SUMA 24
febrero 1997, pp. 63-66

La medida de distancia en Barcelona

K. E. Hirst

IDEAS Y RECURSOS

En este trabajo se define una distancia entre dos puntos de la ciudad de Barcelona, considerando que las calles forman un enrejado de vías paralelas y perpendiculares y que además existe la avenida *Diagonal* que las atraviesa. Finalmente, el autor pregunta cómo se podría definir la distancia si hubiese dos avenidas diagonales en una ciudad.

BARCELONA es una ciudad muy bonita. Muchas de las calles están en forma de reja rectangular, así como Manhattan (Nueva York) o en partes de Lisboa. Pero en Barcelona existe una calle que se llama la *Diagonal* (*Avingunda Diagonal* en catalán) (ver figura 1).

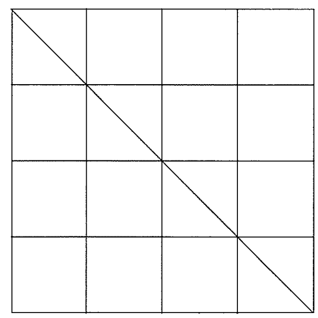


Figura 1

Sin la *Diagonal* la fórmula para la distancia entre dos puntos es muy fácil:

$$d(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

Esta fórmula define una métrica para el plano (*Manhattan metric*).

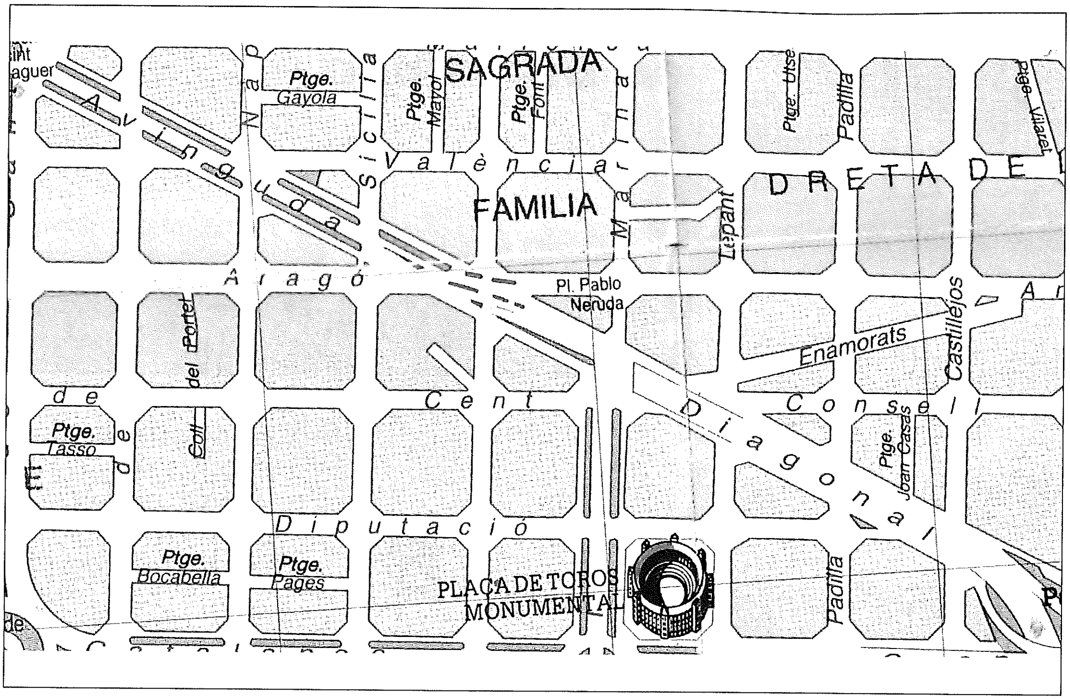
¿Pero cuál es la fórmula para la distancia entre dos puntos con la *Diagonal*?

Usamos coordenadas cartesianas y suponemos que la *Diagonal* tiene ecuación y = –x. La fórmula para la distancia d(A, B) depende de A y B. Hay varios casos.

Suponemos que $y_A \geq y_B$. Si A, B forman un segmento horizontal o vertical,

$$d(A,B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

(Si AB es horizontal, $y_A - y_B = 0$, y si AB vertical $x_A - x_B = 0$.)



Plano parcial de Barcelona

Si A, B son las esquinas noreste y sudoeste de un rectángulo,

$$d(A, B) = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

sin reparar si la *Diagonal* atraviesa el rectángulo, como en la figura 2.

Tenemos la misma fórmula si A, B son las esquinas noroeste y sudeste de un rectángulo que no esté atravesado por la *Diagonal.*

Pero si la *Diagonal* atraviesa este rectángulo la fórmula para la distancia es diferente. Por ejemplo, en la figura 3,

$$A = (-2, 0);\ B = (1, -2);$$

$$|x_A - x_B| + |y_A - y_B| = 5,$$

pero

$$d(A, B) = AO + OC + CB = 2 + \sqrt{2} + 1 < 5$$

No es posible descubrir una fórmula única para d(A, B) en estos casos, porque depende de la posición del rectángulo relacionado con la *Diagonal.* Podemos dibujar varias figuras. Algunas se ven en la figura 4.

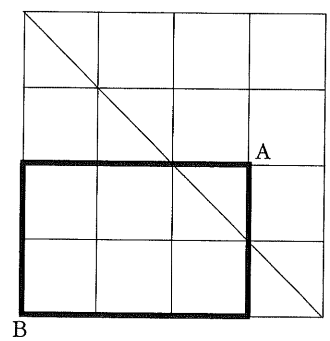


Figura 2

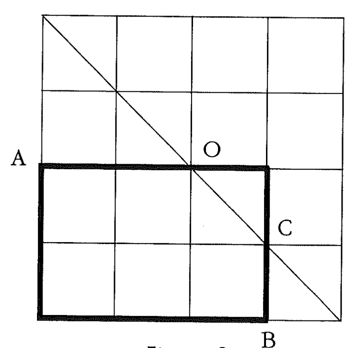


Figura 3

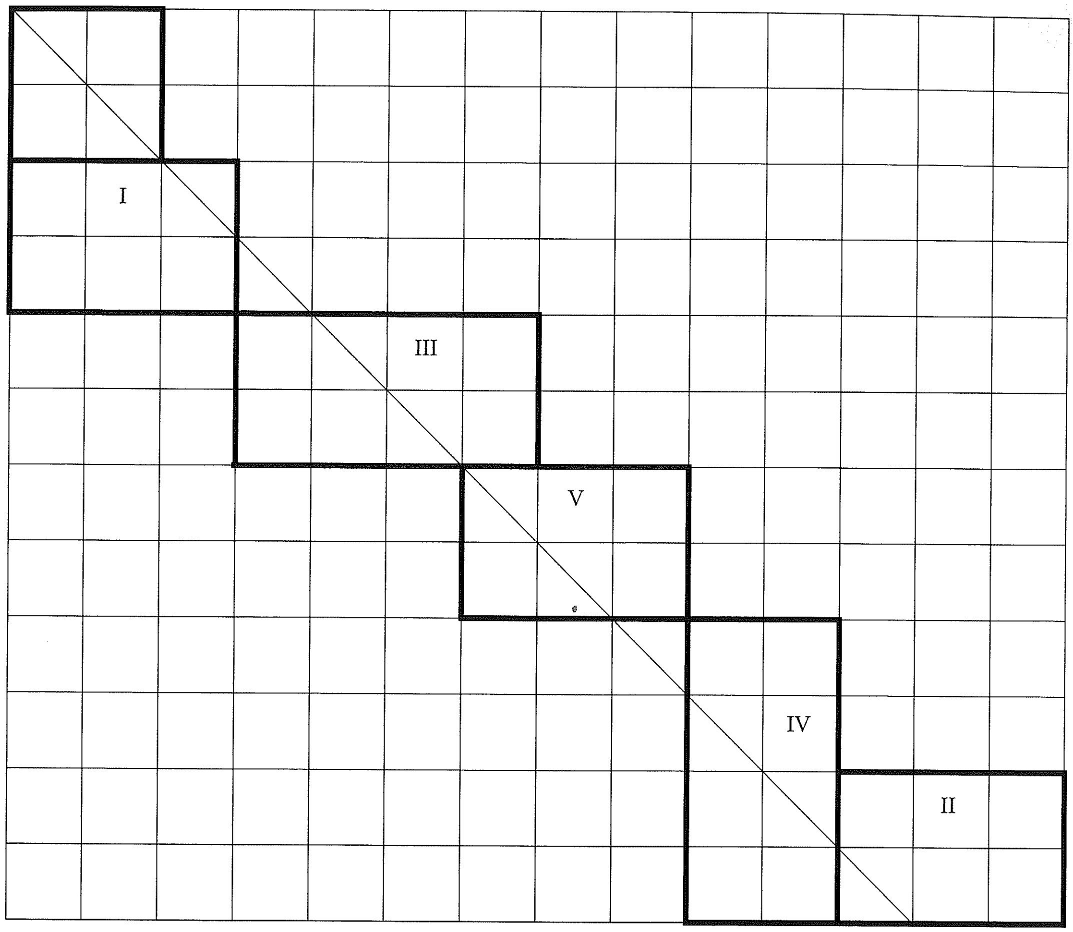


Figura 4

Cuando evaluamos las fórmulas para todos los casos descubrimos cuatro situaciones:

1. La *Diagonal* atraviesa una esquina del rectángulo, como I (figura 4); tanto A como B están por debajo de la *Diagonal*. En este caso:

$$d(A,B) = |x_A + y_A| + |x_B + y_A|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

2. La *Diagonal* atraviesa una esquina del rectángulo, como II (figura 4); tanto A como B están por encima de la *Diagonal*. En este caso:

$$d(A,B) = |x_A + y_A| + |x_A + y_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

3. La *Diagonal* atraviesa los dos lados del rectángulo paralelos al eje de abscisas, como III (figura 4). En este caso:

$$d(A,B) = |x_A + y_A| + |y_B - y_A|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

4. La *Diagonal* atraviesa los dos lados del rectángulo paralelos al eje de ordenadas, como IV (figura 4). En este caso:

$$d(A,B) = |x_A + y_A| + |x_B - x_A|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

Si una esquina del rectángulo está sobre la *Diagonal* se tienen las mismas fórmulas. Por ejemplo, en el caso 2, con un rectángulo como V (figura 4):

$$d(A,B) = |x_A + y_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B| = |x_A + y_A| + |x_A + y_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

porque $x_A + y_A = 0$

La prueba de que estas fórmulas definen una métrica es pesada, ya que hay muchos casos. La propiedad más complicada es la desigualdad triangular, las otras propiedades resultan más sencillas. Evidentemente:

a) $d(A, B) \geq 0$

b) $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$

c) $d(A, B) = d(B, A)$.

Por ejemplo, la propiedad b) en el caso 2.

$$d(A,B) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_A + y_A = 0 \\ x_A + y_B = 0 \\ x_B + y_B = 0 \end{cases}$$

Por sustracción: $y_A = y_B$; $x_A = x_B$.

Como ejemplo, veamos la demostración de un caso de la desigualdad triangular. Consideremos en la figura 5 los dos rectángulos como I y III extraídos de la figura 4.

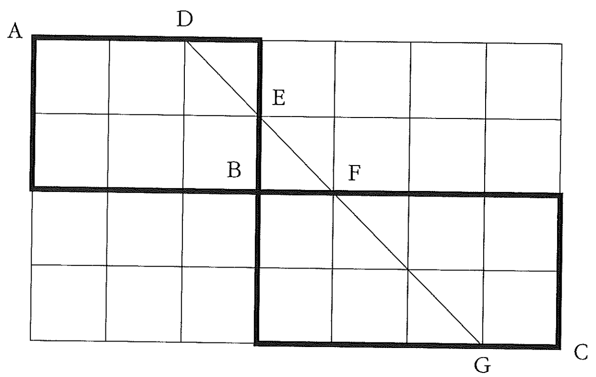


Figura 5

$$d(A,B) = AD + DE + EB = |x_A + y_A| + |x_B + y_A|\sqrt{2} + |x_B + y_B|$$

$$d(B,C) = BF + FG + GC = |x_B + y_B| + |y_C - y_B|\sqrt{2} + |x_C + y_C|$$

$$d(A,C) = AD + DG + GC = |x_A + y_A| + |y_A - y_C|\sqrt{2} + |x_C + y_C|$$

Es posible pensar en la desigualdad $d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$ en dos modos. En la figura 5:

$d(A, C) = AD + DG + GC$

$= AD + DE + EF + FG + GC$

$< AD + DE + EB + BF + FG + GC$

$= d(A, B) + d(B, C)$

Usando la igualdad:

$y_A - y_C = y_A + x_B - x_B - y_B + y_B - y_C$

se tiene:

$$|y_A - y_C|\sqrt{2} \leq |y_A + x_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|\sqrt{2} + |y_B - y_C|\sqrt{2}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} d(A,C) &= |x_A + y_A| + |y_A - y_C|\sqrt{2} + |x_C + y_C| \\ &\leq |x_A + y_A| + |y_A + x_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|\sqrt{2} + |y_B - y_C|\sqrt{2} + |x_C + y_C| \\ &< |x_A + y_A| + |y_A + x_B|\sqrt{2} + 2|x_B + y_B| + |y_B - y_C|\sqrt{2} + |x_C + y_C| \\ &= \left(|x_A + y_A| + |x_B + y_B|\sqrt{2} + |x_B + y_B|\right) + \\ &+ \left(|x_B + y_B| + |y_C - y_B|\sqrt{2} + |x_C + y_C|\right) \\ &= d(A,B) + d(B,C) \end{aligned}$$

Los otros casos se pueden comprobar utilizando el mismo método.

¿Conocen ustedes una ciudad que contenga dos calles como la *Avenida Diagonal*?

¿Cuáles serían las fórmulas para la distancia en tal ciudad?

¡Una investigación interesante!

K. E. Hirst
Department of Mathematics
University of Southampton
United Kingdom