

SUMA²³

noviembre 1996, pp. 95-103

La enseñanza de las matemáticas en Dinamarca*

Richard Cabassut

Dinamarca es un país de 5,15 millones de personas. Los centros escolares están implantados esencialmente en pequeños núcleos urbanos, y con un tamaño humano. En 1990, 632.000 alumnos estaban en la enseñanza obligatoria (incluye la escuela maternal, primaria y primer ciclo de la secundaria en la *Folkeskole*); 72.000 asisten a los institutos de enseñanza general, 240.000 hay en formación profesional y 126.000 en la enseñanza superior.

El ministerio de educación reglamenta el sistema escolar: orientaciones, directrices, recomendaciones (no obligatorias), control general de los exámenes al finalizar los estudios, fijación de las normas mínimas para los edificios escolares, subvenciones globales tanto a la privada como a la pública, sin prescribir en qué se invierten los fondos.

La enseñanza obligatoria: una escuela en la que la enseñanza primaria no se distingue del primer ciclo de la enseñanza secundaria

Hasta los siete años, los niños pueden ir a guarderías de día (de 0 a 3 años) o al jardín de infancia (de 3 a 7 años), o a las clases preparatorias (de 5 a 7 años). La escolarización es obligatoria desde los 7 hasta los 16 años, y se desarrolla toda en un mismo centro: la *Folkeskole* (escuela municipal) o en escuelas privadas (el 10% de los alumnos). Existe un curso décimo para los cursos de nivel superior y prepara para un examen no obligatorio de finalización de estudios avanzados. No es obligatorio realizar este décimo curso para continuar en el instituto: está reservado para los alumnos que desean consolidar sus adquisiciones antes de continuar otros estudios o de abandonar el sistema educativo.

* Publicado en *l'Ouvert*, n.º 77, diciembre de 1994.

Traducción: Florencio Villarroya

INFORME

n.º años		ENSEÑANZA SUPERIOR		ENSEÑANZA PROFESIONAL aprendizaje
4	GYMNASIUM		HF	
3	OPCIÓN LINGÜÍSTICA	OPCIÓN MATEMÁTICAS		
2	(35% de alumnos del Gymnasium)	(65% de alumno del Gymnasium)		
1				
Exámenes no obligatorios: Certificados de fin de estudios				El 8% de los alumnos abandonan la escuela después de las clases de 9.º ó 10.º
Edad	Curso			
16	10	Curso seguido por el 45% de los alumnos que hicieron 9.º		
15	9	FOLKESKOLE ENSEÑANZA PÚBLICA Primaria y Primer Ciclo de Secundaria (90% de los alumnos)		ESCUELAS PRIVADAS (10% de alumnos)
14	8			
13	7			
12	6			
11	5			
10	4			
9	3			
8	2			
7	1			
6	Maternal	Bornehaveklasse (90% de alumnos)		

Cuadro 1. El sistema educativo danés

	OPCIÓN MATEMÁTICAS (elegida por el 65% de los alumnos)		OPCIÓN LINGÜÍSTICA (elegida por el 35% de los alumnos)		
Curso 1.º	5 clases de 45 m a la semana		3 clases de 45 minutos a la semana de enseñanza general de ciencias		
2.º Curso	5 clases de 45 m a la semana. Prueba escrita obligatoria (nivel B)		4 clases de 45 minutos a la semana de enseñanza general de ciencias con prueba oral	nivel intermedio	nivel superior
	sin prueba oral	con prueba oral		4 h de matemáticas o nada	5 h de matemáticas
Curso 3.º	nivel superior 5 clases de 45 minutos	sin matemáticas	sin clases de ciencias	nada o 4 h de matemáticas	5 h de matemáticas
	Pruebas escritas y orales (nivel A)			examen oral (nivel C)	escrito más oral (nivel B)

Cuadro 2. Organización de la enseñanza de las matemáticas

La enseñanza post-obligatoria: la elección entre la enseñanza general o la formación profesional

Al final de la escolarización obligatoria, el alumno puede elegir, bajo ciertas condiciones (explicitadas en el párrafo evaluación), el *Gymnasium*, que se parece a nuestros institutos de Bachillerato, y que prepara en tres años para el *Studentereksamen* (equivalente de nuestra Selectividad) que permite el acceso a la Universidad. Los alumnos de mayor edad, considerados aptos para retomar los estudios generales que han interrumpido para participar en una experiencia profesional o de otro tipo de formación, pueden elegir los

cursos HF (*Højere Forberedelseksamen*): estos cursos, preparan en dos años el examen preparatorio superior HF que permite, del mismo modo, el acceso a la enseñanza superior. Más de las dos terceras partes de los alumnos de HF interrumpieron su escolaridad después de la *Folkeskole*, durante más de un año. Cada uno de los 14 condados daneses es responsable, en la gran mayoría de casos, de las escuelas secundarias superiores (*Gymnasium* y cursos de HF), del condado.

Los alumnos pueden elegir, igualmente, la formación profesional por medio del *aprendizaje* (que dura entre 2 y 4 años, con una formación teórica en una escuela técnica o de comercio y una formación práctica en empresas), o el acceso a escuelas técnicas (diseñadores técnicos, ayudantes técnicos o de laboratorio,...), comerciales, agrícolas, de educación sanitaria o social, o de otro tipo de enseñanza profesional. Las escuelas de enseñanza profesional son más bien privadas, aunque reciben subvenciones del Estado.

Las universidades y la mayoría de los centros de enseñanza superior están gestionadas por el estado.

Organización de la enseñanza secundaria de las matemáticas

Las matemáticas en la *Folkeskole*

La enseñanza de las matemáticas es obligatoria, con cuatro clases de 45 m a la semana. Se proponen programas diferenciados para los cursos 8.º, 9.º ó 10.º.

Las matemáticas en los Institutos

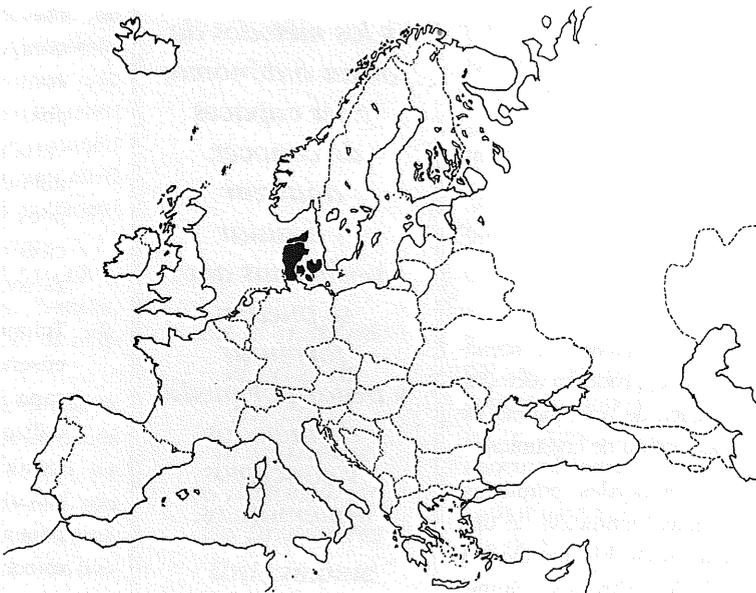
La enseñanza dura tres cursos, del de 16-17 años al de 18-19. Se proponen dos opciones: la *opción matemáticas* y la *opción literaria*.

En la opción matemáticas, los alumnos reciben una enseñanza de matemáticas obligatorias durante los dos primeros cursos: Nivel B, a razón de cinco horas a la

semana (de 45 m, claro). Al terminar estos dos cursos, que correspondería con nuestro Tercero de BUP, pero con un año más de edad, los alumnos tienen que hacer un examen escrito de 4 horas de verdad y un examen oral de 25 minutos. El tercer año pueden bien no tener matemáticas bien tener unas matemáticas de nivel superior (nivel A), elección que realiza el 85% aproximado de los alumnos del segundo curso de la opción matemáticas. Esta enseñanza de 5 horas semanales se evalúa mediante un examen escrito de 4 horas enteras y un oral de 30 m. Este examen oral sustituye al del final del segundo curso, del que están exentos los alumnos que hacen matemáticas en su tercer curso. Existe también la posibilidad de preparar, durante una semana, en la cual el alumno no tiene que asistir a clases, una memoria de matemáticas, cuya nota se tiene en cuenta en la nota de la Selectividad (una descripción más completa se da en el párrafo sobre la memoria).

En la opción literaria, hay una enseñanza general de ciencias, constituida por matemáticas, física, química, medio ambiente y astronomía, durante un curso, por un único profesor a razón de tres horas semanales. Al acabar este primer curso se le ofrecen tres posibilidades a los alumnos:

- Seguir en segundo con una enseñanza general de ciencias, de 4 horas a la semana, sancionado por un examen oral; y ninguna enseñanza científica en tercero.
- Elegir la opción literaria, nivel intermedio (nivel C). Entonces recibe una enseñanza semanal de 4 horas de matemáticas, o bien en segundo, o bien en tercero, sancionados por un examen oral de 25 minutos.
- Elegir la opción literaria, nivel superior (nivel B), en la que sigue un curso matemático de nivel comparable al de la enseñanza obligatoria de la opción matemáticas, a razón de 5 horas a la semana y sancionado por un examen escrito y oral.



Todas estas elecciones están bajo la exclusiva responsabilidad de cada alumno: los profesores y los consejos de evaluación, pueden dar informes pero no es necesario seguirlos.

Los programas de matemáticas en el instituto: Opción «matemáticas»

1. Matemáticas obligatorias (nivel B)

Finalidades de esta enseñanza:

- Los estudiantes tienen que adquirir una comprensión de los modos de pensamiento, de los conceptos y de los métodos matemáticos fundamentales;
- los estudiantes deben familiarizarse con las matemáticas como medio de formulación, de análisis y de resolución de problemas dentro de diferentes dominios (del programa).

El programa incluye cinco dominios y tres aspectos. Los cinco dominios son:

- 1) Números: enteros, racionales, reales, exponentes, raíces, porcentajes, interés.
- 2) Geometría: triángulo, triángulos rectángulos y semejantes, áreas en el plano, distancia en el plano, seno, coseno y tangente, cálculo de longitudes y ángulos de un triángulo.
- 3) Funciones: funciones lineales, polinómicas, trigonométricas, exponenciales, logarítmicas y potenciales. Resolución de problemas de ecuaciones y desigualdades en los que intervengan las funciones anteriores.

- 4) Cálculo diferencial: número derivada, tangente, aproximación afín, reglas de derivación, máximos y mínimos, funciones monótonas, métodos para trazar curvas.
- 5) Estadística y probabilidad: experiencias aleatorias, probabilidad a priori y por frecuencias, universo de posibles, probabilidades de sucesos, áleas (variable aleatoria), distribución binomial y normal.

Los tres aspectos son:

- 1) El aspecto histórico: los estudiantes tienen que adquirir un conocimiento de las matemáticas y de los elementos de historia de las matemáticas en un contexto socio-cultural.
- 2) El aspecto modelización: el programa debe dar a los estudiantes el conocimiento de la construcción de modelos matemáticos como representación de la realidad y una impresión de las posibilidades y de los límites de la

aplicación de los modelos matemáticos y permitirles modelizar, de manera autónoma, situaciones sencillas.

- 3) Estructura interna de las matemáticas: los estudiantes tienen que lograr una comprensión de los modos de pensamiento y de los métodos característicos de las matemáticas. Tienen que comprender cómo estos modos de pensamiento y métodos afectan al desarrollo y a la estructura de los diferentes dominios (del programa).

Estudio de los aspectos: los tres aspectos se estudian en relación con el estudio de los cinco dominios, y a través de una enseñanza especial de unidades organizadas en relación con uno o más aspectos. Estas unidades se pueden incluir tanto en un tema obligatorio (del programa) como en un tema adicional (al programa). Estas unidades deben comprender al menos veinte lecciones.

2. Matemáticas a nivel superior (nivel A)

Se añade a las finalidades de la enseñanza obligatoria la siguiente: los estudiantes tienen que desarrollar especialmente la capacidad para utilizar los conceptos matemáticos y los métodos de forma autónoma, y ser capaces de conocer, analizar y evaluar problemas que se pueden formular y tratar por medio de métodos y conceptos matemáticos.

El programa incluye tres dominios, una unidad de libre elección y tres aspectos.

Los tres dominios son:

- 1) Geometría de dimensiones 2 y 3. Vectores, coordenadas, producto escalar, ortogonalidad, producto vectorial, proyecciones, descripción analítica de un conjunto de puntos, distancia, ángulos, intersección de conjuntos.
- 2) Cálculo integral. Ecuaciones diferenciales: primitivas, integrales definidas e indefinidas; definición de una integral como límite de sumas, métodos analíticos y numéricos de integración, cálculo de áreas y volúmenes, modelos de ecuaciones diferenciales, incluyendo $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$, e $y'' = k \cdot y$.
- 3) Un dominio ligando las matemáticas con la informática. Los estudiantes tienen que lograr la comprensión de un dominio matemático que ilustre la interacción entre la matemática y la informática... El concepto de algoritmo tiene que jugar un papel principal. Este dominio debe durar al menos veinte sesiones.
- 4) Una unidad de libre elección que debe durar alrededor de veinticinco sesiones.

Los aspectos son los mismos tres que para la enseñanza obligatoria precedente.

3. Matemáticas de la opción literaria: nivel intermedio (Nivel C)

Las finalidades de esta enseñanza son:

- Los estudiantes deben adquirir una comprensión de los

[En las Matemáticas de nivel A] los estudiantes tienen que desarrollar especialmente la capacidad para utilizar los conceptos matemáticos y los métodos de forma autónoma, y ser capaces de conocer, analizar y evaluar problemas que se pueden formular y tratar por medio de métodos y conceptos matemáticos.

modos de pensamiento y de los métodos matemáticos;

- los estudiantes tienen que lograr un conocimiento de las matemáticas como medio de formulación, análisis y resolución de problemas en dominios variados (del programa);
- los estudiantes tienen que llegar a ser competentes en la aplicación de algunos conceptos matemáticos elementales y en métodos para resolver problemas.

El programa incluye tres dominios y una unidad de libre elección. Los tres dominios son:

- 1) Función, optimización: los estudiantes tienen que conseguir una comprensión de las funciones como medio de descripción y de análisis de las relaciones entre variables, así como un conocimiento de las funciones elementales y de los métodos de resolución de los problemas de optimización.
- 2) Tratamiento y análisis de datos: la enseñanza tiene que desarrollar la capacidad de los estudiantes para utilizar los medios de descripción estadística y los instrumentos de cálculo (incluido el ordenador) para analizar los datos. Además, los estudiantes tienen que familiarizarse con los conceptos y las descripciones de problemas económicos corrientes.
- 3) Geometría: la enseñanza debe aumentar el conocimiento de los estudiantes sobre los conceptos fundamentales de geometría. El objetivo principal es aumentar la comprensión de los estudiantes de los modos de pensamiento y los métodos matemáticos y de darles algunas aplicaciones prácticas de geometría o una visión de las matemáticas en un contexto histórico.

Un tema de libre elección se debe de tratar al menos durante veinte lecciones.

Evaluación y orientación en Dinamarca

El sistema de calificación

En la *Folkeskole*, el sistema de calificaciones refleja una filosofía liberal. Hasta el séptimo grado (alrededor de 13 años), se informa, al menos dos veces al año, a los padres sobre la escolarización de sus hijos, pero sin darles ninguna calificación. A partir de 8.º (14 años), se dan calificaciones de las materias que ha elegido el alumno para presentarse al examen de final de estudios. No es obligatorio presentarse a este examen; simplemente, éste puede servir como certificado del nivel de conocimientos al salir de la *Folkeskole*. Sin embargo, para los alumnos que quieren seguir sus estudios en un instituto, es obligatorio realizar el examen en ciertas materias. Para continuar en el instituto han que cumplir simultáneamente las siguientes condiciones:

- haber terminado el curso 9.º (o 10.º),
- haber cursado alemán o francés, desde 7.º hasta 9.º (el inglés es obligatorio desde 5.º hasta 9.º),
- haber superado una prueba escrita con un resultado aceptable en danés y en cálculo-matemáticas para las dos opciones, una prueba oral con un resultado aceptable en inglés, alemán o francés para la opción literaria, en física y química para la opción matemáticas. Además, los profesores de la *Folkeskole* deben de haber reconocido que el alumno es apto para continuar en un instituto, si no el alumno tiene que superar un examen oral suplementario.

Sea en la *Folkeskole* o en el instituto, la escala de notas dadas a los trabajos de los alumnos, está formada por nueve, representando categorías bien delimitadas. Uno de los objetivos de este sistema de calificación es el de asegurar la uniformidad de la evaluación de los resultados en el centro y entre diversos centros. El 13 se da a un resultado excepcional, original y excelente; el 11 para un producto original y excelente;

*En la Folkeskole,
el sistema
de calificaciones
refleja
una filosofía
liberal.*

*En el instituto
el paso de
un curso
al siguiente
es automático:
los profesores
únicamente
dan consejos
(dejar la escuela
o trabajar
más,...).*

el 10 a un resultado excelente, pero no especialmente original; el 9 para algo un poco por encima de la media, el 8 para un resultado medio, es decir, el último nivel de resultado aceptable; el 7 es para algo mediocre, algo por debajo de la media, el 6 para un producto dudoso pero más o menos satisfactorio, el 5 para algo dudoso y no satisfactorio, el 03 para algo imperfecto y muy insuficiente, el 00 para una producción completamente inaceptable. Para las pruebas escritas de matemáticas, existe una tabla que convierte los porcentajes obtenidos del total de puntos en las notas precedentes. El baremo se compone de manera que se respete la significación de las categorías precedentes.

La evaluación en el instituto

En el instituto el paso de un curso al siguiente es automático: los profesores únicamente dan consejos (dejar la escuela o trabajar más,...). Lo mismo sucede con la orientación (elección de asignaturas de nivel superior, o de nivel intermedio o para la elección de la disciplina en que se redactará la memoria) y el alumno es el que tiene la responsabilidad completa de sus elecciones.

Se realiza un control continuo. En la opción matemáticas, los alumnos tienen que redactar 26 deberes en casa por curso, que se parecen a la resolución de una serie de ejercicios, cada vez más parecidos a los de Selectividad, cuanto más se aproximan a esta prueba. Es una falta profesional para el profesor no proponer estos deberes y no corregirlos individualmente. Sin embargo, estos deberes no se califican, simplemente se corrigen las faltas y se anotan observaciones.

Cada trimestre, se realiza un ejercicio en clase de dos períodos de 45 minutos, que es calificado. Un boletín trimestral con una calificación oral y otra escrita sitúa el nivel matemático del alumno. Para los alumnos de segundo y tercero, se realiza una prueba de selectividad de ensayo, en las mismas condiciones de duración y presentación, pero que la corrige únicamente el propio profesor del grupo.

El examen de matemáticas de Selectividad en la opción «matemáticas»

1. El examen escrito al final del segundo curso

En el instituto los alumnos son evaluados por un examen final, correspondiente a nuestra selectividad: el *Studentereksamen*. Para la opción matemáticas a partir del final del segundo curso de instituto, es obligatoria una prueba escrita de 4 h de matemáticas. Esta prueba está constituida por cuatro partes independientes, que cubren en conjunto el programa, combinando cuestiones de ejecución de algoritmos o tareas rutinarias, con cuestiones que exigen una mayor reflexión, con temas de matemáticas puras

Anexo 1:

STUDENTEREKSAMEN. Mayo-Junio 1993 (de 9 a 13 h). Matemáticas
Nivel obligatorio. (Final de segundo)

Sólo se debe hacer un problema de entre el 6a y el 6b

El reparto de puntos será aproximadamente el siguiente:

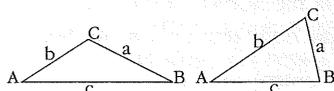
Problema 1:	25	puntos
Problema 2:	15	puntos
Problema 3 y 4:	cada uno	15 puntos
Problema 5:	20	puntos
Problema 6:	15	puntos

Problema 1:

- Para la función $f(x) = b \cdot a^x$, si x aumenta en tres, entonces $f(x)$ dobla su valor. Determinar a .
- Determinar la derivada $f'(x)$ de $f(x) = \frac{x+3}{\sin x}$
- Se ingresan 10000 coronas en una cuenta. Cuatro años después, se reciben 14641 coronas. Determinar el interés anual medio.
- Trazar la gráfica de la curva $f(x) = 120 \cdot x^2$, en un sistema de coordenadas logarítmico doble.
- Realizar la división $(x^3 - 4x^2 + 7x - 6) : (x^2 - 2x + 3)$

Problema 2:

En el triángulo ABC, el ángulo A vale $32,8^\circ$, $a = 3,51$, y $c = 5,72$. Como muestra la figura hay dos formas posibles para el triángulo ABC, Calcular b en cada uno de ellos.



Problema 3:

Una función f se define por $f(x) = \ln(2x+1) - 4x$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
Determinar la monotonía de f . Dibujar con precisión la gráfica de f . Determinar el conjunto imagen de f .

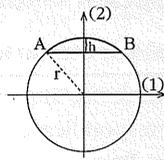
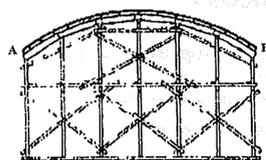
Problema 4:

En un juego de ordenador, hay que describir rápidamente una órbita. La tabla de ahí al lado, da los porcentajes de jugadores repartidos en función del tiempo, para un gran número de jugadores:

Tiempo (min.)	% jugadores
0-5	2,4%
5-7	19,6%
7-9	43,0%
9-11	29,3%
11 y +	5,7%

- Mostrar que el tiempo empleado por un jugador para describir la órbita está aproximadamente distribuido siguiendo una ley normal.
- Determinar la media y la desviación típica de esta ley normal.
- Se eligen al azar diez jugadores; calcular la probabilidad de que empleen de 7 a 9 minutos para describir la órbita.

Problema 5:



Se utiliza un encofrado de madera para fundir el hormigón. En la figura 1 se ve un dibujo, en corte vertical, del encofrado de un tejado de forma circular. En la figura 2, la circunferencia está trazada en un sistema de coordenadas. El arco AB corresponde al encofrado, y h es la altura mayor del encofrado, por encima de la cuerda AB, con $AB = 9$ m, y $h = 1,5$ m.

y aplicadas (ver el anexo 1). El concepto de problema no aparece en este tipo de pruebas. El alumno dispone de un formulario, muy completo, de 27 páginas, que cubre todos los apartados del programa. La corrección de la prueba escrita la hacen dos personas que se reúnen para poner la nota definitiva.

2. El examen oral al final del segundo curso

Si el alumno no continúa con el estudio de las matemáticas en tercer curso, debe realizar obligatoriamente una prueba oral. El tema de la prueba oral es uno de los del curso, que tiene que desarrollar el alumno (definiciones, teoremas, aplicaciones,...), para ello dispone del libro de texto para prepararlo en 20 minutos, a continuación, lo expone durante 25 minutos. El candidato puede utilizar otras ayudas: otros libros, sus propios apuntes del curso, se permite el uso de calculadoras de bolsillo, de tablas,... En ningún caso se trata de resolver uno o varios problemas. El profesor de la clase hace preguntas e interviene durante la exposición. Un profesor externo asiste a dicha exposición, pero no interviene. Después de la exposición, los dos profesores, de común acuerdo otorgan la calificación definitiva, con preponderancia de la del examinador externo en caso de desacuerdo.

3. Las posibles pruebas en tercer curso

Si el alumno continúa su enseñanza de las matemáticas en tercero, tendrá otra prueba escrita obligatoria de matemáticas (Anexo 2), con una duración de cuatro horas, sobre los temas de tercer curso, con un formulario del curso y una prueba oral de 30 m, con la misma organización descrita para segundo.

Los programas de las pruebas escritas, así como los temas, son nacionales y pueden referirse a cualquier parte del programa. Los programas de las pruebas orales, se refieren al 50% del programa nacional, para la prueba de final de segundo, y a los 2/3 del mismo para la de final de tercero, de modo que las partes principales del programa tengan una importancia apropiada. La elección

Los programas de las pruebas escritas, así como los temas, son nacionales y pueden referirse a cualquier parte del programa.

del contenido del programa oral la hace el profesor con su clase, y se comunica al Ministerio, a lo largo del año, indicando las páginas correspondientes del libro del curso del que dispondrá el alumno durante el examen. El número de páginas seleccionadas está comprendido entre 140 y 220 para final de segundo y entre 125 y 175 para el de tercero. Es el profesor el que redacta los temas de los orales, sacados al azar para cada candidato en presencia del segundo examinador exterior.

Todas las pruebas de exámenes se realizan bajo el control ministerial: elabora y difunde los temas de las pruebas escritas, nombra y retribuye a los examinadores externos para el oral y para el escrito. Además de los tradicionales anales de los temas escritos, existe un video que muestra las pruebas orales con el resultado de la deliberación del tribunal. Estos vídeos se destinan sobre todo a la formación del profesorado.

Finalmente el alumno puede elegir redactar una memoria de matemáticas, con ciertas condiciones: durante una semana se le libera de las clases para hacerlo (ver una descripción más completa en el parágrafo sobre la memoria).

Las calificaciones que cuentan para la nota final de la Selectividad son las notas de final de curso dadas en cada asignatura del instituto, las notas obtenidas en los exámenes y la nota obtenida en la memoria. La media de estas notas se tiene en cuenta para el acceso a la enseñanza superior, para la que existe un numerus clausus.

La prueba de matemáticas en la opción «literaria»

Para los alumnos que no siguen la enseñanza general de ciencias, en la que se integra la enseñanza de las matemáticas, está prevista una prueba oral al final de segundo curso, sobre la enseñanza general de ciencias.

Para los alumnos que eligen la enseñanza de matemáticas de nivel superior, de la opción lingüística, esta enseñanza es comparable a la enseñanza obligatoria

Las calificaciones que cuentan para la nota final de la Selectividad son las notas de final de curso dadas en cada asignatura del instituto, las notas obtenidas en los exámenes y la nota obtenida en la memoria.

Mostrar que el radio r de la circunferencia vale 7,5 m. y determinar una ecuación de esta circunferencia.

La ecuación de la circunferencia se utiliza en la construcción, por ejemplo para calcular la altura en diferentes puntos. Determinar la altura en un punto situado a 2 m de A. El ángulo entre la tangente en A a la circunferencia y la horizontal es un dato importante para el encofrado. Si el ángulo es mayor de 35° , el encofrado tiene que ser más sólido. Determinar si es o no así.

Problema 6a:

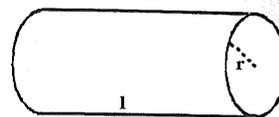


Figura 1

La figura 1 muestra un contenedor de forma cilíndrica, de radio r y altura l , y volumen. Hay que enviar un paquete a Groenlandia. La forma del paquete tiene que ser la de la figura 1. La longitud del paquete más el perímetro de la circunferencia valen 250 cm. Mostrar que el volumen del paquete es $V = 250\pi r^2 - 2\pi^2 r^3$

Determinar el volumen V máximo.

Problema 6b:

En un sistema de coordenadas se considera la parábola ϕ y la recta l , siendo $\phi: y = x^2 - 8x + 11$, $l: y = (-1/2)x$. Dibujar l y ϕ en el sistema de coordenadas. Determinar las coordenadas de los puntos de intersección de l y ϕ y resolver $(-1/2)x < x^2 - 8x + 11$. ϕ tiene una tangente paralela a l . Determinar la intersección de esta tangente con (Oy)ó

[Se recuerda que de los problemas 6a y 6b, solo se debe tratar uno].

Anexo 2:

18 de agosto 1992 (de 9 a 13 h). Matemáticas Nivel Superior. (Final de tercero).

Sólo se debe hacer un problema de entre el 6a y el 6b

El reparto de puntos será aproximadamente el siguiente:

Problemas 1, 2, 3, 4:	cada uno 15 puntos
Problema 5:	25 puntos
Problema 6:	15 puntos

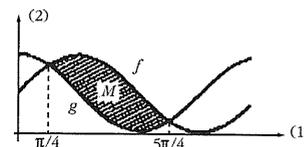
Problema 1:

En un sistema de coordenadas del espacio, se dan dos rectas paralelas l y m en forma paramétrica:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R},$$

Determinar la distancia entre l y m . Determinar una ecuación del plano α , que contiene a l y m . Una esfera K de centro $C(-5, 2, 1)$ es tangente al plano α ; determinar una ecuación de K .

Problema 2:



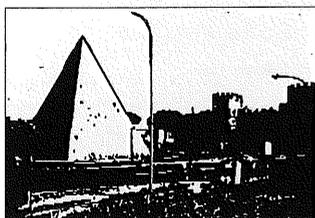
Sobre la figura se ha rayado un conjunto M de puntos, limitado por las curvas de las funciones f y g siendo $f(x) = \text{sen } x + 1$, $g(x) = \text{cos } x + 1$. Determinar el área de M . Determinar el volumen del sólido de revolución engendrado por una rotación de M alrededor del eje OX.

Problema 3:

Determinar la solución f de la ecuación diferencial sabiendo que $f(\sqrt{3}) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot e^{-y}$$

Esbozar la gráfica de f .

Problema 4:

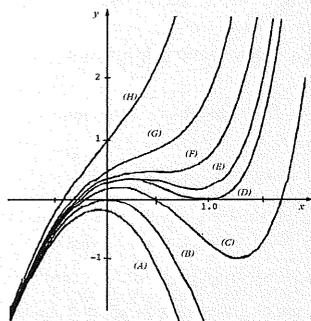
La foto anterior muestra la pirámide de Cestius en Roma. Esta pirámide tiene por base un cuadrado de 30 m. de lado. Su vértice está a 37 m., por encima del punto de intersección de las diagonales de su base.

Determinar el ángulo entre la base y una de las caras inclinadas de la pirámide.

Determinar el ángulo entre dos caras inclinadas vecinas. (Indicación: se podrá dibujar la pirámide en un sistema de coordenadas).

Problema 5:

La figura adjunta muestra una serie de curvas soluciones de la ecuación diferencial $y' - 2y = 4x^2 - 4x$



Determinar el polinomio de segundo grado $p(x)$ solución de la ecuación diferencial. Determinar entre las curvas anteriores cual es la que le corresponde.

Se considera la familia de funciones f_c definidas por donde c es real.

$f_c(x) = c \cdot e^{2x} + p(x)$ Mostrar que cada función f_c es solución de la ecuación diferencial.

Para un valor determinado de c , la función f_c tiene por curva (D). Determinar este valor de c .

Sobre la figura adjunta, se ve que las curvas tienen una tangente horizontal. El conjunto de puntos de tangencia de las tangentes horizontales, describe una parábola. Determinar una ecuación de esta parábola.

Problema 6:

6a) Sabemos que $F(x) = \frac{\ln x}{x}$ es una primitiva de $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

Utilizar esto para calcular $\int \frac{1 - \ln x}{x^2} \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3 \right) \cdot dx$

6b) Dados en un sistema de coordenadas, los dos vectores

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2t \\ 7+t \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8+2t \\ 7-t \end{pmatrix}$, donde t es un número real, determinar el valor de t para el cual $\frac{1}{2} \cdot \vec{b}$ es la proyección de \vec{a} sobre \vec{b}

[Observación: entre los problemas 6a) y 6b) sólo hay que resolver uno]

Los alumnos de tercero tienen que redactar una memoria, y sólo una, en una asignatura. Las matemáticas de nivel superior pueden elegirse para presentar dicha memoria.

de la opción matemáticas. Por tanto, se evaluará al final de tercero con un examen escrito y uno oral comparables a los del final de segundo de los alumnos de la opción matemáticas.

Otros alumnos, finalmente, pueden elegir, al acabar primero o segundo, las matemáticas de nivel intermedio de la opción lingüística. Son evaluados con un examen oral al final de curso. El tiempo de preparación y de consulta de materiales y documentos es de 25 m. Incluyendo el tiempo de deliberación del tribunal, éste debe examinar a 2,5 candidatos por hora. La parte del programa seleccionada para el examen debe cubrir alrededor de los 2/3 del programa de manera que las partes principales del programa tengan una importancia apropiada.

La parte correspondiente a este programa, en los documentos de referencia puestos a disposición de los alumnos durante la preparación del oral (lo más frecuente es el libro de clase) debe cubrir entre 80 y 120 páginas.

La memoria de clase en tercero

Los alumnos de tercero tienen que redactar una memoria, y sólo una, en una asignatura. Las matemáticas de nivel superior pueden elegirse para presentar dicha memoria. Ésta será evaluada por el profesor del alumno y por un profesor exterior al centro, que de común acuerdo, pondrán la nota que será tenida en cuenta en la media de la Selectividad.

Para describir con detalle la organización de esta memoria, en el cuadro 3 damos un ejemplo (traducido, claro) de la hoja repartida a los alumnos al principio de curso en una reunión informativa sobre la memoria.

Ejemplos de temas para las memorias

Redes de neuronas, recurrencia y recursividad, fracciones continuas, investigación operativa, criptología, álgebra,

complejos, cónicas, análisis numérico, cálculo aproximado, fórmula de Taylor y desarrollo en serie, funciones trigonométricas, historia del cálculo diferencial, ecuaciones diferenciales, modelos matemáticos aplicados a la economía, estadística y probabilidades, teoría de juegos, test de hipótesis, probabilidad aplicada a la economía, topografía, geometría esférica, iteración y caos, fractales, matemáticas en Babilonia, matemáticas griegas.

Ejemplos de libros disponibles

El centro dispone de un fondo de libros de matemáticas superiores que el profesor puede utilizar para desarrollar un tema libre o para aconsejar a los alumnos sobre la elección de los temas de las memorias. A título de ejemplo damos la lista de los títulos disponibles, treinta ejemplares de cada uno, en la biblioteca:

Programación Lineal; Aspecto de las matemáticas: Historia de la determinación de las tangentes; En el corazón de las matemáticas: del mito a las matemáticas físicas; ¿Qué es la matemática?; Los números; Demostrar en matemáticas; Los Algoritmos formales (grafos); Dibujos en tres dimensiones; Complejos y fractales; álgebra de Boole; Utilización de las matemáticas en biología; Cálculo Financiero; George Mohr: Euclides: Elementos 1 al 4; Fuentes y comentarios sobre la historia de las ecuaciones; Cuadratura del círculo, Trisección del ángulo; Duplicación del cubo; Del crecimiento lineal al caos; Número y Pensamiento; La opinión de los pitagóricos sobre la vida y el mundo; El número de oro en el arte; La Naturaleza y las Matemáticas; Combinatoria y algoritmos; Complejos; Número y geometría con extractos de historia de las matemáticas griegas.

Estas obras están editadas, bien por la asociación de profesores de matemáticas, bien por editoriales privadas.

Richard Cabassut
Lycée International de Strasbourg

Calendario

28 de octubre información sobre la organización general de la memoria.

12 de noviembre: los profesores de las diferentes asignaturas posibles para la memoria aconsejan a los alumnos.

23 de noviembre: elección de la asignatura y del tema general; esta elección se registra oficialmente por parte de la administración.

18 de enero, a las 12.: los alumnos reciben la descripción precisa de la memoria (cuaderno de tareas) y se les exime de clases durante una semana para redactarla.

25 de enero a las 12.: entrega de la memoria.

Disciplina: Se puede elegir como disciplina: la lengua propia (el danés), historia o una asignatura de nivel superior de la opción que se estudia.

Tema: Debe estar dentro de los límites de la asignatura elegida y debe contener un tema que no se haya estudiado en clase (si se trata de un tema que los alumnos ya conocen, hay que estudiarlo de otra manera y profundizarlo). La descripción del tema (23 de noviembre) se aprueba mediante la firma del alumno y de su profesor. Durante los estudios preliminares (antes de la semana de redacción) se tiene derecho a precisar un poco el tema, pero no a cambiarlo.

Formulación del tema: Únicamente el profesor formula el tema concreto, en un cuaderno de tareas, de forma que el alumno no pueda, de antemano, redactar la copia final. Sin embargo, el profesor tiene que tomar en consideración las ideas del alumno durante el periodo de preparación.

La memoria: Debe estar escrita de forma clara y precisa, no más de 15 páginas dactilografiadas de formato A4 de texto real, sin incluir el índice, las notas, la bibliografía, los gráficos, las tablas, las ilustraciones y las citas, incluso si se encuentran dentro del texto. Las 15 páginas tendrán un espacio interlineal de 1,5, 60 caracteres por línea, 40 líneas por página.

Entrega: Dos ejemplares firmados de la memoria, uno con la expresión «original», otro con la expresión «copia» se deben entregar en la fecha indicada; en caso de litigio, únicamente valdrá la mención «original». (Uno de los ejemplares es para el profesor, el otro para el profesor externo).

Evaluación: Es importante que el candidato respete las instrucciones recibidas en la formulación del tema, que sepa analizar, interpretar y tratar las cuestiones de manera personal, que no se contente con resumir un texto, que transmita bien las ideas y que sepa documentar su trabajo refiriéndose a las fuentes adecuadas.

Fraude: La prueba forma parte del examen de selectividad, un posible fraude sería castigado muy duramente, con la exclusión del examen final. Está especialmente prohibido entregar algo no escrito personalmente, copiar informaciones importantes sin indicar la fuente,...

Reclamación: Se puede presentar una reclamación de la nota, al director, no más tarde de dos semanas después de recibir la calificación.

Cuadro 3. Calendario e instrucciones generales para la elaboración de la memoria

Los fractales y al caos

- 1) Describir figuras fractales y algunas de sus características, si es posible a través de ejemplos. Al hacerlo, recordareis el concepto de dimensión de Hausdorff para un objeto. También es posible medir la dimensión de una línea de costa o de algo análogo.
- 2) Explicitar para algunas figuras fractales cómo están construidas. Por ejemplo, se puede considerar la función cuadrática en el plano y su relación con el conjunto de Mandelbrot.

En los lugares correspondientes de nuestro informe, tendréis que explicar los conceptos centrales, tales como iteración, punto fijo, caos,... Cuando sea pertinente, podéis utilizar el ordenador con moderación.

Programación lineal: teoría y práctica

- 1) Explicar la programación lineal con dos variables. Hay que explicar los conceptos fundamentales, especialmente el de función lineal de dos variables, función de optimización, función numérica de una variable vectorial, polígono de restricciones, curvas de nivel, máximo o mínimo de la función de optimización. Ilustrar, si es posible, el método de resolución, con uno o varios ejemplos (al alumno se le da un ejemplo).
- 2) Mencionar el método del simplex, el M-método y el análisis de pequeñas variaciones, si es posible, a partir de un ejemplo (ver otro ejemplo en el anexo).
- 3) La programación lineal en la práctica.

Estudiar, bien a partir de los ejercicios 6.6 a 6.10 del libro de Blomhoj, *Programación lineal*, FAG (1984), el ejemplo 6.5 de ese mismo libro (se trata de la aplicación de la programación lineal al sistema de gestión de las escuelas del tipo Folkeskole de la ciudad de Odense), bien a partir de otros ejemplos concretos (pág. 123 a 126). Si es pertinente se puede utilizar, con moderación, un ordenador.

Cuadro 4. Dos ejemplos de cuaderno de tareas dado a un alumno para la memoria