SUMA 24
febrero 1997, pp. 21-25

La resolución de problemas en la construcción de conocimiento. Un ejemplo

Luis Carlos Contreras González
José Carrillo Yáñez

ARTÍCULOS

Tras una introducción, en la que los autores expresan su manera de entender la resolución de problemas, este artículo trata de poner de relieve el importante papel que ésta desempeña como dinamizadora de un aprendizaje constructivista. En concreto, se utiliza un ejemplo para explicitar una forma de construir conocimiento significativo relativo a Números, a las propias estrategias de resolución e incluso a actitudes deseables para cualquier persona.
En definitiva, este trabajo intenta acercar al profesor de secundaria reflexiones extraídas en un proceso de investigación, alentando de esta forma la útil, a la vez que necesaria, colaboración entre docentes e investigadores.

HAN pasado ciertamente los años iniciales, dedicados a mostrar las bondades de la puesta en práctica de una metodología en la que la resolución de problemas ocupara un papel relevante; han pasado aquellos momentos en los que había que argumentar también que la dedicación a resolver problemas era una tarea obligada por el crecimiento del propio conocimiento matemático, de tal manera que cada vez tiene más sentido focalizar nuestra atención en los procedimientos matemáticos y en los procesos de pensamiento para capacitar al estudiante de cara a afrontar multitud de situaciones nuevas que se le presentarán a lo largo de su vida escolar y, lo que es más importante, a lo largo de su vida como ciudadano de un mundo en continuo cambio.

Es notorio que hay un sentir común, tanto entre los investigadores como entre los docentes, que otorga protagonismo a la resolución de problemas, lo que no conduce necesariamente a su puesta en práctica (en el caso de los docentes) de forma generalizada, debido a obstáculos que trascienden el puro ámbito de la capacitación profesional y entran de lleno en el de la actitud del profesor y en el de sus creencias o concepciones.

Durante estos últimos años también se ha desarrollado una cantidad ingente de estudios (teóricos, de síntesis y empíricos, tanto de corte cualitativo como cuantitativo) sobre las concepciones de los profesores hacia la matemática y su enseñanza (Thompson, 1992). Estos estudios han servido, entre otros fines, para diseñar instrumentos de catalogación de concepciones cada vez más finos y precisos en análisis cualitativos (Carrillo y Contreras, 1994 y 1995) y, de otro lado, para indagar sobre posibles relaciones entre las concepciones sobre la matemática y las concepciones sobre su enseñanza, particularizando en ocasiones en algún tópico matemático (McGalliard, 1983;

Thompson, 1984; Kesler, 1985; Lerman, 1990; Ruthven y Coe, 1994;...). La heterogeneidad de los resultados pone en entredicho suposiciones simplistas en las que a una concepción determinada de la matemática se le asocia una determinada concepción de la enseñanza de la matemática. Es obvio que este tipo de relaciones no se da, aunque, por otro lado, tampoco es cierto que suelan encontrarse relaciones entre polos opuestos.[1] Es decir, en lo relativo a las relaciones entre la concepción de la matemática y la de su enseñanza impera una *anarquía controlada.*

Asimismo, de entre todas las tendencias o formas de entender la enseñanza de la matemática, para muchos investigadores (entre los que se hallan los presentes) hay una (la *investigativa* –Porlán, 1989, 1992–) que puede ser considerada como la más idónea para propiciar un aprendizaje constructivista. Análogamente, entre los modelos de concepción de la matemática, estimamos, coincidiendo con gran parte de los investigadores actuales, que la concepción *dinámica o de resolución de problemas* (Ernest, 1989 y 1991) es la que se corresponde mejor con el proceso de creación del conocimiento matemático, no sólo a lo largo de la historia sino incluso a nivel educativo.

Sin embargo, no es la concepción dinámica la única posible dentro de los modelos de concepción de la matemática, al igual que la tendencia investigativa no es la única forma de entender y llevar a la práctica la enseñanza. De hecho, cada individuo posee su propia concepción de la matemática y su enseñanza, que se asemeja en mayor o menor grado a una o varias de las tendencias o concepciones que nos sirven de patrón. Pues bien, de la misma forma la concepción de la resolución de problemas difiere según el individuo. Por una parte, no hay unicidad en cuanto a lo que los docentes entienden por resolución de problemas y, por otra parte, aún más relevante, existen obvias y naturales discrepancias en lo que se refiere a cómo concibe y pone en práctica cada uno la resolución de problemas en el aula.

La resolución de problemas posee varias caras o facetas que, en ocasiones, son vistas como posicionamientos o interpretaciones diferentes, cuando, en realidad, la verdadera potencia reside en su complementariedad. De esta forma, Branca (1980) nos habla de la resolución de problemas como una meta u objetivo («si no la meta del aprendizaje matemático», p. 3), un proceso (de aplicación de los conocimientos previamente adquiridos a situaciones no familiares) o como una destreza básica. En efecto, pensamos que la resolución de problemas debe erigirse como objeto de aprendizaje, fin en sí misma, como contenido procedimental aplicable en cualquier situación cotidiana; pero esta declaración no ha de interpretarse como un posicionamiento radical que descarta las otras *caras.* Antes al contrario, esta declaración encierra un deseo de integrar las otras dos *caras*, de tal forma que, al mismo tiempo, pensamos que la resolución de problemas es un vehículo metodológico ideal para poner en funcionamiento y aplicar significativamente los conocimientos previamente adquiridos. Asimismo, la consideración de la resolución de problemas como destreza básica debe conducir a reformas curriculares que pueden incluso implicar la sustitución de *arcaicas destrezas mecánicas* por la resolución de problemas como destreza procedimental.

...la resolución de problemas debe erigirse como objeto de aprendizaje, fin en sí misma, como contenido procedimental aplicable en cualquier situación cotidiana...

En ocasiones, quien entiende la resolución de problemas como destreza básica, entiende que los estudiantes, en general, deben adquirir destreza en el enfrentamiento de problemas rutinarios (ejercicios), dejando el abordaje de verdaderos problemas a los más avanzados. Por el contrario, la resolución de problemas, como tarea compleja que es, ofrece una posibilidad para organizar la diversidad de niveles existentes en el aula, es un marco ideal para la construcción de aprendizaje significativo (parafraseando a Claxton –1984–, diremos que éste es el único tipo de aprendizaje que propicia el progreso del hombre) y fomenta el gusto por la matemática (incardinada en la realidad) y el desarrollo de una actitud abierta y crítica, objetivos de gran valor educativo. La resolución de problemas no es un añadido de la clase de matemáticas, ni algo exclusivo de los días anteriores a las vacaciones, es el impulso, el motor de la clase, lo que pone al estudiante ante el reto de *hacer matemáticas.* Para el constructivista, como dice Confrey (1991), un problema es sólo un problema en la medida en que es sentido problemático por el resolutor, y añade:

> *El conocimiento no es la acumulación de información; es la construcción de estructuras cognitivas capacitadoras, generadoras y que verifiquen el éxito en la resolución de problemas. Así, la resolución de problemas se convierte en un acto intelectual esencial – no un enriquecimiento, un pasatiempos ocasional* (p. 118).

Ahora bien, resulta evidente que esta forma de entender la resolución de problemas, inmersa en una teoría constructivista del aprendizaje, no es comparti-

1. Una descripción exhaustiva de las tendencias en la concepción de la enseñanza de la matemática y de los modelos de concepción de la matemática puede encontrarse en Carrillo y Contreras (1995). Por su parte, en Carrillo y Contreras (1994) se puede ver una caracterización de dichas tendencias y modelos a partir de categorías e indicadores.

da, al menos en la práctica, por la mayoría de los docentes, en algunos casos (los menos) por discrepancias teóricas, pero generalmente porque el docente no conoce caminos de aplicación o no se ve capacitado para llevar a la práctica tal propuesta. En resumen, el docente no sabe, en muchos casos, extraer de un problema el partido suficiente para compensar la inversión de tiempo que supone la dedicación a resolverlo en clase. Por ello, el propósito de este artículo es poner de manifiesto la riqueza que entraña la resolución de problemas, a partir de los comentarios sobre la resolución del siguiente problema, el cual podría ser planteado a partir de los 14-15 años.

> En un combate han participado 11.000 soldados. De los supervivientes se sabe que el 56'**56**% no fuma y que el 56'7**567**% no bebe. ¿Cuántos murieron?

[Se expresa en negrita el periodo].

En primer lugar podría asaltarnos el impulso de decir que el contexto no es el deseable, que, como todo, lleva su currículo oculto, y que podría plantearse una situación análoga (en cuanto a la estructura matemática intrínseca) recurriendo a contextos más formativos. Ahora bien, también podríamos argumentar que situaciones como ésta pueden servir de base de discusiones sobre los valores sociales. En cualquier caso, este enunciado cayó en nuestras manos procedente de un curso de geodestas militares, lo que explica claramente el contexto.

[Sería conveniente que el lector abordara el problema antes de continuar la lectura para poder sacar más partido de las siguientes reflexiones.]

Este enunciado da pie a poner en juego dos heurísticos importantes en la resolución de problemas, pertenecientes a la fase de comprensión y planificación, respectivamente. El primero de ellos se pregunta sobre los posibles datos implícitos que pueda haber en el enunciado, que en este caso se traduce en que el resultado ha de ser un número natural.

...el docente no sabe, en muchos casos, extraer de un problema el partido suficiente para compensar la inversión de tiempo que supone la dedicación a resolverlo en clase.

La aparición de este heurístico puede estar motivada por el útil hábito de indagar en busca de posibles datos (semi-)ocultos o bien por la voluntad de resolver la situación planteada. En efecto, inicialmente es natural pensar que se trata de un problema de lógica o de pega y abandonar cuando no se encuentra nada lógico que conduzca a una solución rápida o tras fallidos intentos de representar los datos mediante diagramas de Venn-Euler. Pero, si decidimos hacerle frente, nos veremos obligados a escudriñar en busca de datos que, aun siendo obvios, pueden desempeñar un papel crucial en el proceso de resolución (precisamente por su obviedad a veces no son considerados). El otro heurístico se pregunta sobre las posibilidades existentes de simplificar la situación o hacerla más manejable, que en este caso nos lleva a expresar los porcentajes como fracciones y a ponernos ejemplos de más fácil manejo que conduzcan a una correcta planificación, sin la maraña (inicialmente) provocada por unos números con los que se hace difícil operar. (El trabajo con 100 o 1000 soldados y un 50 y un 60%, por ejemplo, da luz para decidir la estrategia a emplear.)

A tal respecto hay que comentar que algunos resolutores simplifican burdamente el enunciado, de forma que sustituyen los datos por otros *parecidos* sin intención de abordar finalmente la situación planteada. Unos escogen 56'56%, mientras que otros se quedan simplemente con 56%, poniendo de relieve el obstáculo que supone trabajar con números con infinitas cifras decimales, aunque sean periódicos. No obstante, tal situación se puede aprovechar para dejar que se aborde el problema con ese dato, con idea de proponer posteriormente otras modificaciones, ahora con la solución fijada, lo que provoca una comprensión profunda del papel que desempeña cada dato del enunciado. Finalmente, puede analizarse las condiciones que han de cumplir los datos para que se garantice, de manera general, la existencia de, al menos, una solución[2], lo que nos lleva ineludiblemente a abordar la estructura matemática del problema.

Por otra parte, puede aprovecharse un poco más el hecho de que la solución haya de ser natural para comentar que, aunque esto sea una restricción, es lo que le da sentido al problema, pues, si no, cualquier número valdría. Asimismo, la situación plantea un ejemplo de utilidad y relevancia de la relación existente entre fracciones, decimales y porcentajes. De hecho, el problema nos puede servir de ejemplo para ilustrar un proceso de construcción de conocimiento matemático.

Este problema, cuya solución pasa por un procedimiento de paso de decimal periódico puro o mixto a fracción, puede erguirse en potenciador de ese proceso. En efecto, tras haber decidido que los datos expresados como fracciones pueden ser más útiles, el resolutor puede encontrarse ante la dificultad de «no recordar» un procedimien-

2. La situación general puede formularse así: Una determinada proporción de supervivientes no fuman y otra no beben. ¿Cuántos murieron?

   Llamemos: *x* a la cantidad de supervivientes, *y* a la cantidad de soldados participantes en la batalla ($x \leq y$), a/b a la fracción irreducible que expresa la proporción (parte de la unidad; $a \leq b$) de supervivientes que no fuman, c/d a la fracción irreducible que expresa la proporción (parte de la unidad; $c \leq d$) de supervivientes que no beben.

   Es claro que la condición general es que mcm $(b,d) \mid x$.

   Tomando $y=11000$, es fácil dar ejemplos imposibles para la situación planteada:

   Basta elegir $\text{mcm}(b,d)>11000$; por ejemplo, 12000. Como $12000=2^5\cdot3\cdot5^3$, podemos seleccionar $b=2^5\cdot3$ (=96) y $d=5^3$ (=125).

   Así, si, por ejemplo, tomamos $a/b = 53/96$ y $c/d = 72/125$, no es posible encontrar más solución que la trivial (n.° de supervivientes = 0). En realidad, en concordancia con el enunciado inicial, los datos serían 55'20834375% y 57'6%.

to que años atrás fue simplemente memorizado. Se nos brinda una oportunidad de hacer un paréntesis y dotar de significado a una regla de conversión que, por desuso, ha caído en el olvido.

El proceso reconstructivo puede comenzar con la pregunta, ¿qué otra expresión racional existe para 0,999...?

Esta cuestión tiene una doble finalidad: de un lado, nos situamos ante un decimal periódico que no es identificado inicialmente con 1, su valor, hecho que evocará el proceso por su carácter conflictivo; de otro, nos sirve como primer ejemplo de transformación de decimal periódico puro a fracción.

Normalmente, tras el desconcierto ante la pregunta inicial, puede sugerirse averiguar la fracción equivalente a 0,111...,y después la de 0,333... y, mediante las relaciones entre ellas, conjeturar la de 0,999.... Después vendría el proceso algebraico conocido: x=0,999...; 10x=9,999...

El propio enunciado del problema invita a seguir en este paréntesis abierto para obtener la fracción generatriz de decimales periódicos mixtos (pues, de manera astuta, se ha escrito 56,7**567**, que podría expresarse en realidad como 56,**756**).

Una vez obtenidas las correspondientes fracciones, su lectura o interpretación como *partes del todo* (uno de los significados de las fracciones) y no como un simple número, dará significado al porcentaje correspondiente, con lo que hará más comprensible la situación planteada. Este es, de hecho, el segundo gran escollo del problema; un tanto por ciento no suele ser fácilmente identificable por el resolutor con una fracción y, sin embargo, de expresar que el 5600/99% de los supervivientes no fuman a decir que (5600xN)/(99x100)=M, donde N representa el número de supervivientes y M al total de no fumadores, hay un razonamiento proporcional y una transformación algebraica claves para el problema; la expresión simplificada 56N/99=M nos indica que N es 99 múltiplo.

Simultáneamente, y con la otra expresión, se hace necesario que numerador y denominador no tengan divisores comunes, o sea, que el mcd de ambos sea 1, o, en otras palabras, que la fracción sea irreducible, algo que en la mayoría de las ocasiones sólo parece ser un capricho del profesor. En este caso, si dejáramos la fracción 567/999, no podríamos afirmar que habría de haber grupos enteros de 999 para que la solución fuera natural, pues a un grupo de 37, por ejemplo, le corresponderían 21 no bebedores.

Finalmente, queda salvar un último obstáculo, que es de carácter puramente conceptual; se trata del hecho de reconocer que todo múltiplo de dos números lo es de su mínimo común múltiplo.

Este problema, además, trata de combatir la idea de que los problemas matemáticos sólo pueden tener una solución correcta y da lugar a la consideración de casos límite. Nos referimos al hecho de considerar 0 como mcm (momento para insistir en que 0 es múltiplo de todos los números, mientras que 1 es divisor de todos), lo que aporta una solución matemática del problema, aunque no demasiado lógica por el contexto. El hecho de que existan varias soluciones (no tan frecuente, por otra parte, como el hecho de existir varios caminos para la resolución), lejos de ser una mera anécdota, adquiere gran importancia cuando nuestra preocupación no se ciñe al ámbito conceptual: es coherente que, si pretendemos fomentar una actitud abierta en nuestros alumnos, demos lugar a situaciones, como este problema, en las que no exista una única verdad.

En definitiva, con este análisis hemos pretendido evidenciar la bondad de la resolución de problemas para propiciar conocimiento significativo en Matemáticas, refiriéndonos tanto al conocimiento específico como al conocimiento sobre resolución de problemas en general.

En definitiva, con este análisis hemos pretendido evidenciar la bondad de la resolución de problemas para propiciar conocimiento significativo en Matemáticas (a través de situaciones en las que se desarrolla el empleo de estrategias), refiriéndonos tanto al conocimiento específico como al conocimiento sobre resolución de problemas en general. Del mismo modo, se ha pretendido poner de manifiesto la posibilidad de abordar conocimiento de tipo actitudinal, como acabamos de referir.

Referencias

CARRILLO, J. y L. C. CONTRERAS (1994): «The relationship between the teachers' conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis», *Proceedings of the 18th PME Conference.* Lisboa (Portugal, 29 de julio al 3 de agosto), Vol. II, 152-159.

CARRILLO, J. y L. C. CONTRERAS (1995): *Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la matemática y su enseñanza,* Educación Matemática (en prensa).

BRANCA, N. A. (1980): «Problem Solving as a Goal, Process and Basic Skill», en S. KRULIK y R. E. REYS (Eds.): *Problem Solving in School Mathematics,* NCTM, Reston, Virginia.

CLAXTON, G. (1984): *Live and Learn. An Introduction to the Psychology of Growth and Change in Everyday Life,* Harper and Row Publishers, London.

CONFREY, J. (1991): «Learning to listen: a student's understanding of powers of ten», en Ernst von GLASERSFELD (Ed.): *Radical Constructivism in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Nederland.

ERNEST, P. (1989): «Beliefs Influence in Mathematics Teaching», *Mathematics Education and Society*, Document Series 35, Unesco, 99-101.

ERNEST, P. (1991): *The philosophy of mathematics education,* Falmer Press, London.

KESLER, R. Jr. (1985): *Teachers' instructional behavior related to their conceptions of teaching and mathematics and their level of dogmatism: Four case studies,* Unpublished doctoral dissertation, University of Georgia, Athens.

LERMAN, S. (1990): «Alternative Perspectives of the Nature of Mathematics and their Influence on the Teaching of Mathematics», *British Educational Research Journal*, 16(1), 53-61.

McGALLIARD, W. A. Jr. (1983): *Selected factors in the conceptual systems of geometry teachers: Four case studies* (Doctoral dissertation, University of Georgia, 1982), Dissertation Abstracts International, 44, 1364A.

PORLÁN, R. (1989): *Teoría del Conocimiento, Teoría de la Enseñanza y Desarrollo Profesional,* Tesis doctoral no publicada, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Sevilla.

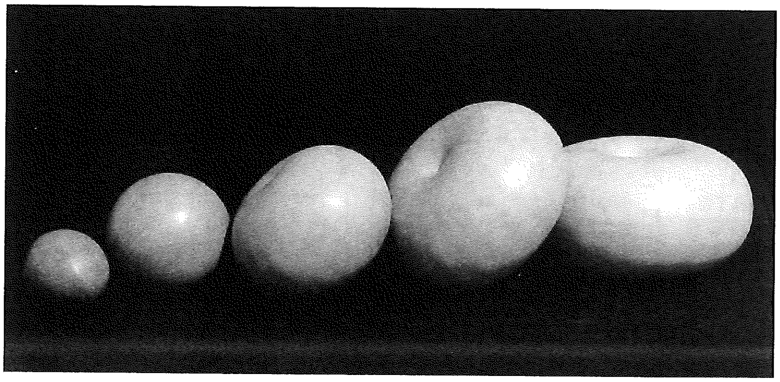
PORLÁN, R. (1992): «Teoría y práctica del currículum. El currículum en la acción», en AA.VV. *Curso de actualización científico-didáctica*, MEC, Madrid.

RUTHVEN, K. y R. COE (1994): «A Structural Analysis of Students' Epistemic Views», *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 101-109.

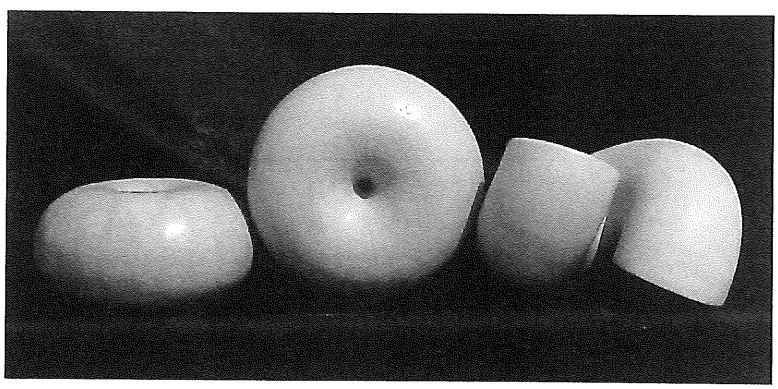
THOMPSON, A. G. (1984): «The relationship of teachers' conceptions of mathematics teaching to instructional practice», *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

THOMPSON, A. G. (1992): «Teacher's Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research», en D. A. GROUWS, (Ed.): *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*, McMillan, New York.

Luis Carlos Contreras
José Carrillo
Departamento
de Didáctica de las Ciencias
Universidad de Huelva.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
Thales



El ovoide, la esfera y las calabazas
Javier Carvajal



El toro
Javier Carvajal