SUMA 24
febrero 1997, pp. 59-62

Una visión distinta de un problema clásico

Jorge Fernández Herce
Mercedes González Menorca

IDEAS Y RECURSOS

Pretendemos plantear un problema clásico:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta} \quad \text{si} \quad 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$$

en términos totalmente diferentes, prescindiendo del cálculo diferencial que es en general el modo de abordarlo, y aprovechar toda la intuición del enunciado dentro de un desarrollo sobre relaciones entre razones trigonométricas y arcos, potenciando el concepto de radián, la proporcionalidad y la semejanza.

EL papel de la geometría en nuestros actuales planes de estudio de Enseñanza Secundaria es, en el mejor de los casos, muy deficiente. La mayor parte de esos conocimientos clásicos sobre paralelismo, perpendicularidad, ángulos, triángulos, polígonos,... son totalmente desconocidos para los alumnos que terminan el Bachiller o el COU.

Afirmar que la regla y el compás son elementos fundamentales en el estudio de la trigonometría y la geometría de 3.° de BUP suena ridículo y, lo único importante, son las recetas que nos lleven a soluciones de las que se desconoce totalmente su significado geométrico. Algo tan matemático a lo largo de los siglos, como las construcciones con regla y compás, han sido desterradas de nuestro entorno para pasar a ser meras cuestiones de dibujo técnico sin ningún rigor científico.

El siguiente ejemplo concreto tiene su origen en la primera fase de la XXVI Olimpiada Matemática Española (año 1990). De los ocho problemas que en ella se enunciaban el segundo decía así:

Sean los ángulos α y β tales que $0 < \alpha < \beta < \pi/2$; demostrar que:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\beta}{\beta} \quad ; \quad \frac{\operatorname{tag}\alpha}{\alpha} < \frac{\operatorname{tag}\beta}{\beta}$$

Ante este ejercicio se plantea el reto de una solución tan intuitiva y clara como su enunciado y, sobre todo, soportando el contenido geométrico que las desigualdades representan.

Parece evidente que la solución más rápida e inmediata al problema no pasa por el aspecto geométrico-intuitivo sino por la aplicación mecánica del cálculo diferencial; en efecto, transformando mínimamente el enunciado, se reduce a demostrar que:

$$f(x) = \frac{\text{sen } x}{x} \quad \text{es decreciente en} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{\text{tag } x}{x} \quad \text{es creciente en} \quad \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Esta es una solución fácil pero carente de intuición y que permite resolver la cuestión sin apreciar su significado geométrico. Por otro lado, es preciso manejar conceptos de cálculo diferencial. El problema queda planteado pues a un nivel de COU.

Pretendemos aquí resolverlo dentro de un desarrollo un poco más global que constituye un ejercicio muy completo sobre la relación entre las razones trigonométricas y el arco de un determinado ángulo, que potencia el concepto de radián, la proporcionalidad, la semejanza de triángulos,..., basándonos en un desarrollo puramente geométrico y, en teoría, permitiendo que alumnos de un nivel de 2.° de BUP sean capaces de abordarlo. Concretamente vamos a presentar sólo la desigualdad de los senos y, tal vez en una próxima entrega, desarrollaremos la de las tangentes que tiene algunas diferencias.

Si bien este ejercicio en ningún caso cabría dentro de la nueva ESO, sí queremos resaltar algunas de las ideas que el DCB de esta etapa ilustra. Estas, por su carácter global y su trasfondo, sirven perfectamente para aplicar en cualquiera de las etapas de la enseñanza.

En cuanto a criterios en la selección de contenidos:

Los problemas pueden abordarse por distintas vías, que admiten varios niveles de solución razonables, permiten que el alumno adquiera una visión de las matemáticas como ciencia abierta y asequible...

Nos acercamos a algunos objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria:

Mostrar actitudes propias de la actividad matemática (exploración de alternativas, tenacidad y perseverancia en la búsqueda de soluciones, flexibilidad para cambiar de punto de vista, etc.) en situaciones cotidianas o de resolución de problemas.

Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, relacionar y organizar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

Elaborar estrategias para la resolución de problemas, utilizando distintos recursos.

Primera etapa

Partimos de nociones geométricas que en este desarrollo damos por conocidas para no alargar la exposición. Además de tener un valor en sí mismas, son una forma lógica de llegar a definir la longitud de la circunferencia y, con ello, obtener π, razonando en términos de polígonos regulares inscritos y circunscritos que se vayan «aproximando» cada vez más hacia la circunferencia.

- En un triángulo, cualquier lado es menor que la suma de los otros dos.
- En toda línea poligonal convexa cerrada, un lado cualquiera es menor que la suma de los demás.
- Toda poligonal convexa cerrada que se ubique en el interior de otra, tiene un perímetro menor que el de la que la envuelve.
- El perímetro de todo polígono cerrado que envuelve a una circunferencia, es mayor que el perímetro de todo polígono cerrado convexo interior a dicha circunferencia.

A partir de este momento, considerando polígonos regulares inscritos y circunscritos, y usando la noción de límite, se llega a una definición coherente de longitud de la circunferencia. Evidentemente, el proceso sería el mismo si tratamos de longitud de un arco y no de la circunferencia completa. Y un resultado que se deduce de los anteriores será:

{A.1} Dado un arco de circunferencia, toda línea poligonal convexa, con los mismos extremos, que lo envuelva, es mayor que dicho arco.

{A.2} Dado un arco de circunferencia, toda línea poligonal convexa con los mismos extremos, que sea envuelta por él, es menor que el arco.

Pretendemos aquí resolverlo dentro de un desarrollo un poco más global que constituye un ejercicio muy completo sobre la relación entre las razones trigonométricas y el arco de un determinado ángulo, que potencia el concepto de radián, la proporcionalidad, la semejanza de triángulos,...

Segunda etapa

Para ver hasta qué punto la geometría, por elemental que sea, está desterrada de nuestra enseñanza media, planteamos junto con el ejercicio citado inicial una cuestión mucho más sencilla en sí misma pero que resulta clave en el enfoque gráfico de nuestro desarrollo.

Demostrar:

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad x > \text{sen } x$$

El planteamiento más habitual de este problema en nuestra enseñanza actual sería:

Considerando la función $f(x) = x - \text{sen } x$, como es continua en $[0, \pi/2]$ y $f(0) = 0$, si demostramos que es creciente en $(0, \pi/2)$, estará demostrado.

Basta derivar $f(x)$:

$f'(x) = 1 - \cos x > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente.

Esta respuesta sitúa el ejercicio a nivel de COU.

La solución más próxima a la intuición pasa sin duda por la figura 1. En ella α es un ángulo expresado en radianes del primer cuadrante. La aplicación de la semejanza de triángulos y la proporcionalidad entre ángulo en radianes y arco[1]:

arco = radio x ángulo en radianes

permite suponer sin ninguna restricción que el radio de la circunferencia es igual a la unidad y con ello:

El problema consiste en demostrar que la longitud del arco (AB) es mayor que la del segmento BP.

Hay quien, enfocando de este modo la solución, daría ésta por evidente sin considerar que no lo es tanto, bastaría que la desigualdad fuera con la tangente para verlo más difícil:

$$\text{tag } \alpha > \alpha \text{ con } 0 < \alpha < \pi/2$$ [2]

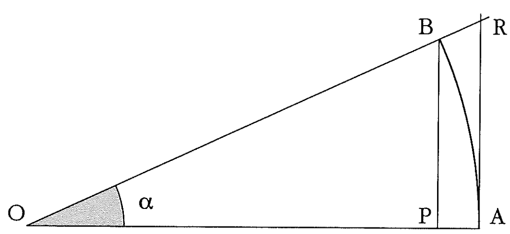

Figura 1

Concretamente un estudio detallado de tal afirmación lleva a la noción de límite y la obtención de π. Esto es precisamente lo que hemos querido fijar con la *Primera Etapa* y basándonos en los resultados {A.1} y {A.2} que allí se enunciaron:

Basta mirar a la figura 2 y queda demostrado que, al ser BC una línea poligonal convexa con los mismos extremos que el arco (BC) se tiene por {A.2} que en términos de longitudes:

$$2\text{sen } \alpha = |BC| < \text{arco (BC)} = 2\alpha$$

y entonces:

$$\text{sen } \alpha < \alpha \text{ si } 0 < \alpha < \pi/2$$

Esto demuestra lo que buscamos.

1 En este caso, razonar en términos de proporcionalidad entre el valor del ángulo en radianes y el área del sector circular sería más sencillo de ver, pero elegimos el método del razonamiento mediante longitudes porque se ajusta mejor a la idea central del desarrollo.

2 La evidencia, mirando a la figura 1, no es tan clara, pues podría suceder que al «rectificar» el arco de circunferencia superase al valor de la tangente que obviamente es $|AR|$.

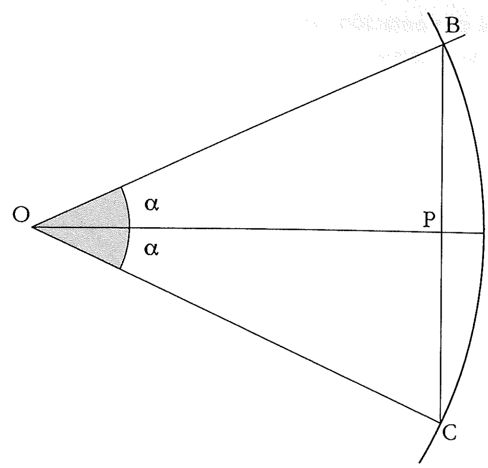

Figura 2

Tercera etapa

Abordamos ahora nuestro objetivo central:

Sean los ángulos α y β tales que $0 < \alpha < \beta < \pi/2$; demostrar que:

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} > \frac{\text{sen } \beta}{\beta}$$

Vamos a dar nuestra solución siguiendo la pauta de las relaciones entre longitud de arco y longitud de segmentos. Observemos que si fuésemos capaces de rectificar los arcos en sendos segmentos, las desigualdades se pueden entender geométricamente como una relación de semejanza. No se trata exactamente de la rectificación, pero sí de llegar a una «posición de Thales» entre seno y arco.

Partimos de un dibujo como el de la figura 3 en el cual supondremos que la circunferencia tiene radio 1 y, por tanto:

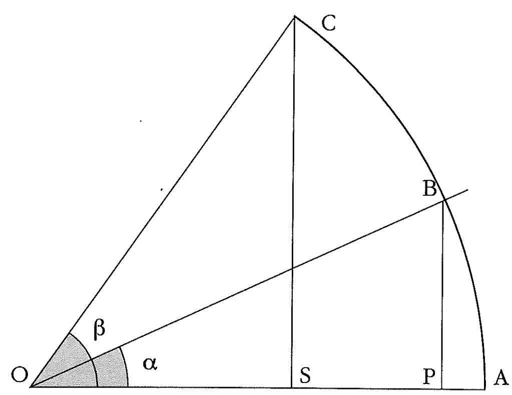

Figura 3

$$|OA| = |OB| = |OC| = 1$$

En estas condiciones:

$$\text{sen } \alpha = |BP| \qquad \text{sen } \beta = |CS|$$

Con la presentación de la figura 3 no parece haber «posición de Thales» aparente, sin embargo, «arrastrando el ángulo β» de modo que |CS| = |C'S'| y con ello

arco (CA) = arco (C'A').

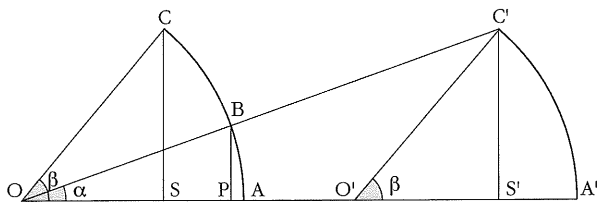

Figura 4

Sin perder de vista el origen de nuestro dibujo, eliminemos las partes accesorias de la figura 4 y limitémonos únicamente a la parte del gráfico que nos interesa. Así construimos la figura 5 en la que se aprecia lo que llamamos «posición de Thales» entre los arcos (BA) y (C'A') y los segmentos |BP| y |C'S'|.

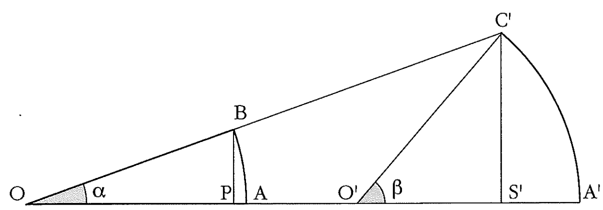

Figura 5

Por último, completemos el dibujo trazando la circunferencia de centro O y radio |OC'|:

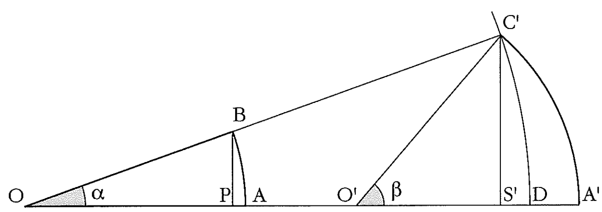

Figura 6

De esta figura se obtienen las conclusiones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\,|OB| = \alpha \times 1 = \text{arco (BA)}\\ \alpha\,|OC'| = \text{arco (C'D)}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|OC'|}{|OB|} = \frac{\text{arco (C'D)}}{\text{arco (BA)}} \qquad [1]$$

Y por simple proporcionalidad

$$\frac{|OC'|}{|OB|} = \frac{|C'S'|}{|BP|} \qquad [2]$$

De [1] y [2] se sigue:

$$\frac{|C'S'|}{|BP|} = \frac{\text{arco (C'D)}}{\text{arco (BA)}} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\text{arco (C'D)}}{\alpha} \qquad [3]$$

Este resultado es prácticamente el que buscamos con sólo demostrar que

β > arco (C'D).

Sabemos que β = arco (C'A'), luego todo se resume a probar que:

arco (C'A') > arco (C'D)

Para ello, construyamos la figura auxiliar siguiente:

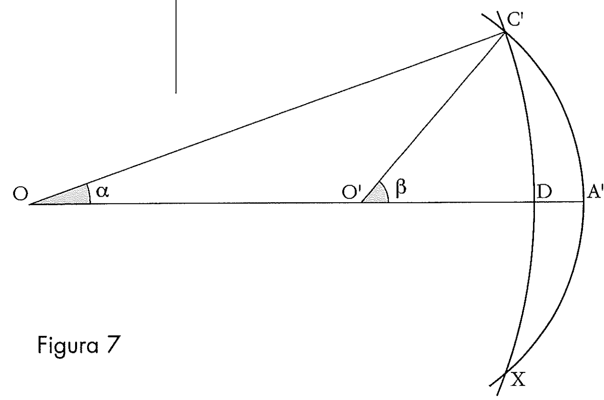

Figura 7

En ella se ve claramente que podemos dibujar una línea poligonal convexa que contenga al arco (C'DX) y esté contenida en el arco (C'A'X). Viendo las conclusiones {A.1} y {A.2} de la *Primera etapa*, queda demostrado que:

arco (C'A'X) > arco (C'DX)

Y es evidente que

arco (C'A'X) = 2 x arco (C'A') = 2 x β

arco (C'DX) = 2 x arco (C'D)

De donde se sigue inmediatamente que

β > arco (C'D)

Como conclusión, sustituyendo en [3]:

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha}$$

Jorge Fernández
Mercedes González
Sociedad Canaria de
Profesores de Matemáticas
Isaac Newton

Bibliografía

GUZMÁN, M. (1976): *Mirar y Ver*, Alhambra, Madrid.

FIOL, M. L. y J. M. FORTUNY (1990): *Proporcionalidad Directa. La forma y el número*, Síntesis, Madrid.

GARCIA ARENAS, J. y C. BERTRAN I INFANTE (1978): *Geometría y Experiencias*, Alhambra, Madrid.

GRUPO BETA (1990): *Proporcionalidad Geométrica y Semejanza*, Síntesis, Madrid.

KÜRSCHAK, J. (1963): *Hungarian Problem Book*, Vol. 2, Random House, New York.

MEC (1989): *Diseño Curricular Base. Ejemplificaciones*, MEC, Madrid.

ROANES MACÍAS, E. (1987): *Introducción a la Geometría*, Anaya, Madrid.

Geometría. Curso Superior (1978): Bruño, Madrid.