

SUMA 25

junio 1997, pp. 17-22

La enseñanza de la geometría en el momento actual y en el futuro inmediato*

Gonzalo Sánchez Vázquez

LA PONENCIA sólo pretende señalar unas líneas generales sobre la situación actual de la enseñanza de la geometría, la renovación que debe producirse en un futuro inmediato y la difícil problemática que entraña la elección de los contenidos, la didáctica más adecuada y el reciclaje de un profesorado no bastante preparado para esa renovación. He ahí las tres cuestiones clave.

Hace más de veinte años, a raíz del famoso «A bas Euclides» de Dieudonné en Royaumont, se produjo un progresivo desmantelamiento de los antiguos programas de geometría, inspirados en buena parte en los *Elementos*, sobre todo en los niveles básico y medio. Los contenidos geométricos se convirtieron, especialmente, en las enseñanzas media y superior, en simples capítulos de Álgebra Lineal. En la educación general básica, prácticamente se suprimieron las cuestiones geométricas, tanto las referentes a las propiedades de las figuras y sus relaciones de posición en el plano y en el espacio, como a las transformaciones geométricas y a la medida de áreas y volúmenes.

El profesorado en ejercicio tuvo que adaptarse a la corriente renovadora, a los nuevos programas, precipitada e insuficientemente, porque los cursillos de actualización en el nivel de EGB (no los hubo en general en la enseñanza media), no tuvieron otro interés que el de crear una inquietud en torno a la nueva orientación y mostrar la necesidad de que el mismo profesorado atendiera a su propio perfeccionamiento. Lo que, por otra parte, no era negativo en cierto modo, pero sí insuficiente. Las posibilidades de que un profesorado mal preparado y peor reciclado llevara adelante con éxito la reforma proyectada y la interpretase correctamente eran casi nulas desde el principio. Tratar de hacer una revolución en la enseñanza de las matemáticas sin contar con los medios y

* Ponencia presentada en las III Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, celebradas en Zaragoza los días 10, 11 y 12 de marzo de 1983 y organizadas por la Sociedad Aragonesa Pedro Sánchez Ciruelo de Profesores de Matemáticas y el Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza.

**HOMENAJE
A GONZALO
SÁNCHEZ VÁZQUEZ**

las personas, tenía que llevarla al fracaso y a empobrecer incluso el bagaje de conocimientos utilitarios de un gran número de alumnos, que no harían nunca carreras superiores. Y es dudoso que la enseñanza de la llamada matemática moderna, sin suficientes modelos concretos, y sin un conocimiento serio por la mayoría de los profesores de sus contenidos y de sus aplicaciones posteriores, haya contribuido a desarrollar hábitos lógicos en escala superior a la que se llegaba anteriormente cuando los profesores, con seguridad y convencimiento de lo que hacían, sabían sacar las primeras conclusiones generales a partir de situaciones concretas e incluso familiarizaban a los alumnos de un modo natural con el dominio de los automatismos de cálculo.

Por otra parte, la interpretación literal de los seguidores de la nueva programación fue mucho más allá de lo que proyectaban sus principales progenitores. Porque, ¿qué se pretendía?, ¿cuáles eran los objetivos de la reforma? No se trataba tanto de suprimir de la enseñanza de la geometría los contenidos que la habían llenado durante siglos (a pesar de la frase de Dieudonné de enviar al museo una buena parte de lo que se estudiaba hasta entonces en los niveles básico y medio), sino de romper el método axiomático-deductivo de su tratamiento. Se trataba, más bien, de *dinamizar* el estudio de las matemáticas, en general, y en particular de la geometría, alejándolo de una visión estática de las figuras y de una simple, aunque razonada, exposición de lemas, teoremas y corolarios. Había que poner mayor énfasis en las construcciones y transformaciones geométricas, y en su vinculación con el mundo exterior y con las ciencias fisiconaturales.

Pero estos objetivos no sólo se incumplieron, sino que se cayó en un nuevo formalismo, más rígido y vacío que el anterior. La pretensión de enseñar estructuras algebraicas, sin disponer casi de ejemplos ni modelos anteriores, ya en la EGB, y también en las enseñanzas media y superior, donde algunos cursos de Geometría consistían exclusivamente en el estudio de los módulos y otras estructuras, olvidando, por ejemplo, la existencia de las cuádricas y otras superficies (regladas, helicoidales, etc.) de tanta conexión con la técnica y con las ciencias experimentales, creó más que un gusto por la abstracción, una atmósfera de *desertización* y de falta de motivación en el estudio de la Geometría.

El propio Dieudonné afirmaría, unos dieciséis años más tarde, en 1975: «El profesor de Matemáticas que debe enseñar en el nivel medio debe frenar, en lo posible, sus gustos y tendencias de matemático puro y procurar que *los resultados y métodos que trate estén próximos a la realidad sensible y sean susceptibles de aplicaciones lo más inmediatas posibles*. Se puede deplorar este aspecto *utilitario*, pero es exigido por la composición misma de los alumnos». Deben resaltarse tres ideas fundamentales: 1) el

*Y es dudoso
que la enseñanza
de la llamada
matemática
moderna,
sin suficientes
modelos concretos,
y sin un
conocimiento
serio por
la mayoría de
los profesores
de sus contenidos
y de sus
aplicaciones
posteriores,
haya contribuido
a desarrollar
hábitos lógicos en
escala superior a
la que se llegaba
anteriormente...*

profesor debe frenar sus tendencias de matemático puro, 2) debe acercar los contenidos y métodos a la realidad exterior, y 3) debe conectar lo que explica y cómo lo explica con inmediatas aplicaciones. ¡Qué lejos están esas reflexiones del tipo de enseñanza formalista que se impuso durante tantos años!

El daño que este planteamiento educativo ha producido ha sido casi irreversible para algunas generaciones de alumnos y se tardarán bastantes cursos en recuperar una enseñanza de la Geometría, y de la Matemática en general, que cumpla los objetivos señalados de la reforma, desvirtuados posteriormente. Aunque es muy conocida del profesorado la incultura geométrica a que han llegado nuestros alumnos, no nos resistimos a ofrecer algunos botones de muestra:

- 1.º A los alumnos de 1.º de BUP de Sevilla se les sometió, al iniciar el curso 81-82, a un test de conocimientos previos, algunos de ellos de Geometría. Más del 70% no supieron definir lo que es un paralelogramo (lo confundían muchas veces con el rectángulo), y apenas un 50 % sabían dibujar un croquis del mismo.
- 2.º Los alumnos que llegan a 3.º de BUP y COU desconocen, en su inmensa mayoría, las propiedades que relacionan los elementos de un triángulo, cuando se les exigen ejercicios y demostraciones algebraicas. Apenas distinguen una mediatriz de una mediana, ignoran la propiedad fundamental de los puntos de las bisectrices de los ángulos de dos rectas o de la mediatriz de un segmento, carecen de la noción de lugar geométrico y desconocen las fórmulas de las áreas y volúmenes de figuras fundamentales. Cuando este curso tuvimos que explicar en el COU la interpretación geométrica del producto mixto de tres vectores, la mayoría de nuestros alumnos no sabían definir lo que era un paralelepípedo y, menos aún, hallar su volumen.

3.º A fuerza de haber sido educados en el empleo exclusivo de métodos analíticos, nuestros estudiantes se sienten incapaces de hacer un croquis de los elementos en cuestión, intentando a toda costa resolver los problemas geométricos de una manera algebraica, negando, por errores de cálculo, la posibilidad de soluciones cuando son evidentes gráficamente, o al revés.

No basta la resolución de un sistema de ecuaciones, ni la discusión detallada de su compatibilidad por el teorema de Rouché. Hace falta, en los problemas geométricos, acompañar a la discusión de los diversos casos una interpretación gráfica, para que se comprenda toda la significación de los resultados. Un ejemplo claro se presenta al estudiar en el COU la cuestión de las posiciones relativas de tres planos. Ni la mayoría de los textos, ni por supuesto nuestros alumnos, hacen una representación gráfica de los casos posibles. La intuición del espacio no se cultiva ni se estimula y no se comprende lo enriquecedor que podría resultar, en la enseñanza de la Geometría, la combinación simultánea del lenguaje gráfico y de los recursos algebraicos.

Así, el mundo de las Matemáticas se convierte en nuestras clases en un juego formal vacío y sin interés, sin que se vean las posibles aplicaciones al mundo físico que nos rodea y que conocemos. Pero el abandono de la intuición no ha representado, en compensación, mejoramiento del rigor lógico y del dominio de la expresión. Las matemáticas, desde el punto de vista educativo general, deben jugar un papel importante para

usar adecuadamente el lenguaje. Se observa, al revés, un creciente *pasotismo* en cuanto a la expresión oral y escrita, un descuido cada día mayor en la corrección de las definiciones y en el rigor de las demostraciones, que se sustituyen por la repetición memorizada de pasos formales.

Cuando pedimos que en la enseñanza de las Matemáticas y en particular de la Geometría se busquen motivaciones

intuitivas y relaciones con lo concreto, no se pretende quedarse en la situación de partida, por muy divertida y sugerente que sea. Hay que llegar después a conclusiones generales, a la demostración de propiedades que ya no son tan evidentes e intuitivas. Descubrir las, con nuestros alumnos, dará una visión atractiva del poder lógico y de la fuerza investigadora de las Matemáticas.

No defendemos este punto de vista porque sintamos nostalgia de nuestras viejas y enterradas geometrías métrica y proyectiva. Afortunadamente, hacia los años setenta, se ha producido una reacción en el mismo sentido en varias naciones europeas, aunque a nuestro país no ha llegado todavía con fuerza legal a imponerse en los métodos y las programaciones. Hemos citado anteriormente la opinión, de vuelta, prestigiosa de Dieudonné, y una voz tan autorizada como la del profesor Freudenthal así

lo propugnaba esta misma mañana en las Jornadas, hablando de un futuro en que *se habrá abolido en la escuela el Álgebra Lineal*.

No se trata, tampoco, ahora, de una vuelta a Euclides, ni de un rechazo de las aportaciones a la enseñanza de la geometría de los puntos de vista vectorial y algebraico, que han sido muy valiosas para actualizar métodos y contenidos. Por otra parte, hay que tener presente que la



selección de las materias y el orden en que deben figurar en los programas de los distintos niveles tiene que adaptarse a la capacidad mental e intereses vitales de las diferentes edades y a sus relaciones con otras disciplinas, y no tiene por qué seguir rigurosamente las exigencias de una estructuración sistemática y ordenada. Confundiendo lo que debe ser una fundamentación ordenada de las matemáticas con su enseñanza, un profesor afirmaba, en una reunión nacional de matemáticos españoles celebrada en Sevilla en 1964, que no era posible enseñar a calcular la diagonal de un cuadrado a niños de doce años porque no era posible introducir a esa edad con suficiente claridad el concepto de número real. Para él no tenía sentido enseñar una matemática de la aproximación, sobre un objeto geométrico bien conocido, adaptada al nivel y a los intereses de los alumnos.

Por supuesto que la selección y ordenamiento de contenidos en los diferentes niveles no es nada fácil, como no lo es su didáctica, y ahí está una gran tarea tanto para programarlos como para experimentarlos.

En la enseñanza general básica se están dando pasos positivos, como la publicación en diciembre del año anterior de las enseñanzas mínimas del ciclo superior, aunque haya quedado aplazada su aprobación definitiva.

Ahí están nuevamente las cuestiones clásicas de la Geometría métrica elemental, relativas a las propiedades de las figuras y a la medida de longitudes, áreas y volúmenes. Quizás se acentúa más esto último, las cuestiones referentes a la medida, y no se tratan suficientemente las relaciones y propiedades de las figuras, tanto en el plano como en el espacio, que apenas si se toca. En este nivel, hay que aprovechar más las posibilidades de la intuición, el desarrollo de un conocimiento de las figuras, que partiendo de la realidad concreta pueda conducir al hallazgo de propiedades importantes, mediante una enseñanza dinámica, como propugna la profesora Emma Castellnuovo. Años fecundos para utilizar a fondo la experiencia familiar y de la calle que tienen nuestros alumnos de muchas nociones geométricas, y no preocuparse excesivamente de demostraciones formales, cuya necesidad comprenderán más adelante. En todo caso no creemos que un enfoque intuitivo y dinámico de la enseñanza de la Geometría en el nivel de básica no deje sitio en los últimos cursos de su ciclo superior para la deducción y el razonamiento.

En las enseñanzas medias la programación es más difícil, pero debe contar, en primer lugar, con la existencia de dos ciclos, cada uno de dos años; el primero, común y posiblemente obligatorio, para alumnos de 15 y 16 años; el segundo, optativo, para alumnos de 17 y 18 años de edad.

En las enseñanzas medias la programación es más difícil, pero debe contar, en primer lugar, con la existencia de dos ciclos, cada uno de dos años; el primero, común y posiblemente obligatorio, para alumnos de 15 y 16 años; el segundo, optativo, para alumnos de 17 y 18 años de edad.

En el primer ciclo, deben consolidarse y completarse los conocimientos anteriores, con un tratamiento más lógico y formal. Deben estudiarse más a fondo las transformaciones de igualdad (traslaciones, simetrías, giros), que proporcionan sugestivos ejemplos de grupos (adiós a la pretensión de introducir en básica la estructura de grupo sin otro ejemplo a mano que el aditivo de los enteros) y remontarse después a las transformaciones de semejanza (homotecias y semejanzas). Los problemas de construcciones gráficas pueden no sólo aclarar estos conocimientos geométricos, sino también estimular la creatividad y la imaginación de nuestros alumnos.

En este mismo ciclo, debería procederse a un tratamiento más detallado de la geometría del espacio y de las transformaciones de igualdad y semejanza. Además, deberían estudiarse también la trigonometría, propiedades de los poliedros y nociones de geometría sobre la superficie esférica (un ejemplo de geometría no euclidiana!).

En el segundo ciclo de las enseñanzas medias, donde las matemáticas son ya una materia optativa, deberá darse un tratamiento algebraico y vectorial a los contenidos geométricos. Aquí encaja la geometría afín y la euclídea del plano y del espacio, precedidas del estudio de los espacios vectoriales. Está claro que el rigor y el sentido crítico y autocrítico deben desarrollarse en este ciclo, que capaciten al alumno para los estudios superiores, y que la enseñanza no puede ser meramente informativa ni de exclusiva preparación para unas pruebas de selectividad.

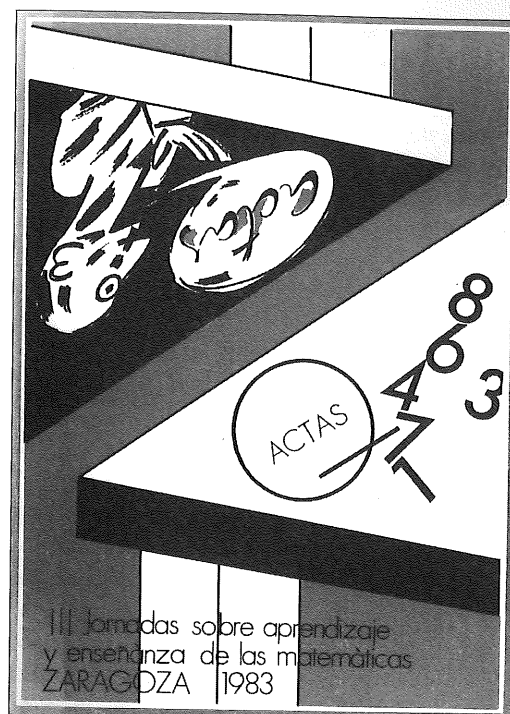
En este ciclo podría entrarse en la consideración de otras transformaciones geométricas, las afines, las proyectivas y las de inversión, junto con el estudio gráfico y analítico de las cónicas y una introducción a los sistemas de representación. No es posible exigir que los profesores de Dibujo enseñen en Dibujo Técnico una geometría descriptiva sin que los alumnos, y en muchos casos los mismos profesores, posean los conocimientos geométricos indispensables.

En cuanto a la enseñanza de la Geometría en la educación superior, muchos profesores universitarios echan de menos la carencia de modelos concretos en que apoyar el conocimiento de formas y estructuras abstractas y más generales; pero, sobre todo, si las escuelas universitarias y las facultades siguen teniendo la responsabilidad de formar los profesores de los niveles básico y medio, no pueden borrar de sus planes de estudio totalmente la clásica geometría métrica y proyectiva, el estudio o representación del espacio, de las transformaciones y de las cónicas desde un punto de vista sintético. No será posible llevar a cabo plenamente la renovación necesaria de la enseñanza de la Geometría si no se comprende que, además de formar matemáticos puros, hay que preparar también matemáticos *prácticos* para la industria y la técnica, y, sobre todo, teniendo en cuenta que es el destino de la mayoría de los titulados, a los futuros profesores de nuestras escuelas, colegios, institutos y centros de formación profesional.

En varios países está en marcha esta renovación, en algunos con carácter experimental y en otros, como Francia, ya está incluida en los programas de secundaria, aunque todavía se advierten reservas y vacilaciones, especialmente en los nuevos textos. Hay como un cierto temor a desterrar los planteamientos formales, por lo que resulta decepcionante hojear algunos de los nuevos textos franceses de 4.º y 3.º, correspondientes a nuestros 8.º de EGB. y 1.º de BUP. He aquí algunos ejemplos:

1.º En el texto escrito para alumnos del nivel de 8.º de EGB, se define así la simetría axial: «Dada una recta r del plano P , existe una biyección única de P hacia P , que conserva las distancias, todo punto de r es invariante y los semiplanos abiertos definidos por r permutan entre sí. Esa biyección recibe el nombre de simetría axial de eje r ». Definición que está bien lejos de un lenguaje natural, que más que iluminar confunde y aleja al alum-

...si las escuelas universitarias y las facultades siguen teniendo la responsabilidad de formar los profesores de los niveles básico y medio, no pueden borrar de sus planes de estudio totalmente la clásica geometría métrica y proyectiva, el estudio o representación del espacio, de las transformaciones y de las cónicas desde un punto de vista sintético.



no de la intuición. Y cuando define el concepto de rectas ortogonales: «Una recta r es ortogonal a otra s , si la segunda es invariante mediante la simetría axial de eje r ». Para alumnos de esta edad, es evidente que dos rectas son perpendiculares si forman ángulos iguales al cortarse. ¿Por qué hacer difícil y oscuro lo que es evidente y claro para el alumno?

- 2.º Cuando el mismo texto habla de paralelogramos particulares, define el rombo como el paralelogramo cuyas diagonales son perpendiculares, y el rectángulo como el paralelogramo cuyas diagonales son iguales. A continuación, se prueban como teoremas que el rombo es un paralelogramo de lados iguales, y que el rectángulo es un paralelogramo que tiene sus lados consecutivos perpendiculares. Claro que este camino puede seguirse, pero, ¿no sería más natural y de acuerdo con la intuición del alumno el contrario?
- 3.º Introducido el teorema de Thales en el curso anterior, el texto que hemos examinado correspondiente a nuestros alumnos de 1.º de BUP, dedica un largo capítulo a la noción de razón de proyección ortogonal de dos ejes, definida como el cociente de la medida de un segmento de una de las rectas respecto a la de su proyección ortogonal sobre la otra, para probar después que la suma de las de los cuadrados de las razones de proyección ortogonal de una recta respecto a otras dos perpendiculares es igual a la unidad. De ahí deduce el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo. Como se ve, introducción de nuevos conceptos artificiosos e innecesarios, demostraciones tediosas y formalistas, etc. ¿No habría sido más acce-

sible y sugerente hacer una de las muchas demostraciones gráficas que existen del célebre teorema?

En cuanto a nuestro país, el movimiento de recuperación de la enseñanza de la Geometría empieza a dar sus primeros pasos. La tarea será larga, aunque ya se está creando una conciencia del problema en el profesorado (reunión de Gijón, II Jornadas sobre aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas de Sevilla, proyecto de programas del ciclo superior de EGB, todo ello en 1982). Si son serias y nada fáciles las cuestiones de elaborar los nuevos programas, coordinando los diferentes niveles, renovar la didáctica de la geometría acercándola más a las motivaciones concretas y a sus aplicaciones en el mundo real, todavía es más preocupante la gran cuestión del reciclaje del profesorado, sin el cual toda reforma carecería del eje conductor. Miles de profesores de educación general básica y de enseñanzas medias necesitan de una preparación profunda, más que de una simple actualización de materias como la Geometría, que no han estudiado nunca desde un punto de vista gráfico. No se trata sólo del perfeccionamiento de la didáctica sino de la adquisición de los más elementales conocimientos geométricos, en muchos casos. En este terreno, nuestros grupos y sociedades de profesores de Matemáticas pueden y deben desempeñar un papel fundamental, suplementando la escasa iniciativa oficial, al mismo tiempo que siguen trabajando en el mejoramiento de la didáctica y la renovación de los programas.

Bibliografía

- KLEIN F. (1931): *Matemática elemental desde un punto de vista superior*; vol. II: *Geometría*, Biblioteca Matemática, Madrid.
 HADAMARD (1932): *Geometría elementaire*, 2 vols., Armand Colin, París.

Gonzalo Sánchez Vázquez

En esa fecha de 1983,
 Presidente de la
 Sociedad Andaluza
 de Educación Matemática
 Thales

- DELTHEIL-CAIRE (1950): *Geometrie (Transformations-coniques)*, B. Bailliere, París.
 PUIG ADAM (1948): *Geometría métrica*, 2 vols., Madrid.
 ENRIQUES y otros (1948): *Fundamentos de la Geometría*, Iberoamericana, Buenos Aires.
 ENRIQUES (1930): *Geometrie projective*, Gauthier-Villars, París.
 HILBERT (1953): *Fundamentos de la Geometría*, Instituto Jorge Juan, C.S.I.C., Madrid.
 PETERSEN (1955): *Métodos y teorías para la resolución de los problemas de construcciones geométricas*, Giner, Madrid.
 CASTELNUOVO, E. (1981): *La Matematica / La Geometria*, La Nuova Italia, Roma.
 CASTELNUOVO, E.: *Matematica nella realtà*, Edit. Boringhieri.
 DIEUDONNE (1969): *Algebre lineaire et Geometrie elementaire*, Hermann, París.
 CHOOUET, G. (1967): *L'Enseignement de la Geometrie*, Hermann, París.
 BLUMENTHAL (1961): *A modern view of Geometry*, Freeman, San Francisco and London.
 REVISTA DE BACHILLERATO, «Matemáticas», cuaderno monográfico núm. 5, D. G. Enseñanzas Medias, Madrid, 1980.
 ACTAS DE LAS II JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS, Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas, Sevilla, 1983.

