modo, en una «ventana», a través de la cual nos parezca estar viendo el espacio, esto es donde la superficie

...una máquina que genera intuición perspectiva por la vía de controlar cuantitativamente el tamaño y la ubicación de los objetos representados.

3 Para Aristóteles las artes incluian también la medicina y la agricultura, es decir, en cierto sentido, también la ciencia y la técnica. material es negada como tal y transformada en un mero «plano figurativo», sobre el cual y a través del cual se proyecta un espacio unitario que comprende todas las diversas cosas, sin importar si esta proyección está determinada por la inmediata impresión sensible o por una construcción geométrica más o menos «correcta».

El método de representación del espacio en perspectiva inventado por los renacentistas se sustenta en tres pilares: a) la *fuga* de las líneas visuales a un punto, b) la *gradación* de distancias entre las líneas horizontales y c) la aceptación de un canon de proporciones. Se trata de una máquina que genera intuición perspectiva por la vía de controlar cuantitativamente el tamaño y la ubicación de los objetos representados.

Son bien conocidas las reglas de la proporción, que tienen precedentes en la más lejana antigüedad y que, con mayor o menor sofisticación, consisten en descripciones cuantitativas fundadas en supuestos preestablecidos cuya eficacia tiene por juez a la propia realidad. He aquí, por ejemplo, las proporciones de la figura humana dictadas por Viturbio:

Tres narices a lo largo tengan la misma longitud que un rostro, y que los dos semicírculos de las orejas, colocados juntos, sean iguales al círculo de la boca abierta, y que esto mismo suceda con las cejas si se unen. Que la longitud de la nariz sea igual a la del labio y a la de la oreja, y que los dos círculos de los ojos sean iguales que la abertura de la boca. Que la altura del cuerpo sea igual a la de ocho cabezas y también a la de los brazos y piernas extendidos.



Figura 1

La existencia de *un punto de fuga* establece axiomáticamente⁴ la representación del infinito mediante un punto fijo. La posibilidad de definir tal punto tiene una base visual experimental. El lector puede, no obstante, entretenerse en comprobar las dificultades de su localización concreta intentando pintarlo en un espejo o en el cristal de una ventana. La movilidad del observador es para este menester, una traicionera virtud que puede ser sorteada recurriendo a la fotografía (figura 1).

El punto de fuga es el recurso utilizado para proyectar la tercera dimensión en el plano, pero no es suficiente para localizar los objetos en el espacio virtual así generado. Para esta localización es necesario definir un procedimiento métrico, es decir un procedimiento que describa cómo disminuye la longitud unidad en profundidad, esto es en los ejes que convergen en el punto de fuga, supuestamente representativo del infinito. Un ejemplo: cada unidad de longitud real tiene una longitud figurada que es un tanto por ciento de la precedente (figura 2).

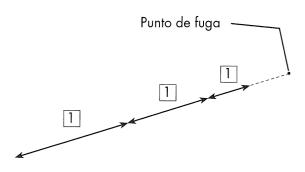


Figura 2

De hecho, todavía en época de L. Battista Alberti (1404-1472), considerado el primer tratadista de arte del siglo XV, se mantenía la costumbre, en las representaciones pictóricas con punto de fuga, de disminuir mecánicamente cada franja del suelo en un tercio respecto a la precedente.

Otra cosa es que ese procedimiento, intrínsecamente coherente, pues permite representar potencialmente infinitas unidades en una recta de longitud finita, coincida con la impresión visual real.

Es el propio Alberti el que sienta las bases para resolver este *problema métrico* con una definición: el cuadro (léase la porción *finita* de plano) es una intersección plana de la *pirámide visual* que se forma por el hecho de considerar el *centro visual* como un punto, el *punto de fuga*, que está conectado virtualmente con los diferentes y característicos puntos de la forma espacial que se quiere obtener.

De esta definición se deduce como una *consecuencia* la métrica proyectiva⁵ (figura 3).

El punto de fuga es el recurso utilizado para proyectar la tercera dimensión en el plano, pero no es suficiente para localizar los objetos en el espacio virtual así generado. Para esta localización es necesario definir un procedimiento métrico,...

- 4 Como axioma, la suposición de la existencia de un punto de fuga es removible. La elección de axiomas distintos dará lugar, como veremos, a otras perspectivas.
- 5 La explicación gráfica procede de Rovira (1972, 12).

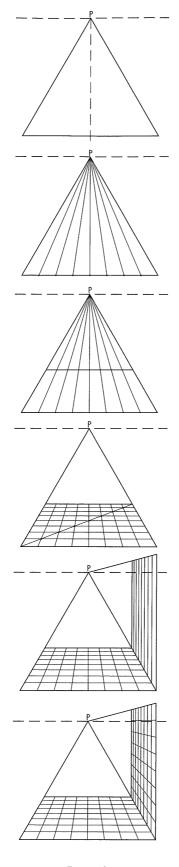


Figura 3

La definición anterior se basa implícitamente en dos grupos de supuestos:

- 1. Sobre el espacio: es infinito, es constante, es homogéneo.
- 2. Sobre la representación del espacio: «miramos» con un único ojo que, además, está inmóvil y la intersección plana de la pirámide visual es una representación adecuada de nuestra imagen visual.

El primer grupo, el de los supuestos «objetivos», se corresponde con lo que más tarde serán las hipótesis galileanas del espacio físico, es decir, conforman una abstracción matemática. Pero como tal abstracción no se corresponde con ninguna de los observables de la experiencia: el infinito no es perceptible, el espacio perceptivo no es homogéneo nunca, es heterogéneo y además anisótropo. Por ejemplo la gravedad introduce una asimetría entre la verticalidad y la horizontalidad perceptible.

Por otra parte los supuestos «subjetivos» son manifiestamente simplificadores: miramos con dos ojos, los ojos se mueven constantemente y, para colmo, la imagen retínica no es plana, lo que nos hace percibir al entorno exterior con forma esferoide, es decir no desarrollable en el plano.

Estas objeciones básicas a los presupuestos básicos no son sólo teóricas sino que producen efectos prácticos no deseados que los perspicaces pintores renacentistas no ignoraron. El más significativo, pero no el único, es el fenómeno de las aberraciones marginales: la diferencia existente entre la relación de los ángulos visuales y la relación de los segmentos obtenidos por la proyección sobre una superficie plana lo que genera una patente contradicción entre la construcción perspectiva y la efectiva impresión visual. Así, una serie de círculos del mismo diámetro representados en una línea con las leyes de la perspectiva generarían una imagen con aberración en los márgenes: el segmento AB tiene la misma longitud que EF pero mayor que CD (figura 4).

В D E Figura 4

Para ocultar o disimular este fenómeno, el Renacimiento impuso límites al campo de aplicación de las leyes de la perspectiva, acotando así las aberraciones, tal y como reza el siguiente canon de la época: La distancia del pintor a la escena debe ser al menos veinte veces mayor que la altura del escenario o que la dimensión del mayor objeto a representar.

La primera gran reacción antimatemática de la historia

Un problema concreto e importante, la representación del espacio en el plano, resuelto definitivamente por un método claro, bien fundado en unos axiomas controlados, con un procedimiento métrico sencillo, efectivo y razonablemente en concordancia con las observaciones, con sus limitaciones detectadas y con reglas conocidas para acotar sus efectos. Y además más de siglo y medio antes de la irrupción de las matemáticas en la física y, por lo tanto, del nacimiento oficial del método científico. ¡Todo un sueño dorado para una disciplina básica como las matemáticas!

Sin embargo, como todo el mundo sabe, el arte de la pintura no se acabó, sino que en lo sucesivo simplemente tomó otros rumbos y se planteó otros problemas: el expresionismo evita la perspectiva, el impresionismo da preferencia a la luz frente a la forma, Picasso hace intervenir mecanismos psicológicos para representar la tridimensionalidad sin perspectiva y Dalí se dedica a atrapar con el pincel el tiempo que se escurre (figura 5).

Estas objeciones básicas a los presupuestos básicos no son sólo teóricas sino que producen efectos prácticos no deseados que los perspicaces pintores renacentistas no ignoraron.

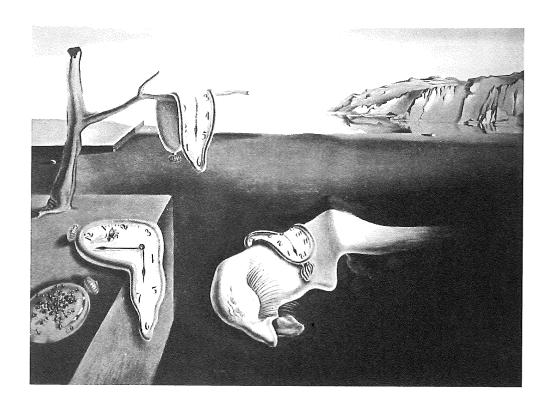


Figura 5

Menos conocido es, sin embargo, que apenas medio siglo después del soberbio triunfo matemático del descubrimiento de las leyes de la armonía y la perspectiva, se produjo una virulenta reacción, artística en primera instancia, pero de más amplio calado intelectual, el *manierismo*, que vino a dejar patente el fracaso del intento de matematización del arte. Si ya es significativo que El Greco viole concienzudamente las más elementales dictámenes de la proporción, las opiniones de los teóricos del arte de la época no dejan lugar a dudas:

[...] esta nobilísima profesión requiere el juicio y la buena práctica, que sirvan de regla y norma al buen trabajo. Como ya me dijo mi queridísimo hermano y predecesor, al enseñarme las primeras reglas o medidas de la figura humana: que las proporciones perfectas y graciosas ban de ser de tantas y no más cabezas. Pero conviene, decía él, que al trabajar te familiarices con estas reglas y medidas basta tal punto que tengas el compás y la escuadra en los ojos, y el juicio y la práctica en las manos. De tal forma que estas reglas y términos matemáticos no son ni pueden ser útiles ni buenos para trabajar con ellos 6. Ya que, en lugar de aumentar el espíritu y la vivacidad del arte práctico, le quitaría todo, porque el intelecto se envilecería, el juicio se apagaría, y quitaría al arte toda la gracia, todo el espíritu y el sabor.

Así, pues, creo que Durero, con aquel trabajo, que no fue poco, **bizo esto en broma**, como pasatiempo y para dar

...el manierismo, que vino a dejar patente el fracaso del intento de matematización del arte.

6 El resalte en negrita de todas las citas que siguen es un añadido mío.

se dedican más a la contemplación que a la acción, y para demostrar que el «Disegno» y el espíritu del pintor sabe y puede hacer todo lo que se propone. Igualmente fue poco fructífero y sustancioso el otro trabajo que dejó dibujado con escritos invertidos otro gran bombre [Leonardo da Vinci] de la profesión, pero también él demasiado sofisticado, al dejar que preceptos, aunque fueran matemáticos, movieran y torcieran las figuras con líneas perpendiculares, con escuadra y compases: cosas ingeniosas todas, sí, pero fantásticas y sin fruto sustancioso; a pesar de lo que otros crean, cada uno puede obrar a su gusto. Diré que estas reglas matemáticas deben reservarse para las ciencias y profesiones especulativas, como la geometría, astronomía, aritmética y similares, que con sus resultados satisfacen al intelecto. Pero nosotros, profesores de Dibujo, para imitar a la Naturaleza no tenemos necesi**dad de otras reglas** que las que ella misma dicta. (Zuccari, citado Panofsky, 1977, 70, nota 180).

entretenimiento a aquellos intelectos que

La línea argumental de Zuccari contra el método matemático descansa no sólo en el objeto (es decir en las eventuales limitaciones o dificultades que conlleva el método) sino también en el sujeto (es decir, en la necesidad de libertad del espíritu del artista con prioridad sobre cualquier otra consideración). Es precisamente esta última bandera la que acaba enarbolándose como la razón esencial del rechazo a un método por otra parte técnicamente incontestable. Esta sofisticación argumental se manifiesta ya explícitamente en Vincenzo Danti que en su Il primo libro del Trattato delle perfette proporzioni (1567) distingue expresamente entre un ritratare que reproduzca la realidad tal y como la vemos, y un imitare que la reproduce como debería ser o como al artista le gustaría que fuese, esto es, se podría añadir, no sujeta a leyes matemáticas. Esta posibilidad posibilidad de reconstruir la realidad que se autoconcede el artista abre las puertas a la creación de infinitos mundos pictóricos sujetos a muchas leyes o incluso a ninguna ley. En palabras⁷ de Giordano Bruno, «sólo el artista es autor de las reglas, y únicamente existen verdaderas reglas en la misma medida y número que verdaderos artistas», tantas realidades habrá como artistas, y por lo tanto, parece querer concluir, dado cualquier método matemático de representación siempre se podrá inventar un mundo subjetivo no representable.

Esta rebelión contra toda regla fija, y en especial contra las reglas matemáticas se extiende con carácter general y apasionado a finales del siglo XVI, rompiendo o modificando las formas armónicas y abandonando las representaciones claras, basadas en el concepto de la perspectiva racional, reconociendo, y esto es lo más curioso, los méritos de la matemática en la racionalización de la representación artística sobre una base científica pero rechazando abiertamente su aplicación. La matemática, considerada y honrada por Piero della Francesca, Durero o Leonardo como el fundamento más sólido de las artes figurativas, es ahora perseguida con odio:

Esta rebelión contra toda regla fija, y en especial contra las reglas matemáticas se extiende con carácter general y apasionado a finales del siglo XVI, rompiendo o modificando las formas armónicas y abandonando las representaciones claras, basadas en el concepto de la perspectiva racional,...ß

- 7 Citado en Panofsky (1977, 66).
- 8 Tanto de los matemáticos puros que ridiculizan tales pretensiones como de los científicos sociales y humanos que parecen desear cierta irracionalidad espiritual para sus disciplinas.
- Entre los que habría que incluir algunos calificables de docentes.
- 10 Entre los que se incluye a sí mismo

Pero digo, y sé que digo la verdad, que el arte de la pintura no toma sus principios de las ciencias matemáticas, ni tiene ninguna necesidad de recurrir a ellas para aprender leyes o procedimientos para su arte, o simplemente para razonarlos especulativamente... Incluso añadiré que todos los cuerpos producidos por la naturaleza poseen proporción y medida, como afirma el Sabio [Aristóteles], pero si alguien quisiera dedicarse a considerar y conocer todas las cosas a través de la especulación teórico-matemática, y obrar con respecto a ésta, además de un aburrimiento insoportable, sería una inútil pérdida de tiempo, [...] Porque el pensamiento del artista no sólo ha de ser claro, sino libre, y su espíritu, abierto, y no limitado por una dependencia mecánica de tales reglas. (Federico Zuccari, en Panfsky, 1977, 69).

A modo de conclusión

El injusto desgaste y desprestigio sufrido por las matemáticas no se ha reparado nunca del todo. Aproximadamente dos siglos después de los procesos aquí descritos, triunfaba la matematización de la física pero a costa de un cierto encasillamiento de los métodos matemáticos, que resultarían útiles sólo para describir, comprender y transformar el mundo objetivo que estudian las ciencias de la naturaleza, separado taxativamente de ciertas actividades o fenómenos, como el artístico, que tendrían una naturaleza no racional. Sólo muy recientemente, y siempre despertando tremendos recelos y furiosas críticas⁸, las ciencias sociales, o más precisamente algunas parcelas de las ciencias humanas y sociales, se han dejado modelar matemáticamente.

Ha subsistido una cierta identificación actitudinal de matemáticas con reglas a obedecer que tiene su origen en la reacción manierista. Esta aversión ha sido alimentada por otros fenómenos⁹ que han contribuido a apuntalar la suposición de la existencia de un conflicto irresoluble entre la aceptación de reglas impuestas en último extremo por la naturaleza y la defensa de la libertad de creación a ultranza. Además esta última se caracterizaría porque no se puede aprender, y por lo tanto no se puede enseñar.

Por otra parte, esta separación no es tajante. El ya citado Danti, que rechaza la *esquematización matemática de las formas* y de los movimientos corporales, admite, sin embargo, incondicionalmente ya que en alguna forma habría que encontrar un camino «científico» para acceder al arte el método anatómico, y explica claramente que «su *vera regola* debe valer tanto para los que han nacido para el arte como para aquellos¹⁰ que no han nacido para él» (Panofsky, 1977, 72).

Del mismo modo el ya mencionado Zuccari, a pesar de su aversión a la *teórica matemática*, no renuncia a fijar modelos en fórmulas numéricas y a delimitar exactamente el campo de aplicación de cada uno de ellos, situándose intelectualmente sobre una línea fronteriza difusa y declarando estar, a conveniencia, en un lado o en otro de la misma.

Si el primer intento serio de matematización se libró sorprendentemente en el terreno del arte y no en el de la física, sus resultados intelectuales no fueron menos sorprendentes.

Francisco Jesús García Societat d'Educació Matemática de la Comunidad Valenciana Al-Khwarizmi

Referencias

- BORGES, J. L. 91985): *Prólogo a Crónicas Marcianas de Ray Bradbury*, Minotauro, Barcelona.
- PANOFSKY, E. (1973): *La perspectiva como* forma simbólica, Tusquets Editor, Barcelona.
- PANOFSKY, E. (1977): *Idea*, Ensayos Arte, Ediciones Cátedra, Madrid.
- ROVIRA, A. (1972): *Perspectiva básica*, AF, Barcelona.
- Santaló, L. A. (1966): Geometría proyectiva, EUDEBA, Buenos Aires.

