

# SUMA 25

junio 1997, pp. 113-122

## Las Matemáticas en el Bachillerato

**Javier Brihuega Nieto**

*Artículo dedicado  
a Gonzalo Sánchez Vázquez*

**L**A REFORMA del sistema educativo que se deriva de la LOGSE incluye una etapa educativa, no obligatoria, con unas características especiales que la confieren especial importancia. Enmarcada entre la ESO y la Universidad (o los estudios profesionales de nivel superior), el Bachillerato, con sus distintas modalidades, es la etapa formativa donde se deben fundamentar los conocimientos adquiridos, por los estudiantes, a lo largo de toda su escolarización obligatoria anterior.

En estos momentos, todavía son muy pocos los centros en los que se imparten los dos cursos de Bachillerato y, entre ellos, son bastantes los que lo hacen por primera vez. Además, a pesar de su importancia, el MEC y las distintas comunidades autónomas apenas han elaborado orientaciones ni materiales que nos sirvan de apoyo para su aplicación y desarrollo.

En este artículo pretendo comentar las peculiaridades más importantes de las diferentes materias de Matemáticas en las distintas modalidades del Bachillerato del nuevo Sistema Educativo, así como las diferencias y similitudes en su planteamiento. No se trata, por tanto, de hacer un análisis exhaustivo de cada materia, sino intentar un acercamiento a los aspectos más significativos de cada una de ellas, resaltando lo más novedoso y su tratamiento didáctico. Previamente parece preciso hacer algunas consideraciones iniciales.

En este artículo se comentan los aspectos más significativos de las distintas asignaturas de matemáticas de nuevo Bachillerato, cuya puesta en marcha se está iniciando.

Las materias «Matemáticas», «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales» y «Matemáticas de la forma» de las diferentes modalidades del bachillerato se analizan, destacando los elementos más novedosos y se dan unas breves pinceladas de su tratamiento didáctico.

**HOMENAJE  
A GONZALO  
SÁNCHEZ VÁZQUEZ**

## Introducción

Las Matemáticas forman una ciencia compuesta por un amplio conjunto de conocimientos que, en muchas ocasiones, se presentan de una manera aparentemente diferenciada. Este conjunto de conocimientos está en continua evolución debido a su interrelación con los otros campos de la Ciencia y la Técnica, pues siempre ha de responder a la necesidad de resolver determinados problemas prácticos derivados de ellos. Paralelamente, en las últimas décadas, se ha producido una ampliación y diversificación de su propia perspectiva y se han ido convirtiendo en una herramienta potente y eficaz en la interpretación y, en su caso, resolución de multitud de problemas, fenómenos y situaciones de todo tipo, posibilitando, además, la creación y utilización de modelos aplicables a otras ciencias.

Las Matemáticas están cada vez más introducidas en nuestro mundo actual, tanto desde la perspectiva anteriormente analizada, como en su papel de lenguaje aplicable a gran cantidad de situaciones de la vida, ya sea en el entorno cotidiano o en el profesional. En los medios de comunicación, las publicaciones, especializadas o de carácter divulgativo, de carácter social o económico, incluso en los anuncios, el lenguaje matemático –gráficas, tablas, porcentajes, etc.– está presente de forma notoria. Se puede afirmar que esto se debe, fundamentalmente, a su carácter de lenguaje funcional y, en consonancia, a su capacidad de utilización instrumental.

Por todo esto es por lo que, en una sociedad cada vez más desarrollada, las Matemáticas tienen una incidencia relevante en la comprensión, interpretación y desarrollo de nuestro mundo. Es en este sentido en el que se puede afirmar que las Matemáticas están en la base de cualquier contexto social, científico y tecnológico.

Todo lo anteriormente dicho tiene que tener una gran influencia en el momento en que nos planteemos su enseñanza y aprendizaje. Pasada ya la etapa de educación obligatoria, el Bachillerato debe ser el «espacio» en el que nuestros estudiantes se enfrenten al aprendizaje de las Matemáticas de una manera más formal. Pero la adquisición de los conocimientos matemáticos no puede reducirse a la posesión de sus resultados finales, también debe estar siempre presente el *saber hacer Matemáticas* que va a permitir su aplicabilidad en las distintas situaciones a las que los estudiantes de Bachillerato se tendrán que enfrentar en su futuro profesional.

Es ese *saber hacer Matemáticas* el que va a potenciar su aplicabilidad en muchas de las situaciones de la actividad cotidiana, social y profesional. *Las Matemáticas sólo tendrán sentido para los estudiantes si éstos llegan a asimilar sus conceptos y a entender sus significados, aplicaciones e interpretaciones.*

*Las Matemáticas  
están cada vez  
más introducidas  
en nuestro  
mundo actual,  
tanto desde  
la perspectiva  
anteriormente  
analizada, como  
en su papel de  
lenguaje aplicable  
a gran cantidad  
de situaciones  
de la vida, ya sea  
en el entorno  
cotidiano o en  
el profesional.*

Por otra parte, la incorporación generalizada de nuevas tecnologías en la realidad social y productiva introduce nuevos instrumentos y recursos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y, al mismo tiempo, crea la necesidad de desarrollar en el alumnado una actitud abierta hacia su utilización como herramientas imprescindibles en sus futuras actividades profesionales. Este hecho hace totalmente necesario la utilización de estos medios a lo largo del Bachillerato, creando en cada estudiante una actitud crítica hacia los mismos y potenciando su capacidad para utilizarlos, de manera correcta, cuando la situación estudiada lo haga necesario.

## Las Matemáticas en las distintas modalidades del Bachillerato

En el Bachillerato existen distintas modalidades y en todas ellas las Matemáticas están presentes, aunque con finalidades y contenidos diferentes. Es, por tanto, importante analizar las repercusiones que, las modalidades en las que se encuadran, tienen en la enseñanza y aprendizaje de las materias de Matemáticas.

En las modalidades de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología del Bachillerato tenemos las materias de «Matemáticas». Su currículo es el mismo para ambas modalidades y estos se agrupan en cinco bloques para el primer curso: Estadística y Probabilidad, Geometría, Funciones, Aritmética y Álgebra y Resolución de Problemas, y en tres para el segundo: Álgebra lineal, Análisis y Geometría.

*Por un lado, tanto en una como en otra modalidad, las Matemáticas deben contribuir al desarrollo de las estructuras mentales de los estudiantes y a la adquisición de conceptos más formales y herramientas más potentes. Así mismo, es preciso dotar a las Matemáticas de un respaldo teórico que de solidez a la adquisición de los conceptos y las técnicas que se empleen.*

Por otro lado, la resolución de problemas debe ser uno de los aspectos en los que se tiene que profundizar en mayor medida, sin limitarse a un simple adiestramiento, pues ello puede proporcionar técnicas y estrategias útiles a los estudiantes, para enfrentarse a situaciones nuevas.

Por último, deben proporcionar una serie de procedimientos y estrategias básicas para otras materias de estas modalidades —es en esta vertiente utilitaria donde más claramente se puede observar su relación con ellas, pues van a servir tanto como herramienta, como de apoyo teórico a las mismas— y para su futura actividad científica, técnica o profesional. Su componente instrumental tiene que contemplar las necesidades derivadas de las distintas materias que cursan los estudiantes de cada una de estas modalidades.<sup>1</sup> Es por esto, por lo que resulta preciso establecer diferencias, en su programación y en su desarrollo en el aula, entre estas materias dependiendo de la modalidad que se imparta.

En la modalidad de Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, se sitúan las materias de «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales». Sus contenidos se agrupan en cuatro bloques para el primer curso: Aritmética y Álgebra, Funciones, Estadística y Probabilidad y Resolución de problemas, y tres para el segundo: Álgebra, Análisis y Estadística y Probabilidad.

Estas materias tienen un marcado carácter de aplicación —como herramienta de apoyo instrumental y teórico— a la resolución y toma de decisiones de problemas del ámbito de las Ciencias Sociales. Es por ello por lo que las Matemáticas en esta modalidad deben servir para que los estudiantes desarrollen capacidades relacionadas con su aplicabilidad al estudio, análisis y discusión de fenómenos de tipo social y económico.<sup>2</sup> En este sentido la Estadística y la Resolución de problemas, de todo tipo, son partes fundamentales en sus contenidos.

El mayor desarrollo conceptual y procedimental de las otras materias que configuran la modalidad —Economía, Geografía, Historia del mundo contemporáneo, etc.—, hace que éstas necesiten de la capacidad de análisis y modelización de las Matemáticas para el estudio e interpretación de datos e informaciones de todo

tipo que se presentan en el desarrollo de dichas materias. Las «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales» deben, por tanto, proporcionar los conocimientos y destrezas cognitivas necesarias para desenvolverse con eficacia en una sociedad en continuo desarrollo, que demanda y utiliza, de forma creciente, lenguajes, conceptos y procedimientos matemáticos. En este sentido, el desarrollo de estas materias debe estar profundamente influido por el carácter de aplicación a las Ciencias Sociales.

En la modalidad de Artes del Bachillerato, se encuentra la materia optativa de «Matemáticas de la Forma». Sus contenidos se agrupan en cuatro bloques: Elementos y movimientos en el plano, Elementos y movimientos en el espacio, Curvas y superficies y Proporciones y medidas.

El conocimiento de los elementos matemáticos presentes en las formas y proporciones no solamente permite su comprensión, sino también su utilización en diversos aspectos del arte.<sup>3</sup> Desde la antigüedad, el ser humano ha observado las formas geométricas en la naturaleza y las ha utilizado en sus representaciones artísticas, de tal manera que los elementos geométricos los encontramos en multitud de formas creadas por él —decoraciones de vasijas, frisos, construcciones arquitectónicas, etc.—. Los hombres y las mujeres de todas las épocas han estado interesados en el análisis y representación de las formas, así como por su proporción —desde las pinturas rupestres, los adornos espirales en la cerámica primitiva o en la decoración del palacio de Knossos, hasta las expresiones artísticas más modernas—. La forma y el tamaño, su análisis, interpretación y manipulación, no es el único componente del planteamiento artístico, pero sí es una de las bases de su estructura.

Se puede, por tanto, afirmar que el medio artístico requiere un cierto grado de conocimiento y destreza en el manejo de los elementos y propiedades matemáticas de las formas y los tamaños y, en el contexto de la modalidad de Artes del Bachillerato, es conveniente la existencia de un espacio para que estos elementos y propiedades puedan ser estudiados. Este espacio es el que debe cubrir la materia «Matemáticas de la Forma».

Una de las características fundamentales de esta materia se deriva del lugar que ocupa en esta modalidad. Las «Matemáticas de la Forma» tienen un marcado carácter de apoyo en la construcción, análisis e interpretación de las formas artísticas, esto es, ha de proporcionar una serie de técnicas y estrategias básicas, para su aplicación en otras materias de esta modalidad. Los contenidos matemáticos, y su desarrollo y estudio, deben estar siempre en función de su aplicabilidad en el mundo artístico. Es, por tanto, aconsejable partir siempre de situaciones concretas y contextualizadas que pongan de relieve los aspectos matemáticos de la creación artística con la finalidad de entenderla mejor y poder utilizarlos con este fin.

Por otro lado, su carácter de materia optativa va a permitir al profesorado adaptar el desarrollo de los contenidos a las necesidades y expectativas de los estudiantes que la cursen —al no estar incluida en las Pruebas de Acceso a la Universidad permite un tratamiento más flexible de los contenidos, pudiendo poner el énfasis en aquellas facetas del aprendizaje más próximas a las necesidades de los estudiantes—.

1 Las necesidades de aparato matemático de las materias de Tecnología Industrial I y II son diferentes de las de Biología y Geología o Ciencias de la Tierra y del Medio Ambiente, por ejemplo. Esto podría condicionar el grado de desarrollo de algunos de los contenidos de la materia Matemáticas I de primer curso

2 Capacidades como: la curiosidad ante situaciones nuevas, el interés por investigar a fondo una situación, la actitud crítica ante informaciones y apreciaciones intuitivas, la necesidad de comprobar las soluciones en el marco del problema, la mentalidad abierta y receptiva a las ideas de los demás, la confianza en las propias capacidades para abordar situaciones nuevas y la madurez y reflexión ante la toma de decisiones.

3 Por ejemplo, el estudio de la perspectiva conlleva un análisis de los objetos, respecto a su tamaño y su forma, que es imprescindible para su representación plástica. También se puede observar este análisis y sus aspectos matemáticos en obras concretas, así por ejemplo, en el modelo de hombre de Leonardo da Vinci la distancia desde el ombligo a los pies está en proporción áurea con la altura del cuerpo humano, y Le Corbusier también utilizó esta proporción en sus construcciones y proyectos arquitectónicos.

## **Análisis de algunos de los aspectos más significativos de los contenidos**

No es el objetivo de este artículo hacer un análisis exhaustivo de los contenidos de las diferentes materias de Matemáticas en las modalidades de Bachillerato, pero sí merece la pena hacer algunas consideraciones sobre los aspectos más significativos de la enseñanza y aprendizaje de algunos de ellos (no de todos) enmarcados en su modalidad.

Dentro de las modalidades de **Ciencias de la Naturaleza y de la Salud** y de **Tecnología**, son varios los contenidos sobre los que hay que reflexionar:

### **Los números**

Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de las matemáticas se encuentra en relación con el uso y sentido de los números. (En el primer curso de estas modalidades de Bachillerato el campo numérico se completa con el estudio de los números reales y complejos.)

Hay que tener en cuenta que en la ESO se ha iniciado este estudio con la utilización de los números racionales en el contexto de situaciones que necesiten de ellos –cálculo de medidas geométricas, parámetros estadísticos, etc.–, llegando a la utilización, muy somera, de los números irracionales en algunas ocasiones –en Geometría, por ejemplo–. Por tanto, puede ser útil partir de situaciones ya estudiadas en la anterior etapa educativa para introducir, a los estudiantes, en la necesidad y utilización de los números reales, mediante aproximaciones acordes a la situación que se estudia y controlando el margen de error que se comete.

La abstracción que conlleva el estudio de los números complejos es una fuente de errores en su aprendizaje por parte de los estudiantes –en muchas ocasiones estos se limitan a memorizar una serie de reglas que les permiten realizar los cálculos requeridos sin ser conscientes del sentido de estos números–. Por ello puede ser conveniente presentar este tipo de números a partir de ecuaciones de segundo grado que no tengan solución real, así como relacionar su forma binómica y polar con las coordenadas cartesianas y polares del plano.

La gran mayoría de los estudiantes de estas opciones de Bachillerato deberían haber cursado la opción B de Matemáticas en 4.º curso de ESO. (Lo deseable es que fueran todos.) Aun así, en el campo numérico pueden darse diferencias entre los estudiantes de primer curso en cuanto a su competencia numérica. –La utilización de la calculadora, de una forma crítica y razonada, puede permitir acercarse a la comprensión numérica y evitar bloqueos en otras partes de las Matemáticas que necesiten de las operaciones numéricas para su estudio y aprendizaje –.

*Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de las matemáticas se encuentra en relación con el uso y sentido de los números.*

*El lenguaje gráfico es, en la actualidad, un recurso muy importante para la transmisión de la información...*

## **Las funciones**

El concepto de función es uno de los conceptos básicos en las materias de «Matemáticas» y, al mismo tiempo, uno de los más difíciles de adquirir por los estudiantes de este nivel educativo, pues se mezclan en él aspectos complejos en sí mismos como su simbolismo, su representación, sus aplicaciones a otros campos –física, química, biología, tecnología, etc.– y sus propiedades locales y globales, entre otros. A lo largo de la historia, este concepto se ha ido desarrollando a partir del estudio de fenómenos variables, fundamentalmente derivados del estudio de problemas de movimiento, y ha sido expresado en distintos lenguajes –verbal, gráfico, algebraico, etc.–. Es, por tanto, preciso estudiar este concepto desde distintas facetas, utilizando distintos lenguajes y en distintas situaciones para poder conseguir una aproximación significativa al sentido de las funciones.

En la ESO se han realizado estudios, desde un punto de vista intuitivo y gráfico –mediante la utilización de descripciones verbales, tablas y gráficas–, de fenómenos funcionales relacionados con otras áreas de conocimiento –las Ciencias de la Naturaleza, las Ciencias Sociales, etc.– y esto permite que los estudiantes hayan alcanzado una primera aproximación al concepto de función. Es a partir de esta situación desde la que debe comenzarse el estudio de funciones en el Bachillerato, en este sentido es muy importante que los estudiantes relacionen, con destreza, las familias más comunes de funciones con su gráfica, entendiendo el significado de sus características más importantes. El lenguaje gráfico es, en la actualidad, un recurso muy importante para la transmisión de la información y el desarrollo de las capacidades básicas de este lenguaje –lectura e interpretación– es fundamental en este nivel educativo.

La dificultad de visualización de la representación gráfica de una función puede salvarse con la utilización de las calculadoras gráficas y los programas informáticos. Bien utilizando un solo

ordenador en el aula –mediante la proyección de la pantalla–, con el uso de los ordenadores por los estudiantes en un aula especial o mediante la utilización de calculadoras gráficas en el aula, estos pueden familiarizarse con la forma de las gráficas de las funciones elementales y su modificación en función de sus parámetros. Para que un estudiante pueda comprender el significado de una asíntota, por ejemplo, es preciso que la visualice en distintas funciones y tenga un sentido concreto para la situación que representa.

Los conceptos de límite y derivada constituyen otro de los problemas didácticos en las matemáticas en este nivel educativo. Si el concepto de función es, como se acaba de decir, complejo y difícil para los estudiantes, más complicado les resultan aquellos, pues, además de su dificultad intrínseca, se sustentan en este. Así resulta que uno de los primeros problemas con que un alumno o alumna se encuentra, en el momento de aproximarse al concepto de límite, es la idea del infinito y de una cantidad infinitesimal, al que se añade el problema derivado de no tener asentado el concepto de función. De nuevo hay que tener en cuenta que en la ESO se ha realizado una aproximación intuitiva a la idea de límite y es a partir de esta situación de la que se debe partir.

Para introducir el concepto de derivada de una función en un punto y, a partir de él, el de función derivada, parece conveniente tratar el tema de la tasa media de variación para llegar a la tasa instantánea de variación. El apoyo en el estudio de velocidades, medias e instantáneas, es un recurso interesante, pues es próximo a los estudiantes y refuerza, además, la idea de límite.

### **El cálculo de derivadas y primitivas**

La finalidad del Análisis en estas modalidades de Bachillerato está en la gradual adquisición de los conceptos implicados y su aplicación en las situa-

ciones que así lo requieran, *el cálculo de derivadas y primitivas está en función de su aplicación a la interpretación de los sucesos funcionales que se estudian.*

El creciente desarrollo de los medios informáticos y su posibilidad de integrarlos en el proceso de enseñanza lleva implícito un cambio significativo en el enfoque del estudio del cálculo de derivadas y primitivas. La existencia de calculadoras gráficas y software informático, que permiten calcular, de una manera sencilla, derivadas e integrales complicadas, ofrece la posibilidad de que el énfasis se sitúe en el sentido del cálculo más que en el cálculo en sí mismo. De todas formas, el desarrollo de destrezas de cálculo es importante en este nivel educativo, pero se debe limitar a aquellos casos elementales que van a permitir una aproximación, desde otra perspectiva, al concepto.

Es evidente que es fundamental que los estudiantes de este nivel educativo sepan calcular con destreza derivadas y primitivas de funciones sencillas con técnicas elementales, pero queda fuera de los objetivos de estas materias, desarrollar destrezas sofisticadas de cálculo cuando, hoy en día en nuestra sociedad –y en un futuro inmediato es presumible que más aún–, el desarrollo de los instrumentos informáticos y de las calculadoras permite su utilización en el aula, posibilitando que el esfuerzo de enseñanza y aprendizaje se desplace de la adquisición de técnicas y algoritmos complicados de cálculo, a la comprensión significativa y aplicación práctica de los conceptos matemáticos implicados.

### **La Geometría**

Los problemas más frecuentes en la enseñanza de la geometría analítica vienen derivados, en la mayor parte de los casos, de la falta de visualización de los problemas geométricos que, generalmente, se plantean desde una perspectiva algebraica. La disociación entre la geometría sintética y la algebraica conlleva que aquellos estudiantes menos capacitados en el razonamiento abstracto, se pierdan en un mundo de fórmulas y ecuaciones en el que se manejan según ciertas reglas independientes de su significado geométrico.

El trabajo geométrico realizado en la ESO puede servir de base para que el tratamiento algebraico de la Geometría esté más próximo a las situaciones de aprendizaje de los estudiantes de estas modalidades de Bachillerato. Es a partir de estos aprendizajes desde donde se puede fundamentar el contenido geométrico de las Matemáticas en estas modalidades del Bachillerato y, por tanto, es muy importante que la visualización de las formas geométricas esté presente en todo el proceso de enseñanza; la utilización de programas informáticos puede ser muy importante para esta visualización.

*Los problemas más frecuentes en la enseñanza de la geometría analítica vienen derivados, en la mayor parte de los casos, de la falta de visualización de los problemas geométricos que, generalmente, se plantean desde una perspectiva algebraica.*

En estas modalidades de Bachillerato se tiene que partir de un enfoque geométrico de la trigonometría y del estudio analítico de la geometría del plano, que debe desarrollarse de forma creativa e imaginativa, superando la presentación inicial clásica de forma algebraica. Hay que tener en cuenta que un estudio exclusivo de las ecuaciones de la recta en el plano da soluciones a muy pocos problemas geométricos de la Ciencia y la Tecnología actuales.

No hay que tomar partido por la enseñanza de una geometría sintética o una geometría analítica, ambas pueden y deben complementarse. La interacción entre la geometría y el álgebra contribuye a reforzar la capacidad de los estudiantes para analizar desde distintos puntos de vista un mismo problema geométrico, y para visualizar el significado de determinadas expresiones algebraicas –ecuaciones/curvas, matrices/transformaciones geométricas, etc.–. Así, en el tratamiento de las cónicas, estas dos visiones son fundamentales; en el estudio de los cuerpos geométricos –esfera y poliedros– y sus secciones se puede, con la utilización del ordenador, completar su análisis; para estudiar secciones de superficies mediante coordenadas cartesianas o polares se puede ampliar el campo de interpretación, desbordando el estrecho margen de un enfoque exclusivamente algebraico que sólo posibilita, a este nivel, el estudio de formas lineales.

El tratamiento de cuerpos y superficies proporciona a los estudiantes una visión más global del espacio que el mero estudio de rectas y planos. Para el estudio de espirales y hélices, envolventes de rectas y curvas –la cicloide, la cardiode, etc.– y de superficies de revolución de rectas y cónicas es necesario recordar los distintos tipos de coordenadas para representar en el plano y en el espacio. Puede resultar interesante partir del visionado de vídeos y diapositivas de formas arquitectónicas y naturales en las que aparezcan curvas y superficies sencillas –arcos de puentes, escaleras de caracol, caracoles, chimeneas, plantas trepadoras, etc.–.

En las materias de «Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales», de la modalidad de **Humanidades y Ciencias Sociales**, analicemos los siguientes:

### **Los números y el cálculo**

Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de las Matemáticas, y más concretamente en esta modalidad de Bachillerato, se encuentra en relación con el uso de los números y las operaciones con ellos. En este sentido es conveniente partir de situaciones concretas para la introducción de los números irracionales. A partir de la existencia de medidas y de ecuaciones cuyas soluciones no pueden ser expresadas exactamente con números racio-

*No hay que tomar  
partido por  
la enseñanza  
de una geometría  
sintética  
o una geometría  
analítica,  
ambas pueden  
y deben  
complementarse.*

nales se puede introducir la necesidad del número real y su utilización mediante las aproximaciones y estimaciones acordes a la situación que se estudia.

En el campo numérico pueden darse grandes diferencias entre los estudiantes de primer curso y es preciso prestar especial atención a este tema pues la competencia numérica incide directamente en todos los contenidos de esta materia. Por lo tanto, será preciso disponer de una serie de actividades de refuerzo y recuperación para aquellos estudiantes con dificultades numéricas. Estas actividades deben estar enmarcadas en contextos que no presenten dificultades añadidas y pueden ser extraídas de otras ya trabajadas en la ESO. Es muy importante que tales actividades no estén descontextualizadas –no parece conveniente presentar hojas de operaciones numéricas sin ningún significado–, pues no se pretende ejercitarles en las operaciones con estos números, sino que se familiaricen con ellos y entiendan su significado. Además, este tipo de actividades totalmente descontextualizadas pueden dificultar aún más su aprendizaje a estos estudiantes con problemas de competencia numérica.

La utilización de la calculadora, de una forma crítica y razonada, va a ser un instrumento muy importante en estas materias, pues, por un lado, va a posibilitar que los estudiantes aumenten su comprensión numérica y, por otro, va a permitir evitar bloqueos en otros campos de las Matemáticas que necesiten de las operaciones numéricas para su estudio y aprendizaje.

### **El lenguaje algebraico**

Uno de los problemas que, en general, se presentan en la enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles educativos es el relativo al aprendizaje del lenguaje algebraico. Es su propia cualidad de lenguaje la que proporciona una de las mayores dificultades debido fundamentalmente a su grado de abstracción, la utilización de símbolos para

representarlo, sus *características sintácticas* –convenios de notación, signos de operación, utilización de paréntesis, sentido y uso de las letras, etc.–, sus reglas de utilización, sus diferencias con el lenguaje aritmético, etc.

Precisamente el papel de las Matemáticas en esta modalidad de Bachillerato, como lenguaje de comunicación aplicable a gran cantidad de situaciones de la vida, es el que hace especialmente importante la enseñanza y aprendizaje de las estructuras básicas del lenguaje algebraico en esta etapa educativa, y uno de los aspectos que habrá que reforzar es *la traducción de situaciones y problemas en lenguaje cotidiano al lenguaje algebraico*. En el tratamiento de problemas y situaciones del ámbito de las Ciencias Sociales es donde es especialmente importante la *traducción* al lenguaje matemático para proceder a la búsqueda de soluciones o toma de decisiones acordes con ellos –la transcripción de problemas reales, expresados en lenguaje usual, al lenguaje cotidiano está recogido en los criterios de evaluación de ambos cursos–.

La posibilidad de utilizar una sola letra para representar y operar, de manera sencilla, un conjunto de valores numéricos es una de las principales características que dan utilidad al álgebra y, a su vez, proporcionan un grado alto de complejidad a su aprendizaje. En muchas ocasiones la dificultad está derivada de que los estudiantes no llegan a comprender la utilización de los símbolos algebraicos porque no ven su relación con lo que representan en las situaciones que se estudian. Esto se debe, en gran medida, a que se han estudiado de una manera descontextualizada –lo que lleva a muchos estudiantes a aprenderse de memoria un conjunto de reglas y algoritmos de resolución, sin entender su sentido ni su significado– y, en otras ocasiones, a que las situaciones de partida no son lo suficientemente adecuadas como para llegar a necesitar su utilización. La doble vinculación entre la situación concreta que se analiza y su expresión algebrai-

*Tanto la resolución de problemas de ecuaciones, como en el estudio de las matrices, sus operaciones, propiedades y aplicaciones, y en la programación lineal, se deben partir de situaciones concretas del ámbito de las Ciencias Sociales...*

ca, necesita que se dedique un tiempo importante a su aprendizaje que permita que los estudiantes interioricen el sentido de las letras –como parámetros, variables, incógnitas, etc.– y los símbolos, como base para el tratamiento algebraico de otros contenidos de estas materias en el Bachillerato.

Durante la ESO se ha debido comenzar la introducción al álgebra y, más concretamente, a su utilización como lenguaje de comunicación e interpretación de la realidad, pero en un grado de profundización básico. Además, hay que tener en cuenta que es en la opción B del área de Matemáticas en cuarto curso –donde se desarrolla, con más profundidad, el lenguaje algebraico– y no se puede dar por supuesto que todos los estudiantes hayan cursado esta opción, más bien todo lo contrario, con lo cual el grado de diversidad en estos puede ser grande.

En este sentido parece conveniente comenzar el primer curso con la resolución de problemas –en contextos derivados de las Ciencias Sociales– que den lugar a ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales –con diferentes grados de complejidad para atender a la diversidad– y, a su vez, permitan el tratamiento de los aspectos básicos del lenguaje algebraico –como la naturaleza y significado de los símbolos y las letras–.

La contextualización es un elemento fundamental en la enseñanza del álgebra en los dos cursos de esta modalidad de Bachillerato. Tanto la resolución de problemas de ecuaciones, como en el estudio de las matrices, sus operaciones, propiedades y aplicaciones, y en la programación lineal, se deben partir de situaciones concretas del ámbito de las Ciencias Sociales –no se puede olvidar el carácter de aplicación a las Ciencias Sociales de estas materias– en las que los alumnos y alumnas encuentren el sentido (en el problema que se estudia) de la utilización de los elementos algebraicos que intervienen.

### **La inferencia estadística**

La Estadística inferencial es una de las partes de la Matemáticas que más aplicabilidad tiene en el campo de la investigación social, por lo tanto, en esta modalidad de Bachillerato es fundamental su estudio. Cuando se quiere realizar una investigación sobre unas determinadas características de una población es preciso recoger la información de cada uno de sus elementos, hecho no siempre posible. La necesidad de extraer muestras representativas de una población, de determinar su tamaño, inferir a toda la población los datos obtenidos con un cierto nivel de confianza, validar hipótesis sobre las características que se están estudiando y de tomar decisiones significativas, son algunos de los aspectos fundamentales en toda investigación estadística y, por tanto, deben introducirse en las Matemáticas de esta modalidad de Bachillerato.

En la ESO los estudiantes han realizado el tratamiento estadístico unidimensional de datos de una manera bastante completa, y a partir de ello se debe presentar el estudio de la inferencia estadística en esta modalidad de Bachillerato. Por otra parte, por todo lo dicho anteriormente, es fundamental que los problemas e investigaciones que se planteen debe estar siempre contextualizados.

Una de las mayores dificultades que los estudiantes pueden encontrar en el aprendizaje de la estadística inferencial es la complejidad de los cálculos de determinados parámetros estadísticos, por lo que es imprescindible la utilización de calculadoras estadísticas, gráficas o programas de ordenador –lo más importante en esta materia es que los alumnos y alumnas empleen la inferencia estadística para tomar decisiones, comprender los procesos y contrastar hipótesis–.

Otro de los problemas que se encuentran los estudiantes es el hecho de que las medias de cada muestra constituyen una nueva variable aleatoria que tiene su propia media y su propia varianza. Para mitigar este problema es preciso hacer reflexionar a estos mediante el estudio de situaciones concretas diferentes viendo el significado de cada estadístico y de cada parámetro. Una posible opción es el estudio de una situación que pueda dar lugar a un estudio completo. Este tipo de problema permite un desarrollo amplio de los contenidos de inferencia estadística de esta materia.

Un método de trabajo podría ser ir desarrollando los contenidos al hilo del problema –siendo este problema el eje del desarrollo del tema– deteniéndose, cuando sea necesario, para afianzar los conceptos implicados. Otra forma de trabajo sería plantearlo al final de una unidad didáctica que desarrolle estos contenidos, como investigación global que resuma todo el tema trabajado en el aula.

Sea cual fuere el método elegido, en el desarrollo de un problema de este tipo, se han de seleccionar varias muestras del mismo número de individuos, estudiando el tipo de muestra que se elige, los estratos utilizados, su tamaño y las consecuencias que se deduzcan de ello; posteriormente efectuar una estimación sobre el total de la población analizando los estadísticos y los parámetros que intervienen. Por último, se ha de comprobar que las medias de cada muestra constituyen una nueva variable aleatoria, tal que su media coincide aproximadamente con la calculada y su desviación típica con la anterior dividida por la raíz del número de elementos de cada muestra. A partir de ello se puede plantear la aceptación o rechazo de una determinada altura media de todos los estudiantes con unos determinados niveles de significación. Los estudiantes deberán definir la hipótesis nula y la hipótesis alternativa y aceptar o rechazarla con un nivel de significación determinado (probabilidad de rechazar la hipótesis nula) a partir del análisis de la muestra, además, debe-

*La Estadística inferencial es una de las partes de la Matemáticas que más aplicabilidad tiene en el campo de la investigación social, por lo tanto, en esta modalidad de Bachillerato es fundamental su estudio.*

rán encontrar la región de aceptación y calcular la probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo esta cierta (error de tipo I) o aceptarla siendo falsa (error de tipo II).

Finalmente, en la materia de «Matemáticas de la Forma» de la modalidad de **Artes** veamos los siguientes:

### **La medida**

Uno de los problemas más generales en el aprendizaje de los contenidos de la materia «Matemáticas de la Forma» se encuentra en relación con la utilización de los números para medir. En todo estudio de formas geométricas es fundamental el estudio de sus medidas –longitud, área y volumen– y en el problema de la medida hay dos aspectos, fundamentales, intrínsecos en este tema: contar y comparar.

Cuando, para realizar una construcción geométrica, se utiliza el compás para trasladar una medida un número determinado de veces, o cuando para construir un exágono regular se utiliza la medida del radio para construir los lados, se están utilizando propiedades geométricas importantes y es básico ser conscientes de ello.

Para establecer la medida directa de una forma geométrica es preciso establecer una comparación entre ella y un patrón establecido, que tendrá una cierta graduación de tal manera que nos permita establecer la medida del objeto con la precisión que necesitemos. En la ESO se han desarrollado una serie de contenidos básicos de la medida –unidades de medida, sistema métrico decimal, medida de ángulos, utilización de regla, compás y portaángulos como instrumentos de medida, estimación, etc.– que tiene que servir de base para el desarrollo de los contenidos relativos a esta tema. Es a partir de ellos desde donde se deben estudiar las propiedades métricas más importantes para el análisis y creación de formas geométricas. La utilización y estudio de las medidas antropométricas puede ser



otro punto de partida para el estudio y comprensión del problema de la medida.

Sin embargo, uno de los aspectos más problemáticos se deriva del tipo de magnitud –lineales, cuadráticas o cúbicas– del objeto que hay que medir, esto es, uno de los problemas de aprendizaje es la no distinción entre longitudes, áreas y volúmenes. Un ejemplo claro está en el problema que se les plantea a los alumnos y alumnas en la distinción entre la variación del perímetro y del área de una figura al realizar una transformación no isométrica en ella –por ejemplo, la variación del área de un rombo al modificar sus ángulos sin modificar la medida de los lados–. Este problema se acentúa en el caso del volumen. La dificultad de los conceptos de longitud, área y volumen, debida en parte a su grado de abstracción y a su habitual representación es la raíz de este problema.<sup>4</sup>

Este problema se plantea ya en la ESO, pero puede seguir apareciendo en el Bachillerato y, además, puede haber una diversidad amplia de posibles errores entre los estudiantes. Por esto es importante la realización de una evaluación inicial que facilite un diagnóstico de este problema que permitirá al profesor o profesora realizar un tratamiento acorde a las circunstancias. La utilización de materiales manipulables –varillas, cartón, etc.– y de programas informáticos –DAO, Cabri, etc.– puede ser muy útil para alumnos y alumnas con dificultades en el aprendizaje de estos conceptos.

### **La proporcionalidad**

Las relaciones de proporcionalidad entre objetos geométricos es otro de los conceptos más difíciles que se han trabajado en geometría en la ESO. A la dificultad de la medida se le une la de la relación entre esas medidas.

Las relaciones de proporcionalidad las encontramos en multitud de representaciones artísticas –por ejemplo en la perspectiva esta incluido, de una forma

*Muchos de los procedimientos empleados en la creación artística están fundamentados en el concepto de proporción...*

intrínseca, el concepto de proporcionalidad– y es básico desarrollar este concepto. Muchos de los procedimientos empleados en la creación artística están fundamentados en el concepto de proporción<sup>5</sup> y, en este sentido, es muy importante que los estudiantes, al realizar estos procedimientos, sean conscientes de ello. Para lograr esta conciencia es necesario que se realicen actividades que pongan de manifiesto la proporcionalidad y ésta se calcule por diversos métodos, estudiando el margen de error de cada uno de ellos. La utilización de vídeos, transparencias y programas informáticos va a permitir una visualización más fácil de la proporcionalidad entre las formas, sobre todo en el espacio, y su empleo cotidiano en el aula es un recurso metodológico importante para el tratamiento de este tema.

El análisis de las relaciones de proporcionalidad entre superficies o entre volúmenes resulta más complicado para los estudiantes –en la ESO ya se ha tratado el tema de la proporcionalidad, pero sobre todo en su vertiente lineal–, la dificultad que representa el estudio y análisis de la semejanza entre figuras se acrecienta al tratar las áreas –por ejemplo en la construcción de un polígono semejante, de área doble, a otro dado– y mucho más al trabajar volúmenes.

El problema básico es que la proporcionalidad de áreas y de volúmenes deja de ser lineal. Es una constante en la literatura fantástica las variaciones sobre el tamaño de los objetos y de las personas –por ejemplo: *Alicia en el País de las maravillas* de Lewis Carroll o *Los viajes de Gulliver* de J. Swift– y ello es debido a la relativa sorpresa que producen los resultados reales que no se corresponden con los que se pueden pensar vulgarmente que parecería lógico que ocurriera.

La dificultad estriba en que se aplican proporciones lineales en el cálculo proporcional de las medidas de volumen, además del cálculo de las medidas mismas, y esta concepción está muy extendida entre los estudiantes. Es preciso, por tanto, realizar actividades de este tipo que desmonten estos preconceptos erróneos, al mismo tiempo que les resulten motivadoras para trabajar este tema.

### **Las isometrías en el plano**

Los movimientos isométricos de figuras planas se han estudiado ya en la ESO, sin embargo, existen dificultades en el análisis y elaboración de representaciones artísticas en las que existen estos movimientos. En muchas ocasiones el problema radica en la visualización de los movimientos de las formas geométricas incluidas en una representación.

El problema se complica cuando en la representación artística existen deslizamientos –composición de simetría axial y traslación paralela al eje de simetría–. La simetría

4 Cuando se representa un polígono suele dibujarse exclusivamente sus lados y no se suele diferenciar, al referirnos a él, el interior (superficie) del contorno (perímetro), este problema aparece también entre circunferencia y círculo (su dibujo es el mismo) y mucho más, en las formas espaciales, como en los poliedros con relación a las aristas, los lados y el volumen.

5 En la utilización del lápiz con el brazo extendido para trasladar al papel una medida lejana de forma proporcional, se está utilizando el Teorema de Thales.

es la isometría plana que presenta más problemas de aprendizaje en los alumnos y alumnas de este nivel educativo. La dificultad estriba en que para realizar una simetría con una figura plana, es preciso salirse del plano para visualizar el movimiento. En la ESO ya se ha estudiado este movimiento y es posible que se hayan utilizado espejos y materiales manipulables para ello, sin embargo, en su utilización para el análisis de frisos y mosaicos, así como para su creación, va a seguir planteando dificultades a los estudiantes.

Para el desarrollo de la capacidad de visión espacial, y más concretamente del aspecto dinámico de las formas, es muy conveniente la utilización de los medios audiovisuales –vídeos, diapositivas, transparencias–, así como algunos programas informáticos específicos de este tema. La visualización de las isometrías en las representaciones artísticas es fundamental para potenciar el aprendizaje significativo de estos contenidos.

Otro aspecto importante, que conlleva una seria dificultad en su aprendizaje, es la creación de rosáceas, frisos y mosaicos por parte de los alumnos y alumnas que cursan esta materia. Para ello es positivo el estudio y creación de diferentes motivos mínimos a partir de los cuales, realizando las isometrías convenientes, se pueden elaborar las rosáceas, mosaicos o frisos que se deseen. El color es otro de los elementos que hay que considerar en el estudio de los mosaicos y las representaciones que contienen isometrías. Por un lado, la utilización del color va a permitir obtener diferentes mosaicos a partir del mismo diseño, por otra parte, en el análisis de representaciones, permite identificar módulos dentro de las mismas.

## **El espacio**

A pesar de que los estudiantes se desenvuelven en un mundo tridimensional carecen, en muchos casos, de intuiciones espaciales. Este problema, bastante generalizado, se basa en la dificultad para representar las formas espaciales en el plano.

Un elemento metodológico muy importante para conseguir desarrollar la capacidad de visión espacial es la utilización de las nuevas tecnologías, tanto de los medios audiovisuales como de distintos juegos y programas informáticos tridimensionales, que simulan y permiten la visualización de las formas espaciales mediante una representación en el plano, potenciando el desarrollo de la abstracción espacial de las propiedades geométricas de las formas.

Otro de los recursos importantes, para el trabajo con formas espaciales, es la utilización de materiales manipulables. A partir del manejo de cuerpos sólidos, sus cortes y truncamientos, se pueden identificar y analizar propiedades importantes de las formas espaciales.

*A pesar de que  
los estudiantes  
se desenvuelven  
en un mundo  
tridimensional  
carecen,  
en muchos casos,  
de intuiciones  
espaciales.*

**Javier Brihuega**  
Sociedad Madrileña de  
Profesores de Matemáticas  
Emma Castelnovo

Para el estudio de las isometrías en el espacio los programas y juegos informáticos espaciales van a cumplir un papel metodológico importante –por ejemplo el Tetris espacial, aparte de su aspecto lúdico, implica un desarrollo importante de la capacidad de visualizar distintas isometrías de una forma espacial concreta–. De igual modo, para la identificación y análisis de curvas en el espacio los programas informáticos permiten su visualización de una manera fácil y rápida –si se utilizan programas informáticos, como el Derive, es conveniente que sea el profesor o profesora quien maneje el ordenador, pues la finalidad es la visualización de las curvas espaciales y no su estudio analítico–.

## **Comentarios finales**

Con estas observaciones, tan sólo he pretendido poner de manifiesto algunas de las características más importantes de las Matemáticas en las distintas modalidades del Bachillerato LOGSE, así como, sobre su tratamiento didáctico.

La principal finalidad de este artículo es potenciar el debate sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en el Bachillerato. En unos momentos en los que el desarrollo científico y tecnológico es cada vez más rápido, debemos hacer una profunda reflexión sobre distintos métodos y diferentes contenidos.

Quiero terminar con unas palabras de Gonzalo Sánchez Vázquez, que se publicaron en el periódico del ICME 8 de Sevilla, y que muestran, con mayor claridad, algunos aspectos didácticos que he querido resaltar en este artículo:

*Esta revolución informática y los nuevos contenidos de la Matemática actual no pueden ser desconocidos por la enseñanza... Las Matemáticas no deben enseñarse ya de una manera expositiva, estática, transmitida por el profesor a un conjunto de alumnos pasivos. Es preciso que estos participen, observen, exploren, hagan conjeturas y se enfrenten con problemas que les interesan. El profesor es un director de orquesta que apenas se ve, pero que sugiere y orienta constantemente...*