SUMA 25
junio 1997, pp. 71-86

El teorema de Pitágoras a partir de la manipulación con geoplanos

Josetxu Arrieta Gallastegui
José Luis Álvarez García
Antonio Eugenio González García

Dedicado a un enamorado de la reina de las ciencias que dio sus primeros pasos, tras la senda de Pitágoras, en el reino asturiano de Alfonso II

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

El geoplano, utilizado por primera vez por el pedagogo belga Cattegno, fue introducido en España por Puig Adam en los años cincuenta. En el plan de estudios que en estos momentos se está implantadndo, como consecuencia de la implantación de la LOGSE, se hace una apuesta decidida por el uso en las aulas de recursos didácticos de diversa índole, entre ellos los manipulativos. En el presente artículo se propone la introducción del teorema de Pitágoras, o la consolidación del mismo, apartir de una secuencia de actividades de manipulación con geoplanos.

El GEOPLANO y su utilización didáctica en las clases de matemáticas

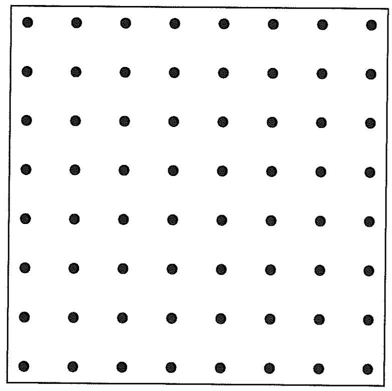
En su *Iniciación a las Matemáticas. Materiales y recursos didácticos*, Cascallana (1988, 146) afirma que «el geoplano fue utilizado por primera vez por Gattegno e introducido en España por Puig Adam». Efectivamente, el pedagogo belga Caleb Gattegno concibió el geoplano en los años cincuenta como un material multivalente, susceptible de ser utilizado para plantear y resolver múltiples y variados problemas geométricos, en los distintos niveles de la enseñanza. Como el propio Gattegno (1964, 11) afirma, «los geoplanos sirven para la toma de conciencia de las relaciones geométricas», esto es, sirven para favorecer la construcción progresiva de los conocimientos geométricos, construcción que sabemos es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas impuestas por la realización de tareas y la resolución de problemas particulares. Su visión de la enseñanza de las matemáticas y del papel que en ella deben de jugar los materiales manipulativos, sean regletas (Gattegno, 1967) o geoplanos, igual que la de su contemporáneo y compatriota nuestro, D. Pedro Puig Adam, encajaría bastante bien en el marco de los postulados psicopedagógicos esgrimidos hoy en día por los especialistas en el área de educación matemática (Gil y Guzmán, 1993) y, por lo tanto, en los incorporados en los diseños curriculares base de dicha área.

Sin embargo, y como es sabido, sus ideas y materiales no se difundieron ni arraigaron lo suficiente a partir de los años setenta. La ola de las «matemáticas modernas» arrastró su obra, así como el ámbito de actuación de su material, la geometría euclídea, al pozo del olvido. En nuestro país, el tratamiento «nueva matemática» o «matemática moderna» se introdujo con las Orientaciones Pedagógicas para la EGB (las de 1970 para la primera etapa y las de 1971 para la segunda), puesto que en ellas se parte del hecho de que una de las funciones fundamentales de las matemáticas es la de ordenar conocimientos y crear estructuras formales que los resuman y expresen, por lo que proponían que la enseñanza de las matemáticas se centrase, en todos los niveles de escolaridad, en el proceso de matematización de problemas, en la creación de sistemas formales y en la utilización de las leyes de estos sistemas o estructuras para obtener unos resultados e interpretarlos.

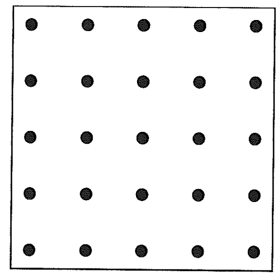
Es a finales de la década de los setenta cuando, en Cataluña, pionera como siempre en nuestro país en la introducción de innovaciones didácticas, y por medio de la beneficiosa y cercana influencia de algunos IREM (Institutos de Investigación en Educación Matemática franceses) como el de Lyon o Bordeaux, se comienza a experimentar de nuevo con los geoplanos en las aulas, como lo ponen de manifiesto distintos artículos publicados al respecto en la revista *L'Escaire* (ver Bedos, M; Forns, M. y otros, 1983 y Rigon Grandesso, M., 1979). Por su parte, unos años después, la Subdirección General de Formación del Profesorado apoya explícitamente la utilización del material de Gattegno, dentro del marco de experimentación de la Reforma de las Enseñanzas Medias, al editar un libro sobre el tema, *Geoplano y Mecanos* (Bas, M. y Brihuega, J., 1987), aunque el método para incorporarlo que se propone, al menos en cuanto a la unidad didáctica que aquí nos interesa, la del teorema de Pitágoras, no se adecua precisamente en términos didácticos y psicopedagógicos a lo que proponía el propio Gattegno y a lo que recientemente se ha aprobado como marco administrativo y legal de trabajo dentro del área.

Si la construcción, observación y modificación de formas geométricas es previa a la fijación de los conceptos geométricos, debemos asumir que la acción sobre los objetos constituye una fase inicial ineludible en los procesos de aprendizaje y que, por ello, el recurso a los geoplanos de Gattegno debe también considerarse como un hecho imprescindible en la Educación Secundaria dentro del área de Matemáticas.

Hemos utilizado indistintamente el singular y el plural para referirnos al (singular) o a los geoplanos (plural). Y ello es así porque aunque hablando con propiedad deberíamos referirnos siempre a los geoplanos (puesto que los hay cuadrados, rectangulares, circulares, cuadrados por un lado y circulares por otro,...; también los hay de 3 x 3 puntas, de 5 x 5, de 8 x 8, de 10 x 10, de 3 x 5, etc.), todos ellos se basan en la misma idea: recurrir a una superficie en la que sobresalen un conjunto de puntas o clavos, alrededor de los cuales se pueden construir distintas formas geométricas utilizando simples gomas elásticas. En nuestro trabajo hemos recurrido exclusivamente a geoplanos cuadrados de 5 x 5 y 8 x 8 puntas, respectivamente (figura 1). Los construimos con planchas de aglomerado y unas puntas de madera que encajábamos en los agujeros que previamente habíamos taladrado sobre el aglomerado.



Geoplano 8 x 8



Geoplano 5 x 5

Figura 1

Debemos contar además con un importante material auxiliar: tramas cuadradas de puntos, dispuestos igual que las puntas de los geoplanos. Se trata simplemente de folios con esquemas dibujados del geoplano. Estas hojas se utilizarán para poder tomar nota de lo que se realiza con las gomas sobre el mismo geoplano. En determinadas ocasiones, estas hojas pueden sustituir al propio geoplano.

El contexto organizativo de las actividades que vamos a presentar es siempre el siguiente: en grupos de tres o cuatro personas, los y las estudiantes van asumiendo la tarea de encontrar «algo» (sean segmentos, triángulos, recorridos o cuadrados) diferente a lo que hayan encontrado sus compañeros y compañeras de grupo. Una vez realizado sobre el geoplano, y antes de dibujarlo en los respectivos esquemas de los que disponen de manera individual, discuten si lo realizado por su compañero o compañera es efectivamente «distinto» a lo trazado y dibujado previamente, y sólo tras ponerse de acuerdo en ello, dibujan cada uno en sus esquemas la nueva forma geométrica hallada. Como vemos, la mayor parte de las actividades que proponemos se realizarán en el marco organizativo de trabajo en pequeño grupo, única manera de garantizar que efectivamente se «aprenda» a trabajar en equipo.

El teorema de Pitágoras: siempre presente en el currículum escolar

El teorema de Pitágoras constituye un contenido del curriculum escolar desde que se fraguaron los primeros rasgos de institucionalización de la Escuela, en el mundo grecorromano, cuando se especializaron los agentes educativos y comenzaron a vivir de ella, dedicándose exclusivamente a la enseñanza, los primeros sofistas, los primeros «trabajadores» de la enseñanza (Lerena, 1985). El quadrivium no se podría entender sin la Geometría y ésta sin la enseñanza de dicho teorema.

...las justificaciones que a lo largo de la historia se han dado para la introducción del teorema de Pitágoras en el ámbito escolar han oscilado a la hora de destacar dos polos o aspectos: su vertiente formativa o bien su rol instrumental o utilitario.

Pues bien, las justificaciones que a lo largo de la historia se han dado para su introducción en el ámbito escolar han oscilado a la hora de destacar dos polos o aspectos destacados al respecto: su vertiente formativa o bien su rol instrumental o utilitario. Comenzando por su vertiente utilitaria, parece indudable que el conocimiento de dicho teorema es absolutamente necesario para la enseñanza posterior de numerosos conceptos científicos, no sólo matemáticos sino físicos. Es imposible hablar de distancias en el espacio, de normas o de vectores, así como de espacios de Hilbert, etc. en el campo de las matemáticas sin conocerlo. Por ello, también es inconcebible entender lo que son las magnitudes vectoriales en el ámbito de la física (velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc.), sin comprender la relación pitagórica. De todas formas no debe ser esta la justificación que demos a nuestros alumnos: no debemos caer nunca en el tan repetido «ya veréis el año que viene para qué sirve esto». En tal caso, ¡deja para el año que viene ese contenido! Así pues, con respecto al teorema de Pitágoras deberemos destacar su carácter instrumental para resolver multitud de problemas, por ejemplo de cáculos de distancias en el plano, en los mapas, en la realidad. Por otra parte, nuestros alumnos y alumnas deben poder vivir el proceso de construcción por su parte de un teorema, y por tanto, de un tipo de conocimiento muy específico, el geométrico, con características muy peculiares y diferenciadoras frente a otro tipo de conocimientos. Esta última idea tiene que ver con el carácter formativo de su enseñanza, y no con el meramente instrumental, pues en pocas ocasiones a lo largo de la escolaridad obligatoria van a poder actuar en las aulas como verdaderos científicos, matemáticos en este caso, con las ventajas educacionales que ello acarrea.

Una propuesta didáctica para tratar el teorema de Pitágoras

En las líneas que siguen nos proponemos explicar el conjunto de tareas que hemos planteado en varias aulas, no sólo de la ESO, sino también en contextos muy diferentes, como lo puedan ser la formación inicial del profesorado en la Escuela Universitaria de Magisterio o la formación permanente del mismo en distintos CEP asturianos, con la finalidad de que los y las estudiantes aprendan de manera significativa el teorema de Pitágoras. En él pues, nos adentramos en la vida real de las aulas, determinada por lo que en ella se hace, que es, a su vez, lo que determina el currículum realizado, y no ya el pretendido u oficial.

Por lo que hemos dicho hasta ahora, está claro que dicho curriculum en la acción no va a estar mediado por las editoriales, a través de los libros de texto o de los ahora en boga «proyectos curriculares» (y ponemos las comillas a la expresión pues está bastante claro que se está devaluando el significado originario de dicha expresión, incluso a instancias de la propia administración, dado que lo que se denomina de esa manera en absoluto tiene que ver con lo que se entendía por tal en el ámbito anglosajón y en la década de los sesenta), sino por la configuración de un conjunto de tareas originales paraa realizar recurriendo sistemáticamente a los geoplanos cuadrados de 3 x 3, 5 x 5 y 8 x 8 y a las tramas cuadradas de puntos que complementan este material.

Como se podrá apreciar, en nuestra propuesta didáctica otorgamos una gran importancia al proceso de enseñanza-aprendizaje en el que implicamos a los y las estudiantes, pues pensamos que es a través de él como pueden vivir una relación educativa, entre ellos y ellas y con el profesorado, y no meramente instructiva. Resaltamos que más importante que el producto deseado, a saber, que dominen el teorema de Pitágoras, es el proceso seguido para su consecución, proceso que en todo momento debe ser en sí mismo educativo. Sus rasgos característicos, por lo tanto, deben ser coherentes con los que se desprenden del análisis de los objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria, para no desterrar al ámbito de la mera retórica dichas descripciones por todos y todas compartidas.

Para explicar la unidad didáctica vamos a distinguir tres subapartados en la misma: en el primero analizaremos los elementos didácticos de la unidad, basándonos en el DCB y citando los objetivos, contenidos, el contexto organizativo y la forma de evaluación; en el segundo presentamos la secuencia propuesta de actividades, una sesión introductoria y siete tareas claramente diferenciadas, para, en el tercero y último, sintetizar y concluir el trabajo realizado.

El teorema de Pitágoras en el DCB: análisis didáctico de la unidad

En el DCB de Secundaria Obligatoria, el teorema de Pitágoras viene citado como contenido conceptual del currículo oficial dentro del bloque de contenidos n.° 2 del área de Matemáticas, el de «Medida, estimación y cálculo de magnitudes» (MEC, 1992). Más concretamente, se cita como contenido conceptual del apartado 6, el de «Mediciones indirectas», y se puede relacionar directamente con contenidos procedimentales («utilización de las fórmulas de longitudes... para medir magnitudes» o el de «medida del área... utilizando distintas técnicas tales como la descomposición en otras más simples...») o relacionados con las actitudes, los valores y las normas («reconocimiento de la importancia y utilidad de las medidas indirectas como un medio sencillo para medir determinadas magnitudes» o el de «revisión sistemática del resultado de las medidas directas o indirectas, aceptándolas o rechazándolas según se adecuen o no a los valores esperados»).

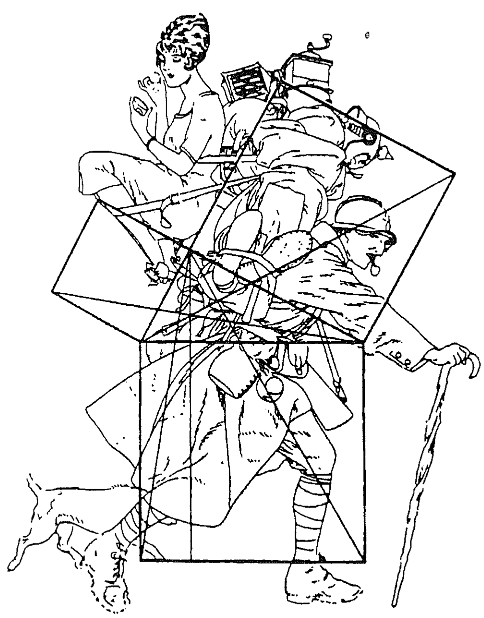
Sin embargo, pensamos que, tal y como vamos a plantear la programación de la unidad didáctica, los objetivos o capacidades que se pretenden desarrollar van mucho más allá de los que acabamos de citar. Nuestro interés es el de incidir en los objetivos generales del área en la ESO, concretamente en el primero («incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática con el fin de comunicar los pensamientos propios de una manera precisa y rigurosa»), el tercero («identificar utilizaciones y aplicaciones diversas del conocimiento matemático en distintos ámbitos de la actividad humana percibiendo el papel que juegan como lenguaje e instrumento en situaciones muy diversas»), el cuarto («mostrar actitudes propias de la actividad matemática en situaciones cotidianas o de resolución de problemas»), el quinto («utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas»), el sexto («elaborar estrategias personales para la resolución de problemas matemáticos sencillos y de problemas cotidianos, utilizando distintos recursos y analizando la coherencia de los resultados para mejorarlos si fuera necesario») y el noveno («desarrollar estrategias de medida y cálculo de magnitudes realizando estimaciones y aproximaciones de estas medidas con el grado de exactitud conveniente según lo requiera la naturaleza de la situación, del objeto o del aspecto medido»).

...más importante que el producto deseado, a saber, que dominen el teorema de Pitágoras, es el proceso seguido para su consecución, proceso que en todo momento debe ser en sí mismo educativo.

Pero también queremos resaltar la relación directa de la unidad didáctica con el posible logro de objetivos o capacidades generales de la propia etapa educativa, en concreto con los siguientes objetivos generales de la ESO: «interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos y técnicos, con el fin de enriquecer sus posibilidades de comunicación y reflexionar sobre los procesos implicados en su uso»; «obtener y seleccionar información utilizando las fuentes en las que habitualmente se encuentra disponible, tratarla de forma autónoma y crítica, con una finalidad previamente establecida y transmitirla a los demás de manera organizada e inteligible; «elaborar estrategias de identificación y resolución de problemas en los diversos campos del conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, constrastándolas y reflexionando sobre el proceso seguido» y, por último, el de «conocer y valorar el desarrollo científico y tecnológico, sus aplicaciones y su incidencia en su medio físico y social».

Los contenidos conceptuales que es preciso aprender están recogidos en la relación esencial que se establece en el teorema de Pitágoras, a saber, que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, así como reconocer que eso sólo ocurre si el triángulo de partida es rectángulo. Los términos (catetos, hipotenusa, triángulo rectángulo, acutángulo y obtusángulo), las operaciones (suma de cuadrados, triangulación de rectángulos) y la relación de igualdad en ese determinado caso, constituyen las figuras sintácticas características de la geometría euclidiana que es preciso construir.

Para favorecer el desarrollo de las capacidades citadas y la construcción de dichas figuras sintácticas es preciso instaurar en el aula una dinámica de trabajo en la que el realizado por el alumno o alumna sea comparable por momentos a la actividad científica. Deberá actuar, formular, probar, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías, intercambiarlas con otros, reconocer las que son conformes a la cultura, recurrir a ellas cuando son útiles, etc. Y para hacer posible tal actividad, el profesorado debe de imaginar y proponer situaciones que puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparezcan como la solución óptima y descubrible a los problemas planteados. Más concretamente, debe optar por seguir los principios de procedimiento que justificamos en el anterior apartado.



La secuencia de actividades que presentamos a continuación se ha realizado en su mayor parte dentro de un contexto de trabajo en pequeño grupo (de cuatro personas). En las situaciones de acción éste es el contexto usual, aunque en las de formulación, validación e institucionalización se recurre habitualmente a una puesta en común con todo el grupo de estudiantes.

Los medios utilizados, como ya se ha indicado anteriormente, son únicamente geoplanos de 5 x 5 para cada grupo, y de 8 x 8 para toda el aula, más las gomas necesarias para la construcción de las figuras planas. Además se dispondrá de fichas fotocopiadas donde aparecen los esquemas de dichos geoplanos, con la finalidad de que puedan tomar nota de sus acciones previas, así como hojas con tramas cuadradas de puntos. Es interesante tener preparadas las transparencias necesarias para visualizar, en la puesta en común, las soluciones a los problemas de búsqueda planteados. En los centros donde se pueda recurrir a ordenadores que dispongan del lenguaje LOGO, es factible realizar actividades similares a las propuestas en dicho entorno, sea para comprobar los resultados y conocimientos adquiridos mediante el recurso a los geoplanos, sea para plantearlas directamente en dicho entorno informático.

La labor del profesorado debe de entenderse en función del tipo de situación a plantear y no en términos globales (directividad y no directividad, por ejemplo). Así, en las situaciones de acción y formulación, deberán apoyar y animar a sus estudiantes para que acepten el problema que se les ha planteado, dándoles los consejos oportunos par que perseveren, tomen conciencia del trabajo realizado, comparen el suyo con el de otros grupos, etc. Sin embargo, en las situaciones de validación deberán abstenerse de intervenir como poseedores de la verdad, esto es, deberán simular, como un actor o una actriz en una obra de teatro, que no conocen la respuesta a las preguntas que se plantean. De otra manera se interferiría con los procesos de razonamiento del alumnado, impidiéndoles construir las ideas adecuadas para la resolución de los problemas planteados. Por último, en las situaciones de institucionalización, el profesorado debe de intervenir de manera totalmente directiva, zanjando los debates, introduciendo los términos adecuados y explicitando la importancia de los resultados obtenidos.

Por su parte, la evaluación específica de la unidad deberá de realizarse en un marco equiparable al ya vivido y reconocido por los y las estudiantes, esto es, en pequeño grupo. La prueba individual de evaluación puede y debe reducirse a comprobar si los resultados previamente institucionalizados son conocidos y comprendidos. De esta forma distinguiríamos entre dos pruebas de evaluación: la grupal, dirigida a comprobar el nivel de trabajo de cada grupo al intentar resolver un problema nuevo, aunque relacionado con los previamente trabajados, y el individual, dirigido a comprobar su nivel de conocimiento de los conceptos básicos que se supone deben de aprender.

Hemos resuelto relatar la secuencia de actividades para plantear en las aulas de manera abierta, sin determinar específicamente el tiempo dedicado específicamente a cada una de ellas y el contexto concreto organizativo de las mismas, y ello de manera deliberada. En los diferentes ensayos que hemos realizado de la misma, como dijimos, en contextos muy diversos, hemos podido comprobar cómo los resultados obtenidos en cada tarea son algo diferentes en cada aula y ello nos obliga, además de la necesidad de ser coherentes con los principios de procedimiento asumidos (recuérdese el que afirma que el profesorado «favorecerá que identifiquen, inicien y desarrollen sus propios problemas relacionados con las situaciones planteadas») a describir el conjunto de tareas a desarrollar en las aulas de manera no cerrada.

En necesario indicar, por último, que en algunas de las tareas se proponen alternativas según se plantee la unidad didáctica en el primer ciclo o en el segundo ciclo de la ESO. En este último caso se eliminan las actividades en las que se hace referencia a los números irracionales. Tanto en uno como en otro caso, los alumnos y alumnas llegan a la relación pitagórica de manera similar y, por tanto, la unidad didáctica mantiene todo su significado. En el caso de los estudiantes del segundo ciclo, que ya se habrán encontrado con el teorema en cursos anteriores, tendrán ocasión de afianzar, de manera significativa, su aprendizaje y valorar todo su significado.

...dos pruebas de evaluación: la grupal, dirigida a comprobar el nivel de trabajo de cada grupo al intentar resolver un problema nuevo, aunque relacionado con los previamente trabajados, y el individual, dirigido a comprobar su nivel de conocimiento de los conceptos básicos que se supone deben de aprender.

Secuencia de actividades

Primera sesión introductoria

En la primera sesión, y con vistas a proporcionar una panorámica global del tema que se va a abordar en las siguientes clases, esto es, con la pretensión de presentar un organizador previo que facilite al alumnado la asignación de un sentido genérico al conjuntos de actividades y fases que se van a desarrollar, suele ser conveniente comenzar la programación con una actividad como la que proponemos, que pensamos satisface las características que los psicólogos cognitivos, especialmente Ausubel o Mayer, asignan a los organizadores avanzados. Este último sostiene que un organizador previo debe poseer las siguientes características:

1. Es un conjunto breve de información verbal o visual.
2. Se presenta antes del aprendizaje de un amplio cuerpo de información.
3. No incluye contenido específico de la información que hay que aprender.
4. Proporciona medios para generar relaciones lógicas entre los elementos.
5. Influye en los procesos de codificación del alumno.

En nuestro caso, como veremos a continuación, no sólo se tratará de una información verbal y visual presentada por el o la profesora, sino que exigirá también la realización de actividades manipulativas por parte del alumnado. En concreto, se trataría, en primer lugar, de explicarles verbalmente que el conjunto de actividades que se realizarán a continuación está relacionado con uno de los conocimientos matemáticos más universales, planteado y resuelto a través de diferentes cursos operatorios por civilizaciones muy diversas (babilónica, egipcia, india, china, arábiga, griega,... que explica de manera abstracta y general la relación existente entre diferentes cuadrados, rectángulos y triángulos y que permite resolver una gran cantidad de problemas geométricos y algebraicos en el plano y, generalizándolo, en el espacio. Se le conoce convencionalmente como el «Teorema de Pitágoras», y nos va a permitir adentrarnos en las características de los conocimientos científicos, más concretamente, matemáticos, que implican una manera de razonar, argumentar y demostrar muy específica y determinada, muy peculiar, la que se recoge de manera implícita a través del término «teorema».

Como vemos, breve conjunto de ideas, presentado antes del amplio conjunto de actividades a desarrollar y de información a transmitir, que no incluye contenido específico de la información a aprender, a la vez que proporciona medios para generar relaciones lógicas entre los elementos y las actividades subsiguientes y que esperamos influya en los procesos de codificación del alumnado, por lo que, explicitado en un lenguaje apropiado, se convierte en un organizador previo del tema que se va a estudiar.

Tras transmitir la información verbalmente, les pasaremos por escrito un breve texto que recoja sintéticamente los puntos anteriores y, a continuación, proporcionaremos a cada grupo de cuatro alumnos dos cuadrados, de 15 y 20 cm de lado respectivamente, una escuadra y un cartabón, así como unas tijeras, y les pediremos que busquen la manera de conseguir, con los dos cuadrados dados, otro cuadrado de área la suma de los iniciales, pudiendo cortar éstos en las partes que crean conveniente y de la forma que consideren apropiada. Se trataría de «ver», una vez troceados los dos o alguno de ellos, cómo se pueden disponer las distintas partes de manera que obtengamos uno solo, sin despreciar ninguno de los fragmentos en los que los hayamos dividido, para garantizar que la suma de los pequeños nos «dé» el mayor. Con cortes paralelos a los lados del cuadrado surgen fácilmente varias opciones, por ejemplo, la de cortar el mayor en cuatro tiras rectangulares iguales y disponerlas alrededor del menor, pero complicaremos la tarea pidiendo que los cortes sean «oblicuos».

Tras diversos intentos, que es de esperar no fructifiquen, dada la dificultad que encierra el hallar por dónde cortarlos, en cuántos trozos y si hay que recurrir a uno o a ambos cuadrados, les presentaremos una de las posibles formas de hacerlo. Les diremos concretamente que partan el mayor, el de 20 cm mediante dos rectas que unan, dos a dos, los puntos situados en las distancias y los lugares indicados en la figura 2 (presentada en una trasparencia). Después se les pide que sitúen los cuatro cuadriláteros obtenidos en torno al cuadrado de 15 cm para ver si obtienen un cuadrado mayor, y, si es así, que midan el lado de este último.

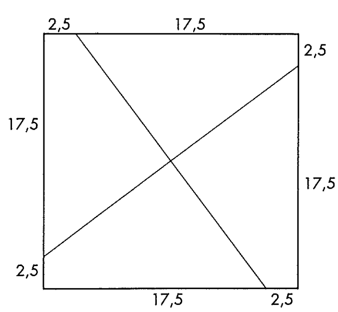


Figura 2

Una vez conseguida la disposición deseada (los cuatro cuadriláteros «bordeando» al cuadrado de 30 cm, que aparece como encajado en el interior del mayor, obtenido por todos los grupos), les comentaremos que la justificación de este procedimiento, así como la de la relación obtenida entre las áreas será uno de los conocimientos que habremos aprendido tras la realización de las actividades de la programación, y que está directamente relacionado con el citado «Teorema de Pitágoras».

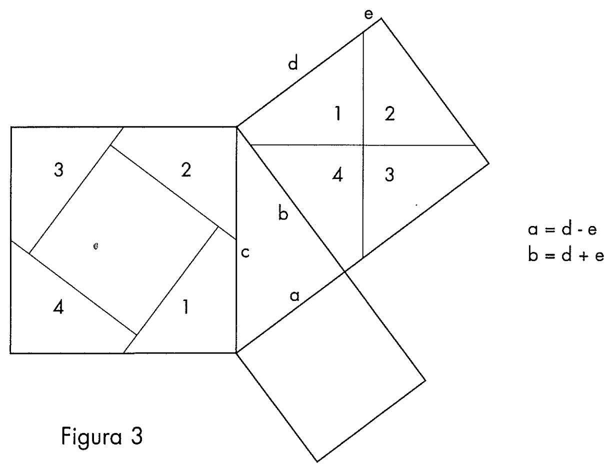


Figura 3

Como se puede apreciar en la figura 3, el procedimiento presentado se basa en uno de los muchos existentes para construir un cuadrado, basándose en dos más pequeños, siempre que entre sus lados se satisfaga la relación pitagórica. En este caso a = 15 cm y b = 20 cm, por lo que «d» es igual a 17,5 cm y «e» a 2,5 cm. El cuadrado mayor construido tendrá, obviamente, un lado de 25 cm.

En el caso general, los valores de «d» y «e» se hallan calculando la semisuma de los lados de los cuadrados pequeños y la semidiferencia de los mismos, respectivamente, como se puede deducir resolviendo las dos ecuaciones de la figura, despejando «d» y «e» en función de «a» y «b». Así, d = 1/2(b+a) y e = 1/2(b-a) y en el caso particular planteado,

$$d = 1/2(20+15) = 17{,}5 \text{ cm}$$

$$e = 1/2(20-15) = 2{,}5 \text{ cm.}$$

Tarea 1: segmentos de diferente longitud en el geoplano 5x5

Se les propone que, en grupos de cuatro personas, encuentren todos los segmentos de distinta longitud que se pueden construir en un geoplano de 5 x 5 puntos. Como vemos, les proponemos una situación de acción, dirigida, entre otras cosas a que pongan de manifiesto sus conocimientos previos sobre los términos usados: segmentos e igual longitud. Situación o problema de búsqueda para el que no pueden recurrir a ningún algoritmo previo y que deberán resolver obligadamente por tanteo, mediante sucesivos ensayos y errores. En este proceso pondrán de manifiesto sus ideas previas sobre igualdad de segmentos, aprendiendo, por ejemplo, que la distancia entre dos puntos no es la misma si éstos, en vez de estar situados de manera consecutiva en horizontal o vertical, están situados en oblicuo.

El contexto organizativo de la tarea puede ser el siguiente: cada alumno construye un segmento en el geoplano, diferente siempre en longitud a los previamente realizados y, tras ponerse de acuerdo con los compañeros en que es efectivamente distinto en dicha magnitud a todos los anteriores, lo dibujan todos los miembros del grupo en sus fichas correspondientes. Así van construyendo y dibujando el mayor número posible de segmentos distintos, hasta que no encuentren más. Como vemos, es preciso que cada grupo cuente con un geoplano, gomas, y fichas con bastantes esquemas del geoplano 5 x 5 (es aconsejable proporcionarles, como mínimo, 16 esquemas en dos folios, para que dibujen inicialmente un segmento en cada uno de ellos).

En la puesta en común es de esperar que los distintos grupos no se pongan de acuerdo: unos encontrarán 11 o 12 segmentos distintos, mientras que otros dibujarán en sus fichas más de 15, al no percatarse de la igualdad de algunos de ellos por estar situados en posiciones diferentes. Como se puede apreciar en la figura 4 (en la que aparecen ya agrupados siguiendo un criterio: horizontales, suben un «piso», dos, tres o cuatro), sólo existen 14 segmentos distintos en longitud, pero como este número no es fácil de hallar, dado que no cuentan con ninguna estrategia previa que les permita estar seguros de ello, no es previsible que lleguen a él, al menos de manera mayoritaria. Este hecho, la falta de acuerdo para encontrar el mismo número de segmentos, es el que va a motivar la siguiente tarea que se va a realizar.

Situación o problema de búsqueda para el que no pueden recurrir a ningún algoritmo previo y que deberán resolver obligadamente por tanteo, mediante sucesivos ensayos y errores.

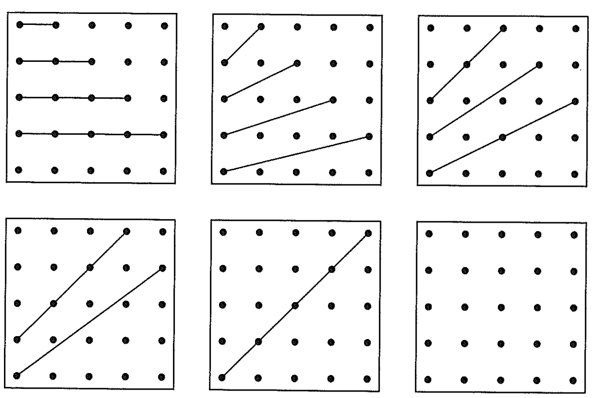


Figura 4

Tarea 2: codificación de los segmentos hallados

En esta ocasión, y como fruto del desacuerdo alcanzado en la tarea anterior, les planteamos una situación o dialéctica de formulación: se trata de construir un lenguaje que nos permita identificar sin ambigüedades cualquier segmento construible sobre el geoplano de 5 x 5, de manera que, por su mediación, podamos estar seguros más adelante, repasando las fichas realizadas en la tarea anterior, que no repetimos ninguno, así como que podemos encontrar todos los posibles.

Para ello podemos recurrir al planteamiento de la siguiente actividad: les pedimos que, fijado un punto de partida para los distintos segmentos, por ejemplo, la esquina inferior izquierda, se intercambien mensajes con la finalidad de averiguar qué segmento han construido sin que los restantes compañeros del grupo lo puedan ver. Los distintos mensajes, del tipo «dos saltos a la derecha y uno hacia arriba», los iremos abreviando sin incurrir en ambigüedades hasta que asuman que es suficiente con indicar un par de números –el par (2, 1) para el caso anterior– para identificar de manera rigurosa uno y sólo uno de los posibles segmentos posibles. Llegados a esta conclusión, se les pide que nombren los segmentos que previamente habían construido para percatarse de las posibles repeticiones o exclusiones en que habían incurrido.

De esta manera, y superando ciertas dificultades, como la relativa al nombre de los segmentos horizontales –el (1, 0), (2, 0), (3, 0) y (4, 0)– o al hecho de que el orden de los números del par es indiferente respecto a la longitud (lo que viene a indicar que, por lo tanto, en sentido matemático estricto no constituyen un «par»), puesto que el segmento (2, 1), por ejemplo, tiene la misma longitud que el (1, 2), pueden llegar a nombrar los catorce segmentos posibles, así como a estar seguros de que únicamente pueden construirse dichos catorce segmentos. Como objetivo final de la tarea, se trataría que todos los grupos lleguen a construir una tabla como la siguiente:

(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
		(3, 3)	(4, 3)
			(4, 4)

Con dicha tabla construida pueden fácilmente apreciar que, efectivamente, sólo se pueden construir 14 segmentos de distinta longitud en el geoplano de 5 x 5, al margen de su orientación y disposición en el plano. Implícitamente, también habrán descubierto que para expresar la medida de un segmento, en ocasiones es preferible «dar un rodeo», esto es, no medir directamente su longitud sino indicar cuánto se avanza (o retrocede) en horizontal y cuánto se sube (o baja) en vertical; esto es, es preferible expresar la distancia entre dos puntos no directamente sino indirectamente, recurriendo a lo que más adelante denominaremos como «catetos» del triángulo rectángulo que tiene como «hipotenusa» la distancia buscada. Esto es así, dado que de los catorce segmentos construidos, únicamente los cuatro horizontales y el (4, 3) tienen una medida racional, expresable mediante un número entero en estos casos (respectivamente miden 1, 2, 3, 4 y 5 unidades, si consideramos como unidad la distancia horizontal o vertical entre dos clavos consecutivos). El resto, como podrán comprobar más adelante, tienen una medida irracional.

...sólo se pueden construir 14 segmentos de distinta longitud en el geoplano de 5x5, al margen de su orientación y disposición en el plano.

Una vez concluida la tarea, podremos plantear las siguientes actividades de refuerzo o ampliación:

- Dado un segmento cualquiera, dibujar el mismo en muchas posiciones diferentes o construir figuras con segmentos siempre iguales (ver figura 5).
- Dado un segmento cualquiera, elegido entre los «pequeños» (más adelante matizaremos esta idea de «pequeño»), construir un cuadrado que tenga dicho segmento como lado, proporcionándoles, si tienen dificultades con los segmentos «inclinados», dos lados ya dibujados para que encuentren el cuarto vértice que permite «cerrar» el cuadrado (ver figura 6). Esta actividad será la base de una de las próximas tareas que habrán de abordar.
- Encontrar una fórmula que nos permita calcular el número de segmentos construibles en cualquier geoplano de n x n clavos. Fórmula que se puede construir planteando una situación de validación, en la cual tengan que conjeturar que dicho número, llamémosle N, es igual a la suma de los *n* primeros términos de la progresión aritmética de diferencia 1 (1+2+3+4+...+n), menos una unidad. Hecho fácilmente deducible ampliando, por generalización, la tabla previamente construida. Así se puede introducir, además, la idea de progresión aritmética, al menos la de la más sencilla, para llegar a la fórmula en cuestión, esto es $1/2\,[n(n+1)] - 1$. Más adelante merece la pena volver sobre esta actividad para probar su validez: a partir del geoplano 6 x 6 se encontrarán con que algunos segmentos aparentemente de «diferente» longitud realmente miden lo mismo, como por ejemplo el (5 ,0) y el (4, 3). En todo caso nos parece más oportuno introducir esta reflexión después de haber realizado alguna de las tareas siguientes.

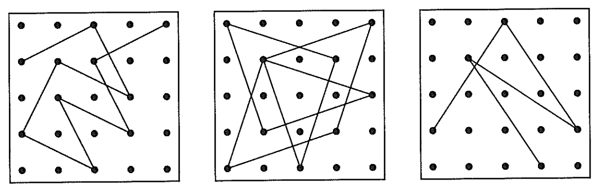


Figura 5

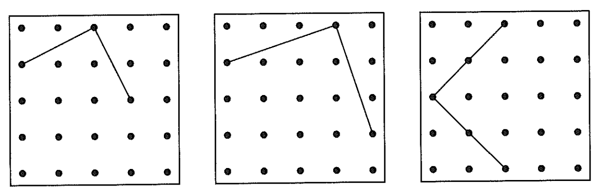


Figura 6

Tarea 3: ordenación de los segmentos por su longitud

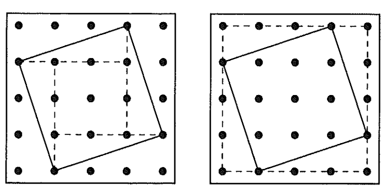
Se les pide, en el mismo contexto organizativo que en el caso de la tarea inicial, que ordenen de menor a mayor longitud todos los segmentos que han encontrado. Para ello pueden recurrir, si lo estiman necesario, al uso de reglas graduadas.

Tras un periodo de trabajo de los grupos, el profesor o la profesora pedirá que expongan sus resultados. Sin duda surgirán distintas ordenaciones y surgirán problemas ya que, con toda probabilidad, se habrán encontrado con serias dificultades para ordenar los segmentos. Ni siquiera con ayuda de la regla habrán sido capaces de establecer diferencia de longitud entre los segmentos (4, 1) y (3, 3).

Esta falta de acuerdo será la base para plantear la siguiente tarea: cómo encontrar la medida exacta de los diferentes segmentos, que nos permita ordenarlos según su longitud.

Tarea 4: la longitud exacta se puede determinar indirectamente

Al final de la tarea anterior se plantea el problema de determinar la medida exacta de los segmentos del geoplano. Será difícil encontrar propuestas razonables para hallar la medida exacta de los segmentos, por lo que será el profesor o la profesora la que sugerirá una manera de hacerlo. El procedimiento que propondrá para hallar la longitud exacta de los segmentos se basará en la relación entre el lado y el área de un cuadrado: conocido el valor del área, el lado será la raíz cuadrada de este valor. Para explicar este procedimiento de cálculo, el profesor o la profesora plantearán algunas actividades previas de cálculo de áreas de cuadrados construidos en el geoplano. En el caso de los cuadrados cuyos lados son paralelos a los lados del geoplano, los y las estudiantes no tendrán ninguna dificultad para el cálculo del área. La unidad, obviamente, será el cuadrado de lado unidad. En el caso de los cuadrados cuyos lados sean oblicuos a los lados del geoplano se utilizarán tanto lo que nosotros denominamos «método puzle» o de «dentro a fuera», que consiste en dividir el cuadrado cuya área se desea calcular en 4 triángulos y un cuadrado cuyos lados son paralelos a los lados del geoplano y cuyas áreas se calculan de manera inmediata, y el que llamamos «método marco» o procedimiento de «fuera a dentro», que consiste en inscribir el cuadrado de lados oblicuos en otro de lados paralelos a los lados del geoplano: en este caso el área del cuadrado interior será la del cuadrado grande menos la de los cuatro triángulos iguales que se forman en las esquinas (figura 7).



Método *puzzle* Método *marco*

Figura 7

Tras el cálculo del área de cada uno de estos cuadrados, el profesor o la profesora pedirá a sus alumnos que indiquen cuál sería la longitud de su lado. La manera de indicar la solución dará lugar a un nuevo debate y reflexión.

...cómo encontrar la medida exacta de los diferentes segmentos, que nos permita ordenarlos según su longitud.

La mayoría habrá optado por dar una expresión decimal, cuyo valor habrán obtenido con la calculadora. Como no todas las calculadoras mostrarán el mismo número de dígitos y, además, no todos habrán hecho el redondeo con el mismo número de decimales surgirá de nuevo la controversia acerca de qué resultado ha de ser el admitido por todos. El profesor o la profesora aprovechará este hecho para que los alumnos y alumnas admitan y comprendan la imposibilidad de expresar con exactitud el valor de estos radicales en forma decimal. Puede ser el momento, si se considera oportuno, de hablar de cuestiones como números irracionales, infinitas cifras decimales no periódicas, redondeo y cifras significativas,... Las características del grupo clase, sus conocimientos previos, el tiempo del que se disponga, etc. serán factores que el profesor o la profesora habrá de valorar. En cualquier caso, el contexto puede ser muy adecuado para introducir estas cuestiones, así como otras, como la simplificación de radicales que se explicará entre las actividades de ampliación.

En cualquier caso, y volviendo a la tarea que nos habíamos propuesto, tras esta reflexión habrá de surgir el acuerdo de expresar el resultado exacto mediante la forma radical y que las medidas aproximadas, salvo excepciones, se darán con tres cifras significativas y redondeando. Los alumnos y alumnas, a continuación, hallarán la longitud exacta de todos los segmentos distintos del geoplano 5 x 5, a partir de los correspondientes cuadrados, y confeccionarán una tabla con los resultados que van obteniendo, ordenando en la misma los segmentos en función de su longitud. Como en el geoplano de 5 x 5 no pueden construir todos los cuadrados que tienen por lados los segmentos citados, se pedirá que utilicen para ello las tramas cuadradas de puntos.

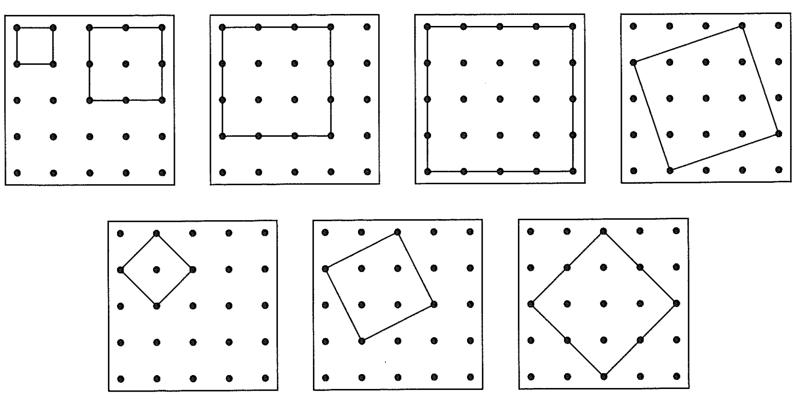
El resultado que se espera obtener es el reflejado en el siguiente cuadro:

Segmento	*Área cuadrado*	*Longitud exacta*	*Longitud aproximada*
(1, 0)	1	1	1
(1, 1)	2	$\sqrt{2}$	1,41
(2, 0)	4	2	2
(2, 1)	5	$\sqrt{5}$	2,24
(2, 2)	8	$\sqrt{8}$	2,83
(3, 0)	9	3	3
(3, 1)	10	$\sqrt{10}$	3,16
(3, 2)	13	$\sqrt{13}$	3,61
(4, 0)	16	4	4
(4, 1)	17	$\sqrt{17}$	4,12
(3, 3)	18	$\sqrt{18}$	4,24
(4, 2)	20	$\sqrt{20}$	4,47
(4, 3)	25	5	5
(4, 4)	32	$\sqrt{32}$	5,66

Alternativa a las tareas 3 y 4 para el primer ciclo de ESO: cuadrados en el geoplano 5 x 5

En esta ocasión volvemos a plantear una situación de acción, de búsqueda, relacionada con la segunda actividad de refuerzo de la tarea 2. Se les pide que busquen el mayor número posible de cuadrados, de diferente superficie, que se pueden construir sobre un geoplano de 5 x 5. Además, y basándose en la tabla previamente construida, deberán «nombrar» a dichos cuadrados, esto es, deberán identificarlos por la longitud de sus lados, recurriendo al lenguaje de pares que habían ya elaborado en la actividad anterior.

Figura 8



Los cuatro más sencillos, los que tienen por lado los segmentos (1, 0), (2, 0), (3, 0) y (4, 0) no tienen ningún problema en dibujarlos. Los cuatro restantes que pueden dibujarse en el geoplano de 5 x 5 (ver figura 8), sí les cuesta más trazarlos, aunque si previamente han realizado la actividad de refuerzo n.° 2, o si les planteamos una situación de intercambio de mensajes, podrán hacerlo sin excesivas dificultades. La situación de formulación puede plantearse como sigue: tienen que dar instrucciones a los miembros de su grupo para que dibujen el mismo cuadrado que alguien de ellos ha dibujado previamente, sin que el resto lo vea, fijando un punto de partida. De esta forma se ven obligados a utilizar siempre el mismo par de números, por lo que toman conciencia, de una manera eficaz y no ambigua, de cómo se pueden dibujar. Por ejemplo, si se trata del cuadrado de lado (2, 1), el mensaje, tomando como punto de partida un punto adecuado, pues no todos sirven, tendría la siguiente forma: dos a la derecha y uno hacia arriba, uno a la derecha y dos hacia abajo, dos a la izquierda y uno hacia abajo, y, por último, uno a la izquierda y dos hacia arriba.

Una vez construidos sobre el geoplano y dibujados en sus fichas, les propondremos que los ordenen por tamaño, por su área o superficie, para lo cual tendrán que hallar dichas áreas, dado que a simple vista tienen dificultades para saber cuál de los dos elegidos es mayor y cuál menor. Si bien las áreas de los cuatro primeros se calculan inmediatamente, tomando obviamente como superficie unidad la del cuadrado de lado el segmento (1, 0), no ocurre lo mismo con las cuatro restantes. Las consideraciones hechas anteriormente sobre los métodos puzle y marco tienen aquí también toda su validez.

De esta manera pueden llegar a construir, en paralelo con la tabla de segmentos, una tabla de áreas de los ocho cuadrados construidos sobre el geoplano de 5 x 5, tabla que quedaría así:

1	4	9	16
2	5	10	
	8		

A continuación instauraremos en el aula una dialéctica de la validación, esto es, propondremos una situación en la que tengan que argumentar, realizando conjeturas y comprobando su validez, de acuerdo con la comparación de las dos tablas construidas en las dos tareas anteriores. Esto es, teniendo presentes las siguientes tablas:

Lados				*Áreas*			
(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)	1	4	9	16
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	2	5	10	
	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)		8		
		(3, 3)	(4, 3)				
			(4, 4)				

les pediremos que conjeturen, en primer lugar, cuál será el área del cuadrado de lado (4, 1), esto es, cuál será el valor que tiene que aparecer inmediatamente debajo del 16 en la tabla de las áreas. Comparando la segunda fila con la primera, es fácil de establecer la conjetura de que tiene que ser una unidad más que 16, por lo tanto podrán afirmar que el cuadrado de lado (4, 1) tendrá 17 unidades cuadradas de área. Hecho que comprobarán efectivamente construyendo y dibujando dicho cuadrado en un geoplano mayor, por ejemplo en el de 8 x 8 clavos, y calculando su área directamente por triangulación.

Si para pasar de la primera fila a la segunda añadimos una unidad, para pasar de la primera a la tercera, parece plausible pensar que hay que añadir cuatro unidades (comparando los valores 4 y 8 de la tabla de áreas), por lo que los cuadrados de lado (3, 2) y (4, 2), deberán tener unas áreas respectivas de 13 y 20 unidades cuadradas. También suele ser habitual que conjeturen que hay que multiplicar por dos. De nuevo comprobarán la conjetura, trabajando en el geoplano de 8 x 8 (ver figura 9) y calculando directamente las áreas de estos cuadrados por triangulación. Podrán calcular el área del cuadrado de lado el segmento (3, 2), sea sumando al cuadrado central el área de los cuatro triángulos que lo «bordean», esto es, mediante la suma 1+12 (puesto que cada triángulo tiene un área de 3 unidades cuadradas), o sea restando de 25 las 12 unidades cuadradas de los cuatro triángulos que bordean al cuadrado, esta vez por el exterior. De igual forma, el área del cuadrado de lado (4, 2) la calcularán así: 4 + (4 x 4) = 20 ó 36 - (4 x 4) = 20.

Por último, si para pasar de la primera a la segunda fila sumábamos una unidad, y para pasar de la primera a la tercera fila sumábamos cuatro unidades, la pregunta obvia es: ¿cuánto tendremos que sumar para pasar de la primera a la cuarta fila?; esto es, ¿qué área tendrán los cuadrados de lados los segmentos (3, 3) y (4, 3)? Como en este caso no tienen ningún ejemplo en el cual basarse para establecer la conjetura, les pediremos que los dibujen previamente en el geoplano de 8 x 8 y que calculen sus áreas por triangulación. Una vez hallados los valores (18 y 25, respectivamente), pediremos que los sitúen en la tabla de áreas, completándola con los valores obtenidos con anterioridad, quedando ésta de la siguiente manera:

	Lados				*Áreas*			
(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)		1	4	9	16
(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)		2	5	10	
(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)			8			
	(3, 3)	(4, 3)						
		(4, 4)						

Ahora ya pueden conjeturar, en base a los datos empíricos, que para pasar de la primera fila a la tercera fila es preci-

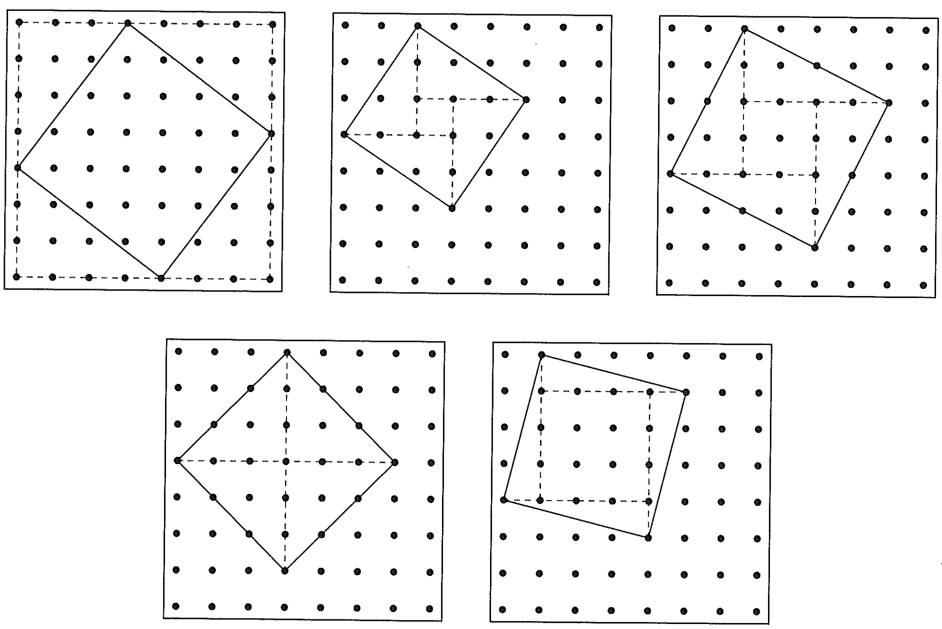


Figura 9

so sumar 9 unidades, lo que aprovecharemos para pedirles que generalicen: hemos obtenido los valores 1, 4 y 9 para pasar, respectivamente, a las filas dos, tres y cuatro, ¿cuánto tendremos que añadir para pasar a la fila cinco? El valor buscado, 16, lo utilizaremos, comprobando su validez, al construir en una trama cuadriculada el cuadrado de lado el segmento (4, 4) y calcular su área por triangulación. Efectivamente, obtenemos un área de 32 unidades cuadradas, esto es, 16+16, con lo que completaremos, de manera definitiva el cálculo del área de los catorce cuadrados en cuestión.

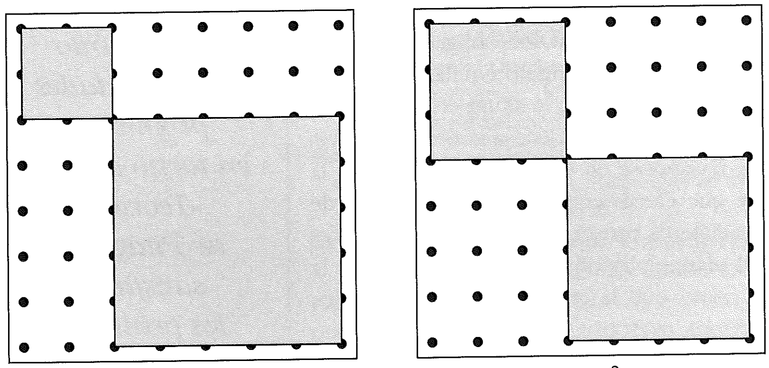
Tarea 5: descubrimiento en la tabla de la relación pitagórica y demostración del teorema de Pitágoras

Estará dirigida fundamentalmente a demostrar el teorema y comprobar su recíproco, porque, como se puede apreciar por lo realizado hasta ahora, en ningún momento hemos demostrado una relación general entre los valores numéricos de los lados y el área correspondiente. Todo lo más hemos comprobado empíricamente que si partimos del segmento (a, b), el área del cuadrado construido sobre dicho lado debe ser a^2+b^2. Generalización que es fácil de realizar al observar la tabla obtenida, tanto por uno como por otro camino. En el caso de la primera propuesta de tareas 3 y 4, el análisis conjunto de las columnas primera y tercera de la tabla permite ver la relación pitagórica. En el caso de las tareas 3 y 4 propuestas para el primer ciclo de ESO es fácil comprobar que tanto en sentido horizontal (al pasar de una columna de la tabla de áreas a la siguiente), como en sentido vertical (al pasar de una fila a la siguiente), hemos encontrado la serie de los cuadrados 1, 4, 9, 16,...

Este es el momento para incidir en la diferencia entre una comprobación empírica y una generalización, basada en datos calculados concretamente, y una demostración rigurosa en términos matemáticos, entre las pruebas para decidir y las pruebas para saber. Como es de prever por las actividades descritas con anterioridad, la demostración que vamos a «enseñar» está en la línea de la realizada por los árabes, los cuales no recurrían a la demostración euclídea para la demostración del teorema de Pitágoras. Esto es, vamos a procurar que los alumnos demuestren la relación pitagórica, basándose en la generalización de los métodos de cálculo empíricos que han utilizado previamente al calcular las áreas de los catorce cuadrados citados.

...vamos a procurar que los alumnos demuestren la relación pitagórica, basándose en la generalización de los métodos de cálculo empíricos que han utilizado previamente al calcular las áreas de los catorce cuadrados citados.

Para ello les proponemos que estudien, recurriendo al caso general de un segmento (a, b), cuál será el área del cuadrado construido sobre el mismo. Será el momento de introducir los términos «catetos» (a y b) e «hipotenusa» (c) así como de recordar la fórmula del binomio al cuadrado, esto es, que $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$. Para ello, si es preciso, recurriremos de nuevo al geoplano de manera que puedan visualizar y explicar por qué es correcta dicha fórmula (ver figura 10), identificando los cuadrados y los dos rectángulo de área axb.



$(5+2)^2$ $(4+3)^2$

Figura 10

Como dado cualquier triángulo rectángulo de catetos *a* y *b*, siempre podemos construir el cuadrado sobre la hipotenusa *c* de manera que quede inscrito en el cuadrado de lado a+b, generalizando lo realizado empíricamente con antelación en los casos de los segmentos no horizontales y basándonos en el método «marco» o cálculo de «fuera a dentro», tendremos que $c^2 = (a+b)^2–4(1/2)ab$, esto es, obtendremos que $c^2 = a^2+b^2$.

De la misma forma, podríamos demostrar la relación pitagórica recurriendo al método «puzle» o procedimiento de «dentro afuera», esto es, sumando al cuadrado de lado (b–a) los cuatro triángulos de catetos *a* y *b*, llegando a idéntica conclusión al recurrir a la fórmula de la diferencia de un binomio al cuadrado.

El recíproco del teorema, o la demostración que si en un triángulo se satisface la relación pitagórica necesariamente es rectángulo, lo pueden comprobar fácilmente trazando triángulos acutángulos y obtusángulos en un geoplano de 5 x 5 y estudiando la relación entre los cuadrados construidos sobre sus lados. Con los datos de la tabla de áreas anterior llegarán fácilmente a percatarse que en el caso de los triángulos acutángulos, la suma de dos de los cuadrados es siempre superior a la del tercero, mientras que en el caso de los triángulos obtusángulos comprobarán que uno de los cuadrados (precisamente el trazado sobre el lado opuesto al ángulo obtuso) tiene una área superior a la suma de los dos restantes.

Tarea 6: generalización

Se trataría, por último de generalizar a otros contextos el teorema y de aplicarlo en la resolución de distintos problemas de cálculo de distancias en el plano o en la resolución de problemas puramente geométricos (hallar la altura de distintos triángulos, etc.).

En este contexto una actividad interesante es proponerles que, en grupo, estudien si el teorema es válido cuando trazamos sobre los lados de un triángulo rectángulo otras figuras geométricas, concretamente, triángulos equiláteros o semicírculos. De esta manera se ven obligados a calcular la fórmula del área de un triángulo equilátero, hallando previamente una expresión de la altura en función del lado, para lo cual deben recurrir necesariamente al teorema de Pitágoras. Basándose en él se llega fácilmente a la demostración de que efectivamente la suma de áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre los catetos es igual al área del triángulo equilátero construido sobre la hipotenusa, así como que la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos es asimismo igual al área del semicírculo trazado sobre la hipotenusa.

Si la unidad didáctica se propone en el segundo ciclo de la ESO hay una actividad de ampliación particularmente interesante que es la comparación de los números irracionales que aparecen en la actividad 4. La rápida constatación en el geoplano de que el segmento (2, 2) mide exactamente el doble que el segmento (1, 1), sugiere la búsqueda de otras relaciones similares entre los segmentos hallados. Así, fácilmente encontrarán que el segmento (3, 3) mide el triple que el segmento (1, 1), el (4, 4) es el cuádruple del (1, 1) o el doble que el (2, 2), el segmento (4, 2) mide el doble que el (2, 1). Así pues, pueden escribirse igualdades como las siguientes:

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \quad \text{etc.}$$

lo que da un significado geométrico a las relaciones entre radicales y proporciona un buen punto de apoyo para explicar las operaciones aritméticas que permiten la simplificación de determinados radicales:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2} \quad \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2} \quad \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

A nuestro parecer, el conjunto de actividades propuestas en torno al tema «Teorema de Pitágoras» satisfacen los principios psico-pedagógicos de intervención que se deducen de una concepción constructivista del proceso de aprendizaje de los conocimientos científicos y que se explicitan como los más adecuados en el DCB.

Tarea 7 visión retrospectiva

Por último retomaríamos la actividad inicial, la que planteábamos a modo de «organizador avanzado» antes de desarrollar el conjunto de tareas que acabamos de describir, con la finalidad de que se expliquen, en pequeño grupo, por qué los cuadrados de 15 y 20 cm de lado configuran, al partirlos por determinados sitios, uno de 25 cm de lado. Será el momento también de resolver el problema algebraico que permite determinar, para cualquier terna pitagórica, el lugar exacto por donde realizar los cortes oblicuos de manera que podamos lograr la disposición deseada, actividad realizada en gran grupo (figura 2).

Se vuelve asimismo a estudiar la ficha que les habíamos entregado al comienzo de la unidad didáctica, y se introduce una situación de institucionalización de los conocimientos adquiridos en torno al estudio del teorema de Pitágoras. Para ello es conveniente plantearles que en una ficha definan los términos aprendidos (hipotenusa, catetos y la relación entre ellos) y expresen las ideas esenciales del recorrido realizado para demostrar tal relación. De esta manera cuando necesiten más adelante del teorema, sea al estudiar vectores, o distancias entre puntos o rectas en el plano cartesiano, etc., tendrán un instrumento útil y elaborado por ellos mismos al que recurrir.

A modo de recapitulación

A nuestro parecer, el conjunto de actividades propuestas en torno al tema «Teorema de Pitágoras» satisfacen los principios psico-pedagógicos de intervención que se deducen de una concepción constructivista del proceso de aprendizaje de los conocimientos científicos y que se explicitan como los más adecuados en el DCB. Asimismo, satisfacen los criterios recogidos en las orientaciones para la enseñanza y evaluación de dicho documento referidos al área de Matemáticas en la Educación

Secundaria Obligatoria. Pero no nos conformamos con poner de manifiesto los principios generales comunes a todas las áreas, a saber: es preciso partir del nivel de desarrollo del alumno, asegurando aprendizajes significativos, posibilitando que los realicen por sí mismos, mediante una modificación de sus esquemas de conocimiento, y a través de la realización de una intensa actividad por su parte, quedan perfectamente recogidos en la propuesta de actividades y tareas que acabamos de realizar. Pretendemos mostrar además cómo los principios de procedimiento asumidos, al menos los cinco más generales y determinantes de la metodología propuesta, también se han concretado en el desarrollo propuesto:

El profesor o la profesora,

- se centrará en la organización de las actividades de sus alumnos y alumnas, teniendo en cuenta los contenidos a aprender;
- planteará situaciones de aprendizaje en las que sus alumnos puedan adquirir progresivamente las nuevas nociones basándose en sus conocimientos anteriores y primitivos;
- procurará que en cada situación de acción perciban un problema a resolver, una dificultad que quieran y deban superar;
- favorecerá que identifiquen, inicien y desarrollen sus propios problemas relacionados con las situaciones planteadas;
- permitirá que utilicen sus conocimientos previos, aunque no sean eficaces para la resolución de la situación.

Bibliografía

ALEKSANDROV, A. D., A. N. KOLMOGOROV, M. A. LAURENTIEV y otros (1973): *La matemática, su contenido, método y significado* (3 vols.), Alianza, Madrid.

ALSINA, C., C. BURGUES y J. M. FORTUNY (1987): *Invitación a la Didáctica de la Geometría*, Síntesis, Madrid.

ARGÜELLES, J. (1989): *Historia de la matemática*, Akal, Madrid.

ARRIETA, J. (1986): «La teoría de Piaget y el desarrollo curricular en matemáticas: a) de la estructuras a las funciones; b) de las acciones a las operaciones», en *Actas del I Simposio sobre Psicología del Aprendizaje y Desarrollo Curricular*, realizado en Oviedo, 140-164.

— (1989): «La resolución de problemas y la educación matemática: hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 7(1), 63-71.

— (1989): «Investigación y docencia en didáctica de las matemáticas: hacia la constitución de una disciplina», *Studia Pedagógica*, n.° 21, 7-17.

— (1993): «¿Qué fué de la matemática moderna? Análisis didáctico del diseño curricular del área de Matemáticas», *Signos. Teoría y práctica de la educación*, n.° 8-9, 94-101.

BAS, M. y J. BRIHUEGA (1987): *Geoplanos y Mecanos*, MEC, Madrid.

BEDOS, M., M. FORNS y otros (1983): «Mesures de superficie i geoplá», *L'Escaire*, n.° 11, 9-16.

BELL, A. W., J. COSTELLO y D. KUCHEMANN (1983): *A Review of Research in Mathematical Education. Research on Learning and Teaching*, N.F.E.R.-Nelson, Windsor.

BELL, A. (1987): «Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas», en A ÁLVAREZ (comp.): *Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica.* Actas de las II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación, Aprendizaje Visor, Madrid, 73-93.

BROUSSEAU, G. (1986): «Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques», *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7.2, 33-116.

— (1990): «Le contrat didactique: le milieu», *Recherches en didactique des mathématiques*, vol.9 (3), 309-336.

CALVO, C. y otros (1986): *Matemáticas. Geometría*, Dirección General de Educación Básica, MEC, Madrid.

CASCALLANA, M. T. (1988): *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*, Santillana, Madrid.

CASTELNUOVO, E. (1973): *Geometría intuitiva*, Labor, Barcelona.

FIELKER, D. S. (1985): «Siete estrategias para plantear problemas en geometría», en MEC, *La enseñanza de la matemática a debate*, Madrid, 97-109.

FREUDENTHAL, H. (1973): *Mathematics as an educational task*, Reidel, Holland.

— (1983): *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

GARCÍA ARENAS, J. y C. BERTRÁN (1987): *Geometría y Experiencias*, Alhambra, Madrid.

GATTEGNO, C. (1964): «La percepción y la acción como bases del pensamiento matemático», en C. GATTEGNO y otros, *El material para la enseñanza de las matemáticas*, Aguilar, Madrid, 3-12.

GATTEGNO, C. (1964): «Materiales multivalentes», en C. GATTEGNO, y otros, *El material para la enseñanza de las matemáticas*, Aguilar, Madrid, 210-221.

GONOBOLIN, F. N. (1979): «Pupils'comprehension of geometric proofs», en J. W. WILSON, *Soviet Studies in the psychology or learning and teaching mathematics*, University of Chicago, vol. XII, 61-90.

GORMAN, P. (1988): *Pitágoras*, Crítica, Barcelona.

GRUPO CERO DE VALENCIA (1987): *De 12 a 16. Un proyecto de currículum de matemáticas*, Mestral Llibres, Valencia.

GUZMAN, M. de (1989): «Tendencias actuales de la Enseñanza de la Matemática», *Studia Paedagógica*, 21, 19-26.

HOWSON, A. G., C. KEITEL y J. KILPATRICK (1981): *Curriculum Development in Mathematics*, Cambridge University Press.

JAIME PASTOR, A. y A. GUTIÉRREZ RODRÍGUEZ (1990): «Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: el Modelo de Van Hiele», en S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática*, Alfar, Sevillla, 295-382.

LAKATOS, Y. (1978): *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*, Alianza, Madrid.

LERENA, C. (1985): *Materiales de sociología de la educación y de la cultura*, Grupo Cultural Zero, Madrid.

MEAVILLA, V. (1986): *La geometría como soporte de diversas cuestiones matemáticas*, Subdirección General de Perfeccionamiento del Profesorado-MEC, Madrid.

MEC (1989): *Diseño Curricular Base. Educación Secundaria Obligatoria II*, MEC, Madrid.

— (1992): *Secundaria Obligatoria. Matemáticas*, MEC, Madrid.

ORTON, A. (1990): *Didáctica de las matemáticas*, Morata, Madrid.

PIAGET, J. (1973): «Comments on mathematical education», en A. G. HOWSON, *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, 79-87. (Traducción al castellano en J. HERNÁNDEZ (comp.), *La enseñanza de las matemáticas modernas*, Alianza, Madrid, 1978).

— (1978): Introducción a la epistemología genética. I. El pensamiento matemático, Paidós, B. Aires.

POLYA, G. (1982): *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, (10ª ed.).

RADICE, L. L. (1983): *La matemática de Pitágoras a Newton*, Laia, Barcelona.

RIGON GRANDESSO, M. (1979): «Sobre el geoplá Gattegno de 9 puntes», *L'Escaire*, n.° 3, 5-21.

SHOENFELD, A. (1985): *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Nueva York.

SKEMP, R. (1980): *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*, Morata, Madrid.

STEINER, H-G. (1987): «Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education», *For the Learning of Mathematics* 7, 1, 7-13.

STODOLSKY, S. S. (1991): *La importancia del contenido en la enseñanza. Actividades en las clases de matemáticas y ciencias sociales*, Paidós-MEC, Madrid.

THOMAS, Y. (1968): «Matemáticos griegos», en J. R. NEWMAN, *SIGMA. El mundo de las matemáticas* (Vol. 1), Grijalbo, Barcelona, 116-137.

TURNBULL, H. W. (1968): «Los grandes matemáticos», en J. R. NEWMAN, *SIGMA. El mundo de las matemáticas* (Vol. 1), Grijalbo, Barcelona, 4-96.

VAN HIELE, P. M. (1986): *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education,* Academic Press, London.

VELARDE, J. (1992): «Teoría del "cierre categorial aplicado a las matemáticas"», en AA.VV., *La filosofía de Gustavo Bueno*, Revista Meta, Complutense, Madrid, 105-126.

VERGNAUD, G. (1988): «Psicología Cognitiva y del Desarrollo y Didáctica de las Matemáticas», en F. HUARTE (Coord.), *Temas actuales sobre psicopedagogía y didáctica*, Narcea, Madrid, 239-255.

Josetxu Arrieta
José Luis Álvarez
Antonio E. González
Sociedad Asturiana
de Educación Matemática
Agustín de Pedrayes