SUMA 25
junio 1997, pp. 123-129

Algunas cuestiones y problemas sobre los triángulos

Juan-Bosco Romero Márquez
María Ángeles López y Sánchez-Moreno

A Gonzalo Sánchez Vázquez

En esta corta nota de carácter elemental presentamos la relación que existe entre las mediatrices de un triángulo y las medias armónica y geométrica, así como la media aritmética ponderada de dos números reales positivos, o lo que es lo mismo, de las longitudes de los segmentos geométricos asociados. Así mismo, damos la construcción geométrica de todas las medias anteriores a través del triángulo y sus mediatrices.
También se presenta en este artículo una nueva caracterización de los triángulos rectángulos.

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

Conceptos y resultados previos

Comenzamos esta sección presentando los conceptos y los resultados más importantes sobre las medias de dos números reales positivos y de sus distintas interpretaciones geométricas vía los triángulos rectángulos –medias armónica, geométrica y aritmética–, o vía el trapecio –medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática–, que se pueden encontrar en la bibliografía citada.

Todo ello puede ser vivido y construido con las herramientas euclidianas –la regla y el compás– o a través del ordenador.

Medias asociadas a dos números reales positivos

En este apartado resumimos los conceptos y los resultados elementales más notables sobre las medias de dos números reales positivos o, lo que es lo mismo, las medias de las longitudes, de las áreas y de los volúmenes de las figuras geométricas asociadas en cada caso.

Sean $0 < a < b$ dos números reales positivos y $r \in \mathbb{R}$. Llamamos media r-ésima de los números a y b al número $m_r(a, b)$ definido como sigue:

$$m_r(a,b) = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{1/r}, \text{si } r \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad [1]$$

$$m_0(a,b) = \sqrt{a \cdot b}\ ,\ m_{-\infty}(a,b) = a,\ m_{+\infty} = b$$

En particular, si hacemos en [1], r = –1, r = 1, r = 2, se obtienen las medias armónica, aritmética y cuadrática de *a* y *b*, respectivamente.

En el teorema siguiente resumimos las propiedades más importantes que tienen las medias de dos números reales positivos.

Teorema 1

Si $0 < a < b$ son dos números reales, entonces se verifica:

a) $m_r(a, b) = m_r(b, a)$ (*simetría*).

b) $m_r(t{\cdot}a, t{\cdot}b) = t{\cdot}m_r(a, b)$ (*homogeneidad*).

c) $a < m_r(a, b) < b$.

d) Si $r < s$ implica $m_r(a, b) < m_s(a, b)$ (*monotonía*)

Por métodos elementales de cálculo algebraico simple se puede probar el siguiente resultado (Posamentier, 1988 y Beckenbach y Bellman, 1961).

Corolario

Si $0 < a < b$ son números reales, entonces se tiene:

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{a \cdot b} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$$

Ejercicio

Estudiar las propiedades y dibujar las gráficas de las funciones reales que se obtienen al tomar $a = 1$ y $b = x > 0$ para las medias $r = -\infty$, $r = -1$, $r = 0$, $r = 1$, $r = 2$ y $r = +\infty$.

Para un estudio algebraico, analítico y geométrico de estos tipos de medias, de algunas identidades y desigualdades fundamentales que se establecen entre ellas, así como la relación existente con algunos problemas de máximos y mínimos sobre ciertas figuras del plano, véanse Posamentier (1988) y Beckenbach y Bellman (1961). Para una generalización de las medias y de otros resultados sobre ellas se puede consultar Mitrinovic (1976).

Resultados

En esta sección probamos los resultados más importantes de nuestro trabajo utilizando para ello el teorema de Tales aplicado a la semejanza entre triángulos.

La media armónica y media aritmética ponderada caracterizadas mediante los triángulos acutángulos y obtusángulos vía los triángulos isósceles

Suponemos conocido en todo lo que sigue los conceptos de mediatrices y circuncentro de un triángulo y las propiedades de las medias armónica, geométrica y aritmética (ponderada o no) de dos números reales positivos.

Comenzamos enunciando el siguiente teorema:

Teorema 2

Sea ABC un triángulo de lados a = BC, b = CA y c = AB. Tracemos la mediatriz al lado BC por su punto medio A', y sean los puntos C' y B' donde ésta corta a los lados (o a sus prolongaciones) AB y AC, respectivamente. Si denotamos por h = AA" a la altura correspondiente al lado BC, y si ponemos x = A'C', y = A'B', m = BA" y n = A"C (ver figura 1), entonces se verifica:

$$h = \frac{mx + ny}{m+n} = \frac{2xy}{x+y}$$

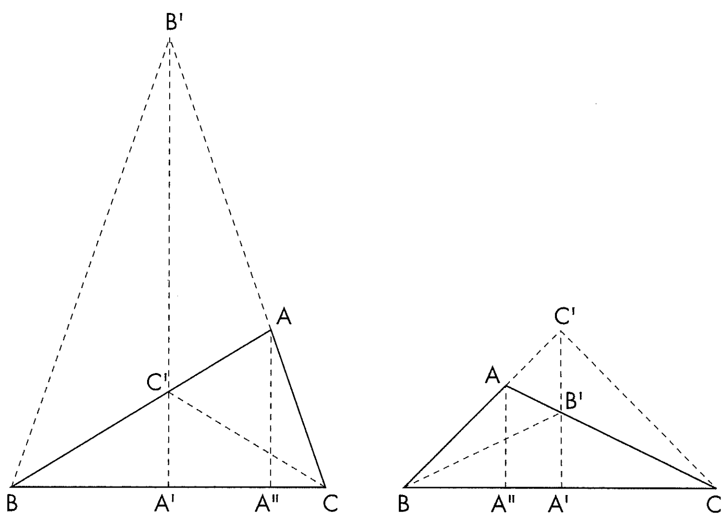

Figura 1

Demostración: Veamos la demostración del teorema para el caso en que el triángulo es acutángulo (si es obtusángulo se hace de una forma similar).

Por las construcciones que hemos hecho en la figura 1, los triángulos rectángulos ABA" y C'BA' son semejantes ya que tienen los lados paralelos.

Por lo tanto, tenemos:

$$ah = 2mx$$

de donde:

$$h = \frac{2mx}{a} \qquad [2]$$

De forma similar, los triángulos rectángulos A'B'C y A"AC son también semejantes, ya que tienen un ángulo común, C. Por ello:

$$ah = 2ny$$

y de aquí tenemos que:

$$h = \frac{2ny}{a} \qquad [3]$$

Sumando [2] y [3] obtenemos:

$$2h = \frac{2}{a}(mx + ny)$$

y ahora despejando h, teniendo en cuenta que mx = ny, llegamos a

$$h = \frac{mx + ny}{m + n} = \frac{2xy}{x + y} \qquad [4]$$

Con lo que tenemos así probado que h es a la vez la media aritmética ponderada y la media armónica de los segmentos de longitudes x e y, respectivamente, en virtud de la proporcionalidad que hay entre los segmentos m, n, x e y que intervienen en [4].

Corolario

El área del triángulo ABC es la media armónica de las áreas de los triángulos isósceles BCC' y BCB'.

Ejercicio

Utilizando una construcción similar a la anterior dibujar el segmento:

$$h = \frac{2xy}{y - x}$$

donde $y > x > 0$. Ver la figura 2.

BC = a, A'B = A'C = a/2, A'C' = x, A'B' = y, AA" = h

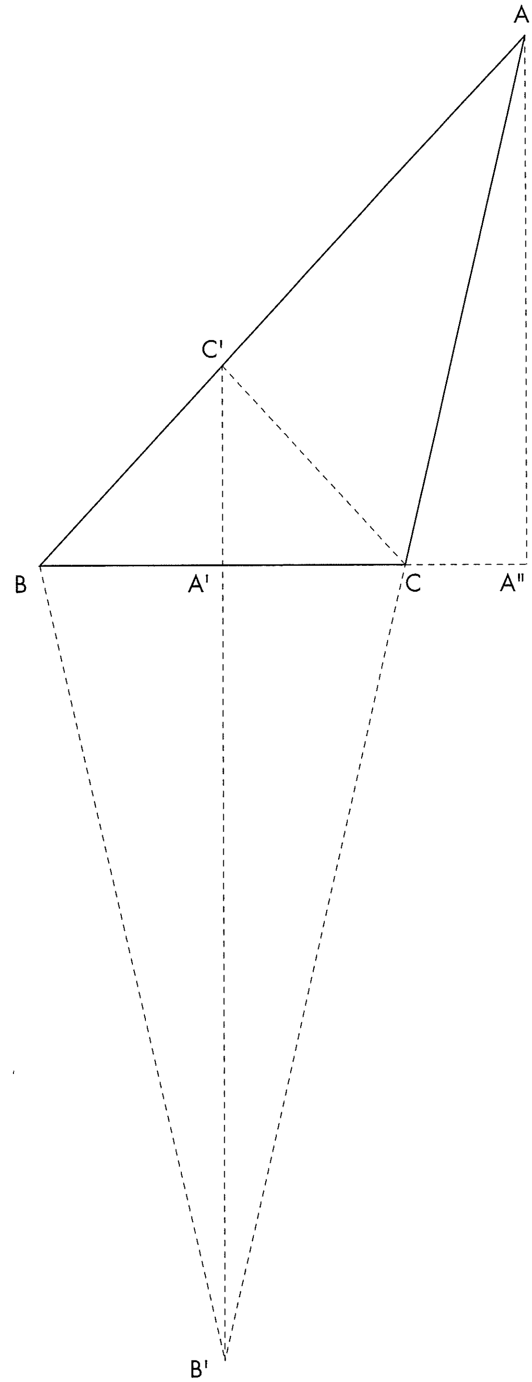

Figura 2

Nota. Observar que la clave, en todo lo anterior, ha sido el utilizar los triángulos isósceles para determinar la altura de todo triángulo como una media armónica de las alturas de los triángulos isósceles BCB' y BCC'

Equivalencia de la media armónica y la media geométrica en un triángulo rectángulo

De la misma forma que anteriormente, pero vía el triángulo rectángulo, podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3

Sea ABC un triángulo rectángulo en A de lados $a > b \geq c$. Si denotamos por a = BC, x = A'B', y = A'C', m = A"C, n = A"B, y b = AA" donde A" es el punto proyección ortogonal (pie de la perpendicular) trazada desde el punto A sobre el lado BC, entonces

$$b = \frac{2xy}{x+y} = \sqrt{m \cdot n} \qquad [5]$$

Demostración: Por la construcción realizada, en la figura 3, los triángulos rectángulos A'B'C y A"AC son semejantes, ya que tienen un ángulo común en el vértice C y los lados B'A' (mediatriz de BC) y AA" (altura) paralelos y perpendiculares al segmento BC.

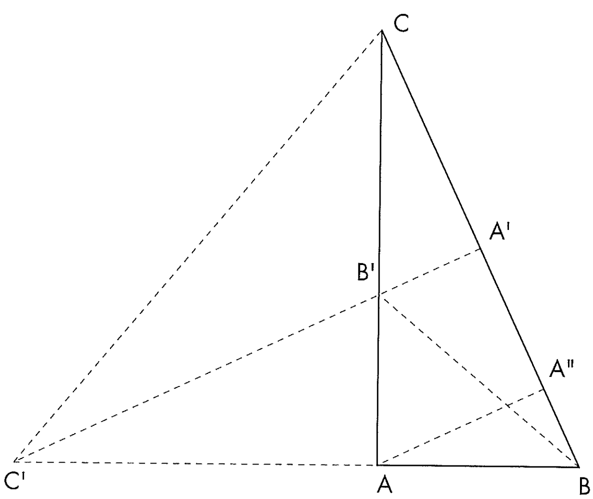

Figura 3

De forma análoga se prueba que los triángulos rectángulos A'C'B y A"AB son semejantes, ya que tienen un ángulo común en el vértice B y los lados A'C' y AA" paralelos.

Por lo tanto, escribiendo la relación de semejanza entre los siguientes pares de triángulos, obtenemos para el par A'B'C, AA"C:

$$\frac{b}{x} = \frac{\text{A"C}}{\frac{a}{2}} \quad , \quad \text{A"C} = \frac{ba}{2x}$$

y para el par A'C'B, A"AB:

$$\frac{b}{y} = \frac{\text{A"B}}{\frac{a}{2}} \quad , \quad \text{A"B} = \frac{ba}{2y}$$

Ahora bien:

$$a = \text{BC} = \text{A"C} + \text{A"B} = \frac{ba}{2x} + \frac{ba}{2y} = \frac{ba}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

y despejando b obtenemos:

$$b = \frac{2xy}{x+y} = \sqrt{m \cdot n}$$

con lo que el teorema queda probado.

Otra construcción de la media armónica de dos segmentos vía los triángulos rectángulos

En este apartado vamos a dar un nuevo teorema que nos permite construir la media armónica de dos segmentos vía el triángulo rectángulo como método de construcción y caracterización.

Teorema 4

Sea ABC un triángulo de lados a = BC, b = AC y c = AB. Tomando como referencia el lado BC, trazamos por B y C, las rectas perpendiculares hasta que corten a las prolongaciones de los lados AC y AB, respectivamente, en los puntos B' y C'.

Entonces, dos veces la altura b = AH del lado BC es la media armónica de los segmentos x = CC' e y = BB'

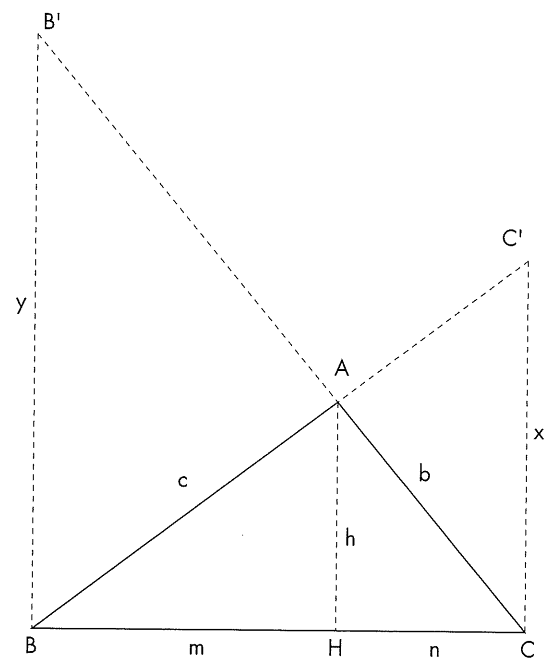

Figura 4

Demostración: Por las construcciones que hemos realizado (ver figura 4) los triángulos rectángulos BCC' y BHA son semejantes, ya que tienen lados paralelos y, además, un ángulo común en el vértice B.

Por lo tanto, por el teorema de Thales aplicado a ambos triángulos, tenemos (véase la figura 4):

$$\frac{x}{h} = \frac{a}{m} \qquad [6]$$

Similarmente, los triángulos rectángulos CBB´ y CHA son también semejantes, por la misma razón anterior.

Por todo ello:

$$\frac{y}{h} = \frac{a}{n} \qquad [7]$$

Despejando de [6] y [7] *m* y *n,* respectivamente, tenemos que:

$$a = m + n = \frac{ha}{x} + \frac{ha}{y} = ha\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

Despejando *h* llegamos a:

$$h = \frac{xy}{x + y} \qquad [8]$$

Finalmente, pongamos $h^* = 2h$ y obtenemos el cálculo y la construcción de la media armónica de los segmentos *x* e *y.*

De forma más general, y vía cualquier clase de triángulo, tenemos el siguiente resultado que nos permite construir la media armónica de dos segmentos (ver figura 5):

Teorema 5

Sea C_1 cualquier punto del lado AB del triángulo ABC, y dibujar C_1C. Sea A1 el punto de intersección de BC prolongada hasta cortar a la paralela trazada por A a CC_1; similarmente, sea B1 la intersección de AC prolongada hasta cortar a la paralela por B a C_1C. Entonces se verifica la siguiente relación:

$$\frac{1}{CC_1} = \frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} \qquad [9]$$

Demostración: Ya que los segmentos AA_1, BB_1 y CC_1 son paralelos (figura 5), los pares de triángulos CAC_1, B_1AB y de otra parte, CBC_1, A_1BA son semejantes,

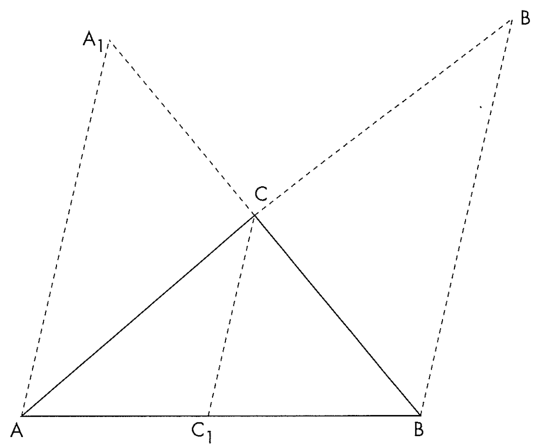

Figura 5

respectivamente. De esto obtenemos:

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC_1}{AB} \quad \text{y} \quad \frac{CC_1}{AA_1} = \frac{C_1B}{AB}$$

Sumando miembro a miembro estas dos proporciones llegamos a la relación propuesta en [10].

Proponemos a título de investigación en la clase los siguientes problemas de geometría.

Ejercicios

1) Escribiendo la semejanza entre los triángulos ABB' y ACC', obtener nuevas relaciones entre los lados *b* y *c* del triángulo ABC.

2) Sean los triángulos ABC y A'B'C' y tales que los ángulos B y B' son iguales y que la suma de los ángulos A y A' es igual a 180°. Probar que los lados de los triángulos están relacionados por la siguiente fórmula:

$$aa' = bb' + cc'$$

(Esta relación se verá más adelante que se verifica de forma natural para los triángulos rectángulos.)

3) Sea ABC un triángulo y D el pie de la bisectriz trazada desde el vértice C. demostrar que:

$$CD^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD$$

4) Probar que si en un triángulo se verifica la relación *a*/cosA = *b*/cosB, éste es isósceles.

5) AD es la altura del triángulo ABC, el punto H es el ortocentro. Demostrar que DC·DB = AD·DH.

6) Demostrar que si a y b son los lados de un triángulo, *l* la bisectriz del ángulo comprendido entre ellos, *a'* y *b'* los segmentos en los que la bisectriz divide al tercer lado, entonces se verifica

$$l^2 = ab - a'b'$$

7)El punto H es el ortocentro del triángulo ABC. En la recta CH se ha tomado un punto K tal que ABK es un triángulo rectángulo. Demostrar que el área del triángulo ABK es la media geométrica entre las áreas de los triángulos ABC y ABH.

Distintas caracterizaciones equivalentes de los triángulos rectángulos

Sea ABC un triángulo rectángulo en A, y cuyos lados son $a > b \geq c$. Proponemos los siguientes problemas:

Problemas

1. Sean T = ABC y T' = A'B'C' dos triángulos de lados $a > b \geq c$ y $a' > b' \geq c'$, respectivamente. Probar que los tres asertos siguientes son equivalentes:

a) T y T' son triángulos rectángulos y semejantes.

b) T y T' son triángulos rectángulos y entre sus lados se verifica que $aa' = bb' + cc'$.

c) T y T' son triángulos semejantes y entre sus lados se verifica que aa' = bb' + cc'.

Sugerencia: Aplicar el teorema de Thales y el teorema de Pitágoras y luego efectuar un cálculo algebraico elemental.

2. Sea ABC un triángulo rectángulo en A (figura 6). Sea H el pie de la perpendicular trazada desde A sobre el lado BC. Ahora proyectamos ortogonalmente el punto H, sobre los lados AC y AB, respectivamente, obteniendo así los puntos B' y C'. Estos se proyectan de nuevo perpendicularmente sobre el lado BC para obtener los puntos H_1 y H_2, respectivamente. Probar que:

$$AH = B'H_1 + C'H_2 \text{ y } H_1H = H_2H$$

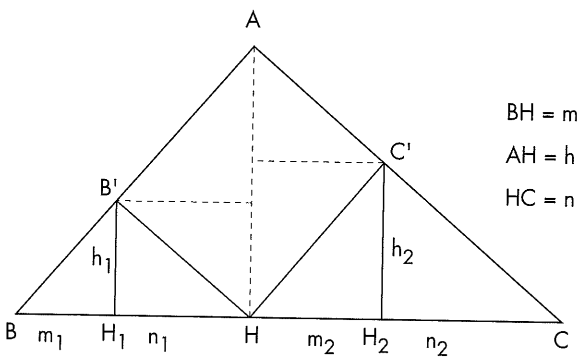

Figura 6

Conclusiones, comentarios y observaciones

Creemos que los resultados elementales aquí expuestos sobre las caracterizaciones y las construcciones de las medias usuales vía el triángulo pueden ser explicados como una experiencia didáctica novedosa sobre la geometría plana elemental en el aula, por ser ésta sencilla tanto a los alumnos de BUP como a los de la ESO.

Se puede llevar a cabo la manipulación activa de estos resultados sencillos sobre la geometría plana elemental del triángulo, no sólo con los instrumentos de dibujo, la regla y el compás, sino también con el ordenador, así como recrear los teoremas aquí expuestos utilizando para ello los diferentes lenguajes de programación y los distintos paquetes de geometría que aparecen en *Maple, Mathematica, Matlab, Derive, Sketchpad, Cabri* y *Geomouse,* entre otros.

Esta experiencia de investigación metodológica-didáctica ha sido llevada al aula, con aceptable éxito, con alumnos de la ESO y también alumnos del actual BUP, dentro del importante y trascendental tópico de «Resolución de problemas y de conjeturas». Sin duda, *las estrategias del pensamiento plausibles para la proposición y la resolución de las conjeturas y de los problemas en las matemáticas y en las ciencias en general,* permiten conseguir una buena enseñanza-aprendizaje y una educación matemática de gran calidad. Es decir, *la resolución de problemas y conjeturas es el más noble, el más difícil e imaginativo, el más aventurero, y el más fantástico y emocionante de todos los artes que consisten en la creación y en la proposición de problemas y de conjeturas en la clase, con el objeto de fomentar en los alumnos la investigación para la resolución de los problemas y de las conjeturas que se susciten sobre los entes matemáticos.*

En definitiva, como conslusión u observación última podemos afirmar que en el noble y difícil arte de enseñar, si los profesores somos creativos, imaginativos e investigadores en el aula, y eso lo ven, lo viven, lo tocan, lo juegan, lo aman y lo observan nuestros alumnos, también ellos lo serán y lo demostrarán algún día, en cualquier campo profeisonal donde tengan que realizar su trabajo. Y esta es la satisfacción más grande que puede recibir un profesor de los alumnos a los que ha enseñado y educado en las Matemáticas: ser creativos e imaginativos. esta es *la gran y emocionante aventura de las matemáticas que cada profesor quiere vivir cada día con sus alumnos en la clase.*

Menudo reto es, en la enseñanza actual el conseguir este objetivo.

Bibliografía

ALSINA, C. y otros ((1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

BECKENBACH, F. E. y R. BELLMAN (1961): «An Introduction to Inequalities» en *The Classical Inequalities*, Random House, New York.

BEHNKE, H. y otros (edts.) (1974): *Fundamental of Mathematics, Geometry*, MIT Press Cambridge, Cambridge.

BLOOM, D. M. (1979): *Linear Algebra and Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

CASTELNUOVO, E.: *Geometría Intuitiva*, Labor, Barcelona.

CEDERBERG, J. N. (1991): *A Course in Modern Geometries*, Springer-Verlag, New York.

CLEMENS, C. H. y M. A. CLEMENS (1991): *Geometry for the classroom*, Springer-Verlag, New York.

COXETER, H. S. M. (1971): *Fundamentos de la Geometría,* Limusa-Wiley, México.

COXETER, H. S. M. y S. L. GREITZER (1993): *Retorno a la Geometría*, DLS-Euler, Madrid.EVES, H. (1969): *Estudio de las Geometrías*, Uteha, México.

GUSEV, V., A. LITVINENKO y A. MORDKOVICH (1988): *Solving Problems in Geometry*, Mir, Moscu.

GUSIATNIKOV, P y S. REZNICHENKO (1988): *Álgebra vectorial en ejemplos y problemas*, Mir, Moscu.

Juan-Bosco Romero
Mª Ángeles López
Sociedad Puig Adam de
Profesores de Matemáticas

LANGE, L. H. (1989): «Pòlya's Mushrooms - a Mathematical Concert Remenbering George Pòlya» en *Teaching and Learning: A problem-Solving Focus,* NCTM, Reston.

MITRINOVIC, D. S., J. E. PECARIC y V. VOLONEC (1989): *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

MITRINOVIC, D. S. (1976): *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, New York.

MOISE, E. E. (1978): *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado,* CECSA, Barcelona.

PERRY, E. (1992): *Geometry: Axiomatic development with Problem Solving*, Marcel dekker, New York.

POGORÈLOV, A. V. (1974): *Geometría Elemental*, Mir, Moscu.

POSAMENTIER, A. S. (1988): «The harmonic Mean and Its Place among Means» en *Readings for enrechment in secondary school mathematics*, NCTM, Reston.

POSAMENTIER, A. S. y CH. T. SALKIND (1988): *Challenging Problems in Geometry*, Dale Seymour Publications, Palo Alto.

PUIG ADAM, P. (1961): *Curso de Geometría Métrica*, Editorial Matemática, Madrid.

QUEYSANNE, M. y A. REVUZ (1976): *Geometría*, CECSA, Barcelona.

ROMERO MÁRQUEZ, J. B. y M. A. LÓPEZ SÁNCHEZ-MORENO: «Las mediatrices de un triángulo y su relación con las medias», *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, por aparecer.

SÈNECHAL, B. (1979): *Gèomètrie classique et mathèmatiques moderns*, Hermann, París.

SHARYGIN, I. F. (1988): *Problems in Plane geometry,* Mir, Moscu.

SHUVALOVA, E. Z. (1980): *Geometry,* Mir, Moscu.SHANG-CHING CHOU (1987); *Mechanical Geometry Theorem Proving,* D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

YAGLOM, I. M. (1973): *Geometric Transformations*, MAA.