

# SUMA<sup>23</sup>

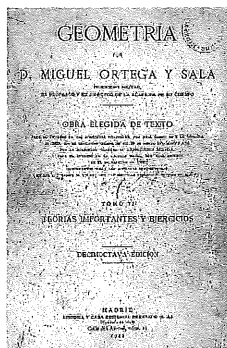
noviembre 1996

## Un manual español de geometría

**GEOMETRÍA (Dos tomos)**  
**Miguel Ortega y Sala**  
**Librería y Casa Editorial Hernando**  
**Madrid, 1885**

La *Geometría* de Miguel Ortega Sala tuvo su primera edición en Guadalajara en 1885 y tuvo diferentes ediciones en distintas poblaciones españolas. La novena edición la hizo en 1901 en Toledo, Imprenta Peláez, la edición veintiuna se hizo en Madrid en 1946. Una obra con más de sesenta años de vigencia efectiva merece la pena ser conocida y reconocida en el panorama de la matemática española.

La *Geometría* no es un obra de investigación, es un libro de texto de geometría bien estructurado y completo con el que se formaron muchas generaciones de militares españoles. Esta obra fue elegida como libro de texto para el ingreso en academias militares por Real Orden de 7 de octubre de 1884, en el concurso que se celebró el 30 de abril de ese mismo año por la Dirección General de Instrucción Militar y para el ingreso en la Escuela Naval por Real Decreto de 21 de Febrero de 1900. En la edición de 1946 se añade que esa



obra contiene todas las materias comprendidas en los programas de las escuelas especiales civiles de España y recomendada en las actuales Academias del Ejército y del Aire.

Miguel Ortega y Sala nació en Barcelona en 1848. En 1864 ingresó en la Academia de Ingenieros Militares y siendo oficial de ese cuerpo fue herido de gravedad en el cerco de Seo de Urgel durante la Guerra Carlista. Desde 1877 a 1886 fue profesor de la Academia de Ingenieros. En 1879, durante el reinado de Alfonso XII fue recompensado con el grado de teniente coronel por la publicación de su obra *Lecciones de geometría descriptiva*, escrita para la enseñanza en la Academia y con el de coronel por su obra *Trigonometría*. Aunque su producción matemática fue incesante, su carrera militar no pudo llegar más allá por el método de escribir más y más libros, debido a que se había derogado el Real Decreto de 1 de marzo de 1875 que fijaba la recompensa del profesorado militar en grado, cruz y empleo en plazos fijos de cuatro, dos y dos años respectivamente. El Real Decreto de 1886 deroga estas prerrogativas, pero dos años más tarde las recom-

## RECENSIONES

pensas al profesorado se consideraron de nuevo necesarias; el Real Decreto de 4 de abril de 1888 las restableció de modo que por el hecho de ser profesor no se podría obtener el ascenso en grado y empleo, pero sí cruces y gratificaciones económicas. En este R.D. se especificaba que no se concedían grados y empleos para evitar las dificultades que se producían en los ascensos, en un intento de no dar plaza sin vacante. El ministro Manuel Cassola se expresaba así:

Las tareas del profesorado, oscuras, enojosas, difíciles, sin lucimiento, no son las más propias para atraer a los oficiales que se distinguen en cada Arma, a quien conviene enmendarlas, si no se les ofrece el atractivo de valiosas recompensas; y ya que no será posible por el nuevo sistema de ascensos y recompensas conceder, como antes, grados u empleos, preciso será otorgarles cruces honoríficas y mayores gratificaciones. Estas deben considerarse principalmente, como medio para realzar el prestigio del profesor ante sus alumnos, no como simple aumento de sueldo.

Algo parecido a lo que ocurría para el profesorado sucedía con los autores de obras científicas o militares. Según fuera el mérito de la obra, el R.D. de 30 de septiembre de 1878 fijaba recompensas de grados, empleos, cruces y menciones honoríficas. La Real Orden de 13 de abril de 1883 y la de 10 de diciembre de 1886 que no se manden a informar más obras científicas que las que sean verdaderamente útiles para el ejército. Más tarde la R.O. de 1888 establece que los autores de libros de texto podrían recibir cruz e impresión de la obra por cuenta del estado, una mención honorífica o una recomendación para su carrera.

Ortega y Sala escribió, además de *Geometría*, obra que en concurso fue elegida como libro de texto de la Academia General Militar, las obras inéditas *Elementos de geometría y nociones de álgebra* y *Elementos de Geometría y nociones de Topografía*, por las que le concedieron la encomienda de Isabel la Católica. También escribió en colaboración con Pedro Pedraza *Lecciones de geometría descriptiva*.

La *Geometría* está dividida en dos tomos, el primero lleva el subtítulo de *Parte Elemental* y al segundo le puso la denominación de *Teorías importantes y ejercicios*. La metodología seguida es, según las propias palabras de autor la siguiente:

...nos hemos esmerado en seguir un orden metódico en alto grado, sacrificando, a veces, otras condiciones a esta que consideramos muy principal, pues la experiencia adquirida en la enseñanza nos ha demostrado que gran parte de las dificultades que encuentran los alumnos en sus estudios provienen de la falta de dicho requisito en los libros que les sirven de texto.

Le hubiera gustado seguir la línea expositiva de Richard Baltzer (1818-87) profesor de la universidad de Giesen en su obra *Elementos de Matemáticas*, pero su interesante trabajo —dice Ortega— no se había abierto paso en los centros docentes españoles. Este profesor gozó de un gran predicamento entre los matemáticos de su época y entre sus aportaciones se puede destacar el hecho de reclamar la atención de la comunidad matemática sobre las geometrías no euclídeas de Bolyai (1802-60) y

Lobachevski (1792-1856) que estaban en el olvido, además simplificó las fórmulas de expresión de la curvatura total de una superficie mediante determinantes.

Atendiendo a que el libro había de ser estudiado por jóvenes optó por seleccionar las demostraciones más sencillas para facilitar el aprendizaje en la medida de lo posible, pero sin faltar al rigor. En lo referente a problemas destaca el hecho de que cuando se trata la geometría plana el libro expone multitud de problemas, mientras que en la del espacio hay pocos. Las razones que Ortega da para justificar eso es que en la geometría del espacio las propias teorías dan la pauta para la resolución de problemas, pero en general las operaciones prescritas para resolver tales problemas no pueden realizarse más que con el auxilio de la geometría descriptiva y por consiguiente no le parece oportuno proponer problemas en la geometría espacial.

Una obra con tantas ediciones y con vigencia en un período de tiempo tan dilatado como la *Geometría* de Ortega, forzosamente ha de ver evolucionar la materia tratada. Así dieciocho años más tarde, en la edición de 1903 de Pamplona, reconoce el progreso que se ha producido en el campo de la geometría. Hace alusión a las Memorias sobre la geometría del triángulo y del tetraedro de Lemoine (1840-1912), antiguo alumno de la escuela politécnica, de Neuberg (1840-1926), de la universidad de Lieja, de Brocard (1845-1922), Mayor de Ingenieros del Ejército francés, de Cristoforo de Alasia del Instituto de Tempio en Cerdeña. También destaca los excelentes tratados de Hadamard (1865-1963), de Niewenglowki y Gerard, de Lazzeri y Bassani y de Guichard y, entre los españoles, Eduardo Torroja (1847-1918) y las aportaciones de Juan J. Durán y Loriga.

Los enfoques de estos autores se distinguen, según palabras de Ortega, por la amplitud del campo que abarcan, por la belleza de la forma y por la sencillez de los procedimientos de que se valen. Pero estima nuestro autor que para la docencia no se ha logrado compendiarla para que su estudio y el de la geometría de la medida no requie-

*Atendiendo a que el libro había de ser estudiado por jóvenes optó por seleccionar las demostraciones más sencillas para facilitar el aprendizaje en la medida de lo posible, pero sin faltar al rigor.*

ran más tiempo de estudio que el que racionalmente corresponde a una asignatura en los cursos elemental o superior. Además de la falta de una conveniente adaptación pedagógica de la materia aduce una razón adicional a los métodos modernos de la geometría y es que la propia amplitud del campo que desarrolla la geometría moderna y el propio espíritu de generalidad que se advierte en sus procedimientos, permitiendo comprender en un solo precepto varios casos particulares y avanzar siempre de lo complejo a lo sencillo, de lo general a lo particular, suele ser un escollo para los principiantes, pues se ven obligados a realizar estudios superiores antes de conocer lo elemental. Este método es el procedimiento inverso al que se sigue para adquirir conocimientos en cualquier faceta de la vida, puesto que, generalmente, se parte de lo particular y, afirmando los conocimientos mediante aplicaciones y ejemplos que se hallen al alcance de la inteligencia, lograr mayores cotas de abstracción.

Pero, aunque el libro tiene un carácter pedagógico, no se limita a contener la materia propia de su plan de estudios y traspasa los límites. Consciente de que las investigaciones modernas en geometría requerían un esfuerzo constante por estar al día y respetando el plan de estudios para el que fue escrita la obra, optó por introducir diversas cuestiones que se planteaba la geometría de su tiempo en el cuerpo de su libro. Así, diseminadas en diversas notas, apéndices y ejercicios, siempre respetando la estructura inicial de la obra, aparecen cuestiones interesantes de la geometría moderna, con el fin de que los estudiantes de su geometría vieran el camino allanado para estudiar las nuevas teorías geométricas.

El contenido de la obra es el siguiente:

## **TOMO I.- Parte elemental**

### **Geometría plana:**

CAPÍTULO I.- La línea recta. Propiedades de la línea recta y la línea quebrada. Ángulos. Perpendiculares y oblicuas. Paralelas.

CAPÍTULO II.- Polígonos o figuras formadas por líneas rectas. Triángulos. Cuadriláteros. Polígonos en general.

*...aunque el libro  
tiene un carácter  
pedagógico,  
no se limita  
a contener la  
materia propia  
de su plan  
de estudios  
y traspasa  
los límites.*

CAPÍTULO III.- Circunferencia. Propiedades de la circunferencia. Propiedades relativas de la recta y la circunferencia. Posiciones relativas de dos circunferencias.

CAPÍTULO IV.- Medida de líneas y ángulos. Preliminares. Medida de la línea recta. Medida de un arco. Medida de ángulos.

CAPÍTULO V.- Problemas. Consideraciones preliminares. Problemas sobre la línea recta. Problemas sobre polígonos. Problemas sobre la circunferencia. Observaciones generales sobre los problemas, procedimientos generales y métodos especiales.

CAPÍTULO VI.- Líneas proporcionales y semejanza de figuras. Consideraciones preliminares. Segmentos proporcionales. Semejanza de figuras. Relaciones métricas. Problemas.

CAPÍTULO VII.- Polígonos regulares. Polígonos regulares convexos. Polígonos regulares estrellados. Problemas.

CAPÍTULO VIII.- Medida de la circunferencia y relación de ésta con el diámetro. Consideraciones preliminares. Medida de la circunferencia. Relación de la circunferencia con el diámetro.

CAPÍTULO IX.- Áreas. Determinación de áreas. Comparación de áreas. Problemas sobre áreas.

### **Geometría del espacio:**

CAPÍTULO X.- Rectas y planos. Determinación de un plano. Posiciones relativas de rectas, planos y rectas y planos. Propiedades de rectas y planos debidas a su posición relativa. Proyecciones, ángulos y mínimas distancias. Problemas.

CAPÍTULO XI.- Combinación de planos. Ángulos diedros y poliedros.

CAPÍTULO XII.- Líneas y superficies curvas. Líneas curvas en general. Superficies en general. Superficies cónica, cilíndrica y esférica.

CAPÍTULO XIII.- Poliedros. Pirámide. Prisma. Poliedros en general.

CAPÍTULO XIV.- Comparación de los cuerpos por su magnitud, posición y forma. Igualdad. Simetría. Semejanza.

CAPÍTULO XV.- Áreas y volúmenes de los cuerpos. Áreas. Volúmenes. Comparación de áreas y volúmenes.

### **Apéndice:**

CAPÍTULO XVI.- Curvas de segundo grado. Elipse. Hipérbola. Parábola. Definición común a la elipse, parábola e hipérbola. Secciones cónicas.

CAPÍTULO XVII.- Curvas trascendentes. Cicloide. Epicicloide. Espirales. Hélices.

**Enunciados de 500 problemas con datos numéricos.**

## **TOMO II.- Teorías importantes y ejercicios.**

CAPÍTULO XVIII.- Preliminares. Ángulos. Puntos y rectas del infinito. Concepto general de los polígonos. Concepto general de los ángulos poliedros. Concepto general de los poliedros. Concepto general de la suma geométrica de varios segmentos. Nuevas definiciones en el triángulo (rectas, puntos, triángulos, círculos, potencias, coordenadas). Formas geométricas. Su clasificación.

CAPÍTULO XIX. Centro de distancias proporcionales. Conceptos y definiciones. Determinación de centros de distancias proporcionales o medias. Centros de gravedad. Conceptos y definiciones. Determinación de centros de gravedad. Centro de gravedad de líneas, de superficies planas y poliédricas, centro de gravedad de volúmenes. Teoremas de Guldin.

CAPÍTULO XX.- Transversales. En el triángulo: Consideraciones preliminares y teoremas fundamentales. En el cuadrilátero alabeado. Aplicaciones de la teoría: Teorema de Pascal y cuadrilátero y cuadrángulo completos.

CAPÍTULO XXI.- Formas proyectivas: Definiciones. Obtención de perspectivas. Propiedades.

CAPÍTULO XXII.- Relación anarmónica. Entre cuatro puntos de la línea recta: Definiciones y nomenclatura. Número y propiedades de las distintas relaciones anarmónicas de cuatro puntos. Deducción y discusión de los valores distintos. Problema inverso. Comparación entre sistemas distintos. Entre cuatro rectas en haz: Nomenclatura. Número y propiedades de las distintas relaciones anarmónicas de cuatro rectas en haz. Deducción y discusión de los valores distintos. Problema inverso. Comparación entre haces distintos. Entre cuatro planos en haz. Nomenclatura y propiedades. Aplicaciones de la teoría principio de dualidad.

CAPÍTULO XXIII.- Proporción o división armónica. De cuatro puntos en línea recta. Haces armónicos de rectas y planos. Aplicaciones de la teoría. Ejemplos.

CAPÍTULO XXIV.- Homografía e involución. Divisiones homográficas sobre bases distintas. Divisiones homográficas sobre base común. Divisiones homográficas en involución. Haces homográficos de distinto centro. Haces homográficos concéntricos. Haces homográficos en involución. Haces homográficos de planos. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXV.- Homología. Definiciones. Discusión del coeficiente de homología. Propiedades de las figuras homológicas. Determinación de las rectas límite. Determinación de las figuras homológicas. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXVI.- Curvas cónicas. Nuevas teorías sobre las cónicas. Propiedades proyectivas aplicables a las cónicas. Generación de las cónicas. Propiedades. Demostración directa para las cónicas de los teoremas de Pascal y Brianchon. Aplicaciones de la teoría (determinación de puntos de contacto, trazado de una tangente).

*... un estudio detallado de las sucesivas ediciones de la Geometría de Ortega, nos daría una idea clara de la evolución de la enseñanza de la geometría de finales del siglo XIX y el primer tercio del siglo XX.*

CAPÍTULO XXVII.- Semejanza y homotecia. Ampliación de la teoría. Propiedades de las figuras plana. Puntos especiales. Propiedades de las figuras en el espacio. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXVIII.- Polo y polar. En el círculo, propiedades generales, Posiciones relativas del polo y la polar. Determinación del polo y la polar. Cuadrilátero inscrito y circunscrito. Idem en las cónicas y en la esfera. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXIX.- Ejes y planos radicales. Eje radical, potencia de un punto. Definición y propiedades. Posiciones del eje y centro radical según los casos. Propiedades de los punto y cuerdas antihomólogos. Determinación del eje radical. Plano radical. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXX.- Inversión en el plano. Propiedades. Inversa de una figura. Inversión en el espacio. Aplicaciones de la teoría.

CAPÍTULO XXXI.- Líneas y superficies en general. Generación y definiciones. Envoltentes e involutas. Clasificación de las curvas. Curvatura. Círculo osculador. Envoltentes y evolutas. Tangentes, su trazado. Longitud de una curva. Superficies no regladas y regladas. Superficies de segundo orden, hiperboloide de una hoja, hiperboloide hiperbólico, conos y cilindros. Superficies de revolución, cuádricas.

CAPÍTULO XXXII.- Cuestiones y problemas notables. Valor de  $\pi$ . Trisección del arco. Rectificación de la circunferencia, semicircunferencia y cuadrante. División de una circunferencia en  $n$  partes iguales. Cuadratura del círculo y duplicación del cubo. Circunferencia tangente a otras tres. Esfera tangente a cuatro.

CAPÍTULO XXXIII.- Instrumentos de utilidad práctica. Curvímetros y planímetros.

Seguramente un estudio detallado de las sucesivas ediciones de la Geometría de Ortega, con el análisis de las cuestiones, teorías y apéndices que fue añadiendo en cada una nos daría una idea clara de la evolución de la enseñanza de la geometría de finales del siglo XIX y el primer tercio del siglo XX.

**Víctor Arenzana**