

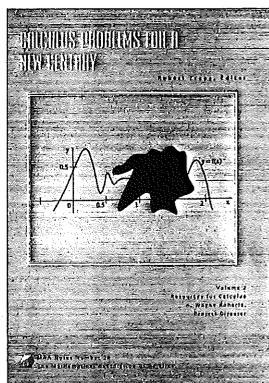
CAPITULO XXXIII.- Correlación de constantes y correcciones: Problema sobre la correlación de constantes. Error Standard de los coeficientes de correlación y regresión simple. Fórmulas prácticas de correlación.

CAPITULO XXXIV.- Correlación espúrea y series de tiempo: Correlación espúrea. Series de tiempo. Método de las diferencias finitas. Autocorrelación y correlación desplazada (serial). Método de las variables sin autocorrelación y de las funciones ortogonales. Método de Frisch (*Confluence Analysis*). Otros métodos. Observaciones sobre las series de tiempo. Jerarquización de las variables.

**Víctor Arenzana Hernández**

**CALCULUS PROBLEMS FOR A NEW CENTURY**

**A. Wayne Roberts.**  
**Project Director**  
**MAA Notes Number 28**  
**The Mathematical Association of America**



En una de las diversas colecciones de libros interesantes de la Mathematical Association of America, en concreto en la MAA Notes, aparecen cinco volúmenes, números 27 a 31, que corresponden a un proyecto, «Resources for Calculus», diseñado bajo el convencimiento de que el Cálculo que venimos explicando a nuestros alumnos tanto en el primer año de universidad como en los últimos cursos en los institutos, en lugar de ser una culminación satisfactoria de su preparación en la Enseñanza Secundaria, o una puerta para futuros estudios, se ha convertido simplemente en un obstáculo a superar. Una de las razones que apunta, es que la elección de los temas a dar y sobre todo de los métodos utilizados para presentar estos temas, no está muy en consonancia con los posteriores intereses de una gran cantidad de estudiantes que se incorporan al estudio de esta asignatura.

Yo he trabajado en los dos últimos cursos el segundo volumen de esos cinco, *Calculus Problems for a New Century*, algunos temas en un curso de COU y otros en cursos de 1.º de Matemáticas y 1.º de Químicas y, para empezar, debo decir que es un libro totalmente diferente a los libros de problemas de cálculo que he manejado hasta ahora. Los problemas de este libro están pensados para que los estudiantes graben las ideas, no las técnicas o las rutinas del cálculo. El libro huye de problemas que requieran trucos de cálculo. Las soluciones, segunda parte del libro, van acompañadas de comentarios que, normalmente, son más interesantes que las respuestas a las cuestiones que se plantean. En estos comentarios, a veces, se hace alguna indicación sobre cómo se podría extender una determinada cuestión, o cómo podría construirse en un contexto diferente (normalmente en la Física), o se hace algún comentario histórico relacionado con el problema, o se dan las razones por las que se eligió tal problema.

El libro, por otra parte, insiste en algo que no es muy familiar entre nosotros. Varias veces, anima a los estudiantes a que discutan entre ellos y a que escriban, con claridad y completamente, sus razonamientos. «Con la práctica –dice a los estudiantes– descubrirás que discutir y escribir nos ayuda a pensar con más claridad y a desarrollar una mejor comprensión de la materia que estás estudiando».

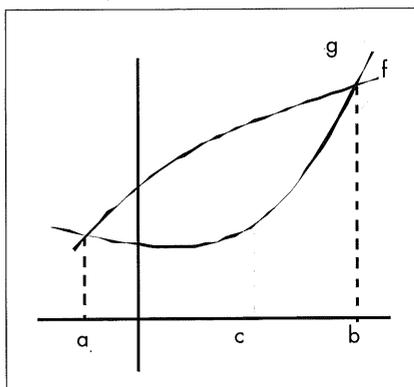
El libro es bastante voluminoso. Tiene 425 paginas, tamaño folio, de las cuales prácticamente la mitad se dedican a los enunciados de los problemas y el resto a las soluciones. En cualquier caso, la gran cantidad de gráficas que lleva, hace que sea tan elevado el número de paginas.

Los ocho primeros temas, Funciones y Gráficas, La Derivada, Valores Extremos, Primitivas y Ecuaciones Diferenciales, La Integral Definida, Retorno a la Integral Definida, Sucesiones y Series Numéricas y Sucesiones y Series de Funciones, corresponderían a funciones de una variable y los cuatro últimos, La Integral en  $R^2$  y  $R^3$ , Vectores y Geometría Vectorial, La Derivada en dos o tres Variables, e Integrales de Línea, serían temas sobre funciones de varias variables que, en muchas facultades y escuelas técnicas de nuestro país, se ven en un primer curso de Cálculo.

No quería terminar esta reseña sin mostrar algún problema de los

que aparecen en el libro, por lo que, aún, corriendo el riesgo de no poner uno significativo, sí merece la pena el siguiente, al menos por lo que sorprende a nuestros alumnos de COU:

Dos funciones,  $f$  y  $g$ , derivables, cuyas gráficas se muestran en la figura. El punto  $c$  es aquel en que el segmento vertical comprendido entre las dos gráficas tiene máxima longitud. Demostrar que las tangentes a  $f(x)$  y  $g(x)$  en  $x = c$  son paralelas.



Como véis, algo absolutamente elemental pero que requiere tener una idea clara de lo que se está tratando.

No es excesivamente complicado adquirir el libro. Pedirlo a la M.A.A. es la más simple. Para hacerlo directamente basta escribirles y mandarles el número de VISA. Mathematical Association of America. 1529 Eighteenth Street, NW, Washington, DC 2036. Desde que lo pides hasta que lo tienes en las manos tienes que esperar 2 meses. A partir de ahí, a disfrutar de él.

**Joaquín Hernández**

**MATEMÁTICAS  
MATERIALES DIDÁCTICOS  
ESO PRIMER CICLO  
2 volúmenes  
Javier Bergasa Liberal  
M<sup>a</sup> Dolores Eraso Erro  
M<sup>a</sup> Victoria García Armendáriz  
Sergio Sara Goyén  
Gobierno de Navarra.  
Departamento de Educación,  
Cultura, Deporte y Juventud.  
Pamplona, 1995  
ISBN: 84-235-1467-6  
437 páginas**



La implantación del nuevo sistema educativo supone grandes e importantes cambios que no sólo afectan a su estructura, sino también a qué, cómo y cuándo enseñar en las diferentes áreas. El carácter abierto y flexible del currículo plantea nuevas necesidades en el trabajo de los equipos docentes, la elaboración de los Proyectos Curriculares supone tomar importantes opciones, entre las que se puede destacar la de «establecer los principales materiales didácticos que se van a utilizar». Es una tarea excesiva y desproporcionada para los profesores, sólo se puede asumir si por parte de las Administraciones Educativas se apoya con los suficientes medios, entre los que debe figurar la de ofrecer una amplia gama de materiales curriculares de calidad.

Estos dos volúmenes editados por el Gobierno de Navarra están dentro de esta oferta de materiales, que facilitan a los seminarios de matemáticas elaborar un proyecto curricular propio, real y eficaz.

Los materiales que los autores nos presentan se pueden considerar, como ellos mismos lo definen, una propuesta del desarrollo didáctico del área de Matemáticas para el Primer Ciclo de Educación Secundaria Obligatoria. Está bien estructurada, fundamentada y articulada. Presenta gran cantidad de elementos para su reflexión, que facilitan la tarea de planificar la actividad matemática para el ciclo.

La propuesta tiene dos niveles. Uno, general y estratégico, programación general, que expresa todos los aspectos de carácter organizativo, secuencial y didáctico, hace referencia a toda la etapa. Otro, de mayor concreción, que presenta cada una de las catorce unidades didácticas previstas en la programación general para el Primer Ciclo.

La programación general trata diferentes aspectos: el pensamiento didáctico sobre el que se sustenta, principios de procedimiento didáctico, análisis del significado de los objetivos generales, organización y secuenciación de los contenidos, estudio de los cinco bloques de contenido desarrollados sobre un doble eje, el horizontal asociado a las formas de representación (identificación, codificación e interpretación) y otro vertical regido por una pauta constructiva y didáctica.

La configuración de los cinco bloques didácticos está determinada por la búsqueda de un aprendizaje de la máxima significación. En cada uno de los bloques se hace referencia a las pautas y patrones que se tienen en cuenta para su desarrollo y mediante un cuadro se establecen las relaciones que hay entre las pautas constructivas y los patrones o contextos de referencia orientados a buscar una significación concreta. Por ejemplo, en el bloque didáctico «Objetos geométricos» la pauta adoptada lleva a tratar los contenidos a través de actividades de construir, clasificar e inferir y se apoya en un esquema o patrón espacial.

La propuesta de las unidades didácticas establece los posibles «itinerarios» constructivos que se van a seguir para cada dominio (numérico, geométrico y combinatorio) y mediante mapas conceptuales se establecen todo tipo de relaciones entre las unidades.

Los criterios de evaluación y una amplia bibliografía cierran la primera parte o programación general.

Las unidades didácticas están claramente articuladas para facilitar la construcción del conocimiento matemático, todas las actividades plantean interrogantes a través de problemas desde los cuales los alumnos pueden elaborar conceptos y adquirir procedimientos que pueden aplicar en diferentes

contextos, lo que facilita la apreciación del sentido y utilidad de las matemáticas.

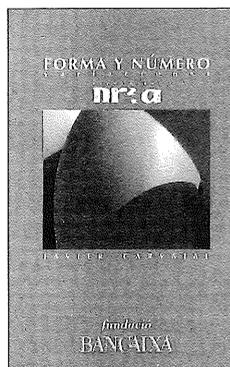
Cada unidad didáctica comienza con una introducción que justifica la parcela de conocimiento que aborda, luego se hace un análisis de los contenidos según los tres tipos: conceptuales, procedimentales y actitudinales y una concreción de objetivos. Para facilitar un aprendizaje significativo se ha dado gran importancia a la estructura interna y se explican las diferentes fases en que se apoya el desarrollo de cada unidad. También se analiza la evaluación en los tres aspectos: inicial, formativa y sumativa.

Cada unidad presenta un número de actividades suficientes para mostrar qué y cómo se quieren enseñar los contenidos propios del tema y, como se ha dicho antes, todas plantean interrogantes mediante problemas y propuestas abiertas en diferentes contextos que facilitan el desarrollo de las capacidades y adquisición de aprendizajes relativos al método matemático, a actitudes y hábitos de trabajo y a la valoración y apreciación del conocimiento matemático.

Creo que está propuesta curricular es un material que permite después de su estudio y reflexión, una recreación adaptada a cada uno de nuestros institutos, es un buen ejemplo de qué se entiende por una programación general, un proyecto curricular.

**Jesús Antolín**

**FORMA Y NÚMEROS.  
VARIACIONES.  $\pi r^2 \cdot a$   
Javier Carvajal  
Miquel Francés (realizador)  
Fundación Bancaixa  
15 minutos  
Material complementario:  
Libro catálogo  
del mismo título**



Javier Carvajal nos vuelve a sorprender con una de sus maravillosas realizaciones. Se trata de un documento audiovisual de gran belleza que relaciona las matemáticas, las

formas geométricas y la escultura. Como muy bien lo resume su autor: «A través de la lógica me encuentro con la Naturaleza».

Carvajal parte de uno de los cuerpos más sencillos, el cilindro ( $\pi r^2 a$ ), y a partir de él, mejor de sus secciones, genera multitud de formas, algunas muy familiares pero cuya procedencia desconocíamos, y otras realmente originales. Todo ello a través de un doble proceso:

- Analítico: explorando normas geométricas y relaciones numéricas.
- Sintético: aplicando principios creativos de repetición y variación de las formas primarias obtenidas del proceso anterior.

El vídeo utiliza imágenes animadas generadas en 3-D, de una gran plasticidad y elocuencia.

La intersección de un plano con el cilindro nos proporciona una gama de secciones elípticas. Cortando el cilindro mediante dos planos podemos obtener una gran variedad de módulos sólidos. Si la recta de intersección de los planos es secante al cilindro tendremos gajos.

Si esta recta coincide con el diámetro la yuxtaposición de los gajos nos permite construir una teórica esfera. El desplazamiento de esta línea de intersección hacia la generatriz nos proporciona otros gajos que nos permiten construir todo tipo de ovoides y calabazas, formas muy frecuentes en la Naturaleza.

Si la recta de intersección de los planos es tangente o exterior al cilindro obtenemos rodajas. La yuxtaposición de estas rodajas hasta completar  $360^\circ$  nos permite construir el toro.

Pero, y aquí comienzan las verdaderas sorpresas, si pegamos las rodajas girándolas una respecto de la siguiente el mismo número de grados, obtenemos una forma que comienza a enroscarse sobre sí misma para dar origen a... una columna salomónica. Cuanto mayor sea el ángulo de giro mayor será el número de vueltas. Si el giro es de  $180^\circ$  volvemos a obtener el cilindro.

A partir de aquí, Carvajal aplica el proceso sintético para demostrarnos como la combinación creativa de estas formas da origen a auténticas obras de arte.

Si las rodajas van disminuyendo de forma progresiva de radio nos podemos introducir en un mundo casi mágico de formas originales: el cuerno de muchos rumiantes, el nautilus...

Las rodajas más simples, las obtenidas mediante dos planos paralelos, la famosa raja de chorizo, también nos deparará en el vídeo sorpresas agradables.

Efectivamente la yuxtaposición de este tipo de rodajas giradas  $180^\circ$  una respecto de la anterior genera una forma similar a un fuelle.

La obtención de rodajas no simétricas se obtiene mediante la combinación de dos movimientos: traslación y giro. La combinación de rodajas de este tipo de forma creativa produce espectaculares formas escultóricas.

Por último, lo que Javier Carvajal denomina despojos, los trozos sobrantes o restos de la intersección, mordedura o penetración de dos o más cilindros, constituyen un material que combinado de forma apropiada genera formas muy cercanas a la naturaleza: semillas, caparazones, colas de crustáceos...

Jugando con polígonos distintos el autor nos sumerge en un apasionante mundo de formas espirales en el espacio, de la que merece especial atención la que denomina espiral

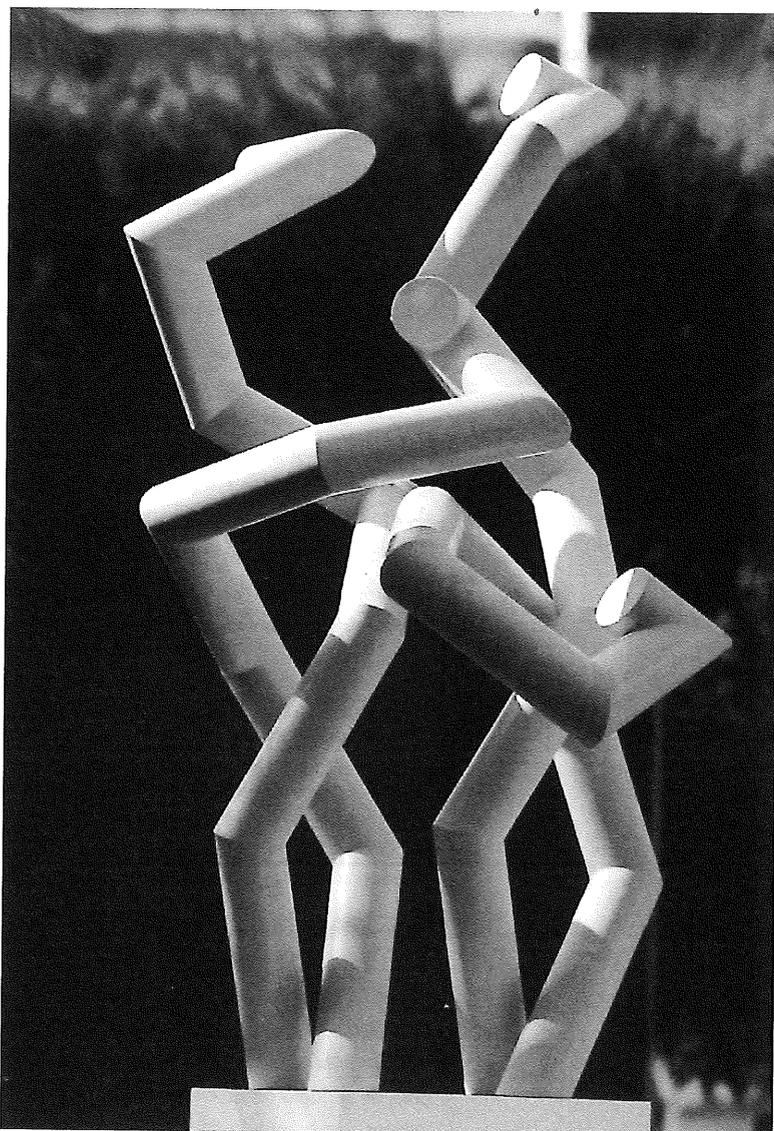
El documento no se queda en el desarrollo del proceso analítico. Para terminar, y como culminación del proceso sintético que el autor nos había prometido al principio, nos presenta un extraordinario muestrario de esculturas basadas en las formas geométricas obtenidas con todos los materiales mostrados.

Acompaña al vídeo un libro-catálogo de la exposición de las esculturas [algunas de sus reproducciones aparecen en este

número de SUMA], con textos explicativos del propio autor, incluyendo el *story board* del vídeo, junto a textos de carácter científico, poético, musical, plástico... con unas excelentes fotografías.

En fin, un documento que para aquellos profesores que impartan las Matemáticas de la forma se convertirá en un material casi imprescindible para utilizar en clase. Y para el resto un material fabuloso, para disfrutar y deleitarse con la vinculación, alejada de los tópicos y lugares comunes, entre las Matemáticas y el Arte.

**Antonio Pérez Sanz**



*Espiral multipoligonal*  
Javier Carvajal