SUMA 24
febrero 1997, pp. 39-45

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la forma escalonada reducida de una matriz

Leandro Tortosa Grau
Javier Santacruz Cutillas

ARTÍCULOS

En este artículo se analiza el método de reducción de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y se pone de manifiesto los problemas de estabilidad numérica que el método tiene. Para solucionar estos problemas se propone el método de reducción de Gauss con pivote. También se introduce el concepto de matriz escalonada reducida para realizar la discusión y posterior resolución de sistemas de ecuaciones, efectuando algunos ejemplos. Para finalizar, se muestra un programa para la calculadora Ti-82 que resuelve sistemas de ecuaciones lineales.

TENEMOS en una mesa unos cuantos libros de texto de matemáticas de COU y tomamos uno de ellos cualquiera al azar.

Nos disponemos a buscar el apartado dedicado a sistemas de ecuaciones lineales, por lo que nos vamos al índice y, ¡ya está!, el primer capítulo del libro trata de álgebra lineal. Allí encontramos el primer tema, cuyo título es el de sistemas lineales de dos y de tres ecuaciones. Seguimos leyendo el índice y los títulos de los temas siguientes son matrices, determinantes y vuelve a aparecer en el último tema el nombre de sistemas de ecuaciones lineales.

La primera pregunta que nos surge antes de comenzar a leer es: ¿por qué separan en dos temas los sistemas de ecuaciones, tratando el primero de ellos los de dos y tres ecuaciones y el siguiente los sistemas de ecuaciones en general? ¿Es que en el último tema se estudian sistemas de 50 ecuaciones y 50 incógnitas? ¿Es que los sistemas que se estudian en el siguiente capítulo no se parecen a los de dos y tres ecuaciones?

Ante tan atrayentes perspectivas y con una curiosidad creciente en nosotros, decidimos abandonar el índice y empezar a leer el primer tema.

Sin ánimo de ser exhaustivos, describiremos algunos aspectos que consideramos esenciales de lo que leímos en esas páginas.

En el primer punto del tema se establecen las definiciones básicas relacionadas con la forma que tienen los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, se nos indica qué es una solución del mismo y, posteriormente, se nos habla de qué son sistemas equivalentes. A lo largo del tema se nos indican algunos ejemplos y nos proponen problemas para resolver. En el siguiente apartado se desarrolla el método de Gauss, realizándose algún ejemplo del mismo. En el siguiente punto encontramos las definiciones de vectores, de combinaciones lineales, de dependencia e independencia lineal, con lo que acaba el primer tema.

Después de leer este tema, decidimos detenernos a pensar un instante sobre lo leído y nos hacemos la pregunta: ¿qué hemos aprendido hasta aquí?

Tras unos duros momentos de pausa nos damos cuenta de que, en teoría, ya sabemos resolver sistemas de dos y de tres ecuaciones utilizando un método, llamado de Gauss, que consiste, básicamente, en transformar el sistema inicial en otro equivalente en el que en la última fila aparece despejada la última incógnita.

Después de esto, la siguiente pregunta que nos hacemos es: ¿qué representan los sistemas de ecuaciones, «de dónde salen»? ¿ Qué situaciones «reales» podemos estudiar que nos conduzcan al planteamiento y posterior resolución de un sistema de ecuaciones lineales como los que ya sabemos resolver?

La respuesta, basándonos en lo que hemos leído, es nula. No sabemos nada acerca de las aplicaciones que todo esto tiene.

Ante esta decepción, decidimos que nuestra única esperanza es acudir al tema siguiente. Quizás allí encontremos algunas respuestas a nuestros interrogantes y quizás allí encontremos algunos problemas algo más interesantes que los propuestos hasta ahora.

Eso es precisamente lo que hacemos. Después de un tema de matrices y otro de determinantes, llegamos al último tema cuyo título era el de sistemas de ecuaciones lineales.

Al comienzo del mismo se generaliza el concepto de sistema lineal para un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas. Después de estas primeras definiciones se estudia el criterio de Rouché para estudiar la compatibilidad o incompatibilidad del sistema. En el siguiente apartado se insiste en el método de Gauss. También se explica posteriormente el método de Cramer para sistemas compatibles determinados. En el último apartado del tema se indica una aplicación de los sistemas de ecuaciones a la posición que ocupan dos rectas en el plano y, posteriormente, utilizando ahora tres ecuaciones, se estudia la posición de tres planos en el espacio. Ciertamente este último apartado es el que más interesante nos ha parecido.

La conclusión que obtenemos de todo esto, tras una reflexión más profunda, es que puede que sepamos efectuar de una forma mecánica una serie de operaciones que nos resuelvan sistemas de ecuaciones pero, desde luego, no tenemos claras cuáles son sus aplicaciones ni tenemos muy claro tampoco el por qué de algunos conceptos que aquí se han mezclado y entrelazado para resolver estos problemas. Por ejemplo, ¿qué relación tiene el concepto de determinante con la resolución de sistemas? ¿Es el método de Gauss una especie de panacea que nos resuelve todo tipo de sistemas? Si esto último es así, ¿por qué debemos estudiar el método de Cramer? ¿Acaso no nos sirve el de Gauss? Podríamos seguir con algunas preguntas más en la misma línea. Nuestra conclusión es clara: en general, no nos gusta el tratamiento que los libros de texto hacen de los temas de álgebra lineal y, en particular, del que aquí nos ocupa: la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

¿Es el método de Gauss una especie de panacea que nos resuelve todo tipo de sistemas? Si esto último es así, ¿por qué debemos estudiar el método de Cramer? ¿Acaso no nos sirve el de Gauss?

Hecha esta reflexión inicial, vamos a profundizar un poco en algunos aspectos que nos parece importante tratar y comentar sobre este tema; aspectos que pueden parecer bastante elementales, pero que los libros de texto no recogen en profundidad y con claridad.

Resolución de sistemas por Gauss

Pese a que una gran mayoría de los profesores de matemáticas seguimos enseñando a nuestros alumnos el tradicional método de discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales basado en el teorema de Rouché Fröbenius para rangos de matrices y en la regla de Cramer, podemos decir que el método de Gauss es, en la actualidad, una de las «estrellas» de la resolución de sistemas. Pero, contra lo que *a priori* podamos pensar, no es un método ni mucho menos infalible, como luego veremos.

Supongamos que queremos resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

Lo resolvemos por el método de Gauss, que consiste en ir aplicando transformaciones elementales a la matriz ampliada del sistema, de manera que lleguemos, si es posible, a un sistema de la forma:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & {}^*y & + & {}^*z & = & * \\ & & y & + & {}^*z & = & * \\ & & & & z & = & * \end{array}$$

Realmente lo que hacemos es convertir el sistema inicial en un sistema cuya matriz ampliada asociada al mismo es una matriz triangular superior.

Si observamos este último sistema, vemos que tenemos despejada la tercera incógnita de la tercera ecuación. Podemos sustituir su valor en la ecuación anterior y despejar la variable *y*; una vez despejada la *y*, sustituyendo de forma análoga en la primera ecuación, obtenemos *x*, con lo que el sistema queda resuelto. Esto es lo que normalmente se llama *sustitución por regresión hacia atrás*.

Podemos ver un ejemplo resolviendo el sistema anterior:

SISTEMA INICIAL

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{operación}]{} \quad \text{Sumar la primera ecuación a la segunda}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & - & y & - & z & = & -1 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{operación}]{} \quad 3^{\text{a}} \text{ fila} - 2\text{x}1^{\text{a}} \text{ fila}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & 2z & = & 4 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{operación}]{} \quad 3^{\text{a}} \text{ fila} + 2^{\text{a}} \text{ fila}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \quad \xrightarrow[\text{operación}]{} \quad 1/2 \text{ x } 3^{\text{a}} \text{ fila}$$

SISTEMA FINAL

De la última expresión obtenemos que z = 2, sustituyendo en la segunda tendremos que y = –1 y, finalmente, x = 1, con lo que tenemos resuelto el sistema de ecuaciones inicial.

El método de Gauss, como vemos, es un método bastante «mecánico» en cuanto al cálculo y al tipo de operaciones que debemos realizar. Disponemos como herramienta de cálculo de las tres operaciones elementales básicas, que son las que nos proporcionan ecuaciones equivalentes, y sabemos también el tipo de resultado al que debemos llegar, utilizando esas operaciones.

Pero la gran ventaja de este método de resolución reside en que no tenemos por qué realizar una discusión previa del tipo de sistema con el que trabajamos, es decir, no es necesario determinar *a priori* si el sistema tiene o no solución y si ésta es única o existen infinitas soluciones. El propio desarrollo del método y su resultado final nos dan la clave para estudiar el tipo de sistema que estamos resolviendo. Veamos algún ejemplo de lo que queremos decir.

Consideremos el sistema siguiente que se desea resolver por Gauss:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 2z & = & -4 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Si realizamos el proceso de resolución por filas de Gauss a la matriz ampliada del sistema, seguiremos los siguientes pasos :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\; \text{f1–f2} \;\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \;\; \text{f3–2f1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \;\; \text{f2/2} \;\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \;\; \text{f3+3f2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \;\; \text{–f3/4} \;\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; [1]$$

Llegamos finalmente a la matriz [1], una vez reducida según el procedimiento de Gauss. Si observamos detenidamente la última fila de la matriz ampliada del sistema y queremos despejar la incógnita z, tendremos que 0·z = 1, lo cual es una contradicción. Esto nos lleva a asegurar que el sistema no tiene solución.

Para llegar a la conclusión anterior no hemos necesitado calcular ni rangos de matrices, ni determinantes, ni nada más que la simple aplicación del método.

Ahora consideremos el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 0 \\ x & & & - & 3z & = & -1 \\ -x & + & 3y & & & = & 1 \end{array}$$

Si efectuamos las operaciones elementales adecuadas para resolver el sistema, siguiendo el método de Gauss, llegamos a un sistema equivalente de la forma:

$$\begin{aligned} x \qquad - 3z &= -1 \\ y - z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vemos que el sistema original de tres ecuaciones con tres incógnitas se convierte en un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Esto significa que podemos escribir las dos primeras incógnitas, *x* e *y*, en función de la tercera, *z*, lo que nos indica que el sistema tiene infinitas soluciones. Podemos escribir el sistema de la forma:

$$\begin{aligned} x &= -1 + 3z \\ y &= z \end{aligned}$$

De esta forma tenemos la solución general del sistema en función del parámetro *z*. Como vemos, tampoco en este caso hemos necesitado un estudio previo del sistema mediante el concepto de rango, para llegar a las soluciones del mismo. Y esta es, precisamente, la conclusión más importante que debemos tener en cuenta a la hora de resolver un sistema de ecuaciones lineales. Entonces, si con el método de Gauss podemos establecer el carácter y calcular la solución del sistema, ¿por qué utilizar el tradicional método basado en el cálculo de rangos a través de determinantes y menores de una matriz?

Pero tampoco debemos pensar que este método es una especie de herramienta infalible a la hora de resolver sistemas. Para demostrar esto calculemos ahora la solución del siguiente sistema :

$$\begin{aligned} 0{,}143x + 0{,}357y + 2{,}01z &= -5{,}17 \\ -1{,}31x + 0{,}911y + 1{,}99z &= -5{,}46 \\ 11{,}2x - 4{,}30y - 0{,}605z &= 4{,}42 \end{aligned}$$

Vamos a resolver este sistema de forma análoga a como lo hemos hecho anteriormente. Vamos a calcular la solución del sistema aproximando en el tercer decimal, es decir, en cada paso de cálculo trabajamos con dos cifras decimales.

$$\begin{pmatrix} 0{,}143 & 0{,}357 & 2{,}01 & -5{,}17 \\ -1{,}31 & 0{,}911 & 1{,}99 & -5{,}46 \\ 11{,}2 & -4{,}30 & -0{,}605 & 4{,}42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1{,}00 & 2{,}50 & 14{,}1 & -36{,}2 \\ -1{,}31 & 0{,}911 & 1{,}99 & -5{,}46 \\ 11{,}2 & -4{,}30 & -0{,}605 & 4{,}42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}00 & 2{,}50 & 14{,}1 & -36{,}2 \\ 0{,}00 & 4{,}19 & 20{,}5 & -52{,}9 \\ 11{,}2 & -4{,}30 & -0{,}605 & 4{,}42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} 1{,}00 & 2{,}50 & 14{,}1 & -36{,}2 \\ 0{,}00 & 4{,}19 & 20{,}5 & -52{,}9 \\ 0{,}00 & -32{,}3 & -159 & 409 \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}00 & 2{,}50 & 14{,}1 & -36{,}2 \\ 0{,}00 & 1{,}00 & 4{,}89 & -12{,}6 \\ 0{,}00 & 0{,}00 & 1{,}00 & -2{,}00 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Forma reducida de Gauss}$$

...si con el método de Gauss podemos establecer el carácter y calcular la solución del sistema, ¿por qué utilizar el tradicional método basado en el cálculo de rangos a través de determinantes y menores de una matriz?

Si resolvemos este sistema partiendo de la incógnita *z* que tenemos despejada en la última ecuación, es decir, z = –2,00, obtenemos las soluciones:

$$x = -0{,}950 \;;\; y = -2{,}82 \;;\; z = -2{,}00.$$

Pero si sustituimos esta solución en el sistema inicial, comprobamos que no se verifican las ecuaciones iniciales. ¿Qué ocurre entonces? ¿Por qué el método nos falla, si hemos seguido los pasos correctamente?

Las respuestas a estas preguntas debemos encontrarlas en el error de redondeo que se produce en el transcurso de todo el cálculo. Este error se va propagando al ir efectuando las operaciones sucesivas en los pasos que nos llevan al resultado final. Si nos fijamos en la primera columna, el elemento a_{11} es 0,143, mientras que el elemento a_{31} es 11,2. Existe una diferencia de una potencia de 10 entre estos valores. Esto supone que estos factores tienden a propagar el error de redondeo, provocando una solución final distorsionada totalmente respecto de la solución verdadera del sistema.

¿Cómo solucionar esto? La idea para solucionar este problema de propagación del error de redondeo consiste en modificar el método de Gauss de la siguiente manera: en el primer paso en la columna de la izquierda buscamos el elemento de mayor valor absoluto, y a este elemento lo llamamos *pivote*. Inmediatamente después lo que hacemos es intercambiar la primera fila con la fila donde se encuentra el pivote. Después dividimos la primera fila por el pivote. Posteriormente se utilizan las operaciones elementales para reducir a cero los demás elementos de la primera columna. De la misma forma se reducen los siguientes elementos, eligiendo los elementos pivote de cada columna de la misma forma.

Este método, que resulta de efectuar estas modificaciones anteriormente citadas al método de Gauss, lo llamamos *Gauss con pivote*.

Vamos ahora a resolver el sistema anterior utilizando este nuevo método modificado.

Si nos fijamos en la matriz inicial, en la primera columna el elemento que tiene el mayor valor absoluto es el 11,2, por lo que el primer paso será el intercambio de las filas 1 y 3.

$$\begin{pmatrix} 0,143 & 0,357 & 2,01 & -5,17 \\ -1,31 & 0,911 & 1,99 & -5,46 \\ 11,2 & -4,30 & -0,605 & 4,42 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{pivote: 11,2}}$$

$$\begin{pmatrix} 11,2 & -4,30 & -0,605 & 4,42 \\ -1,31 & 0,911 & 1,99 & -5,46 \\ 0,143 & 0,357 & 2,01 & -5,17 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Hacemos uno y ceros en la 1ª columna}}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,384 & -0,054 & 0,395 \\ 0,00 & 0,408 & 1,92 & -4,94 \\ 0,00 & 0,412 & 2,02 & -5,23 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{pivote: 0,412}}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,384 & -0,054 & 0,395 \\ 0,00 & 0,412 & 2,02 & -5,23 \\ 0,00 & 0,408 & 1,92 & -4,94 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Hacemos uno y ceros en la 2ª columna}}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,384 & -0,054 & 0,395 \\ 0,00 & 1,00 & 4,90 & -12,7 \\ 0,00 & 0,00 & -0,08 & 0,240 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Hacemos uno en la 3ª fila}}$$

$$\begin{pmatrix} 1,00 & -0,384 & -0,054 & 0,395 \\ 0,00 & 1,00 & 4,90 & -12,7 \\ 0,00 & 0,00 & 1,00 & -3,00 \end{pmatrix}$$

Si calculamos la solución a partir de la última matriz obtenemos las soluciones

$$x = 1 \; ; \; y = 2 \; ; \; z = -3$$

lo que coincide con la solución exacta cuando aproximamos hasta la tercera cifra significativa.

Vemos, por lo tanto, que el método de Gauss con pivote puede ayudarnos a resolver algunos sistemas de ecuaciones en los que el error de redondeo puede causar graves problemas para su resolución.

La matriz escalonada reducida

Recordemos que el sistema inicial

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ -x & + & 3y & & & = & -4 \\ 2x & - & 5y & + & 5z & = & 17 \end{array}$$

lo reducíamos mediante el método de Gauss, a otro sistema equivalente de la forma:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}$$

Si analizamos todo el proceso en conjunto, nos damos cuenta de que no tenemos por qué detener el proceso en este punto. Igual que hemos reducido las columnas a uno en el elemento diagonal y a ceros por debajo del elemento diagonal, podemos perfectamente hacer ceros también por encima del elemento de la diagonal principal. Para hacer esto basta que realicemos las oportunas operaciones elementales. Podemos efectuar las operaciones siguientes:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 3z & = & 5 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \xrightarrow{2^{\text{a}} - 3\text{x}3^{\text{a}} \text{ fila}}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 9 \\ & & y & + & 0z & = & -1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \xrightarrow{1^{\text{a}} - 3\text{x}3^{\text{a}} \text{ fila}}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 0z & = & 3 \\ & & y & + & 0z & = & -1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array} \xrightarrow{1^{\text{a}} + 2\text{x}2^{\text{a}} \text{ fila}}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 0y & + & 0z & = & 1 \\ & & y & + & 0z & = & -1 \\ & & & & z & = & 2 \end{array}$$

El sistema reducido es:

$$\begin{array}{ccccc} x & & & = & 1 \\ & y & & = & -1 \\ & & z & = & 2 \end{array}$$

y la matriz reducida asociada a este sistema es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Forma escalonada reducida}$$

Como podemos ver obtenemos el sistema en su forma más reducida posible, con unos en la diagonal principal y ceros en el resto de elementos. La solución se obtiene de forma inmediata. A una matriz como la que hemos obtenido anteriormente la llamamos *forma escalonada reducida*. La columna que tiene un uno en su elemento diagonal y ceros en el resto de los elementos de la columna diremos que tiene un *uno principal*. La matriz anterior del ejemplo tiene tres unos principales.

Establecemos los siguientes criterios para la discusión del sistema en función del número de unos principales de la matriz escalonada reducida:

- Cuando la matriz tiene tantos unos principales como número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. (Existe una única solución.)
- Cuando el número de unos principales es menor que el de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado. (Existen infinitas soluciones.)
- Cuando la matriz tiene un uno principal en la última columna, entonces el sistema no tiene solución.

A partir de estos criterios, podemos establecer la discusión del sistema y, a partir de la forma escalonada reducida, podemos obtener la solución del mismo. Hay que volver a insistir en que no hemos utilizado hasta aquí el concepto de determinante ni de rango de una matriz.

Un programa de resolución de sistemas de ecuaciones lineales para la Ti-82

Si analizamos el programa GAUSS82, que se distribuye con el Link de la Texas 82 con el ordenador, advertimos que el programa exhibe el mensaje de matriz mal condicionada en casos en los que queremos resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos ecuaciones linealmente dependientes. Un sistema de este tipo o es incompatible o es compatible indeterminado, pero no nos parece lo más adecuado hablar de matriz mal condicionada.

Vamos a analizar un programa escrito para la calculadora gráfica Ti-82 que nos proporciona la solución de un sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

Debemos introducir en el registro de memoria del editor de matrices etiquetado con [A] la matriz ampliada del sistema, es decir, la matriz cuadrada de coeficientes del sistema añadiendo una columna con los términos independientes del sistema. Una vez introducida la matriz en el registro [A], ya podemos ejecutar el programa.

El programa efectúa operaciones elementales sobre las filas hasta llegar a una matriz del tipo escalonada reducida. El programa nos indica si existe solución o no. Una vez ejecutado el mismo, si visualizamos en la calculadora la matriz [A], tendremos la matriz del último paso cuya columna final representa la solución del sistema.

El programa es el siguiente :

```
:dim [A] →L6
:L6 (1) →F
:F+1→C
:1→A
:While A<C
:0→P
:0→B
:For(D,A,F,1)
:If abs [A](D,A)>P
:Then
:abs [A](D,A)→P
:D→B
:End
:End
:If B>0
:Then
:If B≠A
:Then
:Disp "CONMUTO",{B,A}
:rowSwap([A],A,B)→[A]
:Pause [A]↓ Frac
:End
:Disp "MULTIPLICO..."
:*row([A](A,A)^-1,[A],A)→[A]
:Pause [A] ↓Frac
:For(D,1,F,1)
:If D≠A
:Then
:Disp "RESTO..."
:*row+(-[A](D,A),[A],A,D)→[A]
:End
:End
:Pause [A] ↓Frac
:End
:A+1→A
:End
:prgmHAYSOLUC
:Disp "EL SISTEMA ES"
:If S=1
:Then
:If B>0
:Then
:Disp "DETERMINADO"
:Else
:Disp "INDETERMINADO"
:End
:Else
:Disp "INCOMPATIBLE"
:End
```

Vamos a analizar un programa escrito para la calculadora gráfica Ti-82 que nos proporciona la solución de un sistema de ecuaciones lineales con igual número de ecuaciones que de incógnitas.

```
Programa HAYSOLUC
:1→S
:For(G,1,F,1)
:0→I
:For(H,1,F,1)
:If [A](G,H) ≠0
:I+1→I
:End
:If I=0 and [A](G,C)→0
:0→S
:End
:Return
```

Comentarios del programa[1]

Lo primero que hacemos es obtener las dimensiones de la matriz. Después, el programa va a ir buscando columna a columna los elementos de mayor valor absoluto, que son los llamados pivotes. Una vez identificado el pivote en cada columna, se realizarán las correspondientes operaciones elementales por filas necesarias para ir construyendo la matriz escalonada reducida final.

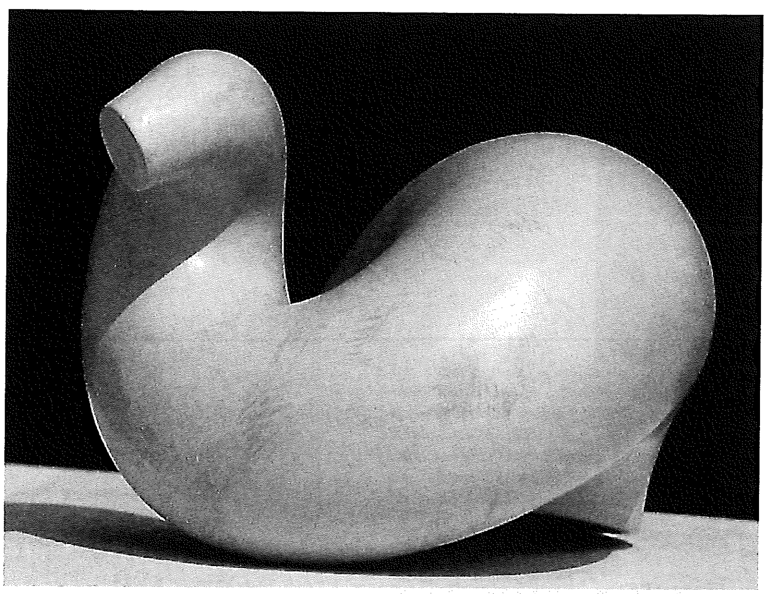
Es decir, inicialmente tomamos la primer columna, A = 1. Ahora, una vez fijada la columna, recorre las filas buscando el elemento con mayor valor absoluto. Si lo encuentra, conmuta las filas; después de este paso, realiza las operaciones elementales (primero multiplicando y luego restando), mediante las instrucciones *row() y *row+(), para conseguir un uno en la posición (1,1) y ceros en el resto de la columna. Posteriormente, pasa al elemento (2,2) de la diagonal, repitiendo el mismo proceso, teniendo en cuenta que la búsqueda del mayor valor absoluto la realiza para los elementos (i,2) con i > 2. Realiza este proceso de forma iterativa hasta llegar a la escalonada reducida. Finalmente, se discute los distintos tipos de solución existentes, a partir de la forma particular de la escalonada reducida.

1 Los autores disponen de la versión en lenguaje C de este programa. Si alguien está interesado en el código, puede contactar con cualquiera de nosotros.

Leandro Tortosa
IES Haygón.
San Vicente de Raspeig
Javier Santacruz
Escuela de Informática
de Alicante

Para obtener la solución una vez ejecutado el programa, visualizamos en pantalla la matriz [A]. Si el sistema es compatible determinado, la solución es el último vector de la matriz. Si el sistema es compatible indeterminado, las incógnitas correspondientes a las columnas que no tengan un uno principal, serán los parámetros dependientes en la solución general.

Para terminar, podemos preguntarnos para qué nos puede servir disponer de este programa o uno similar. Pensamos que los alumnos deben saber resolver sistemas de ecuaciones «a mano», utilizando el método de Gauss tradicional; deben también conocer los peligros numéricos que se esconden en el método, así como posibles alternativas. Pero también pensamos que es interesante disponer de un programa de este tipo para resolver sistemas. ¿Por qué? Porque nos va a permitir no consumir tanto tiempo en cálculos repetitivos y plantearnos «problemas más reales», donde las matrices involucradas en los mismos no serán de orden 3 x 3 o 4 x 4, sino mucho mayores. Es evidente que a mano no podemos resolver un sistema 10 x 10, pero sí con la calculadora y con programas de este tipo. Por lo tanto, nuestro esfuerzo debe ir dirigido también a estudiar este tipo de aplicaciones que requieren resolver sistemas grandes, y no solamente a enseñar destrezas de cálculo de una forma rutinaria y mecánica. Aplicaciones como, por ejemplo, las relacionadas con la teoría de grafos, con las matrices de Markov, los modelos económicos de entrada-salida de Leontief, la criptografía, estudio de poblaciones a lo largo del tiempo, etc. En definitiva, debemos plantearnos enseñar las aplicaciones del álgebra lineal y no sólo las operaciones aritméticas y los cálculos tediosos que el álgebra matricial supone.



El cuerno
Javier Carvajal